Chapitre 18

Les angles

Voilà une question très ardue, théorique... Bon, mais, il faut s'y mettre !!
Le formalisme de ce chapitre est important, mais celui que j'ai élaboré est le plus simple.
Dans la littérature, certains ouvrages ont un formalisme inexistant, se contentant de la simple intuition : c'est insuffisant. D'autre ont un formalisme que j'ai trouvé excessif. J'ai tenté de faire un exposé au mieux.

18.1 Angles de vecteurs

18.1.1 Proposition

$\overrightarrow{P}$ désigne le plan vectoriel euclidien orienté par une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$
$\mathbb{U}$ est l'ensemble des vecteurs unitaires (de norme 1) du plan vectoriel $\overrightarrow{P}$
Nous défins sons dans $\mathbb{U} \times \mathbb{U}$ la relation $\mathfrak{S}$ suivante :

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}_1)\,\mathfrak{S}\,(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}_1) \Longleftrightarrow \left(\exists R \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)\right)(\overrightarrow{u}_1 = R(\overrightarrow{u})) \text{ et } ((\overrightarrow{v}_1 = R(\overrightarrow{v})))$$

Alors, la relation $\mathfrak{S}$ est une relation d'équivalence

Démonstration

1. **Elle est réflexive**
   En effet, soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}_1) \in \mathbb{U} \times \mathbb{U}$.
   D'après 15.3.9, comme $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{u}_1\| = 1$ il existe une et une seule rotation $R \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ telle que $\overrightarrow{u}_1 = R(\overrightarrow{u})$, et nous avons bien : $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}_1)\,\mathfrak{S}\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}_1)$
   $\mathfrak{S}$ est donc bien réflexive.
2. **Elle est symétrique**
   Supposons que pour $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}_1) \in \mathbb{U} \times \mathbb{U}$ et $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}_1) \in \mathbb{U} \times \mathbb{U}$, nous ayions $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}_1)\,\mathfrak{S}\,(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}_1)$.
   Il est clair et facile de voir que $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}_1)\,\mathfrak{S}\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}_1)$
   $\mathfrak{S}$ est bien symétrique

   Faisons une remarque :

   Il existe donc une rotation $R \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ telle que $\overrightarrow{u}_1 = R(\overrightarrow{u})$ et $\overrightarrow{v}_1 = R(\overrightarrow{v})$. R étant une bijection, nous avons $\overrightarrow{u} = R^{-1}(\overrightarrow{u}_1)$ et $\overrightarrow{v} = R^{-1}(\overrightarrow{v}_1)$. Nous avons donc aussi $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u})\,\mathfrak{S}\,(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v})$
3. **Elle est transitive**
   Soient $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}_1) \in \mathbb{U}\times\mathbb{U}$, $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}_1) \in \mathbb{U}\times\mathbb{U}$ et $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}_1) \in \mathbb{U}\times\mathbb{U}$ tels que nous ayions $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}_1)\,\mathfrak{S}\,(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}_1)$ et $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}_1)\,\mathfrak{S}\,(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}_1)$

MATHINFOVANNES©

Toujours d'après 15.3.9, il existe une et une seule rotation R telle que $\overrightarrow{u}_1 = R(\overrightarrow{u})$, $\overrightarrow{v}_1 = R(\overrightarrow{v})$ et $\overrightarrow{w}_1 = R(\overrightarrow{w})$.

Nous avons donc $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}_1) \mathfrak{S} (\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}_1)$

$\mathfrak{S}$ est bien transitive

$\mathfrak{S}$ est donc une relation d'équivalence

Remarque 1 :

En fait, pour tout $\overrightarrow{u} \in \mathbb{U}$ et tout $\overrightarrow{v} \in \mathbb{U}$, il n'existe qu'une seule rotation $R \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ tel que $\overrightarrow{v} = R(\overrightarrow{u})$

Exemple 1 :

Pour tout $\overrightarrow{u} \in \mathbb{U}$ et tout $\overrightarrow{v} \in \mathbb{U}$, nous avons $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \mathfrak{S} (-\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v})$

En effet, il existe une unique rotation $R \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ telle que $\overrightarrow{v} = R(\overrightarrow{u})$.

Or, $R(-\overrightarrow{u}) = -R(\overrightarrow{u}) = -\overrightarrow{v}$, et donc $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \mathfrak{S} (-\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v})$

18.1.2 Définition d'angle de vecteurs

$\overrightarrow{P}$ désigne le plan vectoriel euclidien orienté par une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$

1. $\mathfrak{S}$ étant une relation d'équivalence, nous appelons angle de 2 vecteurs unitaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, la classe d'équivalence du couple de vecteures $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \mathbb{U} \times \mathbb{U}$ dans la relation d'équivalence $\mathfrak{S}$. Cette classe est notée $\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$
2. Etant donnés 2 vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\overrightarrow{P}$, non nuls quelconques, nous définissons l'angle des 2 vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ que nous notons $\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$ par :
$$\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})} = \widehat{\left(\frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}, \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}\right)}$$
3. L'ensemble des angles est noté $\mathcal{A}$; c'est l'ensemble quotient $(\mathbb{U} \times \mathbb{U}) / \mathfrak{S}$.
Nous avons donc : $\mathcal{A} = (\mathbb{U} \times \mathbb{U} / \mathfrak{S})$

Remarque 2 :

1. La classe d'équivalence $\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$ est totalement liée à l'unique rotation $R \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ telle que $\overrightarrow{v} = R(\overrightarrow{u})$. On peut donc subodorer que l'ensemble des angles de vecteurs est en bijection avec l'ensemble des rotations de $O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$
2. La définition d'angle de vecteurs quelconques et non nuls est naturelle et cohérente puisque $\dfrac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|} = \dfrac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|} = 1$

18.1.3 Proposition

$\overrightarrow{P}$ désigne le plan vectoriel euclidien orienté par une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$

1. Soit $\overrightarrow{u} \in \mathbb{U}$ (c'est à dire que $\|\overrightarrow{u}\| = 1$). Alors, pour tous vecteurs non nuls $\overrightarrow{X} \in \overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{Y} \in \overrightarrow{P}$, il existe un unique vecteur $\overrightarrow{w} \in \mathbb{U}$ tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}\right)} = \widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})}$
2. Pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, il existe une et une seule rotation $\varphi \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ telle que pour tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{P}$, $\alpha = \widehat{(\overrightarrow{u}, \varphi(\overrightarrow{u}))}$

MATHINFOVANNES©

Démonstration

1. Comme $\widehat{\left(\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y}\right)} = \widehat{\left(\dfrac{\overrightarrow{X}}{\left\|\overrightarrow{X}\right\|},\dfrac{\overrightarrow{Y}}{\overrightarrow{Y}}\right)}$, nous pouvons supposer $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ de norme 1

   Il existe une unique isométrie positive $\varphi \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ telle que $\varphi\left(\overrightarrow{X}\right) = \overrightarrow{Y}$. Si nous appelons $\overrightarrow{w} = \varphi\left(\overrightarrow{u}\right)$.

   Nous avons donc $\widehat{\left(\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}\right)}$

2. Soient $\alpha \in \mathcal{A}$ et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{P}$.
   Il existe $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{P}$ avec $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\|$ tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)} = \alpha$.
   Il existe une unique rotation $\varphi \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ telle que $\overrightarrow{v} = \varphi\left(\overrightarrow{u}\right)$, c'est à dire telle que $\alpha = \widehat{\left(\overrightarrow{u},\varphi\left(\overrightarrow{u}\right)\right)}$

Ce que nous voulions.

18.1.4 Corollaire

$\overrightarrow{P}$ désigne le plan vectoriel euclidien orienté par une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right\}$
$O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ désigne les isométries positives (ou les rotations) de $\overrightarrow{P}$ et $\mathcal{A}$ désigne l'ensemble des angles. Soit Φ l'application désignée par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Phi : O^+\left(\overrightarrow{P}\right) & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ \varphi & \longmapsto & \Phi\left(\varphi\right) = \widehat{\left(\overrightarrow{u},\varphi\left(\overrightarrow{u}\right)\right)} \end{array}\right.$$

Alors Φ est une bijection

Démonstration

1. Φ est évidemment surjective

   Effectivement, pour $\alpha \in \mathcal{A}$ et pour tout $\overrightarrow{u} \in \mathbb{U}$, il existe $\varphi \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ tel que $\alpha = \widehat{\left(\overrightarrow{u},\varphi\left(\overrightarrow{u}\right)\right)}$, c'est à dire tel que $\Phi\left(\varphi\right) = \alpha$

2. Φ est évidemment injective

   Soient $\varphi \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ et $\varphi_1 \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ tels que $\Phi\left(\varphi\right) = \Phi\left(\varphi_1\right)$.

   Alors $\widehat{\left(\overrightarrow{u},\varphi\left(\overrightarrow{u}\right)\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{u},\varphi_1\left(\overrightarrow{u}\right)\right)}$ et donc, nous avons $\varphi = \varphi_1$

18.1.5 Angle d'une rotation

$\overrightarrow{P}$ désigne le plan vectoriel euclidien orienté par une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right\}$
Soit $\varphi \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ une rotation du plan $\overrightarrow{P}$
On appelle angle de la rotation φ l'angle $\Phi\left(\varphi\right) = \widehat{\left(\overrightarrow{u},\varphi\left(\overrightarrow{u}\right)\right)}$

Remarque 3 :

On peut donc remarquer que $\Phi^{-1}\left(\widehat{\left(\overrightarrow{u},\varphi\left(\overrightarrow{u}\right)\right)}\right) = \varphi$

MATHINFOVANNES©

18.1.6 Addition des angles

$\overrightarrow{P}$ désigne le plan vectoriel euclidien orienté par une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$
Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des angles du plan.
On définit l'addition des angles par :

$$(\forall \alpha \in \mathcal{A})\,(\forall \beta \in \mathcal{A})\,\left(\alpha + \beta = \Phi\left[\Phi^{-1}(\alpha) \circ \Phi^{-1}(\beta)\right]\right)$$

Remarque 4 :

Cette définition est relativement complexe, mais rigoureuse.
Pour $\alpha \in \mathcal{A}$, $\Phi^{-1}(\alpha)$ est la rotation ρ d'angle α, c'est à dire que $\Phi^{-1}(\alpha) = \rho$ tel que $\alpha = \widehat{(\overrightarrow{u}, \rho(\overrightarrow{u}))}$
Si $\rho' = \Phi^{-1}(\beta)$, $\alpha + \beta = \Phi[\rho \circ \rho']$, c'est à dire que $\alpha + \beta$ est l'angle de la rotation $\rho + \rho'$, ce qui montre, en passant, que l'addition est interne.

18.1.7 Proposition

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des angles.
Alors, l'addition des angles définie en 18.1.6 confère à $(\mathcal{A}, +)$ la structure de groupe commutatif

Démonstration

1. **C'est un loi interne**
   C'est ce que nous venons de voir dans la remarque précédente
2. **Elle admet un élément neutre**
   Le neutre pour l'addition des angles est l'angle nul $\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u})}$.
   En effet :

$$\begin{aligned}
\widehat{(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})} + \widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u})} &= \Phi\left[\Phi^{-1}\left(\widehat{(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})}\right) \circ \Phi^{-1}\left(\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u})}\right)\right] \\
&= \Phi\left[\Phi^{-1}\left(\widehat{(\overrightarrow{v}, \varphi(\overrightarrow{v}))}\right) \circ \Phi^{-1}\left(\widehat{(\overrightarrow{u}, \mathrm{Id}_{\overrightarrow{P}}(\overrightarrow{u}))}\right)\right] \\
&= \Phi\left[\varphi \circ \mathrm{Id}_{\overrightarrow{P}}\right] = \Phi[\varphi] \\
&= \widehat{(\overrightarrow{v}, \varphi(\overrightarrow{v}))} = \widehat{(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})}
\end{aligned}$$

3. **Chaque élément admet un symétrique**
   Soit $\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})} \in \mathcal{A}$.
   Nous allons démontrer que $\widehat{(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})}$ est le symétrique de $\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$

$$\begin{aligned}
\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})} + \widehat{(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})} &= \Phi\left[\Phi^{-1}\left(\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}\right) \circ \Phi^{-1}\left(\widehat{(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})}\right)\right] \\
&= \Phi\left[\Phi^{-1}\left(\widehat{(\overrightarrow{u}, \varphi(\overrightarrow{u}))}\right) \circ \Phi^{-1}\left(\widehat{(\overrightarrow{v}, \varphi^{-1}(\overrightarrow{v}))}\right)\right] \\
&= \Phi\left[\varphi \circ \varphi^{-1}\right] \\
&= \Phi\left[\mathrm{Id}_{\overrightarrow{P}}\right] \\
&= \widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u})}
\end{aligned}$$

   On note aussi $\widehat{(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})} = -\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$
4. **L'addition est commutative**
   Soient $\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})} \in \mathcal{A}$ et $\widehat{(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1})} \in \mathcal{A}$.

MATHINFOVANNES©

Alors :

$$\begin{aligned}
\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}+\widehat{(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{v_1})} &= \Phi\left[\Phi^{-1}\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}\right)\circ\Phi^{-1}\left(\widehat{(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{v_1})}\right)\right]\\
&= \Phi\left[\Phi^{-1}\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\varphi(\overrightarrow{u}))}\right)\circ\Phi^{-1}\left(\widehat{(\overrightarrow{u_1},\rho(\overrightarrow{u_1}))}\right)\right]\\
&= \Phi[\varphi\circ\rho]\\
&= \Phi[\rho\circ\varphi] \text{ par commutativité dans } O^+\left(\overrightarrow{P}\right)\\
&= \Phi\left[\Phi^{-1}\left(\widehat{(\overrightarrow{u_1},\rho(\overrightarrow{u_1}))}\right)\circ\Phi^{-1}\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\varphi(\overrightarrow{u}))}\right)\right]\\
&= \widehat{(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{v_1})}+\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}
\end{aligned}$$

Remarque 5 :

Nous pouvons donc écire que :

$$\begin{cases}\Phi : O^+\left(\overrightarrow{P}\right) & \longrightarrow \mathcal{A}\\ \qquad\qquad \varphi & \longmapsto \Phi(\varphi)=\widehat{(\overrightarrow{u},\varphi(\overrightarrow{u}))}\end{cases}$$

est un homomorphisme de groupe

En effet, et très simplement, si $\varphi\in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ et si $\psi\in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$, alors :

$$\begin{aligned}
\Phi(\varphi\circ\psi) &= \Phi\left[\Phi^{-1}\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\varphi(\overrightarrow{u}))}\right)\circ\Phi^{-1}\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\psi(\overrightarrow{u}))}\right)\right]\\
&= \widehat{(\overrightarrow{u},\varphi(\overrightarrow{u}))}+\widehat{(\overrightarrow{u},\psi(\overrightarrow{u}))}\\
&= \Phi(\varphi)+\Phi(\psi)
\end{aligned}$$

Φ étant bijective, c'est même un isomorphisme.
Le groupe des rotations du plan $\left(O^+\left(\overrightarrow{P}\right),\circ\right)$ et le groupe des angles $(\mathcal{A},+)$ sont donc isomorphes.

18.1.8 Relation de Chasles

$\overrightarrow{P}$ désigne le plan vectoriel euclidien orienté par une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right\}$
Soient $\mathcal{A}$ l'ensemble des angles du plan, $\alpha\in\mathcal{A}$, $\beta\in\mathcal{A}$ et $\overrightarrow{u}\in\mathbb{U}$
Soient $\overrightarrow{v}\in\mathbb{U}$ tel que $\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}=\alpha$ et $\overrightarrow{w}\in\mathbb{U}$ tel que $\widehat{(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})}=\beta$. Alors :

$$\alpha+\beta=\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}+\widehat{(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})}=\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w})}$$

Démonstration

Soient $\varphi\in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ l'unique isométrie positive telle que $\overrightarrow{v}=\varphi(\overrightarrow{u})$ et $\rho\in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ l'unique isométrie positive telle que $\overrightarrow{w}=\rho(\overrightarrow{v})$
Alors :

→ $\Phi(\varphi)=\widehat{(\overrightarrow{u},\varphi(\overrightarrow{u}))}=\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}$

→ De même $\Phi(\rho)=\widehat{(\overrightarrow{v},\rho(\overrightarrow{v}))}=\widehat{(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})}$

→ Et pour terminer, $\Phi(\rho\circ\varphi)=\widehat{(\overrightarrow{u},\rho\circ\varphi(\overrightarrow{u}))}=\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w})}$

L'application Φ étant un homomorphisme de groupe, nous avons :

$$\Phi(\rho\circ\varphi)=\Phi(\varphi)+\Phi(\rho)$$

C'est à dire :

$$\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}+\widehat{(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})}=\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w})}$$

Ce que nous voulions

MATHINFOVANNES©

18.1.9 Cosinus et sinus d'un angle de vecteurs

$\overrightarrow{P}$ désigne le plan vectoriel euclidien orienté par une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right\}$
Soient $\overrightarrow{u}\in\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{v}\in\overrightarrow{P}$. Alors :

$$\cos\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}\right)=\frac{\langle\overrightarrow{u}\mid\overrightarrow{v}\rangle}{\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|}\qquad\sin\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}=\frac{\det\left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right]}{\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|}$$

Remarque 6 :

1. De la définition, nous pouvons écrire :

$$\langle\overrightarrow{u}\mid\overrightarrow{v}\rangle=\cos\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}\right)\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\qquad\det\left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right]=\sin\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}\right)\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|$$

2. De la symétrie du produit scalaire, nous avons $\langle\overrightarrow{u}\mid\overrightarrow{v}\rangle=\langle\overrightarrow{v}\mid\overrightarrow{u}\rangle$ et donc

$$\cos\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}\right)=\cos\left(\widehat{(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})}\right)$$

3. Cette fois ci, de l'antisymétrie du déterminant, c'est à dire $\det\left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right]=-\det\left[\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}\right]$, nous avons $\sin\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}=-\sin\widehat{(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})}$
4. D'après le lemme de Schwarz 15.1.3, nous avons $|\langle x\mid y\rangle|\leqslant\|x\|\,\|y\|$ et donc

$$\left|\cos\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}\right)\right|=\frac{|\langle\overrightarrow{u}\mid\overrightarrow{v}\rangle|}{\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|}\leqslant 1$$

5. On construit un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ où $\overrightarrow{i}=\dfrac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}$. Dans ce repère, nous avons :

$$\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}\qquad\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}b\\c\end{pmatrix}$$

Alors :
$\rightarrow\ \cos^2\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}\right)=\dfrac{a^2b^2}{a^2\times(b^2+c^2)}=\dfrac{b^2}{b^2+c^2}\leqslant 1$ et donc $-1\leqslant\cos\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}\right)\leqslant +1$
$\rightarrow\ \sin^2\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}=\dfrac{\begin{vmatrix}a&b\\0&c\end{vmatrix}^2}{a^2\times(b^2+c^2)}=\dfrac{a^2c^2}{a^2\times(b^2+c^2)}=\dfrac{c^2}{b^2+c^2}\leqslant 1$ d'où $-1\leqslant\sin\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}\right)\leqslant +1$
Avec ces calculs, nous pouvons remarquer que $\cos^2\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}\right)+\sin^2\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}\right)=1$

18.1.10 Mesure d'un angle de vecteurs

Nous supposons connues les deux fonctions numériques de la variable réelle cos et sin. On suppose également connues leurs propriétés usuelles : *(dérivabilité, dérivées, parité, périodicité, formules d'addition, etc.)* ainsi que leur tableau de variation.

$\overrightarrow{P}$ désigne le plan vectoriel euclidien orienté par une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right\}$ et $\mathcal{A}$ l'ensemble des angles du plan $\overrightarrow{P}$

1. A tout angle $\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}=\alpha\in\mathcal{A}$, il existe un unique réel $\theta\in[0,2\pi[$ tel que

$$\cos\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}\right)=\cos\alpha=\cos\theta\ \text{et}\ \sin\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}\right)=\sin\alpha=\sin\theta$$

2. Le réel θ est appelé mesure principale de l'angle $\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}=\alpha$
3. L'ensemble des mesures de l'angle $\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}=\alpha$ est $\{\theta+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}\}$.

MATHINFOVANNES©

Démonstration

Cette équation ressemble à la résolution d'une équation trigonométrique.
Soit donc $\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})} = \alpha \in \mathcal{A}$ un angle de vecteurs.

1. De la remarque précédente, nous avons :
   - $\star$ $\cos^2\left(\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}\right) + \sin^2\left(\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}\right) = 1$
   - $\star$ $-1 \leqslant \cos\left(\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}\right) \leqslant +1$
   - $\star$ $-1 \leqslant \sin\left(\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}\right) \leqslant +1$
2. Partons de $\cos\theta = \cos\left(\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}\right)$.

   Comme $-1 \leqslant \cos\left(\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}\right) \leqslant +1$, il existe une seule valeur $\theta_0 \in [0;\pi]$ telle que $\cos\theta_0 = \cos\left(\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}\right)$.

   L'équation $\cos\theta = \cos\left(\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}\right)$ a 2 solutions dans l'intervalle $[0;2\pi[$, à savoir $\theta_0 \in [0;\pi]$ et $2\pi\theta_0 \in [\pi;2\pi]$
3. Les égalités $1 = \cos^2\left(\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}\right) + \sin^2\left(\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}\right) = \cos^2\theta + \sin^2\theta$ montrent que nous avons $\sin\left(\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}\right) = \pm\sin\theta_0$
   - $\star$ Si $\sin\left(\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}\right) = \sin\theta_0$, alors $\theta = \theta_0$ et $\theta_0 \in [0;\pi]$ est l'unique élément qui convient
   - $\star$ Si $\sin\left(\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}\right) = -\sin\theta_0$, alors $\theta = 2\pi - \theta_0$ et $2\pi - \theta_0 \in [\pi;2\pi]$ est l'unique élément qui convient.

Remarque 7 :

On dit qu'un angle est défini à $2k\pi$ près

Exemple 2 :

Applications

1. *$\overrightarrow{P}$ désigne le plan vectoriel euclidien orienté par une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$*
   Pour $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$, il faut exprimer a en fonction de $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{u}$

   Plus exactement, il faut exprimer a en fonction de $\cos\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}\right)$ et $\sin\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}\right)$.
   De la définition 18.1.9, nous avons :
   - $\star$ $\left\langle \overrightarrow{i} \mid \overrightarrow{u} \right\rangle = \cos\left(\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}\right) \times \left\|\overrightarrow{i}\right\| \times \|\overrightarrow{u}\|$

     Comme $\left\langle \overrightarrow{i} \mid \overrightarrow{u} \right\rangle = a$, que $\left\|\overrightarrow{i}\right\| = 1$, nous obtenons $a = \cos\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}\right)\|\overrightarrow{u}\|$
   - $\star$ D'autre part :

     $$\det\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{i}\right] = \sin\left(\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{i})}\right) \times \left\|\overrightarrow{i}\right\| \times \|\overrightarrow{u}\| = \sin\left(\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{i})}\right) \times \|\overrightarrow{u}\|$$

     Or, $\det\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{i}\right] = \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix} = -b$ et donc, $-b = \sin\left(\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{i})}\right) \times \|\overrightarrow{u}\|$

     C'est à dire $b = \sin\left(\widehat{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u})}\right) \times \|\overrightarrow{u}\|$

   Donc, $\overrightarrow{u} = \cos\left(\widehat{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u})}\right)\|\overrightarrow{u}\|\overrightarrow{i} + \sin\left(\widehat{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u})}\right)\|\overrightarrow{u}\|\overrightarrow{j}$
2. *Soit $\mathcal{P}$ un plan affine d'espace directeur le plan vectoriel $\overrightarrow{P}$ orienté par une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$*

MATHINFOVANNES©

Soient $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ et $C \in \mathcal{P}$ tels que $A \neq B$, $B \neq C$ et $A \neq C$. Soit $\mathcal{S}$ la symétrie par rapport à une droite $D \subset \mathcal{P}$ et on pose :

$$A' = \mathcal{S}(A) \qquad B' = \mathcal{S}(B) \qquad C' = \mathcal{S}(C)$$

Il faut démontrer que $\widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'}\right)}$

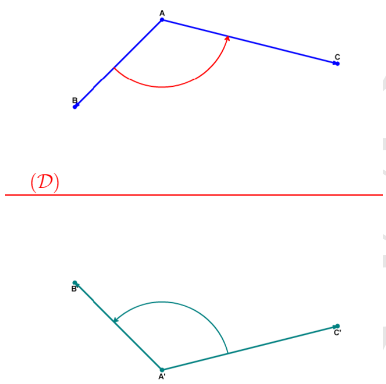

FIGURE 18.1 – Figure de l'exercice

Rapportons le plan $\mathcal{P}$ à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ où O appartient à la droite D et tel que $\overrightarrow{i}$ est un vecteur directeur unitaire de la droite D. Les points A, B, C, A', B', C' ont des coordonnées respectives de la forme :

$$A = (a_1, a_2) \quad B = (b_1, b_2) \quad C = (c_1, c_2) \quad A' = (a_1, -a_2) \quad B' = (b_1, -b_2) \quad C' = (c_1, -c_2)$$

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'C'}$ sont donc :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ -b_2 + a_2 \end{pmatrix} \overrightarrow{A'C'} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ -c_2 + a_2 \end{pmatrix}$$

D'où nous tirons :

$$\Rightarrow \cos\left(\widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)}\right) = \frac{\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{(b_1 - a_1)(c_1 - a_1) + (b_2 - a_2)(c_2 - a_2)}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{AC}\right\|}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\widehat{\left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'}\right)}\right) = \frac{\left\langle \overrightarrow{A'B'} \mid \overrightarrow{A'C'} \right\rangle}{\left\|\overrightarrow{A'B'}\right\| \left\|\overrightarrow{A'C'}\right\|} = \frac{(b_1 - a_1)(c_1 - a_1) + (a_2 - b_2)(a_2 - c_2)}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{AC}\right\|}$$

Comme $\mathcal{S}$ est une isométrie, nous avons $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{A'B'}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\overrightarrow{A'C'}\right\|$.
D'autre part, $(b_1 - a_1)(c_1 - a_1) + (b_2 - a_2)(c_2 - a_2) = (b_1 - a_1)(c_1 - a_1) + (a_2 - b_2)(a_2 - c_2)$, et nous concluons :

$$\cos\left(\widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)}\right) = \cos\left(\widehat{\left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'}\right)}\right)$$

$$\Rightarrow \sin\left(\widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)}\right) = \frac{\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \end{vmatrix}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{(c_2 - a_2)(b_1 - a_1) - (b_2 - a_2)(c_1 - a_1)}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{AC}\right\|}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\widehat{\left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'}\right)}\right) = \frac{\det\left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'}\right)}{\left\|\overrightarrow{A'C'}\right\| \left\|\overrightarrow{A'B'}\right\|} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 - a_1 & b_1 - a_1 \\ -c_2 + a_2 & -b_2 + a_2 \end{vmatrix}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{(c_1 - a_1)(-b_2 + a_2) - (-c_2 + a_2)(b_1 - a}{\left\|\overrightarrow{A'B'}\right\| \left\|\overrightarrow{A'C'}\right\|}$$

MATHINFOVANNES©

Pour les mêmes raisons que précédemment, nous avons $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{A'B'}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\overrightarrow{A'C'}\right\|$.
Et $(c_2 - a_2)(b_1 - a_1) - (b_2 - a_2)(c_1 - a_1) = (c_1 - a_1)(-b_2 + a_2) - (-c_2 + a_2)(b_1 - a_1)$
Donc :

$$\sin\left(\widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)}\right) = \sin\left(\widehat{\left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'}\right)}\right)$$

Et donc : $\widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'}\right)}$

Remarque 8 :

1. Si nous considérons la relation $\mathfrak{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$x\mathfrak{R}y \iff y - x = 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

Cette relation est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ dont l'ensemble des classes d'équivalence est $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$; c'est l'ensemble des classes d'équivalence modulo 2π

2. De plus, $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}; +)$ est un groupe commutatif.

18.1.11 Proposition

$\overrightarrow{P}$ désigne le plan vectoriel euclidien orienté par une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$ et $\mathcal{A}$ l'ensemble des angles du plan $\overrightarrow{P}$
L'application Ψ ainsi définie :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \Psi : \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \\ \widehat{\alpha} & \longmapsto & \Psi\left(\widehat{\alpha}\right) = \theta \end{array}\right. \text{ où } \left\{\begin{array}{l} \cos\widehat{\alpha} = \cos\theta \\ \sin\widehat{\alpha} = \sin\theta \end{array}\right.$$

Alors Ψ est un isomorphisme de groupe

Démonstration

1. D'après 18.1.10, Ψ est évidemment une bijection
2. Montrons que Ψ est un homomorphisme de groupe

Soient $\widehat{\alpha} \in \mathcal{A}$ et $\widehat{\beta} \in \mathcal{A}$.
Alors
- ⋆ Soit $\theta_1 \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tel que $\Psi\left(\widehat{\alpha}\right) = \theta_1$. Alors $\cos\theta_1 = \cos\widehat{\alpha}$ et $\sin\theta_1 = \sin\widehat{\alpha}$
- ⋆ De même, si $\theta_2 \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est tel que $\Psi\left(\widehat{\beta}\right) = \theta_2$. Alors $\cos\theta_2 = \cos\widehat{\beta}$ et $\sin\theta_2 = \sin\widehat{\beta}$
- ⋆ Et si $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est tel que $\Psi\left(\widehat{\alpha} + \widehat{\beta}\right) = \theta$, alors $\cos\theta = \cos\left(\widehat{\beta} + \widehat{\alpha}\right)$ et $\sin\theta = \sin\left(\widehat{\beta} + \widehat{\alpha}\right)$

Les formules d'additions nous donnent :

$$\cos\left(\widehat{\beta} + \widehat{\alpha}\right) = \cos\widehat{\beta}\cos\widehat{\alpha} - \sin\widehat{\beta}\sin\widehat{\alpha} = \cos\theta_2\cos\theta_1 - \sin\theta_2\sin\theta_1 = \cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta$$

Puis

$$\sin\left(\widehat{\beta} + \widehat{\alpha}\right) = \cos\widehat{\beta}\sin\widehat{\alpha} + \sin\widehat{\beta}\cos\widehat{\alpha} = \cos\theta_2\sin\theta_1 - \sin\theta_2\cos\theta_1 = \sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta$$

Nous avons donc $\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta$ et $\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta$, et ainsi, modulo 2π ou encore dans l'ensemble $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, nous avons $\theta_1 + \theta_2 = \theta$, c'est à dire :

$$\Psi\left(\widehat{\alpha} + \widehat{\beta}\right) = \Psi\left(\widehat{\alpha}\right) + \Psi\left(\widehat{\beta}\right)$$

Ψ est donc bien un isomorphisme de groupe

MATHINFOVANNES©