18.2 Le produit vectoriel

18.2.1 Définition du produit vectoriel

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3
Soient $\overrightarrow{u} \in E$ et $\overrightarrow{v} \in E$ 2 vecteurs de E
On appelle produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ par $\overrightarrow{v}$ le vecteur noté $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ ainsi défini :

1. **Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ alors $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$**
2. **Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$**

   Soit $P = \{\overrightarrow{u}\}^{\perp}$ le plan orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et Π la projection orthogonale sur $P = \{\overrightarrow{u}\}^{\perp}$
   Soit ρ la rotation de mesure $\frac{\pi}{2}$ et d'axe $\overrightarrow{u}$

   Alors : $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \, \rho \circ \Pi(\overrightarrow{v})$

Remarque 5 :

1. Il est tout à fait clair que $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est orthogonal à la fois à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$, c'est à dire que $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \in \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}^{\perp}$
2. Nous avons donc $\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \rangle = 0$
3. Une autre écriture de $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ peut être donnée par :
$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \sin\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) \overrightarrow{k}$$
4. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien d'espace directeur E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. On définit sur $\mathcal{E}$ un produit vectoriel en posant, pour tout $A \in \mathcal{E}$, tout $B \in \mathcal{E}$, tout $C \in \mathcal{E}$ et tout $D \in \mathcal{E}$:
$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD}$$

18.2.2 Proposition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3
Alors, pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, tout $\overrightarrow{v_1} \in E$, tout $\overrightarrow{v_2} \in E$, tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $\mu \in \mathbb{R}$:
$$\overrightarrow{u} \wedge (\lambda \overrightarrow{v_1} + \mu \overrightarrow{v_2}) = \lambda (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v_1}) + \mu (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v_2})$$

Démonstration

1. Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, par la définition du produit vectoriel, l'égalité est toujours vérifiée.
2. Supposons, maintenant, $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ Alors :
$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \wedge (\lambda \overrightarrow{v_1} + \mu \overrightarrow{v_2}) &= \|\overrightarrow{u}\| \times \rho \circ \Pi (\lambda \overrightarrow{v_1} + \mu \overrightarrow{v_2}) \\ &= \|\overrightarrow{u}\| \times \lambda \rho \circ \Pi (\overrightarrow{v_1}) + \mu \rho \circ \Pi (\overrightarrow{v_2}) \text{ par linéarité} \\ &= \lambda \|\overrightarrow{u}\| \rho \circ \Pi (\overrightarrow{v_1}) + \mu \|\overrightarrow{u}\| \rho \circ \Pi (\overrightarrow{v_2}) \\ &= \lambda (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v_1}) + \mu (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v_2}) \end{aligned}$$
   Ce que nous voulions

18.2.3 Proposition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ une base orthonormée directe de E. Alors :
$$\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \qquad \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} \qquad \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}$$

Démonstration

Nous ne démontrons que la première égalité $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}$
Nous avons, par définition du produit vectoriel :

$$\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \left\| \overrightarrow{i} \right\| \times \rho \circ \Pi \left(\overrightarrow{j} \right) = \rho \circ \Pi \left(\overrightarrow{j} \right)$$

Comme $\left\{ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k} \right\}$ est une base directe de E, le plan orthogonal à $\overrightarrow{i}$ admet pour base directe $\left\{ \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k} \right\}$ et donc $\Pi \left(\overrightarrow{j} \right) = \overrightarrow{j}$ et $\rho \left(\overrightarrow{j} \right) = \overrightarrow{k}$
D'où $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}$

Exercice 5 :

Montrer les deux autres égalités : $\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}$

18.2.4 Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3
Le produit vectoriel de 2 vecteurs est nul si et seulement si ces 2 vecteurs sont linéairement dépendants

Démonstration

1. Soient $\overrightarrow{u} \in E$ et $\overrightarrow{v} \in E$. Supposons $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$
   (a) Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ et les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont bien linéairement dépendants
   (b) Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \, \rho \circ \Pi \left(\overrightarrow{v} \right) = \overrightarrow{0}$.
   Comme $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, alors $\|\overrightarrow{u}\| \neq 0$ et donc $rho \circ \Pi \left(\overrightarrow{v} \right) = \overrightarrow{0}$.
   La rotation ρ étant bijective, $\Pi \left(\overrightarrow{v} \right) = \overrightarrow{0}$, c'est à dire que $\overrightarrow{v}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$
2. Soient $\overrightarrow{u} \in E$ et $\overrightarrow{v} \in E$ 2 vecteurs colinéaires
   Alors $\overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{u}$ et comme $\Pi \left(\overrightarrow{v} \right) = \Pi \left(\overrightarrow{u} \right) = \overrightarrow{0}$, nous avons $\rho \circ \Pi \left(\overrightarrow{v} \right) = \overrightarrow{0}$, c'est à dire $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$

Remarque 6 :

Ce résultat a pour conséquences évidentes :

1. Pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
2. Pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

Exercice 6 :

1. Soient $\overrightarrow{u} \in E$ et $\overrightarrow{v} \in E$. Nous posons $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ Trouver tous les vecteurs $\overrightarrow{X} \in E$ tels que $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{X} = \overrightarrow{w}$
2. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien d'espace directeur E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Soient $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{E}$ et $C \in \mathcal{E}$, 3 points non alignés
   (a) Trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{0}$
   (b) Même questions pour l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$

Exercice 7 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien d'espace directeur E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.
Soient $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{E}$ et $C \in \mathcal{E}$, 3 points non alignés.
Trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $\left(\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right) \wedge \left(\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right) = \overrightarrow{0}$

- ⋆ On considère le système pondéré $\{(A, 1) ; (B, -3)\}$; ce système admet un barycentre G défini, pour tout $M \in \mathcal{E}$ par $-2\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}$
- ⋆ De même, si nous considérons le système pondéré $\{(B, 1) ; (C, 3)\}$; ce système admet un barycentre H défini, pour tout $M \in \mathcal{E}$ par $4\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{Mc}$

Ce qui fait que nous avons l'équivalence :

$$\left(\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right) \wedge \left(\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right) = \overrightarrow{0} \iff \left(-2\overrightarrow{MG}\right) \wedge \left(4\overrightarrow{MH}\right) = \overrightarrow{0} \iff -8\left(\overrightarrow{MG} \wedge \overrightarrow{MH}\right) = \overrightarrow{0}$$

Maintenant, quels sont ces points $M \in \mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{MG} \wedge \overrightarrow{MH} = \overrightarrow{0}$?
Tout d'abord, $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GH}$ et donc :

$$\overrightarrow{MG} \wedge \overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MG} \wedge \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GH}\right) = \overrightarrow{MG} \wedge \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{0}$$

L'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ est donc l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont colinéaires. L'ensemble des ces points M est donc la droite (GH)

Exercice 8 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien d'espace directeur E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Soient $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{E}$ et $C \in \mathcal{E}$, 3 points non alignés.
Trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overleftarrow{MC}\right) \wedge \left(\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = \overrightarrow{0}$

18.2.5 Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3
Le produit vectoriel est antisymétrique, c'est à dire :

$$(\forall \overrightarrow{u} \in E)\,(\forall \overrightarrow{v} \in E)\,(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}))$$

Démonstration

1. Supposons $\overrightarrow{u} \in E$ et $\overrightarrow{v} \in E$ colinéaires
   Alors, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, et nous avons bien $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u})$
2. Supposons $\overrightarrow{u} \in E$ et $\overrightarrow{v} \in E$ linéairement indépendants
   Alors $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$.
   $\Rightarrow$ Nous normalisons ces vecteurs en posant $\overrightarrow{i} = \dfrac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}$ et $\overrightarrow{j} = \dfrac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$.

   Remarquons que $\left\|\overrightarrow{i}\right\| = 1$ et $\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{v}\|\,\overrightarrow{j}$
   Alors :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} &= \|\overrightarrow{u}\|\,\rho \circ \Pi\,(\overrightarrow{v}) \\ &= \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,\rho \circ \Pi\left(\overrightarrow{j}\right) \\ &= \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\left(\left\|\overrightarrow{i}\right\|\rho \circ \Pi\left(\overrightarrow{j}\right)\right) \\ &= \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j}\end{aligned}$$
   De la même manière, nous avons $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{i}$

$\Rightarrow$ Il nous suffit donc de montrer que, pour ces 2 vecteurs unitaires $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$, nous avons $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = -\left(\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{i}\right)$

On appelle $\overrightarrow{k}$ un vecteur unitaire orthogonal au plan P engendré par $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$

- ⋆ Il existe un et un seul vecteur $\overrightarrow{i_1} \in P$ tel que la base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{k}\right\}$ soit une base orthonormée directe de E
- ⋆ De même, il existe un et un seul vecteur $\overrightarrow{j_1} \in P$ tel que la base $\left\{\overrightarrow{j}, \overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{k}\right\}$ soit une base orthonormée directe de E

Alors, dans le plan P, les bases orthonormées $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i_1}\right\}$ et $\left\{\overrightarrow{j}, \overrightarrow{j_1}\right\}$ ont même orientation.

Il existe donc une rotation $\varphi \in \mathcal{O}^+(P)$ telle que $\varphi\left(\overrightarrow{i}\right) = \overrightarrow{j}$ et $\varphi\left(\overrightarrow{i_1}\right) = \overrightarrow{j_1}$ et dont la matrice dans la base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i_1}\right\}$ est donnée par :

$$\mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i_1}\right\}}(\varphi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ avec } a^2 + b^2 = 1$$

Donc :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \overrightarrow{j} &=& a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{i_1} \\ \overrightarrow{j_1} &=& -b\overrightarrow{i} + a\overrightarrow{i_1} \end{array}\right. \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \overrightarrow{i} &=& a\overrightarrow{j} - b\overrightarrow{j_1} \\ \overrightarrow{i_1} &=& b\overrightarrow{j} + a\overrightarrow{j_1} \end{array}\right.$$

D'où

- ⋆ $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = veci \wedge \left(a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{i_1}\right) = a\left(\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{i}\right) + b\left(\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{i_1}\right) = b\overrightarrow{k}$
- ⋆ $\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \wedge \left(a\overrightarrow{j} - b\overrightarrow{j_1}\right) = a\left(\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{j}\right) - b\left(\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{j_1}\right) = -b\overrightarrow{k}$

Nous avons bien $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = -\left(\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{i}\right)$

Ce que nous voulions

18.2.6 Corollaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3
Alors, pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, tout $\overrightarrow{v_1} \in E$, tout $\overrightarrow{v_2} \in E$, tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $\mu \in \mathbb{R}$:

$$(\lambda\overrightarrow{v_1} + \mu\overrightarrow{v_2}) \wedge \overrightarrow{u} = \lambda(\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{u}) + \mu(\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{u})$$

Démonstration

Pour le démontrer, il suffit de conjuguer la proposition 18.2.2 et le théorème 18.2.5

Exercice 9 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.
Soient $\overrightarrow{u} \in E$ et $\overrightarrow{v} \in E$ 2 vecteurs linéairement in dépendants.
Pour a, b, c et d 4 nombres réels, on considère le produit vectoriel $(a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}) \wedge (c\overrightarrow{u} + d\overrightarrow{v})$.
Démontrez que $(a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v})$ et $(c\overrightarrow{u} + d\overrightarrow{v})$ sont linéairement indépendants si et seulement si $ad - bc \neq 0$

18.2.7 Coordonnées du produit vectoriel de 2 vecteurs

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 rapporté à une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$

Soient $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ 2 vecteurs de E

Alors $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (bc_1 - b_1c)\overrightarrow{i} + (ca_1 - ac_1)\overrightarrow{j} + (ab_1 - ba_1)\overrightarrow{k}$

Démonstration

La démonstration est simple et calculatoire.

Exercice 10 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 rapporté à une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$. On considère les vecteurs $\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} \end{pmatrix}$

1. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ sont unitaires et orthogonaux
2. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{e_3}$ tel que $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ soit une base orthonormée directe.

18.2.8 Exercices

Exercice 11 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 Démontrer l'identité de Lagrange :

$$(\forall \overrightarrow{u} \in E)\,(\forall \overrightarrow{v} \in E)\left(\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v}\rangle^2 + \|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 \times \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$$

Exercice 12 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien d'espace directeur E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Soient $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{E}$ et $C \in \mathcal{E}$, 3 points non alignés

1. Démontrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$
2. Trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que :

   (a) $\left\langle \overrightarrow{AM} \mid \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)\right\rangle = 0$
   (b) $\left\langle \overrightarrow{AM} \mid \left(\overrightarrow{BM} \wedge \overrightarrow{CM}\right)\right\rangle = 0$

Exercice 13 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3 orienté par un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et de direction E.

1. Comment utiliser le produit vectoriel pour donner l'équation cartésienne d'un plan $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ où $A \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{u} \in E$ et $\overrightarrow{v} \in E$?
2. On considère les trois points $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{E}$ et $C \in \mathcal{E}$ de coordonnées :

$$A\,(-2, 1, 3)\;, B\,(1, -1, 0)\;, C\,(0, 0, -2)$$

   Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)
3. Soit $Z \in \mathcal{E}$ de coordonnées $Z\,(0, 0, 1)$. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que :

$$\left\langle \overrightarrow{MO} \mid \overrightarrow{MZ}\right\rangle = \left\|\overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{MZ}\right\|^2$$

4. Soient $X \in \mathcal{E}$ et $Y \in \mathcal{E}$ de coordonnées respectives $X\,(1, 0, 0)$ et $Y\,(0, 1, 0)$. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MX} \wedge \overrightarrow{MY}\right\| = \left\|\overrightarrow{MY} \wedge \overrightarrow{MZ}\right\| = \left\|\overrightarrow{MZ} \wedge \overrightarrow{MX}\right\|$$

Exercice 14 :

Le produit mixte

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. On considère 3 vecteurs de E, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$

1. Démontrer que $\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{w} \rangle$
2. On appelle produit mixte de trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, et on le note $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$ le réel :

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} \rangle$$

   Démontrer que :
   (a) $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}] = [\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$
   (b) $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = -[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}] = -[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}] = -[\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}]$
   (c) Montrer que les 3 vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ forment une base si et seulement si $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] \neq 0$
   (d) On suppose que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est rapporté à une base orthonormée directe $\left[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right]$. Donner une expression analytique du produit mixte dans cette base

Exercice 15 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3 orienté par un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. On considère 4 points $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{E}$, $C \in \mathcal{E}$ et $D \in \mathcal{E}$. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que :

$$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD}$$

Exercice 16 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 orienté par une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$
Soit $P \subset E$, le plan vectoriel euclidien de base $\mathcal{B}_0 = \left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$. Soit $\overrightarrow{p} \in P$ un vecteur de norme 1.
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, nous considérons l'application φ_α de P dans E définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \varphi_\alpha : P & \longrightarrow & E \\ \quad \overrightarrow{u} & \longmapsto & \varphi_\alpha(\overrightarrow{u}) = \alpha \overrightarrow{u} + \overrightarrow{p} \wedge (\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{u}) \end{array}\right.$$

1. Démontrer que φ_α est une application linéaire de P dans P
2. On suppose $\overrightarrow{p} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right)$ et nous posons $\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$
   (a) Vérifier que $\overrightarrow{p} \wedge (\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{u}) = \langle \overrightarrow{p} \mid \overrightarrow{u} \rangle\, \overrightarrow{p} - \overrightarrow{u}$
   (b) Quelle est la matrice de φ_α dans la base $\mathcal{B}_0$?
   (c) Trouver les noyaux et images de φ_α dans les cas où $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$

Exercice 17 :

La formule du double produit vectoriel

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 orienté et $\overrightarrow{k} \in E$ un vecteur unitaire de E (i.e. $\left\|\overrightarrow{k}\right\| = 1$) Nous considérons les applications Φ et Π de E dans E définies par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \Phi : E & \longrightarrow & E \\ \quad \overrightarrow{u} & \longmapsto & \Phi(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{u} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} \Pi : E & \longrightarrow & E \\ \quad \overrightarrow{u} & \longmapsto & \Pi(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} - \left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{u} \right\rangle \overrightarrow{k} \end{array}\right.$$

1. Démontrez que :
   (a) Φ et Π sont des endomorphismes de E
   (b) Π est la projection orthogonale sur le plan vectoriel $\overrightarrow{P}$ othogonal à $\overrightarrow{k}$
   (c) $\Phi \circ \Phi = -\Pi$
   (d) Pour tout vecteur $\overrightarrow{u} \in E$, nous avons : $\overrightarrow{k} \wedge \left(\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{u}\right) = \left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{u} \right\rangle \overrightarrow{k} - \overrightarrow{u}$

2. Démontrer que, pour tout vecteur $\overrightarrow{u} \in E$ et $\overrightarrow{v} \in E$, nous avons :

$$\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle \, \overrightarrow{u} - \|\overrightarrow{u}\|^2 \, \overrightarrow{v}$$

3. Soient $\overrightarrow{u} \in E$, $\overrightarrow{v} \in E$ et $\overrightarrow{w} \in E$ trois vecteurs de E
   (a) On suppose que le vecteur $\overrightarrow{u} \in E$ n'est pas nul. Montrer qu'il existe un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v_1}$ et $\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v_1} \rangle = 0$
   (b) Démontrez de même qu'il existe un nombre réel $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{w} = \mu \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w_1}$ et $\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{w_1} \rangle = 0$
   (c) En déduire que $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{w} \rangle \, \overrightarrow{v} - \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle \, \overrightarrow{w}$
   (d) Démontrer que la formule précédente est vraie même si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$