18.2 Angles de demies droites

18.2.1 Définition d'angle de demies droites

$\overrightarrow{P}$ désigne le plan vectoriel euclidien orienté par une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$

1. On appelle demie-droite de base $\overrightarrow{u}$ un sous-ensemble $\overrightarrow{\delta}_{\overrightarrow{u}}$ de $\overrightarrow{P}$ défini par :
$$\overrightarrow{\delta}_{\overrightarrow{u}} = \left\{\overrightarrow{X} \in \overrightarrow{P} \text{ tel que } \overrightarrow{X} = \lambda\overrightarrow{u} \text{ où } \lambda > 0 \text{ et } \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}\right\}$$
2. Soient $\overrightarrow{\delta}_{\overrightarrow{u}}$ et $\overrightarrow{\delta}_{\overrightarrow{v}}$ 2 demies droites de $\overrightarrow{P}$. On appelle angle des demies droites $\overrightarrow{\delta}_{\overrightarrow{u}}$ et $\overrightarrow{\delta}_{\overrightarrow{v}}$, l'angle des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:
$$\widehat{\left(\overrightarrow{\delta}_{\overrightarrow{u}}, \overrightarrow{\delta}_{\overrightarrow{v}}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)}$$
3. La mesure des angles de 2 demies droites vectorielle $\widehat{\left(\overrightarrow{\delta}_{\overrightarrow{u}}, \overrightarrow{\delta}_{\overrightarrow{v}}\right)}$ est celle des angles de vecteurs $\widehat{\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)}$
C'est donc une mesure modulo 2π

Remarque 9 :

Nous avons, en fait : $\widehat{\left(\overrightarrow{\delta}_{\overrightarrow{u}}, \overrightarrow{\delta}_{\overrightarrow{v}}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)} = \widehat{\left(\dfrac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}, \dfrac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}\right)}$

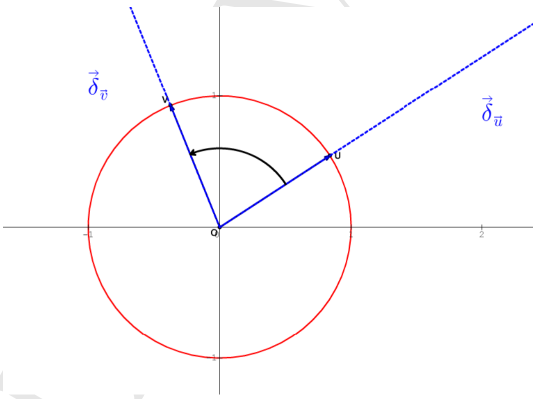

FIGURE 18.2 – Angle de demies droites

18.2.2 Demies droites affines

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine de direction $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$
On appelle demie-droite affine d'origine $A \in \mathcal{P}$ et de direction $\overrightarrow{u}$, un sous-ensemble $D\left(A, \overrightarrow{u}\right)$ défini par :
$$D\left(A, \overrightarrow{u}\right) = \left\{M \in \mathcal{P} \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u} \text{ où } \lambda \geqslant 0\right\}$$

Remarque 10 :

Á $D\left(A, \overrightarrow{u}\right)$, on peut faire correspondre la droite vectorielle $\delta_{\overrightarrow{u}}$

18.2.3 Angles de demies droites affines

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine de direction $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$
Soient $D\,(A, \overrightarrow{u})$ et $D\,(B, \overrightarrow{v})$ 2 droites affines de $\mathcal{P}$. L'angle de demies droites est défini par :

$$\widehat{(D\,(A, \overrightarrow{u})\,, D\,(B, \overrightarrow{v}))} = \widehat{(\delta_{\overrightarrow{u}}, \delta_{\overrightarrow{u}})} = \widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$$

Exemple 3 :

Quelques exercices corrigés

1. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ 2 vecteurs d'un plan vectoriel orienté par une base orthonormée $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$*
   Comparer l'angle $\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$ à chacun des angles $\widehat{(-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$, $\widehat{(\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v})}$ et $\widehat{(-\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v})}$

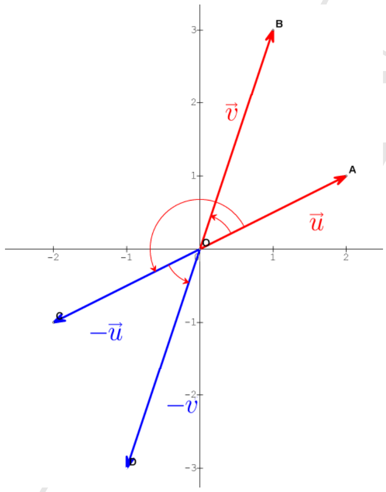

FIGURE 18.3 – Figure de l'exercice

→ Comparaisons de $\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$ et de $\widehat{(-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$
Par la relation de Chasles, nous avons :

$$\widehat{(-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})} = \widehat{(-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u})} + \widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})} = \pi + \widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}\,[2\pi]$$

→ Comparaisons de $\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$ et de $\widehat{(\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v})}$
Toujours la relation de Chasles !!

$$\widehat{(\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v})} = \widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})} + \widehat{(\overrightarrow{v}, -\overrightarrow{v})} = \widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})} + \pi\,[2\pi]$$

→ Comparaisons de $\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$ et de $\widehat{(-\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v})}$
Pas plus difficile !!

$$\widehat{(-\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v})} = \widehat{(-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u})} + \widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})} + \widehat{(-\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})} = \pi + \widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})} + \pi[2\pi] = \widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}\,[2\pi]$$

2. *On se donne un vrai triangle ABC (c'est à dire que les points A, B et C ne sont pas alignés. Démontrer que :*

$$\widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)} = \pi[2\pi]$$

En fait, nous allons redémontrer que la somme des angles dans un triangle est égale à π

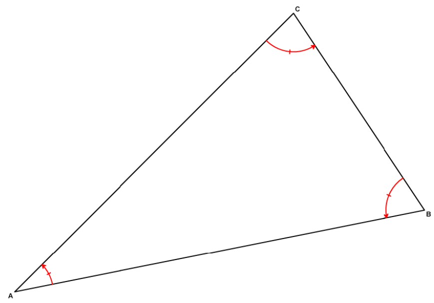

FIGURE 18.4 – Figure de l'exercice

Nous allons donc réutiliser les résultats précédents :

$$\begin{array}{rcl}
\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)} &=& \widehat{\left(-\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}+\pi\,[2\pi]=\widehat{\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC}\right)}+\pi\,[2\pi]\\
\widehat{\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)} &=& \widehat{\left(-\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)}+\pi\,[2\pi]=\widehat{\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)}+\pi\,[2\pi]\\
\widehat{\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)} &=& \widehat{\left(-\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)}+\pi\,[2\pi]=\widehat{\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{BA}\right)}+\pi\,[2\pi]
\end{array}$$

En additionnant, membres à membres, nous obtenons :

$$\begin{array}{rcl}
\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}+\widehat{\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)}+\widehat{\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)} &=& \widehat{\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC}\right)}+\pi+\widehat{\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)}+\pi+\widehat{\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{BA}\right)}+\pi\,[2\pi]\\
&=& \widehat{\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BA}\right)}+3\pi\,[2\pi]\\
&=& \pi\,[2\pi]
\end{array}$$

Ce que nous voulions

18.2.4 Quelques exercices

Exercice 1 :

Dans cet exercice, $\overrightarrow{P}$ est un plan vectoriel euclidien.

1. Soit $\varphi\in O^{+}\left(\overrightarrow{P}\right)$, c'est à dire que φ est une rotation de $\overrightarrow{P}$.

   Démontrer que, pour tout $\overrightarrow{u}\in\overrightarrow{P}$ et tout $\overrightarrow{v}\in\overrightarrow{P}$, nous avons $\widehat{\left(\varphi\left(\overrightarrow{u}\right),\varphi\left(\overrightarrow{v}\right)\right)}=\widehat{\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)}$
2. Soit $\sigma\in O^{-}\left(\overrightarrow{P}\right)$, c'est à dire que, cette fois ci, σ est une symétrie orthogonale de $\overrightarrow{P}$.

   Démontrer que, pour tout $\overrightarrow{u}\in\overrightarrow{P}$ et tout $\overrightarrow{v}\in\overrightarrow{P}$, nous avons $\widehat{\left(\sigma\left(\overrightarrow{u}\right),\sigma\left(\overrightarrow{v}\right)\right)}=-\widehat{\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)}$

Exercice 2 :

Dans cet exercice, $\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien.

1. Soit ABC un triangle rectangle en A et soit O le milieu de l'hypothénuse $[B,C]$. Démontrer que :

$$\widehat{\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)}=2\widehat{\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)}$$

2. Nous considérons 3 points A, B et C, 2 à 2 distincts appartenant à un même cercle Γ de centre O. Il faut démontrer que :

$$\widehat{\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)}=2\widehat{\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)}$$

Exercice 3 :

Le plan affine $\mathcal{P}$ est euclidien et rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. H est un point différent de O et nous notons :

$$d = OH \text{ et } \alpha = \widehat{\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OH}\right)}$$

Trouver une équation cartésienne de la droite passant par H et orthogonale à la droite (OH)

Exercice 4 :

Le plan affine $\mathcal{P}$ est euclidien et rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Soient $A \in \mathcal{P}$ et $A_1 \in \mathcal{P}$, 2 points dont les coordonnées sont $A = (-2, 0)$ et $A_1 = (1, 0)$

1. Quelle est l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 2 et du cercle $\mathcal{C}_1$ de centre A_1 et de rayon 1.
2. À tout point $M \in \mathcal{C}$, on associe le point $M_1 \in \mathcal{C}_1$ tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{A_1O}, \overrightarrow{A_1M_1}\right)} = -\widehat{\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}\right)}$ Exprimer les coordonnées ds points M et M_1 en fonction de la mesure α de l'angle $\widehat{\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}\right)}$
3. Ecrire l'équation cartésienne de la médiatrice du segment $[M, M_1]$.