18.5 Quelques exercices corrigés

Exercice 1 :

Dans cet exercice, $\overrightarrow{P}$ est un plan vectoriel euclidien.

1. *Soit $\varphi \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$, c'est à dire que φ est une rotation de $\overrightarrow{P}$.*

   Démontrer que, pour tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{P}$ et tout $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{P}$, nous avons $\left(\widehat{\varphi\left(\overrightarrow{u}\right), \varphi\left(\overrightarrow{v}\right)}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)$

   Par définition d'une rotation $\varphi \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$, nous avons, pour tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{P}$ et tout $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{P}$ $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \varphi\left(\overrightarrow{u}\right)}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{v}, \varphi\left(\overrightarrow{v}\right)}\right)$
   En utilisant la relation de Chasles, nous avons :

$$\left(\widehat{\varphi\left(\overrightarrow{u}\right), \varphi\left(\overrightarrow{v}\right)}\right) = \left(\widehat{\varphi\left(\overrightarrow{u}\right), \overrightarrow{u}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{v}, \varphi\left(\overrightarrow{v}\right)}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)$$

2. *Soit $\sigma \in O^-\left(\overrightarrow{P}\right)$, c'est à dire que, cette fois ci, σ est une symétrie orthogonale de $\overrightarrow{P}$.*

   Démontrer que, pour tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{P}$ et tout $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{P}$, nous avons $\left(\widehat{\sigma\left(\overrightarrow{u}\right), \sigma\left(\overrightarrow{v}\right)}\right) = -\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)$

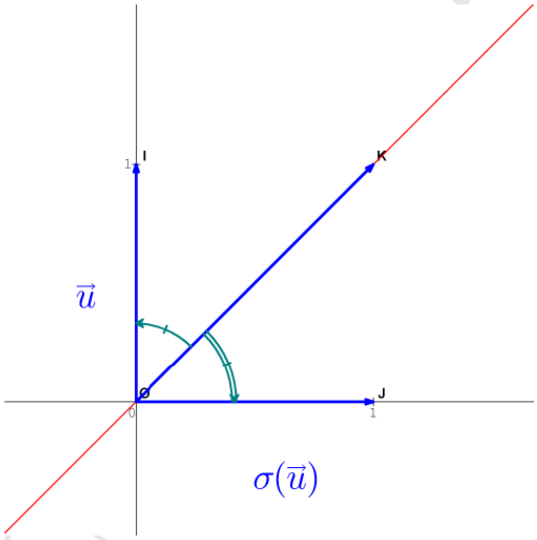

FIGURE 18.14 – Figure de l'exercice

Soit $\sigma \in O^-\left(\overrightarrow{P}\right)$ une symétrie orthogonale de $\overrightarrow{P}$, $\overrightarrow{d}$ la droite vectorielle qui est l'axe de symétrie et $\overrightarrow{i}_{\overrightarrow{d}}$ un vecteur unitaire, base de $\overrightarrow{d}$.

Par définition d'une symétrie orthogonale, nous avons $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{i}_{\overrightarrow{d}}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{i}_{\overrightarrow{d}}, \sigma\left(\overrightarrow{u}\right)}\right)$
Ainsi :

$$\begin{aligned}
\left(\widehat{\sigma\left(\overrightarrow{u}\right), \sigma\left(\overrightarrow{v}\right)}\right) &= \left(\widehat{\sigma\left(\overrightarrow{u}\right), \overrightarrow{i}_{\overrightarrow{d}}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{i}_{\overrightarrow{d}}, \overrightarrow{u}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{i}_{\overrightarrow{d}}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{i}_{\overrightarrow{d}}, \sigma\left(\overrightarrow{v}\right)}\right) \\
&= 2\left(\widehat{\overrightarrow{i}_{\overrightarrow{d}}, \overrightarrow{u}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) + 2\left(\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{i}_{\overrightarrow{d}}}\right) \\
&= 2\left(\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) \\
&= \left(\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}}\right) = -\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\left(\widehat{\sigma\left(\overrightarrow{u}\right), \sigma\left(\overrightarrow{v}\right)}\right) = -\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)$
Ce que nous voulions

Exercice 2 :

Dans cet exercice, $\overrightarrow{P}$ est un plan vectoriel euclidien.

1. *Soit ABC un triangle rectangle en A et soit O le milieu de l'hypothénuse $[B,C]$. Démontrer que :*

$$\widehat{\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)} = 2\widehat{\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)}$$

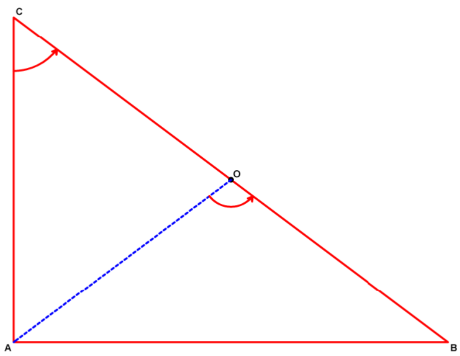

FIGURE 18.15 – Figure de l'exercice

Le point O, milieu de l'hypothénuse, est le centre du cercle circonscrit et les triangles OCA et OAB sont isocèles en O.
Nous avons donc $\widehat{\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AC}\right)}$.
Donc :

$$\widehat{\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AC}\right)} = 2\widehat{\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)}$$

Ce que nous voulions.

2. *Nous considérons 3 points A, B et C, 2 à 2 distincts appartenant à un même cercle Γ de centre O. Il faut démontrer que :*

$$\widehat{\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)} = 2\widehat{\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)}$$

Nous appelons C' le symétrique de C par rapport à O *(cf figure 18.16)*. Alors :
- ⋆ $C' \in \Gamma$ et $[CC']$ est un diamètre de Γ
- ⋆ Les triangles $CC'A$ et CBC' sont rectangles et O apparaît comme le centre du cercle circonscrit à ces 2 triangles

D'après la question précédente, nous avons $\widehat{\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC'}\right)} = 2\widehat{\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CC'}\right)}$ et $\widehat{\left(\overrightarrow{OC'},\overrightarrow{OB}\right)} = 2\widehat{\left(\overrightarrow{CC'},\overrightarrow{CB}\right)}$, ce qui fait qu'en additionnant membres à membres :

$$\widehat{\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC'}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{OC'},\overrightarrow{OB}\right)} = 2\widehat{\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CC'}\right)} + 2\widehat{\left(\overrightarrow{CC'},\overrightarrow{CB}\right)} \iff \widehat{\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)} = 2\widehat{\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)}$$

Exercice 3 :

Le plan affine $\mathcal{P}$ est euclidien et rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$. H est un point différent de O et nous notons :

$$d = OH \text{ et } \alpha = \widehat{\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{OH}\right)}$$

Trouver une équation cartésienne de la droite passant par H et orthogonale à la droite (OH)

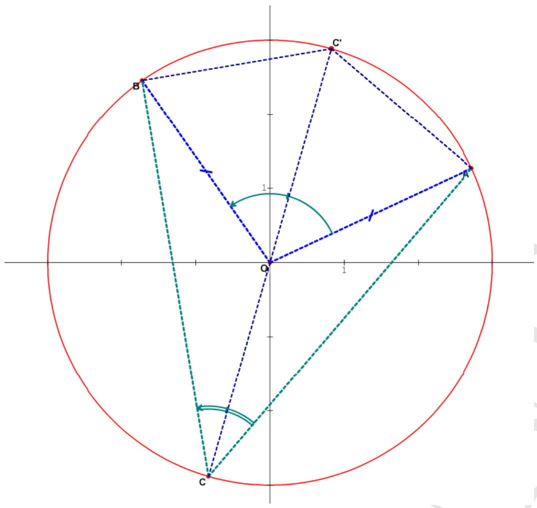

FIGURE 18.16 – Figure de l'exercice

Voilà une question qui pose peu de difficulté.
Tout d'abord, $\overrightarrow{OH} = d\cos\alpha\,\overrightarrow{i} + d\sin\alpha\,\overrightarrow{j}$ et les points $M \in \mathcal{P}$ qui se situent sur a droite passant par H et orthogonale à la droite (OH) vérifient la relation :

$$\left\langle \overrightarrow{MH} \mid \overrightarrow{OH} \right\rangle = 0$$

Or, si $M = (x, y)$, nous avons $\overrightarrow{MH} = \begin{pmatrix} d\cos\alpha - x \\ d\sin\alpha - y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{oH} = \begin{pmatrix} d\cos\alpha \\ d\sin\alpha \end{pmatrix}$, de telle sorte que :

$$\left\langle \overrightarrow{MH} \mid \overrightarrow{OH} \right\rangle = d^2\cos^2\alpha - d\cos\alpha x + d^2\sin^2\alpha - d\sin\alpha y = 0 \Longleftrightarrow \cos\alpha x + \sin\alpha y - d = 0$$

Une équation cartésienne est donc : $\cos\alpha x + \sin\alpha y - d = 0$

Exercice 4 :

Le plan affine $\mathcal{P}$ est euclidien et rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Soient $A \in \mathcal{P}$ et $A_1 \in \mathcal{P}$, 2 points dont les coordonnées sont $A = (-2, 0)$ et $A_1 = (1, 0)$

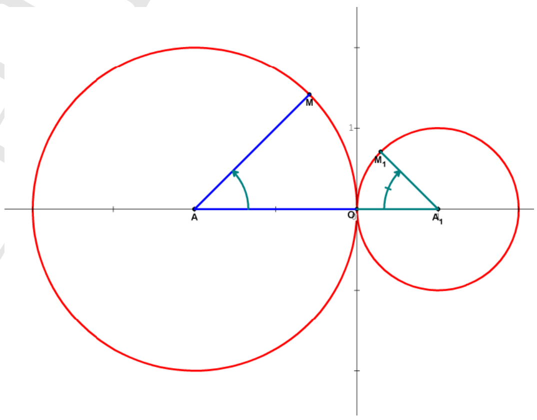

FIGURE 18.17 – Figure de l'exercice

1. *Quelle est l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 2 et du cercle $\mathcal{C}_1$ de centre A_1 et de rayon 1.*

   Voilà une question facile !!

→ Pour le cercle $\mathcal{C}$, c'est $(x+2)^2 + y^2 = 4$
→ Pour le cercle $\mathcal{C}_1$, c'est $(x-1)^2 + y^2 = 1$

2. *À tout point $M \in \mathcal{C}$, on associe le point $M_1 \in \mathcal{C}_1$ tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{A_1O}, \overrightarrow{A_1M_1}\right)} = -\widehat{\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}\right)}$ Exprimer les coordonnées ds points M et M_1 en fonction de la mesure α de l'angle $\widehat{\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}\right)}$*

   → Pour commencer, nous avons $\overrightarrow{AM} = 2\cos\alpha\,\overrightarrow{i} + 2\sin\alpha\,\overrightarrow{j}$, d'où nous obtenons, au niveau des coordonnées :
$$\begin{pmatrix} x+2 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\alpha \\ 2\sin\alpha \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = & -2+2\cos\alpha \\ y = & 2\sin\alpha \end{cases}$$
   Et donc $M = (-2+2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$

   → Ensuite, nous avons $\overrightarrow{A_1M_1} = \cos(\pi+\alpha)\,\overrightarrow{i} + \sin(\pi+\alpha)\,\overrightarrow{j} = -\cos\alpha\,\overrightarrow{i} - \sin\alpha\,\overrightarrow{j}$, d'où nous obtenons, au niveau des coordonnées :
$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = & 1-\cos\alpha \\ y = & -\sin\alpha \end{cases}$$
   Et donc $M_1 = (1-\cos\alpha, -\sin\alpha)$

3. *Ecrire l'équation cartésienne de la médiatrice du segment $[M, M_1]$.*

   Ce n'est pas très difficile!!. C'est la droite qui passe par le milieu I du segment $[M, M_1]$ et qui est orthogonale au vecteur $\overrightarrow{MM_1}$

   ⇒ Le milieu I du segment $[M, M_1]$ a pour coordonnées $I = \left(\dfrac{-1+\cos\alpha}{2}, \dfrac{\sin\alpha}{2}\right)$

   ⇒ Le vecteur $\overrightarrow{MM_1}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{MM_1} = \begin{pmatrix} 3-3\cos\alpha \\ -3\sin\alpha \end{pmatrix}$

   ⇒ $X \in \mathcal{P}$ est un point de la médiatrice du segment $[M, M_1]$ si et seulement si $\left\langle \overrightarrow{IX} \mid \overrightarrow{MM_1} \right\rangle = 0$, c'est à dire si et seulement si :
$$\left(x - \frac{-1+\cos\alpha}{2}\right)(3-3\cos\alpha) + \left(y - \frac{\sin\alpha}{2}\right)(3\sin\alpha) = 0$$
$$\iff$$
$$(1-\cos\alpha)(2x + (1-\cos\alpha)) + \sin\alpha\,(2y - \sin\alpha) = 0$$

Exercice 5 :

Soit $\overrightarrow{P}$ un plan vectoriel euclidien orienté par une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$

1. *Soient $\overrightarrow{D}$, $\overrightarrow{D_1}$, $\overrightarrow{\Delta}$ et $\overrightarrow{\Delta_1}$ 4 droites vectorielles. Démontrez l'équivalence suivante :*
$$\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{\Delta}, \overrightarrow{\Delta_1}\right)} \iff \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{\Delta}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{\Delta_1}\right)}$$
   Voir figure 18.18

   Il n'y a pas de grosses difficultés; il suffit d'utiliser la relation de Chasles.

   Supposons donc que $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{\Delta}, \overrightarrow{\Delta_1}\right)}$, alors :
$$\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{\Delta}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{\Delta_1}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{\Delta_1}, \overrightarrow{\Delta}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{\Delta_1}\right)}$$
   Car, par hypothèses, $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{\Delta_1}, \overrightarrow{\Delta}\right)} = 0_{\mathbb{A}}$

2. *En déduire que si $\overrightarrow{\Delta} \perp \overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{\Delta_1} \perp \overrightarrow{D_1}$, nous avons alors $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{\Delta}, \overrightarrow{\Delta_1}\right)}$*

   IL n'y a pas grande difficulté. c'est l'application simple de la question précédente!!

   Nous avons $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{\Delta}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{\Delta_1}\right)} = \dfrac{\pi}{2}$ et donc $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{\Delta}, \overrightarrow{\Delta_1}\right)}$

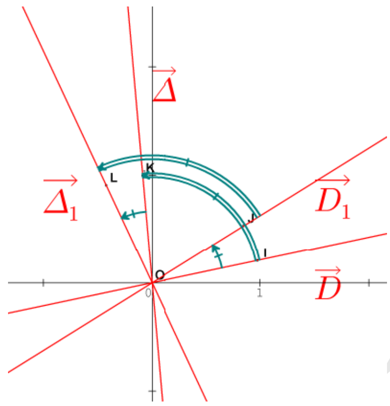

FIGURE 18.18 – Figure de l'exercice

Exercice 6 :

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction $\overrightarrow{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Soit $(D) \subset \mathcal{P}$. On considère 2 points $A \in (D)$ et $A' \in (D)$ tels que $A \neq A'$. (D') est une droite passant par A' et orthogonale à (D).

A toute droite Δ passant par A, on associe une droite Δ' passant par A' telle que $\widehat{(\Delta, (D))} = \widehat{(\Delta', (D'))}$.
Il faut démontrer que Δ et Δ' sont orthogonales

Pas très difficile ; il suffit d'utiliser la relation de Chasles
Nous avons $\widehat{(\Delta, \Delta')} = \widehat{(\Delta, (D))} + \widehat{((D), (D'))} + \widehat{((D'), \Delta')}$
Comme $\widehat{(\Delta, (D))} + \widehat{((D'), \Delta')} = 0$ et que $\widehat{((D), (D'))} = \dfrac{\pi}{2}$, nous avons $\widehat{(\Delta, \Delta')} = \dfrac{\pi}{2}$
Ce qui montre que les 2 droites Δ et Δ' sont orthogonales