18.3 Quelques exercices corrigés

Exercice 3 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté par la base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right\}$. Nous appelons φ_1 la rotation vectoriele de mesure $\frac{\pi}{2}$ et d'axe $\overrightarrow{i}$ et par φ_2 la rotation vectoriele de mesure $\frac{\pi}{2}$ et d'axe $\overrightarrow{j}$.

1. *Déterminer, par ses coordonnées, un vecteur unitaire $\overrightarrow{k_1}$ invariant par la rotation $\varphi_2 \circ \varphi_1$*

   Dans un premier temps, nous avons comme matrice de φ_1 dans la base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right\}$,

$$\mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right\}}(\varphi_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Dans un second temps, la matrice de φ_2 dans la base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right\}$ est donnée par

$$\mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right\}}(\varphi_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Pour terminer, $\mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right\}}(\varphi_2 \circ \varphi_1) = \mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right\}}(\varphi_2) \times \mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right\}}(\varphi_1)$ et donc, tous calculs faits :

$$\mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right\}}(\varphi_2 \circ \varphi_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Si $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, est un vecteur invariant par $\varphi_2 \circ \varphi_1$, ses coordonnées vérifient le système d'équation :

$$\begin{cases} x = y \\ y = -z \\ z = -x \end{cases}$$

   L'ensemble des vecteurs invariants par $\varphi_2 \circ \varphi_1$ est donc une droite vectorielle d'équation $\begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ qui admet pour base $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Le vecteur unitaire $\overrightarrow{k_1}$ a donc pour coordonnées $\overrightarrow{k_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

   (Il est clair que l'utilisation du produit vectoriel simplifie la chose !!)

2. *Déterminer, par leurs coordonnées, deux vecteurs unitaires $\overrightarrow{i_1}$ et $\overrightarrow{j_1}$ tels que $\left\{\overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}; \overrightarrow{k_1}\right\}$ soit une base orthonormée directe de E*

   Nous allons utiliser plusieurs propriétés de la base directe pour connaître $\overrightarrow{i_1}$ et $\overrightarrow{j_1}$
   - ⋆ $\overrightarrow{i_1}$ et $\overrightarrow{j_1}$ sont orthogonaux à $\overrightarrow{k_1}$, c'est à dire $\left\langle \overrightarrow{i_1} \mid \overrightarrow{k_1} \right\rangle = 0$, $\left\langle \overrightarrow{j_1} \mid \overrightarrow{k_1} \right\rangle = 0$ et $\left\langle \overrightarrow{i_1} \mid \overrightarrow{j_1} \right\rangle = 0$
   - ⋆ D'autre part, nous devons avoir $\left\| \overrightarrow{i_1} \right\| = \left\| \overrightarrow{j_1} \right\| = 1$
   - ⋆ Et $\det_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right\}}\left(\left\{\overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}; \overrightarrow{k_1}\right\}\right) = 1$

   Posons $\overrightarrow{i_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{j_1} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$
   - ⋆ Dans un premier temps, nous avons :

$$\left\langle \overrightarrow{i_1} \mid \overrightarrow{k_1} \right\rangle = 0 \iff x_1 + y_1 - z_1 = 0 \text{ et } \left\langle \overrightarrow{j_1} \mid \overrightarrow{k_1} \right\rangle = 0 \iff x_2 + y_2 - z_2 = 0$$

   Faisons le choix $y_1 = 0$, $x_1 = z_1 = 1$, alors de $\left\langle \overrightarrow{i_1} \mid \overrightarrow{j_1} \right\rangle = 0$, nous obtenons $x_2 + z_2 = 0$

$\star$ Nous obtenons donc le système :

$$\begin{cases} x_2 + y_2 - z_2 = & 0 \\ x_2 + z_2 = & 0 \end{cases}$$

$x_2 \in \mathbb{R}$, $z_2 = -x_2$ et $y_2 = 2x_2$ et donc $\overrightarrow{j_1} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\star$ De $\left\|\overrightarrow{i_1}\right\| = \left\|\overrightarrow{j_1}\right\| = 1$, nous tirons : $\overrightarrow{i_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{j_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ ou $\overrightarrow{j_1'} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

$\star$ Maintenant, nous allons utiliser les déterminants :

$\rightarrow$ $\det_{\{\vec{i},\vec{j};\vec{k}\}}\left(\left\{\overrightarrow{i_1},\overrightarrow{j_1};\overrightarrow{k_1}\right\}\right) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = 1$

$\rightarrow$ $\det_{\{\vec{i},\vec{j};\vec{k}\}}\left(\left\{\overrightarrow{i_1},\overrightarrow{j_1'};\overrightarrow{k_1}\right\}\right) = \det_{\{\vec{i},\vec{j};\vec{k}\}}\left(\left\{\overrightarrow{i_1},-\overrightarrow{j_1};\overrightarrow{k_1}\right\}\right) = -\det_{\{\vec{i},\vec{j};\vec{k}\}}\left(\left\{\overrightarrow{i_1},\overrightarrow{j_1};\overrightarrow{k_1}\right\}\right) = -1$

Nous venons ainsi de prouver que la base $\left\{\overrightarrow{i_1},\overrightarrow{j_1};\overrightarrow{k_1}\right\}$ est directe.

3. *Démontrer que si x est une mesure de l'angle de la rotation $\varphi_2 \circ \varphi_1$ d'axe $\overrightarrow{k_1}$, nous avons :*

$$\left\langle \overrightarrow{i_1} \mid \varphi_2 \circ \varphi_1\left(\overrightarrow{i_1}\right)\right\rangle = \cos x \quad \textit{et} \quad \left\langle \overrightarrow{j_1} \mid \varphi_2 \circ \varphi_1\left(\overrightarrow{i_1}\right)\right\rangle = \sin x$$

En déduire x

D'après le cours sur le produit scalaire, nous avons, pour tout $u \in E$ et tout $v \in E$:

$$\langle u \mid v\rangle = \|u\| \times \|v\| \cos\left(\widehat{u,v}\right)$$

Donc

$\longrightarrow$ $\left\langle \overrightarrow{i_1} \mid \varphi_2 \circ \varphi_1\left(\overrightarrow{i_1}\right)\right\rangle = \left\|\overrightarrow{i_1}\right\| \times \left\|\varphi_2 \circ \varphi_1\left(\overrightarrow{i_1}\right)\right\| \cos\left(\widehat{\overrightarrow{i_1},\varphi_2 \circ \varphi_1\left(\overrightarrow{i_1}\right)}\right)$

Or, $\left\|\overrightarrow{i_1}\right\| = \left\|\varphi_2 \circ \varphi_1\left(\overrightarrow{i_1}\right)\right\| = 1$, et donc $\left\langle \overrightarrow{i_1} \mid \varphi_2 \circ \varphi_1\left(\overrightarrow{i_1}\right)\right\rangle = \cos x$

$\longrightarrow$ De même, $\left\langle \overrightarrow{j_1} \mid \varphi_2 \circ \varphi_1\left(\overrightarrow{i_1}\right)\right\rangle \cos\left(\widehat{\overrightarrow{j_1},\varphi_2 \circ \varphi_1\left(\overrightarrow{i_1}\right)}\right)$

$\longrightarrow$ Or, si x est une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{i_1},\varphi_2 \circ \varphi_1\left(\overrightarrow{i_1}\right)}\right)$ et α une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{j_1},\varphi_2 \circ \varphi_1\left(\overrightarrow{i_1}\right)}\right)$, nous avons $\alpha = \frac{\pi}{2} - x$ (Cf figure 18.1, la rotation $\varphi_2 \circ \varphi_1$ dans le plan orienté de base directe $\left\{\overrightarrow{i_1};\overrightarrow{j_1}\right\}$) Nous avons donc $\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

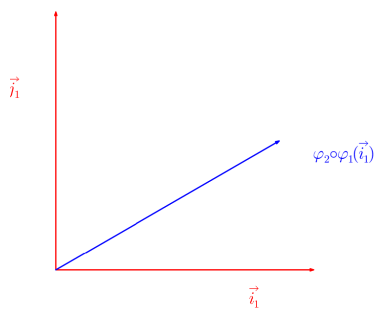

FIGURE 18.1 –

Comme $\overrightarrow{i_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, par le calcul matriciel, nous obtenons $\varphi_2 \circ \varphi_1 \left(\overrightarrow{i_1}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

D'où $\cos x = \left\langle \overrightarrow{i_1} \mid \varphi_2 \circ \varphi_1 \left(\overrightarrow{i_1}\right) \right\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-1}{2}$ et $\sin x = \left\langle \overrightarrow{j_1} \mid \varphi_2 \circ \varphi_1 \left(\overrightarrow{i_1}\right) \right\rangle = \dfrac{2}{\sqrt{12}} + \dfrac{1}{\sqrt{12}} = \dfrac{3}{\sqrt{12}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Et donc, $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 4 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté par la base orthonormée directe $\mathcal{B}_0 = \left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right\}$. On donne les vecteurs :

$$\overrightarrow{I} = \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}\right) \quad \overrightarrow{J} = \frac{1}{3}\left(-\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}\right) \quad \overrightarrow{K} = \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}\right)$$

1. *Vérifier que la famille $\left\{\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}; \overrightarrow{K}\right\}$ forme une base orthonormée*

   Il suffit de faire les calculs de $\left\langle \overrightarrow{I} \mid \overrightarrow{J} \right\rangle$, $\left\langle \overrightarrow{I} \mid \overrightarrow{K} \right\rangle$ et $\left\langle \overrightarrow{K} \mid \overrightarrow{J} \right\rangle$, $\left\|\overrightarrow{I}\right\|$, $\left\|\overrightarrow{J}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{K}\right\|$

   Et bien entendu que l'on trouve $\left\langle \overrightarrow{I} \mid \overrightarrow{J} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{I} \mid \overrightarrow{K} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{K} \mid \overrightarrow{J} \right\rangle = 0$ et $\left\|\overrightarrow{I}\right\| = \left\|\overrightarrow{J}\right\| = \left\|\overrightarrow{K}\right\| = 1$

2. *Donner la définition analytique de la transformation orthogonale φ qui transforme la base $\mathcal{B}_0$ en la base $\left\{\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}; \overrightarrow{K}\right\}$*

   Il n'existe donc qu'un seul endomorphisme orthogonal φ qui transforme la base $\mathcal{B}_0$ en la base $\left\{\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}; \overrightarrow{K}\right\}$. La matrice de φ dans la base $\mathcal{B}_0$ est donnée par :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(\varphi) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

   C'est déjà, là, la définition analytique de φ ; allons plus loin.

   Si $\overrightarrow{u} \in E$ est un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}_0$ et si $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ sont celles de $\varphi\left(\overrightarrow{u}\right)$ toujours dans la base $\mathcal{B}_0$, par le calcul matriciel, nous obtenons :

$$\begin{cases} x_1 = & \frac{1}{3}(2x - y + 2z) \\ y_1 = & \frac{1}{3}(2x + 2y - z) \\ z_1 = & \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z) \end{cases}$$

3. *Montrer que φ est une rotation dont l'axe est engendré par le vecteur $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.*

   Pour le montrer, il suffit de démontrer que le vecteur $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ est invariant par φ ; cependant, est-ce le seul vecteur invariant ?
   Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est invariant par φ, si et seulement si $\varphi\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{u}$, c'est à dire qu'en termes de coordonnées :

$$\begin{cases} x = & \frac{1}{3}(2x - y + 2z) \\ y = & \frac{1}{3}(2x + 2y - z) \\ z = & \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z) \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - 2z = & 0 \\ 2x - y - z = & 0 \\ x - 2y + z = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - 2z = & 0 \\ y - z = & 0 \end{cases}$$

L'ensemble S des solutions de ce système est donc $S = \{(\lambda, \lambda, \lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}\}$ S est un sous-espace vectoriel de E qui admet $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ pour base.

4. *Soit P le plan vectoriel orthogonal au vecteur $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ et orienté par le vecteur unitaire $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\right)$. Calculer la mesure de la restriction de φ à P*

Appelons $\overrightarrow{W} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\right)$

Le vecteur $\overrightarrow{U} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}\right)$ est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{W}$ et le vecteur $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{W} \wedge \overrightarrow{U}$ est tel que la base $\left\{\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{W}\right\}$ est directe.

Par calculs, nous trouvons $\overrightarrow{V} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Par calculs, nous obtenons $\varphi\left(\overrightarrow{U}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Comme tout à l'heure, si x est la mesure de l'angle de la rotation, nous avons :

$\longrightarrow \left\langle \overrightarrow{U} \mid \varphi\left(\overrightarrow{U}\right)\right\rangle = \cos x \iff \cos x = \dfrac{1}{2}$

$\longrightarrow \left\langle \overrightarrow{V} \mid \varphi\left(\overrightarrow{U}\right)\right\rangle = \sin x \iff \sin x = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$

D'où $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

La matrice de φ dans la base $\left\{\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}; \overrightarrow{W}\right\}$ est donnée par :

$$\mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}; \overrightarrow{W}\right\}}(\varphi) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 Démontrer l'identité de Lagrange :

$$(\forall \overrightarrow{u} \in E)\,(\forall \overrightarrow{v} \in E)\,\left(\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v}\rangle^2 + \|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 \times \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$$

Appelons θ la mesure de l'angle $\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}$.

- $\star$ Nous avons $\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v}\rangle = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \cos\theta$, et donc

$$\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v}\rangle^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 \times \|\overrightarrow{v}\|^2 \cos^2\theta$$

- $\star$ Nous avons aussi : $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \sin\theta$, et donc

$$\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 \times \|\overrightarrow{v}\|^2 \sin^2\theta$$

Ce qui fait, qu'en additionnant, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v}\rangle^2 + \|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|^2 &= \|\overrightarrow{u}\|^2 \times \|\overrightarrow{v}\|^2 \cos^2\theta + \|\overrightarrow{u}\|^2 \times \|\overrightarrow{v}\|^2 \sin^2\theta \\ &= \|\overrightarrow{u}\|^2 \times \|\overrightarrow{v}\|^2 \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) \\ &= \|\overrightarrow{u}\|^2 \times \|\overrightarrow{v}\|^2 \end{aligned}$$

Ce que nous voulions

Exercice 6 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien d'espace directeur E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Soient $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{E}$ et $C \in \mathcal{E}$, 3 points non alignés

1. *Démontrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$*

   ⋆ Nous avons $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ et donc :
   $$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}$$

   ⋆ Sans plus de difficultés, nous avons $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$ et donc :
   $$\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB} = \left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}\right) \wedge \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$$

   D'où nous avons bien l'égalité $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$

2. *Trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que : $\left\langle \overrightarrow{AM} \mid \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)\right\rangle = 0$*

   L'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $\left\langle \overrightarrow{AM} \mid \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)\right\rangle = 0$ est le plan orthogonal à $\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)^{\perp}$ passant par A.
   Or, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Ainsi, $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
   L'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $\left\langle \overrightarrow{AM} \mid \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)\right\rangle = 0$ est donc le plan (ABC)

Exercice 14 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. On considère 3 vecteurs de E, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$

1. *Démontrer que $\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\rangle = \langle \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{w}\rangle$*

   ⋆ Il est clair que l'égalité est vraie si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
   ⋆ Supposons, maintenant que $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$
   Posons alors $\overrightarrow{i} = \dfrac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}$, et nous considérons la base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$. Dans cette base, les coordonnées du $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ dont :
   $$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \|\overrightarrow{u}\| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

   ⋆ Alors $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} b\gamma - c\beta \\ c\alpha - a\gamma \\ a\beta - b\alpha \end{pmatrix}$ et donc $\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\rangle = \|\overrightarrow{u}\| (b\gamma - c\beta)$

   ⋆ Maintenant, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -c\|\overrightarrow{u}\| \\ b\|\overrightarrow{u}\| \end{pmatrix}$ et donc
   $$\langle \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{w}\rangle = -c\|\overrightarrow{u}\| \times \beta + b\|\overrightarrow{u}\| \times \gamma = \|\overrightarrow{u}\| (-c\beta + b\gamma)$$

   ⋆ Nous avons donc bien $\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\rangle = \langle \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{w}\rangle$

2. *On appelle produit mixte de trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, et on le note $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$ le réel :*
   $$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\rangle$$

   Démontrer que :

   (a) $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}] = [\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$
   Pour démontrer cette question, nous allons utiliser la question 1 et la bilinéarité du produit scalaire

$\longrightarrow$ Montrons que : $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]$

$$\begin{aligned}[\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] &= \langle \vec{v} \mid \vec{w} \wedge \vec{u} \rangle \text{ par définition}\\ &= \langle \vec{v} \wedge \vec{w} \mid \vec{u} \rangle \text{ par la question 1}\\ &= \langle \vec{u} \mid \vec{v} \wedge \vec{w} \rangle \text{ par la bilinéarité du produit scalaire}\\ &= [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \text{ par définition}\end{aligned}$$

Donc $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]$

$\longrightarrow$ Montrons que : $[\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]$

$$\begin{aligned}[\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] &= \langle \vec{w} \mid \vec{u} \wedge \vec{v} \rangle \text{ par définition}\\ &= \langle \vec{w} \wedge \vec{u} \mid \vec{v} \rangle \text{ par la question 1}\\ &= \langle \vec{v} \mid \vec{w} \wedge \vec{u} \rangle \text{ par la bilinéarité du produit scalaire}\\ &= [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]\end{aligned}$$

Nous avons donc bien $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$

(b) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}]$

$\longrightarrow$ Montrons que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$

$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = \langle \vec{v} \mid \vec{u} \wedge \vec{w} \rangle = \langle \vec{v} \wedge \vec{u} \mid \vec{w} \rangle = -\langle \vec{u} \wedge \vec{v} \mid \vec{w} \rangle - [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$

$\longrightarrow$ Montrons que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}]$

$$[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = \langle \vec{u} \mid \vec{w} \wedge \vec{v} \rangle = -\langle \vec{u} \mid \vec{v} \wedge \vec{w} \rangle = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$

$\longrightarrow$ Montrons que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}]$

$$[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}] = \langle \vec{w} \mid \vec{v} \wedge \vec{u} \rangle = -\langle \vec{w} \mid \vec{u} \wedge \vec{v} \rangle = -\langle \vec{u} \wedge \vec{v} \mid \vec{w} \rangle = -\langle \vec{u} \mid \vec{v} \wedge \vec{w} \rangle = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$

Nous avons donc bien $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}]$

(c) *Montrer que les 3 vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une base si et seulement si $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$*

De manière équivalente, nous allons montrer que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ si et seulement si la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est liée.

⋆ Montrons que pour tout $\vec{u} \in E$ et tout $\vec{v} \in E$, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}] = 0$
D'après la question précédente où $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}]$, en remplaçant $\vec{w}$ par $\vec{u}$, nous obtenons :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}] = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}]$$

c'est à dire $2[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}] = 0$.
D'où le résultat

⋆ Supposons que la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est liée.
Il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ et donc :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \langle \vec{u} \mid \vec{v} \wedge (\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u} \mid \lambda(\vec{v} \wedge \vec{u}) \rangle = \lambda \langle \vec{u} \mid \vec{v} \wedge \vec{u} \rangle = \lambda[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}] = 0$$

Donc, si la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est liée, alors $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$

⋆ Réciproquement, si $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$, alors $\langle \vec{u} \wedge \vec{v} \mid \vec{w} \rangle = 0$.
Ceci sgnifie donc que $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et que donc $\vec{w}$ est dans le plan engendré par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Et donc, la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est liée.

Ainsi, les 3 vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont liés si et seulement si $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ et ces 3 vecteurs forment une base si et seulement si $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$

Exercice 16 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 orienté par une base orthonormée directe $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$
Soit $P \subset E$, le plan vectoriel euclidien de base $\mathcal{B}_0 = \left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$. Soit $\vec{p} \in P$ un vecteur de norme 1.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, nous considérons l'application φ_α de P dans E définie par :

$$\begin{cases} \varphi_\alpha : P & \longrightarrow & E \\ \quad \overrightarrow{u} & \longmapsto & \varphi_\alpha\left(\overrightarrow{u}\right) = \alpha\overrightarrow{u} + \overrightarrow{p} \wedge \left(\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{u}\right) \end{cases}$$

1. *Démontrer que φ_α est une application linéaire de P dans P*

   Ce n'est pas une question très difficile ; elle est, en fait, très calculatoire. Nous allons, pour plus de clarté, résoudre cette question en plusieurs temps

   ⋆ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; alors :

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha\left(\lambda\overrightarrow{u}\right) = & \ \alpha\left(\lambda\overrightarrow{u}\right) + \overrightarrow{p} \wedge \left(\overrightarrow{p} \wedge \left(\lambda\overrightarrow{u}\right)\right) \\ = & \ \lambda\left(\alpha\overrightarrow{u}\right) + \overrightarrow{p} \wedge \lambda\left(\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{u}\right) \\ = & \ \lambda\left(\alpha\overrightarrow{u}\right) + \lambda\left(\overrightarrow{p} \wedge \left(\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{u}\right)\right) \\ = & \ \lambda\left(\alpha\overrightarrow{u} + \overrightarrow{p} \wedge \left(\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{u}\right)\right) \end{aligned}$$

   C'est à dire $\varphi_\alpha\left(\lambda\overrightarrow{u}\right) = \lambda\varphi_\alpha\left(\overrightarrow{u}\right)$

   ⋆ Soient $\overrightarrow{u} \in E$ et $\overrightarrow{v} \in E$; alors :

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) = & \ \alpha\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) + \overrightarrow{p} \wedge \left(\overrightarrow{p} \wedge \left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right)\right) \\ = & \ \alpha\overrightarrow{u} + \alpha\overrightarrow{v} + \overrightarrow{p} \wedge \left(\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{u} + \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{v}\right) \\ = & \ \alpha\overrightarrow{u} + \alpha\overrightarrow{v} + \overrightarrow{p} \wedge \left(\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{u}\right) + \overrightarrow{p} \wedge \left(\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{v}\right) \\ = & \ \alpha\overrightarrow{u} + \overrightarrow{p} \wedge \left(\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{u}\right) + \alpha\overrightarrow{v} + \overrightarrow{p} \wedge \left(\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{v}\right) \\ = & \ \varphi_\alpha\left(\overrightarrow{u}\right) + \varphi_\alpha\left(\overrightarrow{v}\right) \end{aligned}$$

   Donc $\varphi_\alpha\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) = \varphi_\alpha\left(\overrightarrow{u}\right) + \varphi_\alpha\left(\overrightarrow{v}\right)$

   ⋆ L'application φ_α est donc une application linéaire

   Comme $\overrightarrow{u} \in P$ et $\overrightarrow{p} \in P$, alors le vecteur $\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{u}$ est orthogonal à la fois à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{p}$, c'est à dire au plan P ; c'est donc un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{k}$.

   Maintenant, le vecteur $\overrightarrow{p} \wedge \left(\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{u}\right)$ est orthogonal à $\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{p}$ et est donc dans le plan P.

   Ainsi, pour tout $\overrightarrow{u} \in P$, $\varphi_\alpha\left(\overrightarrow{u}\right) \in P$; φ_α est donc une application linéaire de P dans P.

   On peut remarquer que si $\overrightarrow{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{p}$ alors $\varphi_\alpha\left(\overrightarrow{u}\right) = \alpha\overrightarrow{u}$

2. *On suppose $\overrightarrow{p} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right)$ et nous posons $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$*

   (a) *Vérifier que $\overrightarrow{p} \wedge \left(\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{u}\right) = \langle\overrightarrow{p} \mid \overrightarrow{u}\rangle\,\overrightarrow{p} - \overrightarrow{u}$*

   Voilà un simple problème de calculs.

   ⋆ Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, $\overrightarrow{p}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{p} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y-x \end{pmatrix}$ d'où :

$$\overrightarrow{p} \wedge \left(\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{u}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} y-x \\ x-y \\ 0 \end{pmatrix}$$

   C'est à dire $\overrightarrow{p} \wedge \left(\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{u}\right) = \dfrac{y-x}{2}\left(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}\right)$

   ⋆ Ensuite, $\langle\overrightarrow{p} \mid \overrightarrow{u}\rangle = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}}$ et donc

$$\langle\overrightarrow{p} \mid \overrightarrow{u}\rangle\,\overrightarrow{p} = \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right)\right) = \left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right)$$

   ⋆ Nous avons alors :

$$\langle\overrightarrow{p} \mid \overrightarrow{u}\rangle\,\overrightarrow{p} - \overrightarrow{u} = \left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right) - x\overrightarrow{i} - y\overrightarrow{j} = \frac{y-x}{2}\left(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}\right)$$

Nous avons ainsi démontré que $\overrightarrow{p} \wedge (\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{u}) = \langle \overrightarrow{p} \mid \overrightarrow{u} \rangle \overrightarrow{p} - \overrightarrow{u}$
Ce que nous voulions

(b) *Quelle est la matrice de φ_α dans la base $\mathcal{B}_0$?*

Nous avons, par définition de φ_α :

$$\varphi_\alpha(\overrightarrow{u}) = \alpha \overrightarrow{u} + \overrightarrow{p} \wedge (\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{u})$$

C'est à dire, d'après les calculs ci-dessus :

$$\varphi_\alpha(\overrightarrow{u}) = \alpha \overrightarrow{u} + \langle \overrightarrow{p} \mid \overrightarrow{u} \rangle \overrightarrow{p} - \overrightarrow{u}$$

Trouver la matrice de φ_α dans la base $\mathcal{B}_0$ devient alors facile.
Remarquons que $\left\langle \overrightarrow{p} \mid \overrightarrow{i} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{p} \mid \overrightarrow{j} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et qu'alors :

$$\left\langle \overrightarrow{p} \mid \overrightarrow{i} \right\rangle \overrightarrow{p} = \langle \overrightarrow{p} \mid \overrightarrow{u} \rangle \overrightarrow{j} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right)$$

$\Rightarrow$ Tout d'abord

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha\left(\overrightarrow{i}\right) &= \alpha \overrightarrow{i} + \left\langle \overrightarrow{p} \mid \overrightarrow{i} \right\rangle \overrightarrow{p} - \overrightarrow{i} \\ &= (\alpha - 1)\overrightarrow{i} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right) \\ &= \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{i} + \frac{1}{2}\overrightarrow{j} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ De même :

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha\left(\overrightarrow{j}\right) &= \alpha \overrightarrow{j} + \left\langle \overrightarrow{p} \mid \overrightarrow{j} \right\rangle \overrightarrow{p} - \overrightarrow{j} \\ &= (\alpha - 1)\overrightarrow{j} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right) \\ &= \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{j} + \frac{1}{2}\overrightarrow{i} \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(\varphi_\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \alpha - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(c) *Trouver les noyaux et images de φ_α dans les cas où $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$*

- $\star$ Tout d'abord regardons les conditions pour lesquelles φ_α est bijective ; dans ces cas, noyaux et images sont faciles à trouver. Calculons alors le déterminant de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(\varphi_\alpha)$:

$$\det\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(\varphi_\alpha)\right) = \begin{vmatrix} \alpha - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \alpha - \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \alpha^2 - \alpha = \alpha(\alpha - 1)$$

φ_α est donc bijective si et seulement si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$ et dans ces cas $\ker \varphi_\alpha = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ et $\mathrm{Im}\varphi_\alpha = P$

- $\star$ <u>Supposons maintenant $\alpha = 0$</u>

Dans ce cas, la matrice de φ_0 est $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(\varphi_0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ De là, nous tirons que $\mathrm{Im}\varphi_0 = \left\{\lambda\left(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}\right) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.
Si un vecteur $\overrightarrow{u} \in \ker \varphi_0$, alors ses coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} \frac{-x + y}{2} = 0 \\ \frac{x - y}{2} = 0 \end{cases} \iff x = y$$

Ainsi $\ker \varphi_0 = \left\{\lambda\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

⋆ Supposons maintenant $\alpha = 1$

Dans ce cas, la matrice de φ_1 est $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(\varphi_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ De là, nous tirons que $\mathrm{Im}\varphi_1 = \left\{\lambda\left(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}\right) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

Si un vecteur $\overrightarrow{u} \in \ker\varphi_1$, alors ses coordonnées vérifient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{x+y}{2} & = & 0 \\ \dfrac{x+y}{2} & = & 0 \end{array}\right. \iff x = -y$$

Ainsi $\ker\varphi_1 = \left\{\lambda\left(\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}\right) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

Bizarrement, nous avons $\mathrm{Im}\varphi_0 = \ker\varphi_1$ et $\mathrm{Im}\varphi_1 = \ker\varphi_0$

Exercice 17 :

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 orienté et $\overrightarrow{k} \in E$ un vecteur unitaire de E (i.e. $\left\|\overrightarrow{k}\right\| = 1$) Nous considérons les applications Φ et Π de E dans E définies par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Phi : E & \longrightarrow & E \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & \Phi\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{u} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \Pi : E & \longrightarrow & E \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & \Pi\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{u} - \left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{u} \right\rangle \overrightarrow{k} \end{array}\right.$$

1. *Démontrez que :*

   (a) *Φ et Π sont des endomorphismes de E*

      i. Que Φ soit un endomorphisme est une propriété complètement liée à la linéarité par rapport à l'une des variables du produit vectoriel

      ii. Montrons que Π est un endomorphisme de E

      Cette linéarité est aussi liée à la linéarité par rapport à l'une des variables du produit scalaire. Très simplement :

      $\longrightarrow$ Pour $\overrightarrow{u} \in E$ et $\overrightarrow{v} \in E$, nous avons :

$$\Pi\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}-\left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right\rangle \overrightarrow{k} = \overrightarrow{u}-\left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{u}\right\rangle \overrightarrow{k}+\overrightarrow{v}-\left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{v}\right\rangle \overrightarrow{k} = \Pi\left(\overrightarrow{u}\right)+\Pi\left(\overrightarrow{v}\right)$$

      $\longrightarrow$ Pour $\overrightarrow{u} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$\Pi\left(\lambda\overrightarrow{u}\right) = \lambda\overrightarrow{u} - \left\langle \overrightarrow{k} \mid \lambda\overrightarrow{u}\right\rangle \overrightarrow{k} = \lambda\overrightarrow{u} - \lambda\left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{u}\right\rangle \overrightarrow{k} = \lambda\Pi\left(\overrightarrow{u}\right)$$

      Π est donc bien linéaire de E dans E, soit un endomorphisme de E

   (b) *Π est la projection orthogonale sur le plan vectoriel $\overrightarrow{P}$ othogonal à $\overrightarrow{k}$*

   Nous allons utiliser, ici, les résultats de 15.1.18

   ⋆ Nous avons $\Pi \circ \Pi = \Pi$

   En effet, pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, nous avons :

$$\begin{array}{rcl} \Pi \circ \Pi\left(\overrightarrow{u}\right) = & & \Pi\left[\Pi\left(\overrightarrow{u}\right)\right] \\ & = & \Pi\left(\overrightarrow{u}\right) - \left\langle \overrightarrow{k} \mid \Pi\left(\overrightarrow{u}\right)\right\rangle \overrightarrow{k} \\ & = & \overrightarrow{u} - \left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{u}\right\rangle \overrightarrow{k} - \left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{u} - \left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{u}\right\rangle \overrightarrow{k}\right\rangle \overrightarrow{k} \\ & = & \overrightarrow{u} - \left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{u}\right\rangle \overrightarrow{k} - \left(\left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{u}\right\rangle - \left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{u}\right\rangle \left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{k}\right\rangle\right) \overrightarrow{k} \end{array}$$

   Comme $\left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{k}\right\rangle = \left\|\overrightarrow{k}\right\|^2 = 1$, nous avons $\left(\left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{u}\right\rangle - \left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{u}\right\rangle \left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{k}\right\rangle\right) = 0$, et donc $\Pi \circ \Pi\left(\overrightarrow{u}\right) = \Pi\left(\overrightarrow{u}\right)$

   Donc, $\Pi \circ \Pi = \Pi$ est un projecteur.

- ⋆ Le noyau de Π est la droite engendrée par $\overrightarrow{k}$

  On commence par calculer $\Pi\left(\overrightarrow{k}\right)$:

$$\Pi\left(\overrightarrow{k}\right) = \overrightarrow{k} - \left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{k} \right\rangle \overrightarrow{k} = \overrightarrow{k} - \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$$

  Donc $\overrightarrow{k} \in \ker \Pi$

  Réciproquement, si $\overrightarrow{u} \in \ker \Pi$, alors $\Pi\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{0}$ et donc :

$$\overrightarrow{u} - \left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{u} \right\rangle \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{u} = \left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{u} \right\rangle \overrightarrow{k}$$

  Ce qui veut dire que $\overrightarrow{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{k}$ et donc que le noyau de Π est exactement la droite engendrée par $\overrightarrow{k}$

- ⋆ Démontrons maintenant que pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, nous avons $\left\langle \Pi\left(\overrightarrow{u}\right) \mid \overrightarrow{k} \right\rangle = 0$

  C'est assez simple :

$$\begin{aligned}\left\langle \Pi\left(\overrightarrow{u}\right) \mid \overrightarrow{k} \right\rangle &= \left\langle \overrightarrow{u} - \left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{u} \right\rangle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{k} \right\rangle \\ &= \left\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{k} \right\rangle - \left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{u} \right\rangle \left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{k} \right\rangle \\ &= 0 \text{ car } \left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{k} \right\rangle = \left\| \overrightarrow{k} \right\|^2 = 1\end{aligned}$$

(c) $\Phi \circ \Phi = -\Pi$

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de E. alors :

$$\Phi \circ \Phi\left(\overrightarrow{u}\right) = \Phi\left[\Phi\left(\overrightarrow{u}\right)\right] = \overrightarrow{k} \wedge \Phi\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{k} \wedge \left(\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{u}\right)$$

Soit $\overrightarrow{j} \in E$ un vecteur tel que $\left\| \overrightarrow{j} \right\| = 1$ et $\left\langle \overrightarrow{j} \mid \overrightarrow{k} \right\rangle = 0$ et tel que $\overrightarrow{u}$ soit dans le plan de base $\left\{ \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k} \right\}$.

Alors $\overrightarrow{u} = \left\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{j} \right\rangle \overrightarrow{j} + \left\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{k} \right\rangle \overrightarrow{k}$

Soit $\overrightarrow{i} \in E$ un vecteur tel que $\left\{ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k} \right\}$ forme une base orthonormée directe de E. Alors :

$$\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{k} \wedge \left(\left\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{j} \right\rangle \overrightarrow{j} + \left\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{k} \right\rangle \overrightarrow{k}\right) = \left\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{j} \right\rangle \left(\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{j}\right) = -\left\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{j} \right\rangle \overrightarrow{i}$$

Maintenant,

$$\overrightarrow{k} \wedge \left(\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{k} \wedge \left(-\left\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{j} \right\rangle \overrightarrow{i}\right) = -\left\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{j} \right\rangle \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i} = -\left\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{j} \right\rangle \overrightarrow{j}$$

Nous avons :

$$\overrightarrow{u} = \left\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{j} \right\rangle \overrightarrow{j} + \left\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{k} \right\rangle \overrightarrow{k} \iff \left\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{j} \right\rangle \overrightarrow{j} = \overrightarrow{u} - \left\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{k} \right\rangle \overrightarrow{k} = \Pi\left(\overrightarrow{u}\right)$$

C'est à dire que, pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, nous avons $\Phi \circ \Phi\left(\overrightarrow{u}\right) = -\Pi\left(\overrightarrow{u}\right)$, c'est à dire $\Phi \circ \Phi = -\Pi$.

Ce que nous voulions

Nous venons donc de démontrer que, pour tout vecteur $\overrightarrow{u} \in E$, nous avons :

$$\overrightarrow{k} \wedge \left(\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{u}\right) = \left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{u} \right\rangle \overrightarrow{k} - \overrightarrow{u}$$

2. *Démontrer que, pour tout vecteur $\overrightarrow{u} \in E$ et $\overrightarrow{v} \in E$, nous avons :*

$$\overrightarrow{u} \wedge \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right) = \left\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \right\rangle \overrightarrow{u} - \left\| \overrightarrow{u} \right\|^2 \overrightarrow{v}$$

Soient $\overrightarrow{u} \in E$ et $\overrightarrow{v} \in E$

$\longrightarrow$ Si $\vec{u} = \vec{0}$, il est clair que nous avons $\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{0}$ et $\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle \vec{u} - \|\vec{u}\|^2 \vec{v} = \vec{0}$. Nous avons donc l'égalité souhaitée

$\longrightarrow$ Supposons maintenant $\vec{u} \neq \vec{0}$ et posons $\vec{k} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$. Alors, nous avons $\left\|\vec{k}\right\| = 1$, et d'après ce que nous avons démontré précédemment, pour tout $\vec{v} \in E$:

$$\vec{k} \wedge \left(\vec{k} \wedge \vec{v}\right) = \left\langle \vec{k} \mid \vec{v} \right\rangle \vec{k} - \vec{v}$$

Or :

$$\vec{k} \wedge \left(\vec{k} \wedge \vec{v}\right) = \left\langle \vec{k} \mid \vec{v} \right\rangle \vec{k} - \vec{v}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \wedge \left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \wedge \vec{v}\right) = \left\langle \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \mid \vec{v} \right\rangle \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} - \vec{v}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{1}{\|\vec{u}\|^2} (\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v})) = \frac{1}{\|\vec{u}\|^2} \langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle \vec{u} - \vec{v}$$

En multipliant les deux membres de la dernière égalité par $\|\vec{u}\|^2$, nous obtenons :

$$\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle \vec{u} - \|\vec{u}\|^2 \vec{v}$$

3. *Soient $\vec{u} \in E$, $\vec{v} \in E$ et $\vec{w} \in E$ trois vecteurs de E*

   (a) *On suppose que le vecteur $\vec{u} \in E$ n'est pas nul. Il faut montrer que $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \langle \vec{u} \mid \vec{w} \rangle \vec{v} - \langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle \vec{w}$*

   Voilà une question qui demande calculs et soins...

   Comme $\vec{u} \neq \vec{0}$, nous appellons $\vec{u_1} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ et donc $\|\vec{u_1}\| = 1$.

   $\Rightarrow$ On montre qu'il existe un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \lambda \vec{u} + \vec{v_1}$ et $\langle \vec{u} \mid \vec{v_1} \rangle = 0$

   Soit $\vec{j} \in E$ tel que $\left\|\vec{j}\right\| = 1$, $\left\langle \vec{u_1} \mid \vec{j} \right\rangle = 0$ et $\vec{v}$ appartienne au plan de base orthonormée $\left\{\vec{u_1}, \vec{j}\right\}$.

   Alors $\vec{v} = \langle \vec{u_1} \mid \vec{v} \rangle \vec{u_1} + \left\langle \vec{j} \mid \vec{v} \right\rangle \vec{j} = \dfrac{\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} + \left\langle \vec{j} \mid \vec{v} \right\rangle \vec{j}$

   En posant $\lambda = \dfrac{\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|^2}$ et $\vec{v_1} = \left\langle \vec{j} \mid \vec{v} \right\rangle \vec{j}$, nous obtenons $\vec{v} = \lambda \vec{u} + \vec{v_1}$

   $\Rightarrow$ On montre qu'il existe un nombre réel $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{w} = \mu \vec{u} + \vec{w_1}$ et $\langle \vec{u} \mid \vec{w_1} \rangle = 0$

   La méthode est la même.
   Soit $\vec{k} \in E$ tel que $\left\|\vec{k}\right\| = 1$, $\left\langle \vec{u_1} \mid \vec{k} \right\rangle = 0$ et $\vec{w}$ appartienne au plan de base orthonormée $\left\{\vec{u_1}, \vec{k}\right\}$.

   Alors $\vec{w} = \langle \vec{u_1} \mid \vec{w} \rangle \vec{u_1} + \left\langle \vec{k} \mid \vec{w} \right\rangle \vec{k} = \dfrac{\langle \vec{u} \mid \vec{w} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} + \left\langle \vec{k} \mid \vec{w} \right\rangle \vec{k}$

   En posant $\mu = \dfrac{\langle \vec{u} \mid \vec{w} \rangle}{\|\vec{u}\|^2}$ et $\vec{w_1} = \left\langle \vec{k} \mid \vec{w} \right\rangle \vec{k}$, nous obtenons $\vec{w} = \mu \vec{u} + \vec{w_1}$

   $\Rightarrow$ Intéressons nous maintenant à $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$

   - Commençons par $\vec{v} \wedge \vec{w}$
     D'après ce que nous venons de voir, nous avons :

$$\begin{aligned}
\vec{v} \wedge \vec{w} &= (\lambda \vec{u} + \vec{v_1}) \wedge (\mu \vec{u} + \vec{w_1}) \\
&= \lambda\mu (\vec{u} \wedge \vec{u}) + \lambda (\vec{u} \wedge \vec{w_1}) + \mu (\vec{v_1} \wedge \vec{u}) + \vec{v_1} \wedge \vec{w_1} \\
&= \lambda (\vec{u} \wedge \vec{w_1}) + \mu (\vec{v_1} \wedge \vec{u}) + \vec{v_1} \wedge \vec{w_1} \\
&= \lambda (\vec{u} \wedge \vec{w_1}) - \mu (\vec{u} \wedge \vec{v_1}) + \vec{v_1} \wedge \vec{w_1}
\end{aligned}$$

   - Attelons nous, maintenant à $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$
     D'après les calculs précédents, nous avons :

$$\begin{aligned}
\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) &= \vec{u} \wedge (\lambda (\vec{u} \wedge \vec{w_1}) - \mu (\vec{u} \wedge \vec{v_1}) + \vec{v_1} \wedge \vec{w_1}) \\
&= \lambda (\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{w_1})) - \mu (\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v_1})) + \vec{u} \wedge (\vec{v_1} \wedge \vec{w_1})
\end{aligned}$$

- D'après une question précédente,

$$\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w_1}) = \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{w_1} \rangle \overrightarrow{u} - \|\overrightarrow{u}\|^2 \overrightarrow{w_1}$$

Et aussi

$$\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v_1}) = \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v_1} \rangle \overrightarrow{u} - \|\overrightarrow{u}\|^2 \overrightarrow{v_1}$$

- Regardons $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{w_1})$
Tout d'abord, $\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{w_1}$ est un vecteur colinéaire à un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{w_1}$, donc colinéaire à $\overrightarrow{u}$. Ainsi, $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{w_1}) = \overrightarrow{0}$
- Et donc :

$$\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = \lambda \left(\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{w_1} \rangle \overrightarrow{u} - \|\overrightarrow{u}\|^2 \overrightarrow{w_1} \right) - \mu \left(\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v_1} \rangle \overrightarrow{u} - \|\overrightarrow{u}\|^2 \overrightarrow{v_1} \right)$$

....Le travail n'est pas fini !!
- <u>Regardons $\lambda \left(\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{w_1} \rangle \overrightarrow{u} - \|\overrightarrow{u}\|^2 \overrightarrow{w_1} \right)$</u>
La clef de la démonstration tient en :

$$\overrightarrow{w} = \mu \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w_1} \Longleftrightarrow \overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{w} - \mu \overrightarrow{u}$$

Donc :

$$\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{w_1} \rangle = \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{w} - \mu \overrightarrow{u} \rangle = \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{w} \rangle - \mu \|\overrightarrow{u}\|^2 = \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{w} \rangle - \frac{\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{w} \rangle}{\|\overrightarrow{u}\|^2} \times \|\overrightarrow{u}\|^2 = 0$$

Et pour finir ce point :

$$\lambda \left(\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{w_1} \rangle \overrightarrow{u} - \|\overrightarrow{u}\|^2 \overrightarrow{w_1} \right) = -\lambda \|\overrightarrow{u}\|^2 (\overrightarrow{w} - \mu \overrightarrow{u}) = -\lambda \|\overrightarrow{u}\|^2 \overrightarrow{w} + \lambda\mu \overrightarrow{u}$$

- <u>Regardons maintenant $\mu \left(\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v_1} \rangle \overrightarrow{u} - \|\overrightarrow{u}\|^2 \overrightarrow{v_1} \right)$</u>
Symétriquement, nous avons $\mu \left(\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v_1} \rangle \overrightarrow{u} - \|\overrightarrow{u}\|^2 \overrightarrow{v_1} \right) = -\mu \|\overrightarrow{u}\|^2 \overrightarrow{v} + \lambda\mu \overrightarrow{u}$
- En synthèse :

$$\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = \mu \|\overrightarrow{u}\|^2 \overrightarrow{v} - \lambda \|\overrightarrow{u}\|^2 \overrightarrow{w} = \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{w} \rangle \overrightarrow{v} - \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle \overrightarrow{w}$$

Ce que nous voulions

(b) *Démontrer que la formule précédente est vraie même si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$*

Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{0} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{0}$ et $\left\langle \overrightarrow{0} \mid \overrightarrow{w} \right\rangle \overrightarrow{v} - \left\langle \overrightarrow{0} \mid \overrightarrow{v} \right\rangle \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$

La formule précédente est donc vraie même si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$