Chapitre 19

Isométries affines

19.1 Groupe des isométries

19.1.1 Définition

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien
On appelle <u>isométrie de $\mathcal{E}$</u> toute application $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ telle que :

$$(\forall M \in \mathcal{E})\,(\forall N \in \mathcal{E})\left(\left\|\overrightarrow{f(M)\,f(N)}\right\| = \left\|\overrightarrow{MN}\right\|\right)$$

Remarque 1 :

En posant $M' = f(M)$ et $N' = f(N)$, f est une isométrie si et seulement si $M'N' = MN$

Exemple 1 :

Les isométries existent ! ! Nous allons commencer par en présenter les plus simples :

1. Bien entendu, **l'application identique** $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ est une isométrie
2. **Les translations** sont des isométries.

   Soit $\overrightarrow{u} \in E$ et $T_{\overrightarrow{u}} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.
   Alors, pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $N \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{MT_{\overrightarrow{u}}(M)} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{NT_{\overrightarrow{u}}(N)} = \overrightarrow{u}$. Donc :

   $$\overrightarrow{T_{\overrightarrow{u}}(M)\,T_{\overrightarrow{u}}(N)} = \overrightarrow{T_{\overrightarrow{u}}(M)\,M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NT_{\overrightarrow{u}}(N)} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{u} = \overrightarrow{MN}$$

   Ainsi, $\left\|\overrightarrow{T_{\overrightarrow{u}}(M)\,T_{\overrightarrow{u}}(N)}\right\| = \left\|\overrightarrow{MN}\right\|$. Et donc, une translation est une isométrie.
   Nous venons aussi de redémontrer que l'endomorphisme associé à une translation est l'application identique
3. Soit $\Omega \in \mathcal{E}$; alors, **la symétrie centrale de centre Ω ou l'homothétie de centre Ω et de rapport** -1 est une isométrie

   Nous appelons $H_{\Omega,-1}$ l'homothétie de centre Ω et de rapport -1.
   Alors, pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $N \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{\Omega H_{\Omega,-1}(M)} = -\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{\Omega H_{\Omega,-1}(N)} = -\overrightarrow{\Omega N}$.
   Donc :

   $$\overrightarrow{H_{\Omega,-1}(M)\,H_{\Omega,-1}(N)} = \overrightarrow{H_{\Omega,-1}(M)\,\Omega} + \overrightarrow{\Omega H_{\Omega,-1}(N)} = \overrightarrow{\Omega M} - \overrightarrow{\Omega N} = \overrightarrow{NM}$$

   Ainsi, $\left\|\overrightarrow{H_{\Omega,-1}(M)\,H_{\Omega,-1}(N)}\right\| = \left\|-\overrightarrow{MN}\right\| = \left\|\overrightarrow{MN}\right\|$. Et donc, une symétrie centrale est une isométrie.
4. Toute homothétie de rapport $k \neq \pm 1$ n'est pas une isométrie

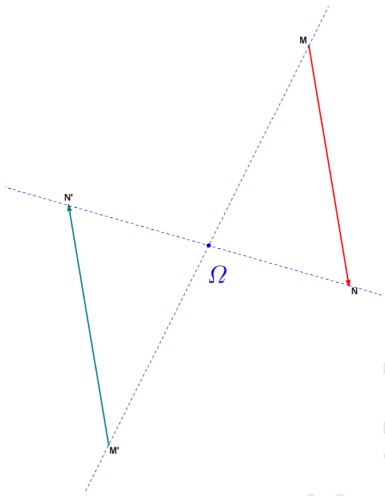

FIGURE 19.1 – Une homothétie de centre Ω et de rapport -1 est une isométrie

19.1.2 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien et $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une isométrie. Alors f conserve le produit scalaire, c'est à dire que pour tout point $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{E}$, $C \in \mathcal{E}$ et $D \in \mathcal{E}$:

$$\left\langle \overrightarrow{f(A)\,f(B)} \mid \overrightarrow{f(C)\,f(D)} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{CD} \right\rangle$$

Démonstration

Nous utilisons la formule de polarisation vue en 15.1.9 ; de là, nous tirons, pour tout point $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{E}$, $C \in \mathcal{E}$:

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle = -\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{CA} \right\rangle &= \frac{1}{2}\left[\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\right\|^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{CB}\right\|^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left\|\overrightarrow{f(A)\,f(B)}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{f(A)\,f(C)}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{f(C)\,f(B)}\right\|^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left\|\overrightarrow{f(A)\,f(B)}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{f(A)\,f(C)}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{f(A)\,f(B)} - \overrightarrow{f(A)\,f(C)}\right\|^2\right] \\
&= \left\langle \overrightarrow{f(A)\,f(B)} \mid \overrightarrow{f(A)\,f(C)} \right\rangle
\end{aligned}$$

Soient, maintenant 4 points $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{E}$, $C \in \mathcal{E}$ et $D \in \mathcal{E}$, alors :

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{CD} \right\rangle &= \left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \right\rangle \\
&= \left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AD} \right\rangle - \left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle \\
&= \left\langle \overrightarrow{f(A)\,f(B)} \mid \overrightarrow{f(A)\,f(D)} \right\rangle - \left\langle \overrightarrow{f(A)\,f(B)} \mid \overrightarrow{f(A)\,f(C)} \right\rangle \\
&= \left\langle \overrightarrow{f(A)\,f(B)} \mid \overrightarrow{f(A)\,f(D)} - \overrightarrow{f(A)\,f(C)} \right\rangle \\
&= \left\langle \overrightarrow{f(A)\,f(B)} \mid \overrightarrow{f(C)\,f(D)} \right\rangle
\end{aligned}$$

f, isométrie, conserve donc le produit scalaire.

Remarque 2 :

Une isométrie conserve donc les angles droits et les angles non orientés puisque :

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle}{\left\| \overrightarrow{AB} \right\| \left\| \overrightarrow{AC} \right\|} = \frac{\left\langle \overrightarrow{f(A)f(B)} \mid \overrightarrow{f(A)f(C)} \right\rangle}{\left\| \overrightarrow{f(A)f(B)} \right\| \left\| \overrightarrow{f(A)f(C)} \right\|} = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{f(A)f(B)}, \overrightarrow{f(A)f(C)}}\right)$$

19.1.3 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien et $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application quelconque. Alors f est une isométrie de $\mathcal{E}$ si et seulement si :

1. **f est une application affine**
2. **$\overrightarrow{f}$, l'endomorphisme associé à f est un endomorphisme orthogonal (c'est à dire $\overrightarrow{f} \in \mathcal{O}(E)$)**

Démonstration

1. Supposons f affine et $\overrightarrow{f} \in \mathcal{O}(E)$
   En d'autres termes, commençons par le plus simple !
   Soient $M \in \mathcal{E}$ et $N \in \mathcal{E}$. Alors :
$$\left\| \overrightarrow{f(M)f(N)} \right\| = \left\| \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{MN}\right) \right\| = \left\| \overrightarrow{MN} \right\|$$
   f est donc une isométrie de $\mathcal{E}$
2. Réciproquement, supposons que f soit une isométrie de $\mathcal{E}$
   Ce ci veut dire que, pour tout $M \in \mathcal{E}$ et $N \in \mathcal{E}$, nous avons $\left\| \overrightarrow{f(M)f(N)} \right\| = \left\| \overrightarrow{MN} \right\|$
   Fixons $A \in \mathcal{E}$ [1].
   Nous construisons $\varphi : E \longrightarrow E$, en posant :
$$\left\{ \begin{array}{ccc} \varphi : E & \longrightarrow & E \\ \overrightarrow{AM} & \longmapsto & \varphi\left(\overrightarrow{AM}\right) = \overrightarrow{f(A)f(M)} \end{array} \right.$$
   Pour montrer que φ est un endomorphisme orthogonal, il suffit, d'après le théorème 15.2.4, de démontrer que φ conserve le produit scalaire.
   Soient $\overrightarrow{u} \in E$ et $\overrightarrow{v} \in E$
   Il existe un unique point $M \in \mathcal{E}$ et un unique point $N \in \mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AN}$, et donc :
$$\langle \varphi(\overrightarrow{u}) \mid \varphi(\overrightarrow{v}) \rangle = \left\langle \varphi\left(\overrightarrow{AM}\right) \mid \varphi\left(\overrightarrow{AN}\right) \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{f(A)f(M)} \mid \overrightarrow{f(A)f(N)} \right\rangle$$
   Nous avons :
$$\begin{array}{rcl} \left\| \overrightarrow{MN} \right\|^2 & = & \left\| \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} \right\|^2 \\ & = & \left\langle \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} \right\rangle \\ & = & \left\| \overrightarrow{AN} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{AM} \right\|^2 - 2\left\langle \overrightarrow{AN} \mid \overrightarrow{AM} \right\rangle \end{array}$$
   C'est à dire :
$$2\left\langle \overrightarrow{AN} \mid \overrightarrow{AM} \right\rangle = \left\| \overrightarrow{AN} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{AM} \right\|^2 - \left\| \overrightarrow{MN} \right\|^2$$
   De même, par un calcul semblable, nous obtenons :
$$2\left\langle \overrightarrow{f(A)f(N)} \mid \overrightarrow{f(A)f(M)} \right\rangle = \left\| \overrightarrow{f(A)f(N)} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{f(A)f(M)} \right\|^2 - \left\| \overrightarrow{f(M)f(N)} \right\|^2$$
   Comme f est une isométrie, nous avons $\left\langle \overrightarrow{AN} \mid \overrightarrow{AM} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{f(A)f(N)} \mid \overrightarrow{f(A)f(M)} \right\rangle$, c'est à dire :
$$\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle = \langle \varphi(\overrightarrow{u}) \mid \varphi(\overrightarrow{v}) \rangle$$
   φ est donc un endomorphisme orthogonal, et f est affine d'endomorphisme associé φ

1. Nous nous fixons donc une origine dans l'espace affine $\mathcal{E}$. Ce faisant, nous « tuons » la structure affine pour aller vers la structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Remarque 3 :

1. Une isométrie f de $\mathcal{E}$ est entièrement déterminée par l'image d'un point $A \in \mathcal{E}$ et la donnée de son endomorphisme orthogonal associé $\overrightarrow{f} \in \mathcal{O}(E)$
2. Une isométrie, étant une application affine, conserve les barycentres.

19.1.4 Corollaire

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien et $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une isométrie
Alors f transforme tout repère orthonormé en un autre repère orthonormé

19.1.5 Proposition

Toute isométrie affine est bijective

Voilà un énoncé brutal ; bien plus facile à retenir dans sa forme résumée

Démonstration

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien et f une isométrie de $\mathcal{E}$ d'application linéaire associée $\overrightarrow{f} \in \mathcal{O}(E)$.
$\overrightarrow{f}$ étant un endomorphisme orthogonal est, d'après 15.2.5 bijectif ; d'après 17.2.6, f est aussi bijective.

Remarque 4 :

Donc, une isométrie transforme une droite en une droite et un plan en un plan

Exemple 2 :

Le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Soit f, l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ de définition analytique :

$$\left\{\begin{array}{rl} x' = & -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y - 1 \\ y' = & \dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y + 2 \end{array}\right.$$

Il faut montrer que f est une isométrie de $\mathcal{P}$

Soient $M(x_M, y_M) \in \mathcal{P}$ et $N(x_N, y_N) \in \mathcal{P}$.
On appelle $M' = f(M)$ et $N' = f(N)$, alors, d'après la définition :

$$\left\{\begin{array}{rl} x'_M = & -\dfrac{3}{5}x_M + \dfrac{4}{5}y_M - 1 \\ y'_M = & \dfrac{4}{5}x_M + \dfrac{3}{5}y_M + 2 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rl} x'_N = & -\dfrac{3}{5}x_N + \dfrac{4}{5}y_N - 1 \\ y'_N = & \dfrac{4}{5}x_N + \dfrac{3}{5}y_N + 2 \end{array}\right.$$

Et :

$$\begin{array}{rl} M'N'^2 = & (x'_M - x'_N)^2 + (y'_M - y'_N)^2 \\ = & \left[-\dfrac{3}{5}x_M + \dfrac{4}{5}y_M + \dfrac{3}{5}x_N - \dfrac{4}{5}y_N\right]^2 + \left[\dfrac{4}{5}x_M + \dfrac{3}{5}y_M - \dfrac{4}{5}x_N - \dfrac{3}{5}y_N\right]^2 \\ = & \left[-\dfrac{3}{5}(x_M - x_N) + \dfrac{4}{5}(y_M - y_N)\right]^2 + \left[\dfrac{4}{5}(x_M - x_N) + \dfrac{3}{5}(y_M - y_N)\right]^2 \\ = & \dfrac{9}{25}(x_M - x_N)^2 + \dfrac{16}{25}(y_M - y_N)^2 - \dfrac{24}{5}(x_M - x_N)(y_M - y_N) + \\ & \dfrac{16}{25}(x_M - x_N)^2 + \dfrac{9}{25}(y_M - y_N)^2 + \dfrac{24}{25}(x_M - x_N)(y_M - y_N) \\ = & (x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2 \\ = & MN^2 \end{array}$$

Comme $M'N'^2 = MN^2 \Longleftrightarrow M'N' = MN$, nous venons de démontrer que f est une isométrie de $\mathcal{P}$

19.1.6 Proposition

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien
Soient $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ et $C \in \mathcal{P}$ 3 points non alignés (Ils forment donc un repère affine de $\mathcal{P}$)
Soient $A' \in \mathcal{P}$, $B' \in \mathcal{P}$ et $C' \in \mathcal{P}$ 3 points tels que $A'B' = AB$, $B'C' = BC$ et $A'C' = AC$.
Alors il existe une et une seule isométrie f de $\mathcal{P}$ telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$

Démonstration

1. Nous montrons que $\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{A'B'} \mid \overrightarrow{A'C'} \right\rangle$
   - ⋆ Nous avons $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, et donc, comme $CB^2 = \left\langle \overrightarrow{CB} \mid \overrightarrow{CB} \right\rangle$, nous avons :
   $$CB^2 = AB^2 + AC^2 - 2\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle$$
   - ⋆ De même, $C'B'^2 = A'B'^2 + A'C'^2 - 2\left\langle \overrightarrow{A'B'} \mid \overrightarrow{A'C'} \right\rangle$
   - ⋆ De l'égalité $B'C' = BC$, nous tirons :
   $$A'B'^2 + A'C'^2 - 2\left\langle \overrightarrow{A'B'} \mid \overrightarrow{A'C'} \right\rangle = AB^2 + AC^2 - 2\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle$$
   Et des égalités $A'B' = AB$, $B'C' = BC$, nous déduisons $\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{A'B'} \mid \overrightarrow{A'C'} \right\rangle$
2. Il existe une et une seule isométrie f de $\mathcal{P}$ telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$
   Nous appelons $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ le plan vectoriel associé au plan affine $\mathcal{P}$
   Comme (A, B, C) est un repère affine de $\mathcal{P}$, la famille de vecteurs $\left\{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right\}$ est une base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.
   Il existe un et un seul endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}\left(\overrightarrow{\mathcal{P}}\right)$ tel que $\varphi\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{A'B'}$ et $\varphi\left(\overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{A'C'}$
   D'après 17.2.4, il existe une et une seule application affine f telle que $f(A) = A'$ d'application linéaire associée $\varphi \in \mathcal{L}\left(\overrightarrow{\mathcal{P}}\right)$.
   Il faudra donc montrer que f est une isométrie.
   Soient donc $M \in \mathcal{P}$ et $N \in \mathcal{P}$; nous appelons $M' = f(M)$ et $N' = f(N)$; alors $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ et :
   $$\overrightarrow{M'N'} = \varphi\left(\overrightarrow{MN}\right) = \varphi\left(x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}\right) = x\varphi\left(\overrightarrow{AB}\right) + y\varphi\left(\overrightarrow{AC}\right) = x\overrightarrow{A'B'} + y\overrightarrow{A'C'}$$
   Alors : $M'N'^2 = \left\langle \overrightarrow{M'N'} \mid \overrightarrow{M'N'} \right\rangle = x^2 A'B'^2 + y^2 A'C'^2 + 2\left\langle \overrightarrow{A'B'} \mid \overrightarrow{A'C'} \right\rangle$
   Des égalités de l'hypothèse, nous tirons $M'N'^2 = x^2 AB^2 + y^2 AC^2 + 2\left\langle \overrightarrow{A'B'} \mid \overrightarrow{A'C'} \right\rangle$ et comme nous avons démontré que $\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{A'B'} \mid \overrightarrow{A'C'} \right\rangle$, nous avons :
   $$M'N'^2 = x^2 AB^2 + y^2 AC^2 + 2\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle = MN^2$$
   Donc, comme $M'N'^2 = MN^2 \iff M'N' = MN$, nous en déduisons que f est une isométrie.

19.1.7 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien ; on appelle $\mathcal{I}s(\mathcal{E})$, l'ensemble des isométries de $\mathcal{E}$
Alors, $(\mathcal{I}s(\mathcal{E}), \circ)$ l'ensemble des isométries de $\mathcal{E}$ muni de la loi de composition des applications est un groupe

Démonstration

1. Tout d'abord, $\mathcal{I}s(\mathcal{E})$ est non vide
   En effet, nous avons vu que l'application identique $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ est une isométrie et donc $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$

2. La loi $\circ$ est-elle interne ?
   Autrement dit, si f et g sont 2 isométries, est-ce que $f \circ g$ est une isométrie ? ?
   Soient donc f et g 2 isométries et $M \in \mathcal{E}$ et $N \in \mathcal{E}$ 2 points de $\mathcal{E}$. Alors :
$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{f \circ g(M) f \circ g(N)}\right\| &= \left\|\overrightarrow{f(g(M)) f(g(N))}\right\| \\ &= \left\|\overrightarrow{g(M) g(N)}\right\| \text{ car } f \text{ est une isométrie} \\ &= \left\|\overrightarrow{MN}\right\| \text{ car } g \text{ est une isométrie}\end{aligned}$$
   Ainsi, pour tout $M \in \mathcal{E}$ et $N \in \mathcal{E}$, nous avons $\left\|\overrightarrow{f \circ g(M) f \circ g(N)}\right\| = \left\|\overrightarrow{MN}\right\|$ et $f \circ g$ est donc une isométrie et la loi $\circ$ est donc une loi interne.
3. Si $f \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$, avons-nous $f^{-1} \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$?
   Soit donc $f \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$
   ⋆ f étant une isométrie, f est bijective et f^{-1} existe donc
   ⋆ Il faut maintenant montrer que f^{-1} est une isométrie.
   Soient $M \in \mathcal{E}$ et $N \in \mathcal{E}$ et $M_1 = f(M)$ tout comme $N_1 = f(N)$
   Nous avons donc $M = f^{-1}(M_1)$ et $N = f^{-1}(N_1)$. Nous avons :
$$\left\|\overrightarrow{f^{-1}(M_1) f^{-1}(N_1)}\right\| = \left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \left\|\overrightarrow{f(M) f(N)}\right\| = \left\|\overrightarrow{M_1N_1}\right\|$$
   Nous avons donc bien $f^{-1} \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$
4. Associativité de $\circ$
   La loi $\circ$ étant associative pour la composition de toutes les applications, elle le sera, en particulier dans $\mathcal{I}s(\mathcal{E})$

Nous venons de montrer que $(\mathcal{I}s(\mathcal{E}), \circ)$ est un groupe.

19.1.8 Définition de déplacement

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien E
Soit $f \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$ d'endomorphisme associé $\overrightarrow{f}$
Alors f est un déplacement (ou une isométrie positive) si et seulement si $\overrightarrow{f} \in \mathcal{O}^+(E)$

Exemple 3 :

Il est clair que les translations font parties des déplacements puisque l'endomorphisme associé est l'identité.

19.1.9 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien ; on appelle $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ ou $\mathcal{I}s^+(\mathcal{E})$, l'ensemble des déplacements de $\mathcal{E}$
Alors, $(\mathcal{D}(\mathcal{E}), \circ)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{I}s(\mathcal{E}), \circ)$

Démonstration

1. Tout d'abord $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \neq \emptyset$
   En effet, on y trouve au moins les translations ! ! On y trouve surtout $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ qui est le neutre pour la composition des applications.
2. Soient $f \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ et $g \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Montrons que $f \circ g^{-1} \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$
   ⋆ Que $f \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ signifie que f est une isométrie et que l'endomorphisme associé $\overrightarrow{f} \in \mathcal{O}^+(E)$
   ⋆ De la même manière, puisque $g \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$, g est une isométrie telle que $\overrightarrow{g} \in \mathcal{O}^+(E)$
   $\mathcal{O}^+(E)$ étant un groupe, $\overrightarrow{g}^{-1} \in \mathcal{O}^+(E)$ et $\overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}^{-1} \in \mathcal{O}^+(E)$
   D'autre part, $(\mathcal{I}s(\mathcal{E}), \circ)$ étant aussi un groupe, $f \circ g^{-1} \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$ et comme $\overrightarrow{f \circ g^{-1}} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}^{-1}$, nous avons $f \circ g^{-1} \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$

Nous venons de démontrer que $(\mathcal{D}(\mathcal{E}), \circ)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{I}s(\mathcal{E}), \circ)$

Remarque 5 :

1. L'ensemble $\mathcal{T}$ des translations de $\mathcal{E}$ est un sous groupe de $(\mathcal{D}(\mathcal{E}), \circ)$
2. Soit $f \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ et $\overrightarrow{f} \in \mathcal{O}^+(E)$ la rotation qui lui est associée. L'angle de $f \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ est celui de la rotation $\overrightarrow{f} \in \mathcal{O}^+(E)$
   Par exemple, l'angle associé à une translation est l'angle nul.
3. Soient $f \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ et $g \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$, $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{g}$ les rotations associées. Alors, l'angle de $f \circ g$ est celui de $\overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$ *(somme des anles de $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{g}$)*
4. L'angle du déplacement f^{-1} est l'opposé de celui de f

19.1.10 Définition d'antidéplacement

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien E
Soit $f \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$ d'endomorphisme associé $\overrightarrow{f}$
Alors f est un antidéplacement (ou une isométrie négative) si et seulement si $\overrightarrow{f} \in \mathcal{O}^-(E)$
On appelle $\mathcal{I}s^-(\mathcal{E})$, l'ensemble des antidéplacements de $\mathcal{E}$

19.1.11 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien

1. **La composée de 2 antidéplacements de $\mathcal{E}$ est un déplacement de $\mathcal{E}$**
2. **La composée d'un déplacement de $\mathcal{E}$ et d'un antidéplacement de $\mathcal{E}$ est un antidéplacement de $\mathcal{E}$**

Démonstration

La démonstration est complètement liée aux propriétés de $\mathcal{O}(E)$, $\mathcal{O}^+(E)$ et $\mathcal{O}^-(E)$ et laissée au lecteur

19.1.12 Théorème : décomposition d'une isométrie affine

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien
Toute isométrie $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ peut s'écrire de la forme $f = T \circ g$ où T est une translation et g une isométrie de $\mathcal{E}$ qui admet au moins un point fixe

Démonstration

Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une isométrie et $A \in \mathcal{E}$.
On pose $A' = f(A)$ et $T_{\overrightarrow{AA'}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ et considérons $g = T_{\overrightarrow{AA'}} \circ f$. Alors :

$$g(A) = T_{\overrightarrow{AA'}} \circ f(A) = T_{\overrightarrow{AA'}}(A') = A$$

g est donc une isométrie telle que $g(A) = A$; elle admet donc un point fixe.
De $g = T_{\overrightarrow{AA'}} \circ f$, nous tirons $f = T_{-\overrightarrow{AA'}} \circ g = T_{\overrightarrow{A'A}} \circ g$
Le théorème est donc démontré

Remarque 6 :

Il nous est tout à fait possible aussi de démontrer que, si nous avons toujours $A' = f(A)$, alors $f = g_1 \circ T_{\overrightarrow{A'A}}$ où g_1 est une isométrie admettant comme point fixe A', c'est à dire telle que $g_1(A') = A'$
En fait, nous venons de démontrer que toute isométrie $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ peut s'écrire de la forme $f = g_1 \circ T_{\overrightarrow{u}} = T_{-\overrightarrow{u}} \circ g$ où g et g_1 sont des isométries de $\mathcal{E}$ admettant au moins un point fixe

Exercice 1 :

$\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = & -z+1 \\ y' = & -x \\ z' = & y-2 \end{cases}$$

Démontrer que f est un déplacement.

Exercice 2 :

On considère le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ de direction le plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.
Soit f un antidéplacement de $\mathcal{P}$

1. Démontrer que $f \circ f$ est une translation. On appelle $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ le vecteur de cette translation.
2. Démontrer que si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, alors f est une symétrie par rapport à une droite
3. On suppose que $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et nous désignons par T la translation de $\mathcal{P}$ de vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{u}$. Démontrer que :
   (a) $f \circ f = T \circ T$
   (b) $f \circ T^{-1}$ est un antidéplacement involutif et que donc $f \circ T^{-1}$ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ
   (c) Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de Δ

Exercice 3 :

$\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = & \dfrac{1}{9}(-8x+4y+z+12) \\ y' = & \dfrac{1}{9}(4x+7y+4z-5) \\ z' = & \dfrac{1}{9}(x+4y-8z+8) \end{cases}$$

1. Démontrer que f est un déplacement.
2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f
3. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ de transformé $M' = f(M)$ tels que le milieiu I du segment $[M; M']$ appartienne :
   (a) A la droite d'équation $x = y = 0$
   (b) Au plan d'équation $z = 0$
   (c) A la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Exercice 4 :

$\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = & x+2 \\ y' = & y \\ z' = & -z+2 \end{cases}$$

1. Démontrer que f est un antidéplacement.
2. Démontrer que, pour tout point $M \in \mathcal{E}$ de transformé $M' = f(M)$, le miliei I du segment $[M; M']$ appartient à un plan fixe P

3. Démontrer que le point M_1, symétrique du point M dans la symétrie orthogonale par rapport au plan P est tel que le vecteur $\overrightarrow{M_1M'}$ est contant.
4. En déduire que f peut se décomposer en le produit de 2 transformations simples
5. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ de transformé $M' = f(M)$ tels que :
   (a) $OM = OM'$
   (b) Les points O, M et M' sont alignés
   (c) $MM' = a$ où $a \geqslant 0$