Chapitre 18

Orientation de l'espace
Produit vectoriel

18.1 Orientation de l'espace

18.1.1 Définition et théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel eucliedien de dimension 3 et $\mathcal{B}$ l'ensemble des bases orthonormées de E
On définit dans $\mathcal{B}$ la relation $\mathcal{R}$ suivante par :

$$(\forall B \in \mathcal{B})\,(\forall B' \in \mathcal{B})\,(B\mathcal{R}B') \Longleftrightarrow \left(\exists R \in \mathcal{O}^+(E)\right) \textbf{ tel que } (B' = R(B))$$

Alors :

1. **$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{B}$**
2. **L'ensemble des classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$, noté $\mathcal{B}/\mathcal{R}$ n'a que deux éléments.**
3. **Orienter le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, c'est choisir arbitrairement un élément $\dot{B}_0 \in \mathcal{B}/\mathcal{R}$. Tous les éléments de $\dot{B}_0$ sont appelés bases orthonormées directes (ou positives)**
4. **Toutes les autres bases sont les bases orthonormées indirectes (ou négatives)**

Remarque 1 :

1. Qu'est ce que cela veut dire qu'il existe $R \in \mathcal{O}^+(E)$ tel que $B' = R(B)$? Ceci veut donc dire qu'il existe une **rotation** R, telle que que si $B = \left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ et $B' = \left\{\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'}\right\}$ sont deux bases orthonormées de E, alors :
$$\overrightarrow{i'} = R\left(\overrightarrow{i}\right) \quad \overrightarrow{j'} = R\left(\overrightarrow{j}\right) \quad \overrightarrow{k'} = R\left(\overrightarrow{k}\right)$$
2. Il est clair que cette définition peut aussi s'appliquer à un plan P de dimension 2 ; dans le plan vectoriel P, il existe donc des bases orthonormées directes ou indirectes.
3. Et plus généralement si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension n, il est tout à fait possible de définir une orientation de E

Démonstration

Nous allons démontrer 18.1.1

1. $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence
   $\Rightarrow$ Elle est réflexive
   En effet, pour tout $B \in \mathcal{B}$, il existe $R \in \mathcal{O}^+(E)$ telle que $B = R(B)$, et cette rotation est $R = \mathrm{Id}_E$

⇒ Elle est symétrique
Soient $B \in \mathcal{B}$ et $B' \in \mathcal{B}$ telles que $B\mathcal{R}B'$, c'est à dire qu'il existe $R \in \mathcal{O}^+(E)$ telle que $B' = R(B)$
clairement, nous avons $B = R^{-1}(B')$ et donc $B'\mathcal{R}B$.
La relation $\mathcal{R}$ est donc symétrique.

⇒ Elle est transitive
Soient donc $B \in \mathcal{B}$, $B' \in \mathcal{B}$ et $B'' \in \mathcal{B}$ telles que $B\mathcal{R}B'$ et $B'\mathcal{R}B''$
Il existe $R_1 \in \mathcal{O}^+(E)$ telle que $B' = R_1(B)$ et $R_2 \in \mathcal{O}^+(E)$ telle que $B'' = R_2(B')$
Alors, par composition $B'' = R_2 \circ R_1(B)$. Comme $\mathcal{O}^+(E)$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$, nous avons $R_2 \circ R_1 \in \mathcal{O}^+(E)$ et donc $B''\mathcal{R}B$
la relation $\mathcal{R}$ est donc transitive

Et donc, la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence

2. $\mathcal{B}/\mathcal{R}$ n'a que deux classes d'équivalence
   ⋆ Tout d'abord, il y a au moins 2 classes d'équivalences.
   En effet ; prenons E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 et $B = \left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ une base orthonormée de E. $B' = \left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, -\overrightarrow{k}\right\}$ est aussi une base orthonormée de E, et l'application φ qui transforme B en B' est une transformation orthogonale ($\varphi \in \mathcal{O}(E)$). La matrice de φ dans la base B est donnée par :
   $$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   C'est la matrice d'une symétrie orthogonale et donc $\varphi \in \mathcal{O}^-(E)$. B et B' ne sont pas en relation et appartiennent donc à 2 classes différentes.
   ⋆ Il n'y a que 2 classes
   Soient $B \in \mathcal{B}$ et $S \in \mathcal{O}^-(E)$; on appelle $B' = S(B)$; alors B' est une base orthonormée, c'est à dire $B' \in \mathcal{B}$, mais, comme ci-dessus, B et B' ne sont pas en relation.
   Soit $B'' \in \mathcal{B}$ une troisième base orthonormée.
   Il existe un et un seul endomorphisme orthogonal $\varphi \in \mathcal{O}(E)$ tel que $\varphi(B) = B''$
   De même, il existe un et un seul endomorphisme orthogonal $\psi \in \mathcal{O}(E)$ tel que $\psi(B'') = B'$
   Ainsi, $\psi \circ \varphi(B) = B'$, c'est à dire $\psi \circ \varphi = S \in \mathcal{O}^-(E)$. Il y a donc 2 possibilités
   → Ou bien $\psi \in \mathcal{O}^-(E)$ et $\varphi \in \mathcal{O}^+(E)$ et donc nous avons $B''\mathcal{R}B$
   → Ou bien $\psi \in \mathcal{O}^+(E)$ et $\varphi \in \mathcal{O}^-(E)$ et donc nous avons $B''\mathcal{R}B'$
   Il y a donc, exactement, 2 classes d'équivalences.

18.1.2 Théorème : dans le cas du plan vectoriel

Soit $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$ une base orthonormée du plan vectoriel P
Pour qu'une base orthonormée $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ soit de même orientation que $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$, il faut et il suffit que
$$\det_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}}(\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}) = +1$$

Démonstration

1. Si la base $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ est de même orientation que $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$, il existe une rotation $r \in \mathcal{O}(P)$ telle que $r\left(\overrightarrow{i}\right) = \overrightarrow{u}$ et $r\left(\overrightarrow{j}\right) = \overrightarrow{v}$. La matrice de r est donnée par :
$$\mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}}(r) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ avec } a^2 + b^2 = 1$$
Nous avons donc $\overrightarrow{u} = r\left(\overrightarrow{i}\right) = a\overrightarrow{i} - b\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = r\left(\overrightarrow{j}\right) = b\overrightarrow{i} + a\overrightarrow{j}$, et donc :
$$\det_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}}(\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}) = \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 = 1$$

2. Réciproquement, si $\det_{\{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\}}(\{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\}) = +1$

   Ecrivons $\overrightarrow{u} = \lambda_1\overrightarrow{i} + \lambda_2\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = \mu_1\overrightarrow{i} + \mu_2\overrightarrow{j}$. Comme $\{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\}$ est une base orthonormée, nous avons :

   $\star\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$ $\quad\star\ \mu_1^2 + \mu_2^2 = 1$ $\quad\star\ \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 = 0$

   Et nous avons en plus $\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2 = 1$

   Si $\varphi \in \mathcal{O}(P)$ est l'endomorphisme orthogonal tel que $\varphi\left(\overrightarrow{i}\right) = \overrightarrow{u}$ et $\varphi\left(\overrightarrow{j}\right) = \overrightarrow{v}$, la matrice de φ dans la base $\left\{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right\}$ est donnée par :

   $$\mathcal{M}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{pmatrix}$$

   Nous sommes dans le même problème que celui de la proposition 15.3.2, avec comme contrainte supplémentaire d'un déterminant $\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2 = 1$

   D'où $\lambda_2 = -\mu_1$ et $\mu_2 = \lambda_1$; nous trouvons alors comme matrice de φ, la matrice

   $$\mathcal{M}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ -\mu_1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

   qui est une matrice de rotation.

   Nous concluons donc que la base orthonormée $\{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\}$ est de même orientation que la base $\left\{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right\}$

Exercice 1 :

Soit P un plan vectoriel orienté par la base $\left\{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right\}$. Les bases suivantes sont -elles directes ? Indirectes ?

1. $\left\{\overrightarrow{j},-\overrightarrow{i}\right\}$
2. $\left\{\overrightarrow{i},-\overrightarrow{j}\right\}$
3. $\left\{-\overrightarrow{j},-\overrightarrow{i}\right\}$
4. $\left\{-\overrightarrow{i},-\overrightarrow{j}\right\}$
5. $\left\{-\overrightarrow{j},\overrightarrow{i}\right\}$
6. $\left\{\overrightarrow{j},\overrightarrow{i}\right\}$

18.1.3 Théorème

Soit P un plan vectoriel orienté par la base $\left\{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right\}$. Alors
Pour tout vecteur unitaire $\overrightarrow{u} \in P$ il existe un et un seul vecteur unitaire $\overrightarrow{v} \in P$ tel que $\{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\}$ soit une base orthonormée directe de P

Démonstration

Soit $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur unitaire de P. Alors $x^2 + y^2 = 1$.

Il existe 2 vecteurs orthogonaux à $\overrightarrow{u}$:

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{v'} = -\overrightarrow{v}$$

$\{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\}$ et $\{\overrightarrow{u},-\overrightarrow{v}\}$ forment des bases orthonormées du plan ; c'est une symétrie qui fait passer de l'une à l'autre, et donc une seule des deux est directe.

$$\det_{\{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\}}(\{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\}) = \begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2 + y^2 = 1$$

Nous avons, bien entendu $\det_{\{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\}}(\{\overrightarrow{u},-\overrightarrow{v}\}) = -1$ et donc, seul le vecteur $\overrightarrow{v}$ convient

18.1.4 En dimension 3

Soit $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ une base orthonormée de E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3

Pour qu'une base orthonormée $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ soit de même orientation que $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$, il faut et il suffit que

$$\det_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}}(\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}) = +1$$

<u>Démonstration</u>

La démonstration en est très simple et semblable à 18.1.2 puisque qu'une matrice de rotation dans l'espace de dimension 3 a, elle aussi, un déterminant égal à 1.

Exercice 2 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 orienté par la base orthonormée $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$. Quelles sont les orientations des bases suivantes ?

1. $\left\{\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{i}\right\}$
2. $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{j}\right\}$
3. $\left\{\overrightarrow{k}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{i}\right\}$
4. $\left\{\overrightarrow{k}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$
5. $\left\{-\overrightarrow{i}, -\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$
6. $\left\{-\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$
7. $\left\{\overrightarrow{i}, -\overrightarrow{j}, -\overrightarrow{k}\right\}$

18.1.5 Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3

Soient $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ 2 vecteurs unitaires et orthogonaux de E, c'est à dire $\left\langle \overrightarrow{i} \mid \overrightarrow{j}\right\rangle = 0$ et $\left\|\overrightarrow{i}\right\| = \left\|\overrightarrow{j}\right\| = 1$.

Alors Il existe un et un seul vecteur unitaire $\overrightarrow{k}$ tel que $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ soit une base orthonormée directe de E

<u>Démonstration</u>

Soient $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ 2 vecteurs unitaires et orthogonaux de E et P le plan engendré par $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$.
Soit D la droite orthogonale à P et $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire, base de D
$\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ sera une base orthonormée de E si et seulement si $\overrightarrow{k} = \pm\overrightarrow{u}$. Or, les bases orthonormées $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{u}\right\}$ et $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, -\overrightarrow{u}\right\}$ n'ont pas la même orientation. d'où le résultat

Remarque 2 :

On démontre de même que :

1. Si $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{k}$ sont 2 vecteurs unitaires et orthogonaux de E, il existe un seul vecteur unitaire $\overrightarrow{j}$ tel que $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ soit une base orthonormée directe de E
2. Si $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont 2 vecteurs unitaires et orthogonaux de E, il existe un seul vecteur v $\overrightarrow{i}$ tel que $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ soit une base orthonormée directe de E

18.1.6 Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 euclidien et orienté

Soit P un plan vectoriel de E et D la droite orthogonale à P

1. **Si P est orienté, alors il existe un unique vecteur unitaire $\overrightarrow{w} \in D$ telle que si $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ est une base directe de P alors $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ est une base directe de E**
2. **<u>Réciproquement</u>, orienter le plan P par un vecteur unitaire $\overrightarrow{k} \in D$, c'est convenir que la base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \right\}$ est directe si la base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ est directe.**

Démonstration

1. Supposons P orienté, et soit $\{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\}$ une base directe de P. D'après le théorème 18.1.5, il existe un seul vecteur $\overrightarrow{w}\in D$ tel que $\{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\}$ soit une base directe de E
2. Soit $\overrightarrow{k}\in D$ un vecteur unitaire fixé. Nous allons montrer que, pour toute base orthonormée $\{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\}$ et $\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{v_1}\}$ de P, nous avons l'équivalence :

$$\begin{gathered}\{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\} \text{ et } \{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{v_1}\} \text{ ont même orientation}\\ \text{si et seulement si}\\ \left\{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{k}\right\} \text{ et } \left\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{k}\right\} \text{ ont même orientation}\end{gathered}$$

   (a) <u>Supposons que $\{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\}$ et $\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{v_1}\}$ sont 2 bases orthonormées de P qui ont même orientation</u>

   Il existe donc une rotation $r\in\mathcal{O}^+(P)$ telle que $r(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u_1}$ et $r(\overrightarrow{v})=\overrightarrow{v_1}$.
   Il existe donc $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ avec $a^2+b^2=1$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{rl}\overrightarrow{u_1}= & a\overrightarrow{u}-b\overrightarrow{v}\\ \overrightarrow{v_1}= & a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v}\end{array}\right.$$

   Les 2 bases $\left\{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{k}\right\}$ et $\left\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{k}\right\}$ sont deux bases orthonormées de E

   Soit $\varphi\in\mathcal{O}(E)$ telle que $\varphi(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u_1}$, $\varphi(\overrightarrow{v})=\overrightarrow{v_1}$ et $\varphi\left(\overrightarrow{k}\right)=\overrightarrow{k}$ Alors, la matrice de φ dans la base $\left\{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{k}\right\}$ est donnée par :

$$\begin{pmatrix}a & b & 0\\ -b & a & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

   C'est une matrice de rotation ; φ est donc une rotation et les 2 bases orthonormées $\left\{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{k}\right\}$ et $\left\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{k}\right\}$ ont même orientation.

   (b) <u>Supposons que $\left\{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{k}\right\}$ et $\left\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{k}\right\}$ sont 2 bases orthonormées de E qui ont même orientation</u>

   Il existe alors une rotation $\rho\in\mathcal{O}^+(E)$ telle que $\rho(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u_1}$, $\rho(\overrightarrow{v})=\overrightarrow{v_1}$ et $\rho\left(\overrightarrow{k}\right)=\overrightarrow{k}$. La matrice de ρ dans la base $\left\{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{k}\right\}$ est donnée par :

$$\mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{k}\right\}}(\rho)=\begin{pmatrix}a & -b & 0\\ b & a & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \text{ avec } a^2+b^2=1$$

   Si ψ est la restriction de ρ à P, nous avons $\psi(\overrightarrow{u})=\rho(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u_1}$, $\psi(\overrightarrow{v})=\rho(\overrightarrow{v})=\overrightarrow{v_1}$, et la matrice de ψ dans la base $\{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\}$ est donnée par :

$$\mathcal{M}_{\{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\}}(\psi)=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix} \text{ avec } a^2+b^2=1$$

   Qui est la matrice d'une rotation.
   Donc les bases orthonormées $\{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\}$ et $\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{v_1}\}$ ont même orientation dans P

Remarque 3 :

Il faut remarquer que le choix du vecteur $\overrightarrow{k}$ directeur de la droite D détermine l'orientation du plan P qui lui est orthogonal.

18.1.7 Mesure d'une rotation vectorielle d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E orienté de dimension 3

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté et ρ une rotation de E
$\overrightarrow{k}$ est un vecteur unitaire invariant par ρ et P est le plan orthogonal à $\overrightarrow{k}$
On sait que $\psi = \rho_{|P}$ est une rotation du plan P
On appelle mesure en radians de la rotation vectorielle ρ relativement à $\overrightarrow{k}$ toute mesure en radians de la rotation vectorielle $\psi = \rho_{|P}$ dans le plan vectoriel P orienté par $\overrightarrow{k}$

18.1.8 Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et ρ une rotation vectorielle de E de mesure x relativement à un vecteur $\overrightarrow{k}$ invariant par ρ. Alors
La matrice de ρ dans une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{k}\right\}$ est donnée par :

$$\mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{k}\right\}}(\rho) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration

Soit x la mesure de l'angle de la rotation ρ. L'axe de la rotation, c'est à dire le vecteur $\overrightarrow{k}$ détermine une orientation du plan qui lui est orthogonal. Soit donc $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ une base orthonormée directe de $P = \left\{\overrightarrow{k}\right\}^{\perp}$.
On appelle $\psi = \rho_{|P}$ la restriction de la rotation ρ à P ; alors, la matrice de ψ dans la base $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ est donnée par :

$$\mathcal{M}_{\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

Et donc, la matrice de ρ dans une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{k}\right\}$ est donnée par :

$$\mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{k}\right\}}(\rho) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque 4 :

1. Une rotation ρ d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 est donc entièrement déterminée par son vecteur invariant $\overrightarrow{k}$ et sa mesure x *(modulo 2π)* autour du vecteur $\overrightarrow{k}$
2. Si $x = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $\rho = \mathrm{Id}_E$
3. Si $x = (2k+1)\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors ρ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par $\overrightarrow{k}$

18.1.9 Quelques exercices

Exercice 3 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté par la base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right\}$. Nous appelons φ_1 la rotation vectoriele de mesure $\dfrac{\pi}{2}$ et d'axe $\overrightarrow{i}$ et par φ_2 la rotation vectoriele de mesure $\dfrac{\pi}{2}$ et d'axe $\overrightarrow{j}$.

1. Déterminer, par ses coordonnées, un vecteur unitaire $\overrightarrow{k_1}$ invariant par la rotation $\varphi_2 \circ \varphi_1$

2. Déterminer, par leurs coordonnées, deux vecteurs unitaires $\overrightarrow{i_1}$ et $\overrightarrow{j_1}$ tels que $\left\{\overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}; \overrightarrow{k_1}\right\}$ soit une base orthonormée directe de E
3. Démontrer que si x est une mesure de l'angle de la rotation $\varphi_2 \circ \varphi_1$ d'axe $\overrightarrow{k_1}$, nous avons :

$$\left\langle \overrightarrow{i_1} \mid \varphi_2 \circ \varphi_1 \left(\overrightarrow{i_1}\right)\right\rangle = \cos x \quad \text{et} \quad \left\langle \overrightarrow{j_1} \mid \varphi_2 \circ \varphi_1 \left(\overrightarrow{j_1}\right)\right\rangle = \sin x$$

   En déduire x

Exercice 4 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté par la base orthonormée directe $\mathcal{B}_0 = \left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right\}$. On donne les vecteurs :

$$\overrightarrow{I} = \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}\right) \quad \overrightarrow{J} = \frac{1}{3}\left(-\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}\right) \quad \overrightarrow{K} = \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}\right)$$

1. Vérifier que la famille $\left\{\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}; \overrightarrow{K}\right\}$ forme une base orthonormée
2. Donner la définition analytique de la transformation orthogonale φ qui transforme la base $\mathcal{B}_0$ en la base $\left\{\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}; \overrightarrow{K}\right\}$
3. Montrer que φ est une rotation dont l'axe est engendré par le vecteur $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.
4. Soit P le plan vectoriel orthogonal au vecteur $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ et orienté par le vecteur unitaire $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\right)$.
   Calculer la mesure de la restriction de φ à P