18.3 Angles de droites

Les droites vectorielles sont des objets bien connus : ce sont les sous-espaces vectoriels de dimension 1 d'un plan vectoriel $\overrightarrow{P}$. Si $\overrightarrow{D} \subset \overrightarrow{P}$ est une droite vectorielle de $\overrightarrow{P}$ et $\{\overrightarrow{u}\}$ une base de $\overrightarrow{D}$, alors $\{-\overrightarrow{u}\}$ est aussi une base de $\overrightarrow{D}$.

18.3.1 Théorème

$\overrightarrow{P}$ désigne le plan vectoriel euclidien orienté par une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$
Soient $\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{D_1}$ 2 droites vectorielles de $\overrightarrow{P}$
- $\rightarrow$ Soit $\overrightarrow{i}$ un vecteur directeur (ou base) de $\overrightarrow{D}$
- $\rightarrow$ Soit $\overrightarrow{i}_1$ un vecteur directeur de $\overrightarrow{D}_1$

Alors, il existe 2 rotations vectorielles $R \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ et 2 seulement telles que $R\left(\overrightarrow{D}\right) = \overrightarrow{D}_1$
Si α est l'angle de la rotation R, alors l'autre rotation a pour angle $\alpha + \pi$

Démonstration

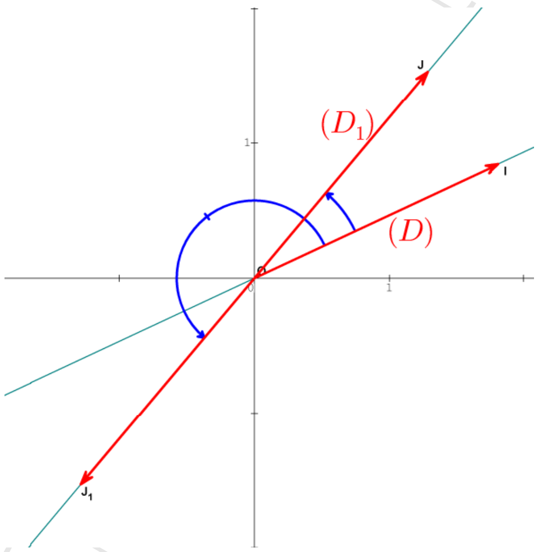

FIGURE 18.5 – Angles de droites : 2 rotations qui transforment une droite en une autre

1. Il n'existe qu'une seule rotation $R \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ telle que $R\left(\overrightarrow{i}\right) = \overrightarrow{i}_1$. On démontre alors facilement que $R\left(\overrightarrow{D}\right) = \overrightarrow{D}_1$
2. Il n'existe aussi qu'une seule rotation $R' \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ telle que $R'\left(\overrightarrow{i}\right) = -\overrightarrow{i}_1$. On démontre alors facilement que $R\left(\overrightarrow{D}\right) = \overrightarrow{D}_1$
3. Une rotation transformant un vecteur unitaire en un autre vecteur unitaire, R et R' sont donc les seules rotations telles que $R\left(\overrightarrow{D}\right) = \overrightarrow{D}_1$
4. En dernier lieu, il est facile de voir que, pour tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D}$, $R'(\overrightarrow{u}) = -R(\overrightarrow{u}) = -\mathrm{Id}_{\overrightarrow{P}} \circ R(\overrightarrow{u})$
5. Ainsi, si α est l'angle de la rotation R, $\alpha + \pi$ est l'angle de la rotation R'

18.3.2 Théorème

Soit $\overrightarrow{P}$ un plan vectoriel euclidien orienté par une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$
On appelle $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites vectorielles de $\overrightarrow{P}$. On considère la relation $\mathcal{R}_1$ suivante :

$$\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D}_1\right) \mathcal{R}_1 \left(\overrightarrow{\Delta}, \overrightarrow{\Delta_1}\right) \Longleftrightarrow \text{ il existe } R \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right) \text{ telle que } R\left(\overrightarrow{D}\right) = \overrightarrow{D}_1 \text{ et } R\left(\overrightarrow{\Delta}\right) = \overrightarrow{\Delta}_1$$

1. $\mathcal{R}_1$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ où $\mathcal{D}$ est l'ensemble des droites vectorielles de $\overrightarrow{P}$
2. L'ensemble des classes d'équivalence $\mathcal{D} \times \mathcal{D}/\mathcal{R}_1$ est l'ensemble des angles de droites
3. La classe d'équivalence d'un couple $\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D}_1\right)$ est notée $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D}_1\right)}$ et est appelée angle de $\overrightarrow{D}$ vers $\overrightarrow{D}_1$

Démonstration

1. Elle est évidemment **réflexive** et **symétrique**
2. **Montrons qu'elle est transitive**

   Soient 6 droites vectorielles $\overrightarrow{D_1}$, $\overrightarrow{D_2}$, $\overrightarrow{D_3}$, $\overrightarrow{D_4}$, $\overrightarrow{D_5}$ et $\overrightarrow{D_6}$ telles que :

   $$\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_2}\right) \mathcal{R}_1 \left(\overrightarrow{D_3}, \overrightarrow{D_4}\right) \text{ et } \left(\overrightarrow{D_3}, \overrightarrow{D_4}\right) \mathcal{R}_1 \left(\overrightarrow{D_5}, \overrightarrow{D_6}\right)$$

   Il existe donc une rotation $\varphi \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ telle que $\varphi\left(\overrightarrow{D_1}\right) = \overrightarrow{D_2}$ et $\varphi\left(\overrightarrow{D_3}\right) = \overrightarrow{D_4}$.
   De même, il existe une rotation $\psi \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ telle que $\psi\left(\overrightarrow{D_3}\right) = \overrightarrow{D_4}$ et $\psi\left(\overrightarrow{D_5}\right) = \overrightarrow{D_6}$
   De $\varphi\left(\overrightarrow{D_3}\right) = \overrightarrow{D_4}$ et $\psi\left(\overrightarrow{D_3}\right) = \overrightarrow{D_4}$, nous déduisons que $\varphi = \psi$ ou $\psi = -\mathrm{Id}_{\overrightarrow{P}} \circ \varphi$.
   Si $\varphi = \psi$, il n'y plus rien à prouver.
   Par contre, si $\psi = -\mathrm{Id}_{\overrightarrow{P}} \circ \varphi$, nous avons $\psi\left(\overrightarrow{D_1}\right) = -\mathrm{Id}_{\overrightarrow{P}} \circ \varphi\left(\overrightarrow{D_1}\right) = \overrightarrow{D_2}$
   Et donc, nous avons $\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_2}\right) \mathcal{R}_1 \left(\overrightarrow{D_5}, \overrightarrow{D_6}\right)$
   La relation $\mathcal{R}_1$ est donc transitive.

Remarque 11 :

1. L'angle nul

   Soit $\overrightarrow{D} \subset \overrightarrow{P}$ une droite du plan. Les rotations vectorielles qui transforment $\overrightarrow{D}$ en elle-même sont $\mathrm{Id}_{\overrightarrow{P}}$ ou $-\mathrm{Id}_{\overrightarrow{P}}$ *(La rotation d'angle nul ou la rotation d'angle π)*. On appelle angle de droites nul l'angle de $\overrightarrow{D}$ vers $\overrightarrow{D}$. Ainsi :

   $$\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{D} = \overrightarrow{D_1}$$

2. L'angle droit

   Soient $\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{D_1}$ 2 droites orthogonales. Les rotations qui transforment $\overrightarrow{D}$ en $\overrightarrow{D_1}$ sont des rotations d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$
3. Dans le plan affine

   Soit $\mathcal{P}$ un plan affine de direction $\overrightarrow{P}$. Soient $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ et $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{P}$, 2 droites affines de $\mathcal{P}$ de direction respectives $\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{D_1}$

   On appelle angle des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_1$ l'angle $\widehat{(\mathcal{D}, \mathcal{D}_1)} = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)}$
4. Attention!!

   Soit $\mathcal{P}$ un plan affine de direction $\overrightarrow{P}$, $M \in \mathcal{P}$, $A \in \mathcal{P}$ et $B \in \mathcal{P}$.
   Il ne faut pas confondre :
   $\rightarrow$ $\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)}$ qui est un angle de vecteurs

→ Avec $\widehat{((MA),(MB))}$ qui est un angle de droites

5. Soient $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ et $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{P}$, 2 droites affines de $\mathcal{P}$ de direction respectives $\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{D_1}$. Alors :
   → $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}_1 \iff \overrightarrow{D} = \overrightarrow{D_1} \iff \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} = \widehat{(\mathcal{D}, \mathcal{D}_1)} = 0$
   → $\mathcal{D} \perp \mathcal{D}_1 \iff \overrightarrow{D} \perp \overrightarrow{D_1} \iff \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} = \widehat{(\mathcal{D}, \mathcal{D}_1)} = \dfrac{\pi}{2}$

18.3.3 Proposition

Soit $\overrightarrow{P}$ un plan vectoriel euclidien orienté par une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$
Alors, pour tout angle de droite $\widehat{\mathcal{A}}$, et toute droite vectorielle $\overrightarrow{D}$, il existe une et une seule droite $\overrightarrow{D_1}$ telle que $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} = \widehat{\mathcal{A}}$

Démonstration

Soit $\widehat{\mathcal{A}}$ un angle de droites et $\overrightarrow{D}$ une droite de $\overrightarrow{P}$.

- ⋆ Soient $\overrightarrow{\Delta}$ et $\overrightarrow{\Delta_1}$ deux droites telles que $\widehat{\left(\overrightarrow{\Delta}, \overrightarrow{\Delta_1}\right)} = \widehat{\mathcal{A}}$.
  Alors, il existe $\varphi \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ telle que $\varphi\left(\overrightarrow{\Delta}\right) = \overrightarrow{\Delta_1}$
  Posons $\overrightarrow{D_1} = \varphi\left(\overrightarrow{D}\right)$, alors $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{\Delta}, \overrightarrow{\Delta_1}\right)} = \widehat{\mathcal{A}}$
- ⋆ Réciproquement, soit $\overrightarrow{D_2} \in \overrightarrow{P}$, une droite vectorielle telle que $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_2}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)}$.
  Ceci veut donc dire que $\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_2}\right) \mathcal{R}_1 \left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)$.
  Il existe donc une rotation $R \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ telle que $R\left(\overrightarrow{D}\right) = \overrightarrow{D_1}$ et $R\left(\overrightarrow{D}\right) = \overrightarrow{D_2}$ et donc $\overrightarrow{D_1} = \overrightarrow{D_2}$
  Entre parenthèses, nous avons $R = \varphi$

Remarque 12 :

La proposition pourrait aussi s'énoncer comme ceci :

Pour tout angle de droite $\widehat{\mathcal{A}}$, et toute droite vectorielle $\overrightarrow{D}$, il existe une et une seule droite $\overrightarrow{D_1}$ telle que $\widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D}\right)} = \widehat{\mathcal{A}}$

Il suffit de prendre $\overrightarrow{D_1} = \varphi^{-1}\left(\overrightarrow{D}\right)$ et nous avons alors $\overrightarrow{D} = \varphi\left(\overrightarrow{D_1}\right)$

18.3.4 Somme des angles de droites

Soit $\overrightarrow{P}$ un plan vectoriel euclidien orienté par une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$
Soient $\widehat{\mathcal{A}}$ et $\widehat{\mathcal{A}_1}$ 2 angles de droites.
On appelle <u>somme des 2 angles</u> $\widehat{\mathcal{A}}$ et $\widehat{\mathcal{A}_1}$ l'angle de droites ainsi défini :

- ⋆ Pour toute droite vectorielle $\overrightarrow{D}$ il existe une droite vectorielle $\overrightarrow{D_1}$ telle que $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} = \widehat{\mathcal{A}}$
- ⋆ Il existe une seule droite vectorielle $\overrightarrow{D_2}$ telle que $\widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_2}\right)} = \widehat{\mathcal{A}_1}$

Alors, $\widehat{\mathcal{A}} + \widehat{\mathcal{A}_1} = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_2}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_2}\right)}$

Remarque 13 :

1. Avec la relation $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_2}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_2}\right)}$, nous avons la relation de Chasles
2. L'addition est bien définie et ne dépend que des angles chosis et non des droites :
   <u>En effet :</u>

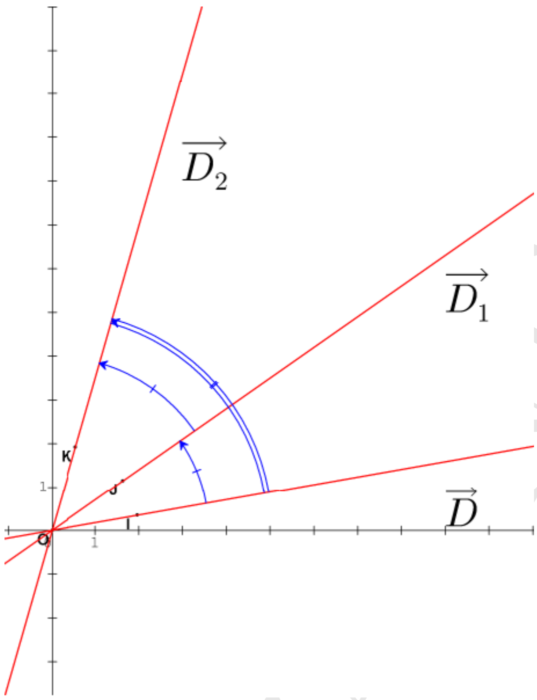

FIGURE 18.6 – Addition de 2 angles de droites

→ Soient 4 droites vectorielles $\overrightarrow{D}$, $\overrightarrow{D_1}$, $\overrightarrow{\Delta}$ et $\overrightarrow{\Delta_1}$ telles que :

$$\widehat{\left(\overrightarrow{D},\overrightarrow{D_1}\right)} = \widehat{\mathcal{A}} = \widehat{\left(\overrightarrow{\Delta},\overrightarrow{\Delta_1}\right)}$$

Il existe une rotation $\varphi \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ telle que $\varphi\left(\overrightarrow{D}\right) = \overrightarrow{D_1}$ et $\varphi\left(\overrightarrow{\Delta}\right) = \overrightarrow{\Delta_1}$

→ Soient maintenant, 2 autres droites vectorielles $\overrightarrow{D_2}$ et $\overrightarrow{\Delta_2}$ telles que :

$$\widehat{\left(\overrightarrow{D_1},\overrightarrow{D_2}\right)} = \widehat{\mathcal{A}_1} = \widehat{\left(\overrightarrow{\Delta_1},\overrightarrow{\Delta_2}\right)}$$

Il existe aussi une rotation $\psi \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ telle que $\psi\left(\overrightarrow{D_1}\right) = \overrightarrow{D_2}$ et $\varphi\left(\overrightarrow{\Delta_1}\right) = \overrightarrow{\Delta_2}$

Ainsi, nous avons $\psi \circ \varphi\left(\overrightarrow{D}\right) = \overrightarrow{D_1}$ et $\psi \circ \varphi\left(\overrightarrow{\Delta}\right) = \overrightarrow{\Delta_1}$. Comme $\psi \circ \varphi \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$, nous avons $\left(\overrightarrow{D},\overrightarrow{D_2}\right) \mathcal{R}_1 \left(\overrightarrow{\Delta},\overrightarrow{\Delta_2}\right)$, et donc

$$\widehat{\left(\overrightarrow{D},\overrightarrow{D_2}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{\Delta},\overrightarrow{\Delta_2}\right)}$$

3. Le problème est le même dans le plan affine $\mathcal{P}$ de direction $\overrightarrow{P}$

18.3.5 Théorème

L'addition des angles de droites confère à $\mathbb{A}$, l'ensemble des angles de droites, la structure de groupe abélien

Démonstration

1. **Associativité**
   Nous allons utiliser, larga manu, la relation de Chasles
   Soient $\widehat{\mathcal{A}}$, $\widehat{\mathcal{A}_1}$ et $\widehat{\mathcal{A}_2}$ 3 angles de $\mathbb{A}$.
   Soit $\overrightarrow{D}$ une droite vectorielle quelconque. Alors :

$\Rightarrow$ Il existe une unique droite vectorielle $\overrightarrow{D_1}$ telle que $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} = \widehat{\mathcal{A}}$

$\Rightarrow$ Il existe aussi une unique droite vectorielle $\overrightarrow{D_2}$ telle que $\widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_2}\right)} = \widehat{\mathcal{A}_1}$

$\Rightarrow$ Et, pour terminer, il existe une unique droite vectorielle $\overrightarrow{D_2}$ telle que $\widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_2}\right)} = \widehat{\mathcal{A}_2}$
Alors :

$$\widehat{\mathcal{A}} + \left(\widehat{\mathcal{A}_1} + \widehat{\mathcal{A}_2}\right) = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} + \left(\widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_2}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{D_2}, \overrightarrow{D_3}\right)}\right) = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_3}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_3}\right)}$$

Et

$$\left(\widehat{\mathcal{A}} + \widehat{\mathcal{A}_1}\right) + \widehat{\mathcal{A}_2} = \left(\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_2}\right)}\right) + \widehat{\left(\overrightarrow{D_2}, \overrightarrow{D_3}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_2}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{D_2}, \overrightarrow{D_3}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_3}\right)}$$

Donc $\widehat{\mathcal{A}} + \left(\widehat{\mathcal{A}_1} + \widehat{\mathcal{A}_2}\right) = \left(\widehat{\mathcal{A}} + \widehat{\mathcal{A}_1}\right) + \widehat{\mathcal{A}_2}$.
Nous avons bien l'associativité

2. **Eléments neutres**

   Le neutre pour l'addition des angles de droites est bien l'angle $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D}\right)} = 0_{\mathbb{A}}$

3. **Existence de symétriques**

   Soit $\widehat{\mathcal{A}} \in \mathbb{A}$ un angle. Pour toute droite $\overrightarrow{D} \in \overrightarrow{P}$, il existe une droite $\overrightarrow{D_1}$ telle que $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} = \widehat{\mathcal{A}}$.

   En utilisant la relation de Chasles, nous avons $0_{\mathbb{A}} = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D}\right)}$.

   L'opposé de $\widehat{\mathcal{A}} \in \mathbb{A}$ est donc $\widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D}\right)} = -\widehat{\mathcal{A}}$

4. **Commutativité**
   Soient $\widehat{\mathcal{A}}$ et $\widehat{\mathcal{A}_1}$ 2 angles de $\mathbb{A}$. Il faut donc montrer que $\widehat{\mathcal{A}} + \widehat{\mathcal{A}_1} = \widehat{\mathcal{A}_1} + \widehat{\mathcal{A}}$

   $\Rightarrow$ Soient $\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{D_1}$, 2 droites vectorielles telles que $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} = \widehat{\mathcal{A}}$. Il existe une unique droite $\overrightarrow{D_2}$ telle que $\widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_2}\right)} = \widehat{\mathcal{A}_1}$. Alors

$$\widehat{\mathcal{A}} + \widehat{\mathcal{A}_1} = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_2}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_2}\right)}$$

   $\Rightarrow$ Il existe maintenant une unique droite vectorielle $\overrightarrow{D_3}$ telle que $\widehat{\left(\overrightarrow{D_2}, \overrightarrow{D_3}\right)} = \widehat{\mathcal{A}}$. Et alors :

$$\widehat{\mathcal{A}_1} + \widehat{\mathcal{A}} = \widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_2}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{D_2}, \overrightarrow{D_3}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_3}\right)}$$

   $\Rightarrow$ Pour démontrer que $\widehat{\mathcal{A}} + \widehat{\mathcal{A}_1} = \widehat{\mathcal{A}_1} + \widehat{\mathcal{A}}$, il faut démontrer que $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_2}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_3}\right)}$, autrement dit que

$$\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_2}\right) \mathcal{R}_1 \left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_3}\right)$$

   - ⋆ Il existe une rotation $R \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ telle que $R\left(\overrightarrow{D}\right) = \overrightarrow{D_1}$ et tel que $R\left(\overrightarrow{D_2}\right) = \overrightarrow{D_3}$
   - ⋆ Et il existe aussi une autre rotation $S \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ telle que $S\left(\overrightarrow{D_1}\right) = \overrightarrow{D_2}$
   - ⋆ Donc, $S \circ R\left(\overrightarrow{D}\right) = S\left(\overrightarrow{D_1}\right) = \overrightarrow{D_2}$ et $R \circ S\left(\overrightarrow{D_1}\right) = R\left(\overrightarrow{D_2}\right) = \overrightarrow{D_3}$
     Comme la composition des rotations de $O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ est commutative, nous avons $R \circ S = S \circ R$, donc $S \circ R\left(\overrightarrow{D}\right) = \overrightarrow{D_2}$ et $S \circ R\left(\overrightarrow{D_1}\right) = \overrightarrow{D_3}$. D'où

$$\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_2}\right) \mathcal{R}_1 \left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_3}\right)$$

   L'addition est donc commutative

Exercice 5 :

Soit $\overrightarrow{P}$ un plan vectoriel euclidien orienté par une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$

1. Soient $\overrightarrow{D}$, $\overrightarrow{D_1}$, $\overrightarrow{\Delta}$ et $\overrightarrow{\Delta_1}$ 4 droites vectorielles. Démontrez l'équivalence suivante :

$$\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{\Delta}, \overrightarrow{\Delta_1}\right)} \iff \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{\Delta}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{\Delta_1}\right)}$$

2. En déduire que si $\overrightarrow{\Delta} \perp \overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{\Delta_1} \perp \overrightarrow{D_1}$, nous avons alors $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{\Delta}, \overrightarrow{\Delta_1}\right)}$

18.3.6 Théorème

Soit $\overrightarrow{P}$ un plan vectoriel euclidien orienté.
On appelle $\mathbb{A}_{vect}$ le groupe des angles de vecteurs (ou des demi-droites vectorielles) et $\mathbb{A}_{droites}$ le groupe des angles de droites.
Soit $F : \mathbb{A}_{vect} \longrightarrow \mathbb{A}_{droites}$ une application ainsi définie :

$$\begin{cases} F : \mathbb{A}_{vect} & \longrightarrow & \mathbb{A}_{droites} \\ \qquad \widehat{\alpha} & \longmapsto & F\left(\widehat{\alpha}\right) = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} \end{cases}$$

Où $\overrightarrow{D_1}$ est l'image d'une droite $\overrightarrow{D}$ dans la rotation $R_{\widehat{\alpha}}$ d'angle $\widehat{\alpha}$, c'est à dire $\overrightarrow{D_1} = R_{\widehat{\alpha}}\left(\overrightarrow{D}\right)$.
Alors, F est un homomorphisme de groupe surjectif, de noyau $\{0_{\mathbb{A}_{vect}}, \pi_{\mathbb{A}_{vect}}\}$ où $0_{\mathbb{A}_{vect}}$ est l'angle nul et $\pi_{\mathbb{A}_{vect}}$ l'angle plat

Démonstration

1. **F est un homomorphisme de groupe**

   Soient $\widehat{\alpha} \in \mathbb{A}_{vect}$ et $\widehat{\beta} \in \mathbb{A}_{vect}$

   → Soit $\overrightarrow{D} \in \overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{D_1} = R_{\widehat{\alpha}}\left(\overrightarrow{D}\right)$ et donc $F\left(\widehat{\alpha}\right) = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)}$

   Soit $\overrightarrow{D_2} \in \overrightarrow{P}$ tel que $\overrightarrow{D_2} = R_{\widehat{\beta}}\left(\overrightarrow{D_1}\right)$ et donc $F\left(\widehat{\beta}\right) = \widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_2}\right)}$

   Et donc : $F\left(\widehat{\alpha}\right) + F\left(\widehat{\beta}\right) = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_2}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_2}\right)}$

   → La rotation $R_{\widehat{\alpha+\beta}}$ est $R_{\widehat{\alpha+\beta}} = R_{\widehat{\alpha}} \circ R_{\widehat{\beta}} = R_{\widehat{\beta}} \circ R_{\widehat{\alpha}}$

   Et donc $R_{\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}}\left(\overrightarrow{D}\right) = R_{\widehat{\beta}} \circ R_{\widehat{\alpha}}\left(\overrightarrow{D}\right) = R_{\widehat{\beta}}\left(\overrightarrow{D_1}\right) = \overrightarrow{D_2}$

   Et donc $F\left(\widehat{\alpha} + \widehat{\beta}\right) = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_2}\right)}$

   → D'où nous avons $F\left(\widehat{\alpha} + \widehat{\beta}\right) = F\left(\widehat{\alpha}\right) + F\left(\widehat{\beta}\right)$

   F est donc un homomorphisme de groupe

2. **Recherche du noyau de F**

   Déterminer le noyau de F, c'est rechercher les angles $\widehat{\alpha} \in \mathbb{A}_{vect}$ tels que $F\left(\widehat{\alpha}\right) = \widehat{0}$ où $\widehat{0} \in \mathbb{A}_{droites}$

   - ⋆ Soit donc $\widehat{\alpha} \in \ker F$; alors, si R_α est une rotation d'angle $\widehat{\alpha}$, pour toute droite $\overrightarrow{D} \in \overrightarrow{P}$, si $\overrightarrow{D_1} = R_\alpha\left(\overrightarrow{D}\right)$, alors $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} = 0$, c'est à dire $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{D_1}$
   - ⋆ Il n'y a que 2 rotations qui conservent le droite $\overrightarrow{D}$, c'est $\mathrm{Id}_{\overrightarrow{P}}$ ou $-\mathrm{Id}_{\overrightarrow{P}}$ qui ont respectivement pour angle O et π

   Donc, $\ker F = \{0_{\mathbb{A}_{vect}}, \pi_{\mathbb{A}_{vect}}\}$

3. **F est surjective**

   Soit $\widehat{a} \in \mathbb{A}_{droites}$ un angle de droite et $\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{D_1}$ 2 droites telles que $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} = \widehat{a}$.

   Soit $\overrightarrow{i}$ un vecteur unitaire de $\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{i_1}$ un vecteur unitaire de $\overrightarrow{D_1}$. Il existe une rotation R_α d'angle $\widehat{\alpha}$ telle que $R_\alpha\left(\overrightarrow{i}\right) = \overrightarrow{i_1}$ et nous avons donc $R_\alpha\left(\overrightarrow{D}\right) = \overrightarrow{D_1}$ et nous avons bien :

$$F\left(\widehat{\alpha}\right) = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} = \widehat{a}$$

F est donc surjective

18.3.7 Corollaire

Pour tout angle de droites $\widehat{a} \in \mathbb{A}_{droites}$, il existe 2 angles de demi-droites et 2 seulement dont l'image par F est $\widehat{a}$. Si $\widehat{\alpha}$ est l'un des angles tel que $F(\widehat{\alpha}) = \widehat{a}$, l'autre angle est $\widehat{\alpha} + \pi_{\mathbb{A}_{vect}}$

Démonstration

→ Pour commencer, on peut écrire qu'en regardant la démonstration de 18.3.6, le résultat n'est pas surprenant !!

→ Soit, maintenant, $\widehat{a} \in \mathbb{A}_{droites}$.
Alors, d'après 18.3.6 où on démontre que F est surjective, il existe $\widehat{\alpha} \in \mathbb{A}_{vect}$ tel que $F(\widehat{\alpha}) = \widehat{a}$.
Soit $\widehat{\beta} \in \mathbb{A}_{vect}$ un autre angle de vecteurs tels que $F\left(\widehat{\beta}\right) = \widehat{a}$, alors :

$$F\left(\widehat{\beta}\right) = F(\widehat{\alpha}) \Longleftrightarrow F\left(\widehat{\beta} - \widehat{\alpha}\right) = \widehat{0} \Longleftrightarrow \widehat{\beta} - \widehat{\alpha} \in \ker F$$

Dans ce cas, $\widehat{\beta} - \widehat{\alpha} = 0_{\mathbb{A}_{vect}}$ ou $\widehat{\beta} - \widehat{\alpha} = \pi_{\mathbb{A}_{vect}}$.
Ce que nous voulions

Remarque 14 :

En fait, en utilisant la théorie des groupes, nous avons $\mathbb{A}_{droites}$ qui est isomorphe au groupe quotient $\mathbb{A}_{vect}/\ker F$

18.3.8 Théorème

Soit $\overrightarrow{P}$ un plan vectoriel euclidien orienté.
On appelle $\mathbb{A}_{vect}$ le groupe des angles de vecteurs (ou des demi-droites vectorielles) et $\mathbb{A}_{droites}$ le groupe des angles de droites.
Soit $G : \mathbb{A}_{droites} \longrightarrow \mathbb{A}_{vect}$ une application ainsi définie :

$$\begin{cases} G : \mathbb{A}_{droites} & \longrightarrow & \mathbb{A}_{vect} \\ \qquad\quad \widehat{a} & \longmapsto & G(\widehat{a}) = \widehat{\alpha} + \widehat{\alpha} \end{cases}$$

Où si $\widehat{a} = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)}$, $\overrightarrow{D_1}$ est l'image d'une droite $\overrightarrow{D}$ dans la rotation $R_{\widehat{\alpha}}$ d'angle $\widehat{\alpha}$, c'est à dire $\overrightarrow{D_1} = R_{\widehat{\alpha}}\left(\overrightarrow{D}\right)$.
Alors G est un isomorphisme de $\mathbb{A}_{droites}$ vers $\mathbb{A}_{vect}$

Démonstration

1. **G ne dépend que du choix de $\widehat{a}$**

   En effet, soient $\overrightarrow{D} \in \overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{D_1} \in \overrightarrow{P}$ 2 droites vectorielles telles que $\widehat{a} = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)}$.

   Il y a 2 rotations $R \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ telles que $\overrightarrow{D_1} = R\left(\overrightarrow{D}\right)$

   Si $\widehat{\alpha}$ est l'angle de l'une des deux rotations, $\widehat{\beta} = \widehat{\alpha} + \pi_{\mathbb{A}_{vect}}$ est l'angle de l'autre, et nous avons :

   $$G(\widehat{a}) = \widehat{\beta} + \widehat{\beta} = (\widehat{\alpha} + \pi_{\mathbb{A}_{vect}}) + (\widehat{\alpha} + \pi_{\mathbb{A}_{vect}}) = \widehat{\alpha} + \widehat{\alpha}$$

2. **G est un morphisme**

   Ce type de démonstration a déjà été faite. Nous la refaisons ; l'enseignement étant l'art de la répétition !!

   ⇒ Soient $\widehat{a} \in \mathbb{A}_{droites}$ et $\widehat{b} \in \mathbb{A}_{droites}$ 2 angles de droites ; il faut montrer que

   $$G\left(\widehat{a} + \widehat{b}\right) = G(\widehat{a}) + G\left(\widehat{b}\right)$$

$\Rightarrow$ Soient $\overrightarrow{D} \in \overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{D_1} \in \overrightarrow{P}$ 2 droites vectorielles telles que $\widehat{a} = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)}$ et $\widehat{\alpha}$ l'angle de la rotation R telle que $R\left(\overrightarrow{D}\right) = \overrightarrow{D_1}$. Alors, il est clair que $G\left(\widehat{a}\right) = \widehat{\alpha} + \widehat{\alpha}$

$\Rightarrow$ Soit maintenant $\overrightarrow{D_2} \in \overrightarrow{P}$ une droite vectorielle telles que $\widehat{b} = \widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_2}\right)}$ et $\widehat{\beta}$ l'angle de la rotation S telle que $S\left(\overrightarrow{D_1}\right) = \overrightarrow{D_2}$. Nous avons alors $G\left(\widehat{b}\right) = \widehat{\beta} + \widehat{\beta}$

$\Rightarrow$ Maintenant, $\widehat{a} + \widehat{b} = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_2}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_2}\right)}$
Nous avons, clairement, $S \circ R\left(\overrightarrow{D}\right) = \overrightarrow{D_2}$ et l'angle de la rotation $S \circ R$ est donné par $\widehat{\alpha} + \widehat{\beta}$ et donc $G\left(\widehat{a} + \widehat{b}\right) = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\alpha} + \widehat{\beta}$

$\Rightarrow$ Nous tirons, de la commutativité de l'addition des angles :

$$G\left(\widehat{a}\right) + G\left(\widehat{b}\right) = \left(\widehat{\alpha} + \widehat{\alpha}\right) + \left(\widehat{\beta} + \widehat{\beta}\right) = \left(\widehat{\alpha} + \widehat{\beta}\right) + \left(\widehat{\alpha} + \widehat{\beta}\right) = G\left(\widehat{a} + \widehat{b}\right)$$

G est bien un homomorphisme *(ou morphisme)* de groupe

3. **G est une bijection**

$\Rightarrow$ G est injective
Soit $\widehat{a} \in \ker G$; alors $G\left(\widehat{a}\right) = \widehat{\alpha} + \widehat{\alpha} = 0_{\mathbb{A}_{vect}}$, c'est à dire que nous avons $\widehat{\alpha} = 0_{\mathbb{A}_{vect}}$ ou $\widehat{\alpha} = \pi_{\mathbb{A}_{vect}}$
Si $\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{D_1}$ sont 2 droites telles que $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)}$, $\widehat{\alpha}$ est l'angle de la rotation R qui transforme $\overrightarrow{D}$ en $\overrightarrow{D_1}$. Ainsi, si $\widehat{\alpha} = 0_{\mathbb{A}_{vect}}$ ou $\widehat{\alpha} = \pi_{\mathbb{A}_{vect}}$ nous avons $R\left(\overrightarrow{D}\right) = \overrightarrow{D} = \overrightarrow{D_1}$, et donc $\widehat{a} = 0_{\mathbb{A}_{vect}}$
G est bien injective

$\Rightarrow$ G est surjective
Soit $\widehat{\alpha} \in \mathbb{A}_{vect}$.
Il faut trouver $\widehat{a} \in \mathbb{A}_{vect}$ tel que $G\left(\widehat{a}\right) = \widehat{\alpha}$
Soit $\widehat{\beta} \in \mathbb{A}_{vect}$ tel que $\widehat{\beta} + \widehat{\beta} = \widehat{\alpha}$; en fait, il y en a un autre : $\widehat{\alpha} + \pi_{\mathbb{A}_{vect}}$
Soient R une rotation d'angle β et $\overrightarrow{D}$ une droite du plan.
On appelle $\overrightarrow{D_1}$ la droite telle que $R\left(\overrightarrow{D}\right) = \overrightarrow{D_1}$ et $\widehat{a} = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)}$, nous avons :

$$G\left(\widehat{a}\right) = \widehat{\beta} + \widehat{\beta} = G\left(\widehat{a}\right) = \widehat{\alpha}$$

G est donc surjective
G est donc une bijection

G est bien un isomorphisme

18.3.9 Mesure d'un angle de droites

Ce petit sous-paragraphe est formel et théorique ; c'est pourtant le passage nécessaire vers la définition rigoureuse de la mesure des angles

1. Il est possible de définir une application $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{A}_{vect}$, homomorphisme de groupe surjectif de noyau $2\pi\mathbb{Z}$, définissant la mesure des angles de demi-droites *(ou de vecteurs)*
2. Nous avons défini en 18.3.6 un homomorphisme de groupes $F : \mathbb{A}_{vect} \longrightarrow \mathbb{A}_{droites}$, surjectif, liant les angles de droites et de demi-droites
3. Soit $\theta_1 = F \circ \theta$
De par sa construction, θ_1 est un homomorphisme de groupe surjectif *(composé d'homomorphismes et de surjections)*

Définition

On dit qu'un nombre réel $x \in \mathbb{R}$ est la mesure d'un angle de droites $\widehat{a} \in \mathbb{A}_{droites}$ si et seulement si $\theta_1\left(x\right) = \widehat{a}$

18.3.10 Proposition

Soit $\overrightarrow{P}$ un plan vectoriel euclidien orienté.
Soit $\widehat{a} \in \mathbb{A}_{droites}$ un angle de droites. Nous posons :

$$\mu(\widehat{a}) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } \theta_1(x) = \widehat{a}\}$$

On dit que $\mu(\widehat{a})$ est la mesure de l'angle de droites $\widehat{a} \in \mathbb{A}_{droites}$. Alors :

$$\mu(\widehat{a}) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = x_0 + k\pi \text{ où } \theta_1(x_0) = \widehat{a}\}$$

Démonstration

Je pense que cela n'aura échappé à personne : $\mu(\widehat{a})$ est un sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$
Soit donc $\widehat{a} \in \mathbb{A}_{droites}$ un angle de droites.

1. **Tout d'abord, $\mu(\widehat{a}) \neq \emptyset$**
   En effet, par construction, θ_1 est un homomorphisme de groupe surjectif; il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\theta_1(x_0) = \widehat{a}$ et donc $x_0 \in \mu(\widehat{a})$
2. **Soit $x_0 \in \mu(\widehat{a})$. Montrons que $x \in \mu(\widehat{a}) \iff \theta_1(x) = \theta(x_0)$ ou $\theta(x) = \theta_1(x_0 + \pi)$**
   Si $x \in \mu(\widehat{a})$, alors $\theta_1(x) = \theta_1(x_0) = \widehat{a}$; la réciproque étant vraie, nous avons même
   $$x \in \mu(\widehat{a}) \iff \theta_1(x) = \theta_1(x_0)$$
   Or, $\theta_1(x) = \theta_1(x_0) \iff F \circ \theta(x) = F \circ \theta(x_0) \iff F[\theta(x)] = F[\theta(x_0)]$
   D'après le corollaire 18.3.7, nous avons $\theta(x_0) = \theta(x)$ ou $\theta(x) = \theta(x_0) + \pi_{\mathbb{A}_{vect}}$.
   Or, $\pi_{\mathbb{A}_{vect}} = \theta(\pi)$ et donc, de la propriété d'homomorphisme de groupe de θ, nous avons :
   $$\theta(x_0) + \pi_{\mathbb{A}_{vect}} = \theta(x_0) + \theta(\pi) = \theta(x_0 + \pi)$$
3. **Montrons, maintenant, que**
   $$\mu(\widehat{a}) = \{x \in \mathbb{R} \textbf{ tels que il existe } k \in \mathbb{Z} \textbf{ tel que } x = x_0 + k\pi \textbf{ où } \theta_1(x_0) = \widehat{a}\}$$
   Soit $x \in \mu(\widehat{a})$. Alors :
   ⋆ $\theta(x_0) = \theta(x) \iff x = x_0 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
   ⋆ $\theta(x) = \theta_1(x_0 + \pi) \iff x = x_0 + \pi + 2k\pi \iff x = x_0 + (2k+1)\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
   C'est à dire que $x = x_0 + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Remarque 15 :

1. Si nous considérons, dans l'ensemble $\mathbb{R}$, la relation $\mathcal{S}$ définie par $x\mathcal{S}x' \iff x - x' = k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence : c'est la relation de congruence modulo π.
   Pour tout $\widehat{a} \in \mathbb{A}_{droites}$, $\mu(\widehat{a})$ est un élément de l'ensemble-quotient $\mathbb{R}/\mathcal{S}$
2. (a) Si $x \in \mathbb{R}$ est une mesure de l'angle de droites $\widehat{a}$ et $x' \in \mathbb{R}$ est une mesure de l'angle de droites $\widehat{b}$, alors $x + x'$ est une mesure de l'angle $\widehat{a} + \widehat{b}$ et $-x$ est la mesure de l'angle $-\widehat{a}$
   (b) 0 est une mesure de l'angle nul
   (c) $+\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ sont 2 mesures du même angle de droites droit.
3. Pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$ et pour toute droite vectorielle $\overrightarrow{D} \in \overrightarrow{P}$, il existe une droite $\overrightarrow{D_1} \in \overrightarrow{P}$ telle que $x \in \mu\left(\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)}\right)$
4. Pour tout couple de droites $\overrightarrow{D} \in \overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{D_1} \in \overrightarrow{P}$:
   ⋆ $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{D_1} \iff 0 \in \mu\left(\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)}\right)$
   ⋆ $\overrightarrow{D} \perp \overrightarrow{D_1} \iff +\frac{\pi}{2} \in \mu\left(\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)}\right)$

5. Soient $\overrightarrow{D} \in \overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{D_1} \in \overrightarrow{P}$ 2 droites vectorielles de base respectives $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u_1}$
   - ⋆ Si $x \in \mathbb{R}$ est une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u_1}})$, alors $x \in \mathbb{R}$ est aussi une mesure de l'angle de droites $\left(\widehat{\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}}\right)$
   - ⋆ Par contre, si $y \in \mathbb{R}$ est une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}}\right)$, y n'est pas forcément la mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u_1}})$; c'est y ou $y + \pi$

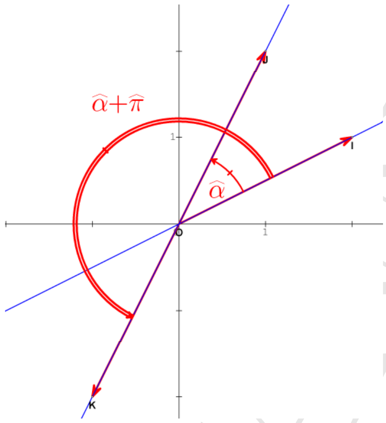

FIGURE 18.7 – Angles de droites

6. **Dans le cas affine**

   Soit $\mathcal{P}$ un plan affine de direction $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

   (a) Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, pour toute droite affine $(D) \subset \mathcal{P}$, pour tout point $M_0 \in \mathcal{P}$, il existe une et une seule droite $(D_1) \subset \mathcal{P}$, contenant M_0 telle que $x \in \mu\left(\widehat{((D), (D_1))}\right)$

   (b) Pour tout couple de droites affines $(D) \subset \mathcal{P}$ et $(D_1) \subset \mathcal{P}$
   - ⋆ $(D) \parallel (D_1) \iff 0 \in \mu\left(\widehat{((D), (D_1))}\right)$
   - ⋆ $(D) \perp (D_1) \iff +\dfrac{\pi}{2} \in \mu\left(\widehat{((D), (D_1))}\right)$

   (c) On appelle $(\Delta) = \left(O, \overrightarrow{i}\right)$ l'axe des abscisses. Soit (D) une droite quelconque.

   Si $x \in \mathbb{R}$ est une mesure de l'angle $\widehat{((\Delta), (D))}$, $x + \pi$ est aussi une mesure de l'angle $\widehat{((\Delta), (D))}$. Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur unitaire de (D), alors :

   $$\overrightarrow{u} = \cos x \, \overrightarrow{i} + \sin x \, \overrightarrow{j} \text{ ou } \overrightarrow{u} = -\left(\cos x \, \overrightarrow{i} + \sin x \, \overrightarrow{j}\right)$$

Exercice 6 :

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction $\overrightarrow{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Soit $(D) \subset \mathcal{P}$. On considère 2 points $A \in (D)$ et $A' \in (D)$ tels que $A \neq A'$. (D') est une droite passant par A' et orthogonale à (D).
A toute droite Δ passant par A, on associe une droite Δ' passant par A' telle que $\widehat{(\Delta, (D))} = \widehat{(\Delta', (D'))}$.
Il faut démontrer que Δ et Δ' sont orthogonales