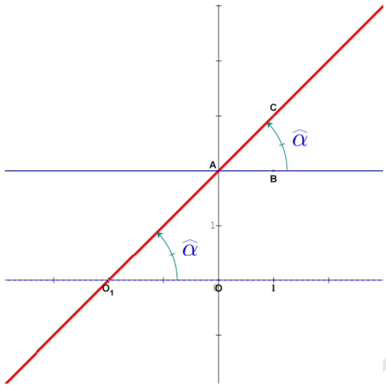

FIGURE 18.8 – Angles de droites affines où $x \in \mathbb{R}$ est une mesure de l'angle $\hat{\alpha}$

18.4 Lieux géométriques définis par des relations angulaires

18.4.1 Théorème

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction $\overrightarrow{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Soient $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$, $M \in \mathcal{P}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\theta = \widehat{((MA)\,,(MB))} \Longleftrightarrow \sin\theta\cos\left(\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)}\right) - \cos\theta\sin\left(\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)}\right) = 0$$

Démonstration

Remarquez que nous passons d'angles de droites à des angles de vecteurs (ou de demies droites)

1. Supposons que $\theta = \widehat{((MA)\,,(MB))}$
   Intéressons nous alors aux angles de vecteurs.
   Alors $\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)} \equiv \theta\,[2\pi]$ ou $\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)} \equiv \theta + \pi\,[2\pi]$
   Et donc
   $$\cos\left(\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)}\right) = \cos\theta \text{ ou } \cos\left(\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)}\right) = \cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$$
   Et
   $$\sin\left(\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)}\right) = \sin\theta \text{ ou } \cos\left(\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)}\right) = \sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$$
   Et, dans tous les cas, nous avons :
   $$\sin\theta\cos\left(\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)}\right) - \cos\theta\sin\left(\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)}\right) = 0$$

2. Réciproquement, supposons $\sin\theta\cos\left(\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)}\right) - \cos\theta\sin\left(\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)}\right) = 0$
   On appelle θ_0 une mesure de l'angle de vecteurs $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)$, c'est à dire $\theta_0 = \widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)}$.
   Alors, $\cos\theta_0 = \cos\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)}$ et $\sin\theta_0 = \sin\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)}$ et nous avons donc :
   $$\sin\theta\cos\left(\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)}\right) - \cos\theta\sin\left(\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)}\right) = 0 \Longleftrightarrow \sin\theta\cos\theta_0 - \cos\theta\sin\theta_0 = 0$$

Ce qui donne, par les formules d'addition $\sin(\theta - \theta_0) = 0$, c'est à dire $\theta \equiv \theta_0\ [2\pi]$ ou $\theta \equiv \theta_0 + \pi\ [2\pi]$, et donc, en synthèse, $\theta \equiv \theta_0\ [\pi]$
Ainsi, θ_0 étant une mesure de l'angle de droites $((MA),(MB))$, $\theta + k\pi$ est aussi une mesure de l'angle de droites $((MA),(MB))$; et donc $\theta = \widehat{((MA),(MB))}$.

18.4.2 Théorème

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction $\overrightarrow{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Soient $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ et $\theta \in \mathbb{R}$
On appelle Γ l'ensemble suivant : $\Gamma = \left\{M \in \mathcal{P} \text{ tels que } \widehat{((MA),(MB))} = \theta\right\}$

1. Si θ est un multiple de π, c'est à dire si $\theta = k\pi$ alors Γ est la droite (AB) privée des points A et B, c'est à dire : $\Gamma = (AB) \setminus \{A, B\}$
2. Si $\theta \neq k\pi$, alors il existe un cercle $\mathcal{C}$, passant par A et B tels que $\Gamma = \mathcal{C} \setminus \{A, B\}$

Démonstration

Soient donc $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Soit donc aussi $\Gamma = \left\{M \in \mathcal{P} \text{ tels que } \widehat{((MA),(MB))} = \theta\right\}$

1. L'étude faite en 18.4.1 montre que nous avons l'équivalence suivante :
$$M \in \Gamma \iff \sin\theta \cos\left(\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)}\right) - \cos\theta \sin\left(\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)}\right) = 0 \qquad (18.1)$$
2. Nous utilisons un nouveau repère $\mathcal{R}(\Omega, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de $\mathcal{P}$
$\Rightarrow$ Nous choisissons Ω comme le milieu du segment $[A; B]$
$\Rightarrow$ Nous choissons $\overrightarrow{e_1} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$
$\Rightarrow$ Et $\overrightarrow{e_2}$ est choisi de telle manière que le repère $\mathcal{R}(\Omega, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ soit direct.
Le tout est figuré dans la figure 18.9

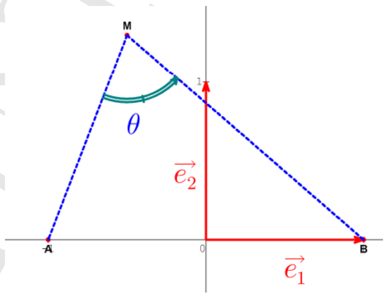

FIGURE 18.9 – Le schéma représentant le problème

Si nous posons $AB = 2a$, avec $a > 0$, les coordonnées de A sont, par exemple $A = (-a, 0)$ et celles de $B = (a, 0)$
3. Pour tout point $M \in \mathcal{P}$ de coordonnées (x, y) et différent de A et B, c'est à dire $M \neq A$ et $M \neq B$, nous avons $\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} -a - x \\ -y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} a - x \\ -y \end{pmatrix}$; d'où :
$$\Rightarrow \cos\left(\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)}\right) = \frac{\left\langle \overrightarrow{MA} \mid \overrightarrow{MB} \right\rangle}{\left\|\overrightarrow{MA}\right\| \left\|\overrightarrow{MB}\right\|} = \frac{x^2 + y^2 - a^2}{\left\|\overrightarrow{MA}\right\| \left\|\overrightarrow{MB}\right\|}$$
$$\Rightarrow \sin\left(\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)}\right) = \frac{\det\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)}{\left\|\overrightarrow{MA}\right\| \left\|\overrightarrow{MB}\right\|} = \frac{\begin{vmatrix} -a - x & a - x \\ -y & -y \end{vmatrix}}{\left\|\overrightarrow{MA}\right\| \left\|\overrightarrow{MB}\right\|} = \frac{2ay}{\left\|\overrightarrow{MA}\right\| \left\|\overrightarrow{MB}\right\|}$$

4. L'équivalence 18.1 s'écrit alors :

$$M \in \Gamma \Longleftrightarrow \frac{\sin\theta\left(x^2+y^2-a^2\right)-2ay\cos\theta}{\left\|\overrightarrow{MA}\right\|\left\|\overrightarrow{MB}\right\|}$$

   Ou encore :

$$M \in \Gamma \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\sin\theta\left(x^2+y^2-a^2\right)-2ay\cos\theta=0\\ \text{Et } M\neq A \text{ et } M\neq B\end{array}\right.$$

5. Nous allons distinguer 2 cas :
   $\Rightarrow$ Si $\theta = k\pi$, alors $\sin\theta = 0$ et $\cos\theta = (-1)^k$ et nous avons :

$$M \in \Gamma \Longleftrightarrow 2ay = 0 \text{ et } M \neq A \text{ et } M \neq B$$

   Γ est donc la droite (AB) privée des points A et B, c'est à dire : $\Gamma = (AB)\setminus\{A,B\}$
   $\Rightarrow$ Si $\theta \neq k\pi$, alors, $\sin k\pi \neq 0$ et nous avons :

$$\sin\theta\left(x^2+y^2-a^2\right)-2ay\cos\theta=0 \Longleftrightarrow x^2+y^2-2y\frac{a\cos\theta}{\sin\theta}=a^2$$

   D'où, nous avons toujours l'équivalence :

$$M\in\Gamma \Longleftrightarrow x^2+y^2-2y\frac{a\cos\theta}{\sin\theta}=a^2 \text{ et } M\neq A \text{ et } M\neq B$$

   Or, en triturant un peu, nous obtenons :

$$x^2+y^2-2y\frac{a\cos\theta}{\sin\theta}=a^2 \Longleftrightarrow x^2+\left(y-\frac{a\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2=a^2+\frac{a^2\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{a^2}{\sin^2\theta}$$

   L'ensemble des points $M\in\mathcal{P}$ de coordonnées (x,y) vérifiant $x^2+\left(y-\frac{a\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2=\frac{a^2}{\sin^2\theta}$ est un cercle $\mathcal{C}$ de centre $C=\left(0,\frac{a\cos\theta}{\sin\theta}\right)$ et de rayon $R=\frac{a}{|\sin\theta|}$
   Ainsi $\Gamma=\mathcal{C}\setminus\{A,B\}$ *(cf figure 18.10)*

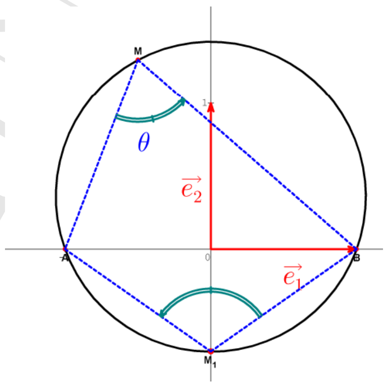

FIGURE 18.10 – L'ensemble Γ

Remarque 16 :

L'ensemble des points $M\in\mathcal{P}$ tels que $\left(\widehat{(MA),(MB)}\right)=\frac{\pi}{2}$ est donc le cercle de centre $\Omega(0,0)$ et de rayon $R=a$.
C'est donc le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[A,B]$ sauf les points A et B

18.4.3 Corollaire

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction $\overrightarrow{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Soient $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ et $\theta \in \mathbb{R}$
On appelle Γ_1 l'ensemble suivant : $\Gamma_1 = \left\{M \in \mathcal{P} \text{ tels que } \widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)} = \theta\right\}$

1. Si $\theta = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors Γ_1 est la droite (AB) privée du segment $[A; B]$, c'est à dire : $\Gamma_1 = (AB) \setminus [A, B]$
2. Si $\theta = (2k+1)\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$ alors Γ_1 est le segment $[A; B]$ privé des points A et B c'est à dire : $\Gamma_1 = [A, B] \setminus \{A, B\}$
3. Si $\theta \neq k\pi$, alors Γ_1 est un arc du cercle $\mathcal{C}$, passant par A et B privé de A et B

Démonstration

Nous allons ré-utiliser l'ensemble $\Gamma = \left\{M \in \mathcal{P} \text{ tels que } \widehat{((MA), (MB))} = \theta\right\}$, les résultats et les notations vus dans le théorème 18.4.2.

1. Tout d'abord, $\Gamma_1 \subset \Gamma$

   En effet, soit $M \in \Gamma_1$; alors $\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)} = \theta$ et donc $\widehat{((MA), (MB))} = \theta$, ce qui veut dire que $M \in \Gamma$.
   Donc $\Gamma_1 \subset \Gamma$
2. On suppose que $\theta = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
   Alors, d'après le théorème 18.4.2, Γ est la droite (AB) privée des points A et B. Ainsi,
   - ⋆ Si le point M est sur le segment $[A; B]$ privé des points A et B, alors $\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)} = 0\,[2\pi]$
   - ⋆ Et si $M \notin [A; B]$ alors $\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)} = \pi\,[2\pi]$

   Donc
   ⇒ Si $\theta = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors Γ_1 est la droite (AB) privée du segment $[A; B]$, c'est à dire : $\Gamma_1 = (AB) \setminus [A, B]$
   ⇒ Si $\theta = (2k+1)\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$ alors Γ_1 est le segment $[A; B]$ privé des points A et B c'est à dire : $\Gamma_1 = [A, B] \setminus \{A, B\}$
3. On suppose maintenant $\theta \neq k\pi$

   Alors, Γ est le cercle de centre $\Omega = \left(0, \dfrac{a\cos\theta}{\sin\theta}\right)$ et de rayon $R = \dfrac{a}{|\sin\theta|}$, passant par les points A et B, mais privé des points A et B
   - ⋆ Soit $M \in \Gamma_1$; alors $M \in \Gamma$ et $\sin\theta = \sin\left(\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)}\right) = \dfrac{\det\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)}{MA \times MB}$
     Or, $\det\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = 2ay$ et nous avons donc $\dfrac{2ay}{MA \times MB} = \sin\theta$.
     Comme $\dfrac{2a}{MA \times MB} > 0$, y et $\sin\theta$ sont de même signe, propriété que nous pouvons traduire par $y\sin\theta > 0$
   - ⋆ Réciproquement, soit $M \in \mathcal{P}$ tel que $M \in \Gamma$ et $y\sin\theta > 0$
     De $M \in \Gamma$, nous tirons $\widehat{((MA), (MB))} = \theta$, ce qui signifie que $\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)} = \theta$ ou $\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)} = \theta + \pi$
     - ▷ Si $\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)} = \theta + \pi$, alors :

$$\sin\left(\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)}\right) = \frac{2ay}{MA \times MB} = \sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$$

       Ce qui signifie, puisque $\dfrac{2a}{MA \times MB} > 0$, que y et $\sin\theta$ sont de signes contraires, ce qui est impossible.

▷ Donc, $\left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) = \theta$, ce qui montre que $M \in \Gamma_1$ et que M parcourt l'arc de cercle de Γ tel que $y \sin\theta > 0$

18.4.4 Théorème

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction $\overrightarrow{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Soient $\Gamma \subset \mathcal{P}$ un cercle de rayon $R > 0$, $A \in \Gamma$, $B \in \Gamma$ tels que $A \neq B$
(T) est la tangente à Γ en A
Alors, pour tout point $M \in \mathcal{P}$ tel que $M \neq A$ et $M \neq B$

$$M \in \Gamma \iff \widehat{((MA), (MB))} = \widehat{((T), (AB))}$$

Démonstration

Nous considérons le cercle Γ, de centre I et passant par A et$B$

1. **Soit $M \in \Gamma$ tel que $M \neq A$ et $M \neq B$**
On appelle (U) la médiatrice du segment $[A; M]$ et (V) la médiatrice du segment $[B; M]$. Alors, de $IM = IA = IB$, puisque I est le centre du cercle Γ, nous tirons que $I \in (U) \cap (V)$. Les 2 médiatrices passent donc par le centre I *(cf figure 18.11)*

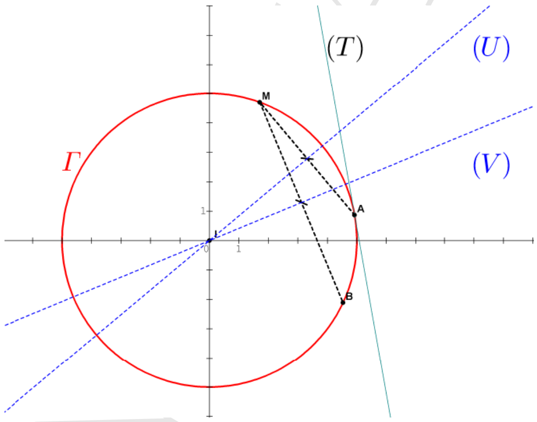

FIGURE 18.11 – Figure de l'énoncé du théorème

⇒ Nous avons, d'après la relation de Chasles :

$$\widehat{((MA), (MB))} = \widehat{((MA), (U))} + \widehat{((U), (V))} + \widehat{((V), (MB))}$$

Comme (U) est la médiatrice du segment $[A; M]$, alors $\widehat{((MA), (U))} = \frac{\pi}{2}$, et, pour les mêmes raisons, comme (V) est la médiatrice du segment $[B; M]$, nous avons $\widehat{((MB), (V))} = \frac{\pi}{2}$, et donc, en termes d'angles de droites :

$$\widehat{((MA), (MB))} = \frac{\pi}{2} + \widehat{((U), (V))} + \frac{\pi}{2} = \widehat{((U), (V))}$$

⇒ Soient $S_{(U)}$ la symétrie orthogonale par rapport à la droite (U), $S_{(V)}$ la symétrie orthogonale par rapport à la droite (V) et $\rho = S_{(V)} \circ S_{(U)}$
ρ est une rotation d'angle 2β où β est l'angle de droites $\beta = \widehat{((U), (V))}$
Ainsi $\widehat{((MA), (MB))} = \widehat{((U), (V))} = \beta$

⇒ Soit (Δ) la médiatrice du segment $[A; B]$
  ⋆ Nous avons aussi $\rho = S_{(\Delta)} \circ S_{(AI)}$

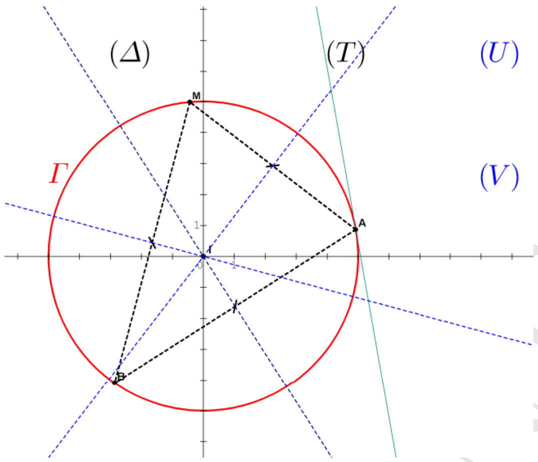

FIGURE 18.12 – Figure de l'énoncé du théorème

En effet, nous asavons que $S_{(\Delta)} \circ S_{(AI)}$ est une rotation de centre I, puisque $(\Delta) \cap (AI) = \{I\}$.
D'autre part, $S_{(\Delta)} \circ S_{(AI)}(A) = S_{(\Delta)}(A) = B$
$S_{(\Delta)} \circ S_{(AI)}$ est donc une rotation de centre I qui transforme A en B

De là, nous déduisons que $\widehat{((AI),(\Delta))} = \widehat{((U),(V))} = \widehat{((MA),(MB))}$

⋆ En suite, nous avons $\widehat{((T),(AB))} = \widehat{((AI),(\Delta))}$
En effet, en utilisant la relation de Chasles :

$$\widehat{((T),(AB))} = \widehat{((T),(AI))} + \widehat{((AI),(\Delta))} + \widehat{((\Delta),(AB))}$$

(T) étant une tangente au cercle Γ et le segment $[A; I]$ étant un rayon du cercle Γ, nous avons $\widehat{((T),(AI))} = \dfrac{\pi}{2}$
De plus, par définition de ce qu'est une médiatrice, nous avons $\widehat{((\Delta),(AB))} = \dfrac{\pi}{2}$.
D'où :

$$\widehat{((T),(AB))} = \frac{\pi}{2} + \widehat{((AI),(\Delta))} + \frac{\pi}{2} = \pi + \widehat{((AI),(\Delta))} = \widehat{((AI),(\Delta))}$$

⋆ Nous concluons que $\widehat{((T),(AB))} = \widehat{((AI),(\Delta))} = \widehat{((MA),(MB))}$

D'où, si $M \in \Gamma$, alors $\widehat{((MA),(MB))} = \widehat{((T),(AB))}$

2. **Réciproquement, soit $M \in \mathcal{P}$ tel que $\widehat{((MA),(MB))} = \widehat{((T),(AB))}$**
Montrons que $M \in \Gamma$.
⇒ Supposons que La droite (MA) soit tangente à Γ en A ; alors $(MA) = (T)$, de telle sorte que :

$$\widehat{((MA),(MB))} = \widehat{((T),(MB))} = \widehat{((T),(AB))}$$

De là, nous tirons que $\widehat{((MB),(AB))} = \widehat{((MB),(T))} + \widehat{((T),(AB))} = 0$, ce qui veut dire que les droites (MB) et (AB) sont parallèles *(ou ont même direction)* et ont un point commun B, et donc les droites (MB) et (AB) sont confondues et donc $M = A$, ce qui est impossible
⇒ Supposons, maintenant que la droite (MA) ne soit pas tangente à Γ en A.
Alors, la droite (MA) coupe le cercle Γ en M', distinct de A et distinct de B
Nous avons, effectivement $M' \neq B$ puisque, si $M' = B$, alors

$$\widehat{((MA),(MB))} = \widehat{((MA),(MM'))} = \pi$$

Et de l'hypothèse $\widehat{((MA),(MB))} = \widehat{((T),(AB))}$, nous tirons $\widehat{((T),(AB))} = \pi$ et donc $(T) = (AB)$; il y a donc contradiction.

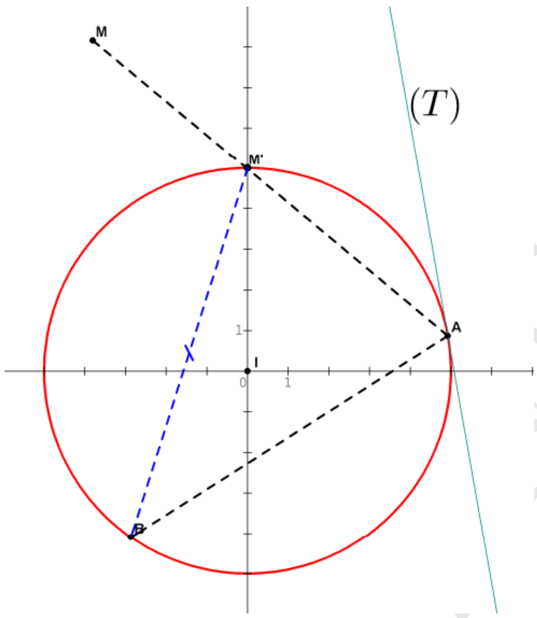

FIGURE 18.13 – Figure de l'énoncé du théorème

D'après ce que nous venons de montrer dans la première parte de cette démonstration, nous avons $(\widehat{(M'A),(M'B)}) = (\widehat{(T),(AB)})$ et donc, de $(\widehat{(MA),(MB)}) = (\widehat{(T),(AB)}) = (\widehat{(M'A),(M'B)})$, nous avons $(\widehat{(M'A),(M'B)}) = (\widehat{(MA),(MB)})$

$\Rightarrow$ Ainsi, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}(\widehat{(MB),(M'B)}) &= (\widehat{(MB),(MA)}) + (\widehat{(MA),(M'B)})\\ &= (\widehat{(M'B),(M'A)}) + (\widehat{(M'A),(M'B)})\\ &= 0\end{aligned}$$

Ce qui veut dire que $(M'B) = (MB)$, et donc que $M = M'$ et $M \in \Gamma$

Remarque 17 :

Etant donnés 3 point sA, B et C non alignés d'un plan $\mathcal{P}$ euclidien ; il n'existe qu'un seul cercle $\mathcal{C}$ passant A, B et C ; c'est le cerrcle circonscrit au triangle ABC donc le centr eest le point de rencontre de smédiatrices des segments $[A,B]$ et $[A,C]$

18.4.5 Théorème

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction $\overrightarrow{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Soient $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ et $C \in \mathcal{P}$ 3 points du plan non alignés.
L'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ qui appartiennent au cecle circonscrit au triangle ABC, est l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que

$$(\widehat{(MA),(MB)}) = (\widehat{(CA),(CB)})$$

Démonstration

Soient A, B et C, 3 points non alignés du plan $\mathcal{P}$ et Γ le cercle circonscrit au triangle ABC.
Si nous appelons $\theta = (\widehat{(CA),(CB)})$, et nous avons $\theta \neq k\pi$ puisque A, B et C ne sont pas alignés.
L'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $(\widehat{(MA),(MB)}) = \theta$ est un cercle passant par A et B. $(\widehat{(MA),(MB)}) = \theta \Longleftrightarrow (\widehat{(MA),(MB)}) = (\widehat{(CA),(CB)})$ est donc le cercle Γ

18.4.6 Théorème

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction $\overrightarrow{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Soient $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$, $C \in \mathcal{P}$ et $D \in \mathcal{P}$ 4 points du plan 2 à 2 distincts.
Les points $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$, $C \in \mathcal{P}$ et $D \in \mathcal{P}$ sont alignés ou cocycliques si et seulement si

$$\left(\widehat{(DA),(DB)}\right) = \left(\widehat{(CA),(CB)}\right)$$

Démonstration

1. **Supposons les points $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$, $C \in \mathcal{P}$ et $D \in \mathcal{P}$ alignés ou cocycliques**
   - ⇒ Supposons les points $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$, $C \in \mathcal{P}$ et $D \in \mathcal{P}$ alignés.
     Alors nous avons $\left(\widehat{(DA),(DB)}\right) = 0$ et $\left(\widehat{(CA),(CB)}\right) = 0$
     Et nous avons bien $\left(\widehat{(DA),(DB)}\right) = \left(\widehat{(CA),(CB)}\right)$
   - ⇒ Supposons, maintenant les points $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$, $C \in \mathcal{P}$ et $D \in \mathcal{P}$ cocycliques, c'est à dire qu'ils appartiennent à un même cercle Γ. Ce cercle contenant les points A, B et C est l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $\left(\widehat{(MA),(MB)}\right) = \left(\widehat{(CA),(CB)}\right)$.
     Comme le point D est sur le cercle Γ, nous avons aussi $\left(\widehat{(DA),(DB)}\right) = \left(\widehat{(CA),(CB)}\right)$
2. **Réciproquement, supposons que nous avons** $\left(\widehat{(DA),(DB)}\right) = \left(\widehat{(CA),(CB)}\right)$
   - ⇒ Si les points A, B et C sont alignés, alors $\left(\widehat{(CA),(CB)}\right) = 0$, et donc $\left(\widehat{(DA),(DB)}\right) = 0$, ce qui veut dire que les points A, D et B sont alignés, et donc les points A, B, C et D sont alignés
   - ⇒ Si les points A, B et C ne sont pas alignés, alors, ils appartiennent à Γ, cercle circonscrit au triangle ABC, et ce cercle Γ, est l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $\left(\widehat{(MA),(MB)}\right) = \left(\widehat{(CA),(CB)}\right)$
   - ⇒ De la relation $\left(\widehat{(DA),(DB)}\right) = \left(\widehat{(CA),(CB)}\right)$, nous en déduisons que $D \in \Gamma$

   Les points $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$, $C \in \mathcal{P}$ et $D \in \mathcal{P}$ sont donc cocycliques