19.2 Isométries Planes

19.2.1 Symétries par rapport à une droite

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction $\overrightarrow{\mathcal{P}}$
Soit $D \subset \mathcal{P}$ une droite de $\mathcal{P}$ de direction $\overrightarrow{D}$ et $\mathcal{S}_D$ la symétrie orthogonale par rapport à D
Alors, $\mathcal{S}_D$ est une isométrie d'application linéaire associée $\sigma_{\overrightarrow{D}}$, la symétrie orthogonale de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ par rapport à $\overrightarrow{D}$, la direction de D

Démonstration

D'après 17.3.8, $\mathcal{S}_D$ est une application affine d'endomorphisme associé $\sigma_{\overrightarrow{D}}$ qui est une symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle $\overrightarrow{D}$. $\sigma_{\overrightarrow{D}} \in \mathcal{O}^-\left(\overrightarrow{\mathcal{P}}\right) \subset \mathcal{O}\left(\overrightarrow{\mathcal{P}}\right)$.

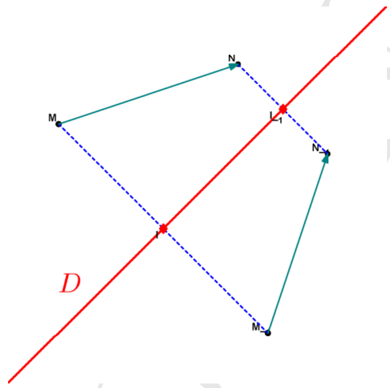

FIGURE 19.2 – Visualisation d'une symétrie orthogonale

Donc $\mathcal{S}_D$ est une isométrie affine

19.2.2 Isométries involutives

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$
L'ensemble des isométries involutives de $\mathcal{P}$ est composé de :

1. **L'identité $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$**
2. **Les symétries par rapport à un point**
3. **Les symétries orthogonales par rapport à une droite**

Démonstration

1. Les involutions
   - ⋆ L'identité et les symétries centrales sont bien entendu des isométries involutives
   - ⋆ Dans 19.2.1 nous venons de montrer qu'une symétrie orthogonale par rapport à une droite est une isométrie
2. Réciproquement, supposons que f soit une isométrie involutive

   f étant une isométrie involutive, f est affine involutive et donc f est une symétrie. Si $\overrightarrow{f}$ est l'endomorphisme orthogonal associé, alors :
   - ⋆ Si $\overrightarrow{f} = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$, alors $f = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$
   - ⋆ Si $\overrightarrow{f} = -\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$, alors f est une symétrie par rapport à un point *(ou une homothétie de rapport -1)*
   - ⋆ Si $\overrightarrow{f} = \sigma_{\overrightarrow{\Delta}}$, alors f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite D de direction $\overrightarrow{\Delta}$

19.2.3 Théorème

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$
Tout antidéplacement f de $\mathcal{P}$ admettant au moins un point invariant $A \in \mathcal{P}$ (c'est à dire tel que $f(A) = A$) est une symétrie orthogonale par rapport à une droite passant par A

Démonstration

1. Toute symétrie orthogonale par rapport à une droite
   underline est un antidéplacement qui admet au moins un point fixe
   En effet, si $\mathcal{S}_D$ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite D, elle admet comme points invariants l'ensemble D et d'après 19.2.1, l'application linéaire associée est $\sigma_{\overrightarrow{D}}$, la symétrie orthogonale de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ par rapport à $\overrightarrow{D}$, la direction de D ; comme $\sigma_{\overrightarrow{D}} \in \mathcal{O}^-\left(\overrightarrow{\mathcal{P}}\right)$, $\mathcal{S}_D$ est bien un antidéplacement.
2. Soit f un antidéplacement de $\mathcal{P}$ admettant au moins un point invariant $A \in \mathcal{P}$
   - ⋆ L'endomorphisme associé $\overrightarrow{f}$ est un élément de $\mathcal{O}^-\left(\overrightarrow{\mathcal{P}}\right)$; d'après 15.3.4 $\overrightarrow{f}$ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle $\overrightarrow{D}$, c'est à dire, en utilisant les notations habituelles, $\overrightarrow{f} = \sigma_{\overrightarrow{D}}$
   - ⋆ Soit $D \in \mathcal{P}$ de direction $\overrightarrow{D}$ et passant par A. Alors :
     - → Si $\mathcal{S}_D$ est la symétrie orthogonale par rapport à D, $\mathcal{S}_D(A) = A$ et l'endomorphisme associé est $\overrightarrow{\mathcal{S}_D} = \sigma_{\overrightarrow{D}}$
     - → Nous avons donc : $\mathcal{S}_D(A) = f(A) = A$ et $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{\mathcal{S}_D} = \sigma_{\overrightarrow{D}}$
     - → D'où $f = \mathcal{S}_D$

   f est donc une symétrie orthogonale

Remarque 7 :

1. Il existe des antidéplacements du plan qui n'admettent pas de point fixe.
   Par exemple, soit $D \in \mathcal{P}$ et une droite d'un plan affine euclidien de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Considérons $f = \mathcal{S}_D \circ t_{\overrightarrow{u}}$, composée de la symétrie orthogonale $\mathcal{S}_D$ et de la translation $t_{\overrightarrow{u}}$. Alors f est un antidéplacement, puisque son endomorphisme associé est $\overrightarrow{f} = \sigma_{\overrightarrow{D}} \circ \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}} = \sigma_{\overrightarrow{D}}$. Mais f n'admet aucun point fixe.
2. Dans un plan affine euclidien, toute symétrie orthogonale par rapport à une droite D conserve les angles de droites, c'est à dire que si Δ_1 et Δ_2 sont deux droites de transgormée Δ_1' et Δ_2', alors $\widehat{\Delta_1, \Delta_2} = \widehat{\Delta_1', \Delta_2'}$

Exercice 5 :

Le plan $\mathcal{P}$ étant rapporté à un repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ orthonormé, définir analytiquement la symétrie orthogonale par rapport à la droite D d'équation cartésienne : $x - 2y + 3 = 0$

Exercice 6 :

Le plan $\mathcal{P}$ étant rapporté à un repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ orthonormé,nous considérons l'application $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ dont la définition analytique est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{rl} x' = & -y+1 \\ y' = & -x+1 \end{array}\right.$$

Il faut montrer que f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite que vous déterminerez par son équation cartésienne *(par exemple)*

19.2.4 Théorème

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$
Tout déplacement f de $\mathcal{P}$ est égal à la composition de deux symétries orthogonales

Démonstration

Soit donc f un déplacement du plan affine euclidien $\mathcal{P}$ et $A \in \mathcal{P}$. On appelle $A' = f(A)$
Il existe une droite $D \in \mathcal{P}$ telle que $A' = S_D(A)$; il suffit de prendre pour D, la médiatrice du segment $[AA']$
Soit $S_1 = f \circ S_D$.
S_1 est un antidéplacement *(ou isométrie négative)* de $\mathcal{P}$ comme composée d'un déplacement f et d'un antidéplacement S_D. Montrons que S_1 est une symétrie orthogonale. Pour ce faire, nous allons démontrer que S_1 admet un point invariant, et que ce point est A'. En effet, nous avons :

$$S_1(A') = f \circ S_D(A') = f(S_D(A')) = f(A) = A'$$

S_1 est donc une symétrie orthogonale par rapport à une droite D' passant par A'. Ainsi :

$$S_1 = f \circ S_D \iff f = S_1 \circ S_D$$

Ce que nous voulions

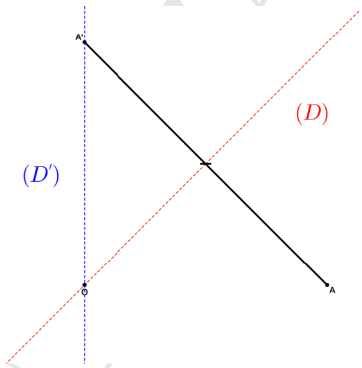

FIGURE 19.3 – Décomposition d'un déplacement du plan

19.2.5 Proposition

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$
Soient $D \subset \mathcal{P}$ et $D_1 \subset \mathcal{P}$ 2 droites parallèles de $\mathcal{P}$ (nous avons $D \parallel D_1$)
Alors $S_D \circ S_{D_1}$ est une translation.

Démonstration

Tout d'abord, nous pouvons faire remarquer que S_D et S_{D_1} sont 2 antidéplacements, que la composée de 2 antidéplacements est un déplacement ; comme une translation est un déplacement, le résultat est cohérent
Si $D \parallel D_1$, alors les 2 droites ont la même direction $\overrightarrow{D}$ et donc, l'application linéaire associée à $S_D \circ S_{D_1}$ est $\sigma_{\overrightarrow{D}} \circ \sigma_{\overrightarrow{D}} = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$.
C'est donc une translation, de vecteur éventuellement nul !

Remarque 8 :

Si ce résultat est remarquable, il ne nous donne pas le vecteur de la translation !!

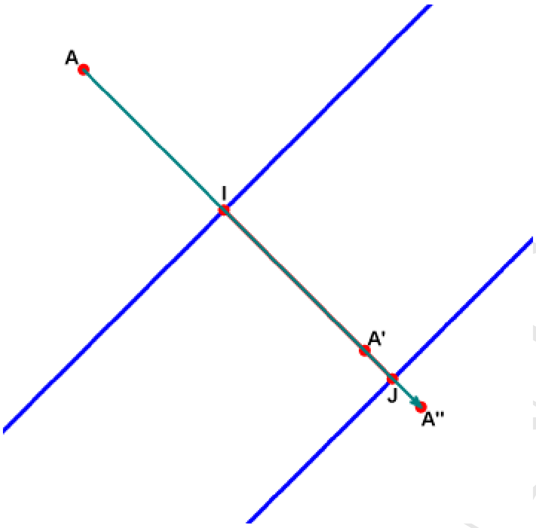

FIGURE 19.4 – Composition de deux symétries orthogonales d'axes parallèles

Pour trouver le vecteur de cette translation, nous allons utiliser l'outil qui tue en géométrie : le schéma ; reportez vous donc au schéma 19.4
Soient donc $D \subset \mathcal{P}$ et $D_1 \subset \mathcal{P}$ 2 droites parallèles de $\mathcal{P}$, c'est à dire $D \parallel D_1$.
Soit $A \in \mathcal{P}$ et nous appelons $A' = S_{D_1}(A)$ et $A'' = S_D(A')$, c'est à dire $A'' = S_D \circ S_{D_1}(A)$.
Nous avons $(AA') \perp D_1$ et $(A'A'') \perp D$, et comme $D \parallel D_1$ nous avons $(AA') \parallel (A'A'')$; Comme A' est commun aux deux droites, les points A, A' et A'' sont alignés.
Soient I le milieu du segment $[AA']$ et J celui du segment $[A'A'']$. En fait, J est la projection orthogonale de I sur D. Nous avons alors :

$$\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A''} = 2\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{A'J} = 2\overrightarrow{AI} + 2\left(\overrightarrow{A'I} + \overrightarrow{IJ}\right) = 2\left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{A'I}\right) + +2\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{IJ}$$

Donc $\overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{IJ}$.
Et donc $S_D \circ S_{D_1} = T_{2\overrightarrow{IJ}}$

L'application composée de 2 symétries orthogonales $S_D \circ S_{D_1}$ d'axes parallèles $D \parallel D_1$ est une translation de vecteurs $2\overrightarrow{HK}$ où, si $H \in D_1$, K est le projeté orthogonal de H sur D

19.2.6 Une réciproque de 19.2.5

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$
Pour toute translation $T_{\overrightarrow{u}}$ de vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ et toute droite $D \subset \mathcal{P}$ admettant $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ comme vecteur normal, il existe une et une seule droite $D_1 \subset \mathcal{P}$, parallèle à D (i.e.$D \parallel D_1$) telle que $S_D \circ S_{D_1} = T_{\overrightarrow{u}}$

Démonstration

Soit donc $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ et $T_{\overrightarrow{u}}$ la translation de $\mathcal{P}$ correspondante.
Soit $D \subset \mathcal{P}$ admettant $\overrightarrow{u}$ comme vecteur normal et $H \in D$
Soit $K \in \mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{HK} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{u}$ et D' la doite parallèle à D et passant par K *(cf figure 19.5)*
Alors, d'après 19.2.5, $S_{D'} \circ S_D$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$, c'est à dire : $S_{D'} \circ S_D = T_{\overrightarrow{u}}$
Montrons, qu'une fois choisie la droite D, la droite D' est unique.
Soit donc une droite D_1 telle que $S_{D_1} \circ S_D = T_{\overrightarrow{u}}$. Nous avons donc : $S_{D_1} \circ S_D = S_{D'} \circ S_D$, c'est à dire, en utilisant la composition à droite par S_D, $S_{D'} = S_{D_1}$.
Par conséquent, $D' = D_1$

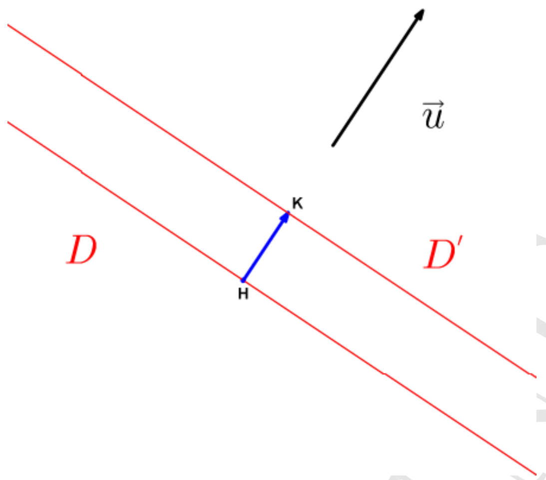

FIGURE 19.5 – Décomposition d'une translation

Remarque 9 :

1. Notons que D' est l'image de D par la translation $T_{\frac{1}{2}\overrightarrow{u}}$
2. De la même manière, nous pouvons montrer l'existence et l'unicité d'une droite D'' telle que $S_D \circ S_{D''} = T_{\overrightarrow{u}}$; la droite D'' étant, cette fois ci, la transformée de la droite D par la translation $T_{-\frac{1}{2}\overrightarrow{u}}$

19.2.7 Définition de rotation

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$
Soient $\Omega \in \mathcal{P}$ et $\theta \in \mathbb{R}$
On appelle rotation de centre Ω et d'angle θ le déplacement $R(\Omega, \theta) \in \mathcal{I}s^+(\mathcal{P})$ laissant Ω invariant (c'est à dire $R(\Omega, \theta)(\Omega) = \Omega$) et dont l'endomorphisme associé ρ est une rotation de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ d'angle θ

Remarque 10 :

1. Le point fixe de la rotation Ω est aussi appelé **centre de la rotation**
2. Une rotation d'angle de mesure $2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ est l'identité de $\mathcal{P}$
3. Plusieurs rotations affines peuvent avoir la même rotation vectorielle associée ; elle se différencient alors par leur centre de rotation.
4. Soit $R(\Omega, \theta)$ une rotation de centre Ω et d'angle θ et soit ρ, sa rotation associée.
   Pour tout point $M \in \mathcal{P}$ et tout point $N \in \mathcal{P}$, posons $M' = R(\Omega, \theta)(M)$ et $N' = R(\Omega, \theta)(N)$; alors :
   $$\overrightarrow{M'N'} = \rho\left(\overrightarrow{MN}\right) \text{ et donc } \widehat{\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}\right)} \equiv \theta\,[2\pi]$$
5. Soit $R(\Omega, \theta)$ une rotation de $\mathcal{P}$ de centre Ω et d'angle θ et soient B, S et C 3 points du plan $\mathcal{P}$; nous posons $S' = R(\Omega, \theta)(S)$, $B' = R(\Omega, \theta)(B)$ et $C' = R(\Omega, \theta)(C)$. Alors :
   - ⋆ D'après l'item précédent, $\widehat{\left(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{S'B'}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{S'C'}\right)} \equiv \theta\,[2\pi]$
   - ⋆ Donc,
   $$\widehat{\left(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{S'B'}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{S'B'}, \overrightarrow{SC}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{S'B'}, \overrightarrow{SC}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{S'C'}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{S'B'}, \overrightarrow{S'C'}\right)}$$
   - ⋆ Ainsi, pour tout point B, S et C 3 points du plan $\mathcal{P}$, nous avons :
   $$[\widehat{\left(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{S'B'}, \overrightarrow{S'C'}\right)}$$

6. Soit $D \subset \mathcal{P}$ une droite du plan $\mathcal{P}$. Soient $M \in D$ et $N \in D$ et une rotation R du plan d'angle θ. On appelle $M' = R(M)$ et $N' = R(N)$

   Nous avons donc $\widehat{\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}\right)} = \theta\,[2\pi]$, c'est à dire $\widehat{(MN), (M'N')} = \theta\,[\pi]$. Aisi :

   L'image par une rotation R du plan d'angle θ d'une doite $D \subset \mathcal{P}$ est une autre droite D' telle que $\widehat{D, D'} = \theta\,[\pi]$

7. Si $R(\Omega, \theta)$ est une rotation de $\mathcal{P}$, **avec** $\theta \neq 2k\pi$, alors Ω est le seul point invariant de $R(\Omega, \theta)$

   En effet,
   Soit $I \in \mathcal{P}$ un second point invariant de $R(\Omega, \theta)$ et ρ la rotation associée à $R(\Omega, \theta)$.
   Le seul vecteur invariant par ρ est $\overrightarrow{0}$. Alors :

$$\overrightarrow{\Omega I} = \overrightarrow{R(\Omega,\theta)(\Omega)\,R(\Omega,\theta)(I)} = \rho\left(\overrightarrow{\Omega I}\right)$$

   Donc, de $\overrightarrow{\Omega I} = \rho\left(\overrightarrow{\Omega I}\right)$, nous tirons $\overrightarrow{\Omega I} = \overrightarrow{0}$, c'est à dire $\Omega = I$
   Ω est donc le seul point invariant de $R(\Omega, \theta)$

Exercice 7 :

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. On considère une rotation de $\mathcal{P}$ $R(A, \theta)$, $D \subset \mathcal{P}$ et $D' \subset \mathcal{P}$ 2 droites de $\mathcal{P}$ sécantes en $I \neq A$ et telles que $R(A, \theta)(D) = D'$

1. On suppose θ non congru à 0 modulo π
   Montrer que pour tout point $M \in D$, si $M' = R(A, \theta)(M)$, les points M, A, I et M' sont cocycliques
2. Que se passe-t-il si $\theta \equiv 0\,[\pi]$?

19.2.8 Définition analytique d'une rotation

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$
Alors, $R(\Omega, \theta)$ est une rotation de $\mathcal{P}$ d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ si et seulement si sa définition analytique est donnée par :

$$\begin{cases} x' = & x\cos\theta - y\sin\theta + \lambda \\ y' = & x\sin\theta + y\cos\theta + \mu \end{cases}$$

Démonstration

Soit $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ le centre de la rotation $R(\Omega, \theta)$ d'angle $\theta \in \mathbb{R}$; soit ρ l'endomorphisme associé. Alors $\mathcal{M}_{\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}}(\rho) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Soient $M(x, y) \in \mathcal{P}$ et $M' = R(M)(x', y')$. Comme nous avons $\rho\left(\overrightarrow{\Omega M}\right) = \overrightarrow{R(\Omega)\,R(M)} = \overrightarrow{\Omega M'}$, nous avons :

$$\begin{pmatrix} x' - x_\Omega \\ y' - y_\Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_\Omega \\ y - y_\Omega \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x' - x_\Omega = & \cos\theta\,(x - x_\Omega) - \sin\theta\,(y - y_\Omega) \\ y' - y_\Omega = & \sin\theta\,(x - x_\Omega) + \cos\theta\,(y - y_\Omega) \end{cases}$$

C'est à dire :

$$\begin{cases} x' = & x\cos\theta - y\sin\theta + x_\Omega\,(1 - \cos\theta) + y_\Omega \sin\theta \\ y' = & x\sin\theta + y\cos\theta + y_\Omega\,((1 - \cos\theta)) - x_\Omega \sin\theta \end{cases}$$

En posant $\lambda = x_\Omega\,(1 - \cos\theta) + y_\Omega \sin\theta$ et $\mu = y_\Omega\,((1 - \cos\theta)) - x_\Omega \sin\theta$, nous avons bien :

$$\begin{cases} x' = & x\cos\theta - y\sin\theta + \lambda \\ y' = & x\sin\theta + y\sin\theta + \mu \end{cases}$$

Exercice 8 :

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$
Soit $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ l'application dont la définition analytique est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = & \dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{3}+y+3-\sqrt{3}\right) \\ y' = & \dfrac{1}{2}\left(-x+y\sqrt{3}-1+\sqrt{3}\right) \end{array}\right.$$

Exercice 9 :

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
On appelle $R(A,\theta)$ la rotation de $\mathcal{P}$, de centre A et d'angle θ.
Si $a \in \mathbb{C}$ est l'affixe du point $A \in \mathcal{P}$, $z \in \mathbb{C}$ celui du point $M \in \mathcal{P}$, exprimez l'affixe $z' \in \mathbb{C}$ du point $M' = R(A,\theta)(M)$ en fonction de a, z et θ

19.2.9 Corollaire : définition analytique d'un antidéplacement

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$
Alors, f est un antidéplacement de $\mathcal{P}$ si et seulement si sa définition analytique est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = & x\cos\theta + y\sin\theta + \lambda \\ y' = & x\sin\theta - y\cos\theta + \mu \end{array}\right.$$

Démonstration

La démonstration est laissée au lecteur ; elle est sur le modèle de 19.2.8

19.2.10 Proposition

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$
Soient $D \subset \mathcal{P}$ et $D_1 \subset \mathcal{P}$ 2 droites de $\mathcal{P}$ sécantes en Ω, c'est à dire telles que $D \cap D_1 = \{\Omega\}$
θ est une mesure modulo π de l'angle de droites $\widehat{(D, D_1)}$
Alors, l'application composée $S_{D_1} \circ S_D$ est la rotation de centre Ω et d'angle 2θ, c'est à dire :

$$S_{D_1} \circ S_D = R(\Omega, 2\theta)$$

Démonstration

Nous appelons $\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{D_1}$ les directions respectives de D et D_1.
Alors, $R = S_{D_1} \circ S_D$ a pour endomorphisme associé $\rho = \sigma_{\overrightarrow{D_1}} \circ \sigma_{\overrightarrow{D}}$ et ρ est une rotation et donc R est un déplacement de $\mathcal{P}$
De plus, Ω est forcément invariant par R, et donc R est une rotation de centre Ω
Soient $I \in D$ et $J \in D_1$ tels que $\Omega I = \Omega J = 1 \iff \left\|\overrightarrow{\Omega I}\right\| = \left\|\overrightarrow{\Omega J}\right\| = 1$
Nous appelons $I' = R(I) = S_{D_1} \circ S_D(I) = S_{D_1}(I)$. I' est donc le symétrique de I par rapport à D_1. Nous avons aussi :

$$\overrightarrow{\Omega I'} = \overrightarrow{\Omega R(I)} = \rho\left(\overrightarrow{\Omega I}\right)$$

ρ est bien la rotation qui transforme le vecteur $\overrightarrow{\Omega I}$ en le vecteur $\overrightarrow{\Omega I'}$

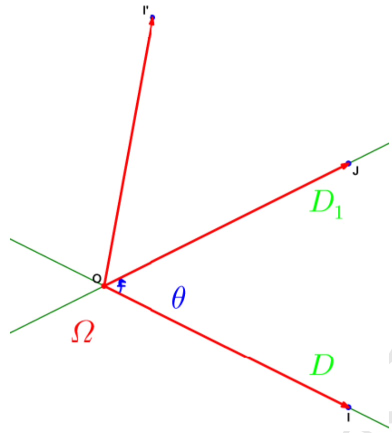

FIGURE 19.6 – Composition de 2 symétries orthogonales

<u>Regardons les angles</u>

Une symétrie conservant les angles, nous avons $\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega J}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega I'}\right)} = \theta\,[\pi]$
Donc :

$$\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega I'}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega J}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega I'}\right)} = 2\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega J}\right)}$$

Comme $\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega J}\right)} = \theta + k\pi$, nous avons $\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega I'}\right)} = 2\theta + 2k\pi$, c'est à dire que :

$$S_{D_1} \circ S_D = R\,(\Omega, 2\theta)$$

Exercice 10 :

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$
D est la droite d'équation $x + y - 1 = 0$ et Δ est la droite d'équation $x + y - 1 = 0$.
On appelle $\mathcal{S}_D$ la symétrie orthogonale par rapport à D et $\mathcal{S}_\Delta$ la symétrie orthogonale par rapport à Δ

1. Quelles sont les définitions analytiques de $\mathcal{S}_D$ et $\mathcal{S}_\Delta$
2. Soit $f = \mathcal{S}_D \circ \mathcal{S}_\Delta$. Donner la définition analytique de f ; en déduire les éléments caractéristique de f
3. Même question pour $g = \mathcal{S}_\Delta \circ \mathcal{S}_D$

Remarque 11 :

De la décomposition d'une rotation en un produit de 2 symétries d'axes sécants sécants en Ω et d'angle $\widehat{(\Delta, D)} = \dfrac{\theta}{2}$, c'est à dire $R\,(\Omega, \theta) = \mathcal{S}_D \circ \mathcal{S}_\Delta$, nous avons alors :

$$R^{-1}\,(\Omega, \theta) = (\mathcal{S}_D \circ \mathcal{S}_\Delta)^{-1} = (\mathcal{S}_\Delta)^{-1} \circ (\mathcal{S}_D)^{-1} = \mathcal{S}_\Delta \circ \mathcal{S}_D$$

Nous en déduisons que $R^{-1}\,(\Omega, \theta) = \mathcal{S}_\Delta \circ \mathcal{S}_D$, c'est à dire que $R^{-1}\,(\Omega, \theta)$ est une rotation de centre Ω et d'angle $-\theta$ et donc :

$$R^{-1}\,(\Omega, \theta) = R\,(\Omega, -\theta)$$

19.2.11 Une réciproque de 19.2.10

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$
Pour toute rotation $R\,(\Omega, \theta)$ de $\mathcal{P}$, il existe 2 droites D et D', toutes 2 passant par Ω telles que $R\,(\Omega, \theta) = S_{D'} \circ S_D$

Démonstration

La démonstration pose peu de problème.
Soit donc une rotation $R(\Omega, \theta)$ de centre Ω et d'angle θ.
Construisons une droite D passant par Ω et une droite D', passant par Ω et formant avec D un angle de mesure $\frac{\theta}{2}$, c'est à dire $\widehat{(D, D')} = \frac{\theta}{2}$ modulo π
Alors $S_{D'} \circ S_D$ est une rotation de centre Ω et d'angle θ
Cette droite D' est unique
En effet, s'il existait une droite D_1 telle que $S_{D_1} \circ S_D = S_{D'} \circ S_D$, alors $S_{D_1} = S_{D'}$ et $D_1 = D'$

Remarque 12 :

Il est bien évident que la décomposition de la rotation $R(\Omega, \theta)$ en le produit de 2 symétries orthogonales n'est pas unique. Par contre, une fois choisie arbitrairement la droite D passant par Ω, la droite D' est unique.

19.2.12 Etude de la composition de 2 déplacements du plan

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$

1. **Soient $R(\Omega_1, \theta_1)$ une rotation de centre Ω_1 et d'angle θ_1, et $R(\Omega_2, \theta_2)$ une rotation de centre Ω_2 et d'angle θ_2. Alors :**
   (a) **Si $\theta_1 + \theta_2 = 2k\pi$, alors $R(\Omega_1, \theta_1) \circ R(\Omega_2, \theta_2)$ est une translation**
   (b) **Si $\theta_1 + \theta_2 \neq 2k\pi$, alors $R(\Omega_1, \theta_1) \circ R(\Omega_2, \theta_2)$ est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$**
2. **Soient $R(\Omega, \theta)$ une rotation de centre Ω et d'angle θ et $T_{\overrightarrow{u}}$ une translation de vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$. Alors, $R(\Omega, \theta) \circ T_{\overrightarrow{u}}$ est une rotation d'angle θ**

Démonstration

1. Soient $R(\Omega_1, \theta_1)$ une rotation de centre Ω_1 et d'angle θ_1, et $R(\Omega_2, \theta_2)$ une rotation de centre Ω_2 et d'angle θ_2
   Alors, si ρ_1 est l'endomorphisme associé à $R(\Omega_1, \theta_1)$ et ρ_2 celui associé à $R(\Omega_2, \theta_2)$, l'endomorphisme associé à $R(\Omega_1, \theta_1) \circ R(\Omega_2, \theta_2)$ est $\rho_1 \circ \rho_2$. ρ_1 est une rotation d'angle θ_1, tout comme ρ_2 est une rotation d'angle θ_2 et donc $\rho_1 \circ \rho_2$ est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$. Ainsi, dans un premier temps :
   → Si $\theta_1 + \theta_2 = 2k\pi$, $\rho_1 \circ \rho_2 = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$ et $R(\Omega_1, \theta_1) \circ R(\Omega_2, \theta_2)$ est une translation de $\mathcal{P}$
   → Si $\theta_1 + \theta_2 \neq 2k\pi$, $\rho_1 \circ \rho_2$ est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$ et $R(\Omega_1, \theta_1) \circ R(\Omega_2, \theta_2)$ est donc une rotation de $\mathcal{P}$ d'angle $\theta_1 + \theta_2$
   Utilisons maintenant, la décomposition des rotations
   Soit D la droite qui passe par Ω_1 et Ω_2.
   On appelle D_2 la droite passant par Ω_2 et telle que $\widehat{(D_2, D)} = \frac{\theta_2}{2}$. Alors, $R(\Omega_2, \theta_2) = S_D \circ S_{D_2}$
   On appelle maintenant D_1 la droite passant par Ω_1 et telle que $\widehat{(D, D_1)} = \frac{\theta_1}{2}$. Alors, $R(\Omega_1, \theta_2) = S_{D_1} \circ S_D$
   Alors :
   $$R(\Omega_1, \theta_1) \circ R(\Omega_2, \theta_2) = (S_{D_1} \circ S_D) \circ (S_D \circ S_{D_2}) = S_{D_1} \circ S_{D_2}$$
   Et maintenant, quel est l'angle $\widehat{(D_2, D_1)}$. Nous avons :
   $$\widehat{(D_2, D_1)} = \widehat{(D_2, D)} + \widehat{(D, D_1)} = \frac{\theta_2 + \theta_1}{2}\ [\pi]$$

→ Si $\dfrac{\theta_2+\theta_1}{2} \equiv 0\,[\pi]$, alors les droites D_2 et D_1 sont parallèles et donc $R(\Omega_1,\theta_1)\circ R(\Omega_2,\theta_2)$ est une translation.
Or $\dfrac{\theta_2+\theta_1}{2} \equiv 0\,[\pi] \iff \dfrac{\theta_2+\theta_1}{2} = k\pi \iff \theta_1+\theta_2 = 2k\pi$

→ Si $\dfrac{\theta_2+\theta_1}{2}$ n'est pas congru à 0 modulo π, alors $R(\Omega_1,\theta_1)\circ R(\Omega_2,\theta_2) = S_{D_1}\circ S_{D_2}$ est une rotation d'angle $\theta_1+\theta_2$ de centre $\{O\} = D_1\cap D_2$

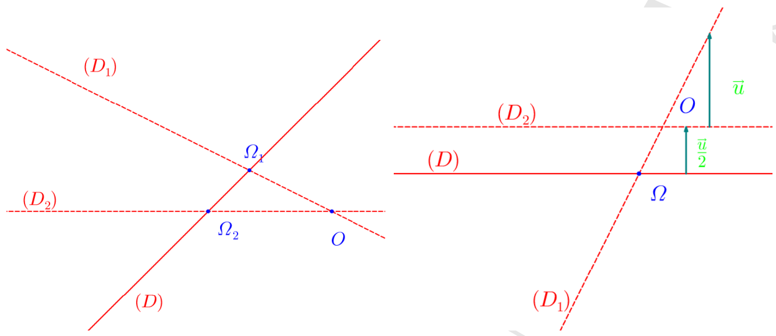

FIGURE 19.7 – Composition de 2 rotations ; composition d'une rotation et d'une translation

2. Soient $R(\Omega,\theta)$ une rotation de centre Ω et d'angle θ et $T_{\overrightarrow{u}}$ une translation de vecteur $\overrightarrow{u}\in\overrightarrow{\mathcal{P}}$
Soit D une droite orthogonale à $\overrightarrow{u}$ et passant par ω.

   On appelle D_1, la droite parallèle à D, image de D_1 par la translation de vecteur $\dfrac{\overrightarrow{u}}{2}$. Alors, $T_{\overrightarrow{u}} = S_{D_1}\circ S_D$

   Soit D_2 la droite passant par Ω et telle que $\widehat{(D_2,D)} = \dfrac{\theta}{2}$; alors $R(\Omega,\theta) = S_D\circ S_{D_2}$
   Et donc $T_{\overrightarrow{u}}\circ R(\Omega,\theta) = (S_{D_1}\circ S_D)\circ(S_D\circ S_{D_2}) = S_{D_1}\circ S_{D_2}$
   Nous avons $\widehat{(D_2,D_1)} = \widehat{(D_2,D)} + \widehat{(D,D_1)} = \dfrac{\theta}{2}+k\pi$
   Ainsi, $T_{\overrightarrow{u}}\circ R(\Omega,\theta)$ est une rotation d'angle θ et de centre $\{O\} = D_1\cap D_2$

19.2.13 Théorème

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$
Soit f un antidéplacement de $\mathcal{P}$.
Alors, il existe une symétrie orthogonale S_D d'axe $D\subset\mathcal{P}$ et une translation $T_{\overrightarrow{u}}$ dont le vecteur $\overrightarrow{u}$ appartient à $\overrightarrow{D}$ la direction de D uniques telles que :

$$f = S_D\circ T_{\overrightarrow{u}} = T_{\overrightarrow{u}}\circ S_D$$

Démonstration

Soit f un antidéplacement de $\mathcal{P}$; son endomorphisme associé est une symétrie vectorielle $\sigma_{\overrightarrow{D}}$ par rapport à une droite $\overrightarrow{D}\subset\overrightarrow{\mathcal{P}}$.
Soit $A\in\mathcal{P}$ un point de $\mathcal{P}$, $A' = f(A)$ et I le milieu du segment $[A;A']$. Nous appelons D la droite de direction $\overrightarrow{D}$, passant par I et S_D, la symétrie orthogonale par rapport à D.
Nous appelons $T = S_D\circ f$

1. T est une translation
   - ⋆ Tout d'abord, T composée de 2 antidéplacements est une isométrie positive, c'est à dire une translation ou une rotation.
   - ⋆ L'endomorphisme associé à T est $\overrightarrow{T} = \overrightarrow{S_D}\circ\overrightarrow{f} = \sigma_{\overrightarrow{D}}\circ\sigma_{\overrightarrow{D}} = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$.
   T est donc une translation

- ⋆ Recherchons le vecteur de cette translation.
  Soit $A'' = S_D(A')$. Alors $T(A) = S_D \circ f(A) = S_D(A') = A''$. T est donc la translation de vecteur $\overrightarrow{AA''}$
- ⋆ D'autre part, $\overrightarrow{AA''} \in \overrightarrow{D}$
  En effet, I le milieu du segment $[A; A']$ est sur D, et J le milieu du segment $[A'; A'']$ est aussi sur D. En considérant le triangle $AA'A''$, nous avons $\overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{IJ}$; et comme $\overrightarrow{IJ} \in \overrightarrow{D}$, nous avons $\overrightarrow{AA''} \in \overrightarrow{D}$

2. Et donc, par composition $f = S_D \circ T$
3. <u>La décomposition $f = S_D \circ T$ est unique</u>

   Supposons $f = S_D \circ T$ où T est une translation dont le vecteur appartient à la direction $\overrightarrow{D}$ de D
   Et supposons de plus, que $f = S_{D_1} \circ T_1$ où T_1 est une translation dont le vecteur appartient à la direction $\overrightarrow{D_1}$ de D_1
   L'endomorphisme associé à $S_D \circ T$ est $\sigma_{\overrightarrow{D}}$ et celui associé à $S_{D_1} \circ T_1$ est $\sigma_{\overrightarrow{D_1}}$ et nous avons alors $\sigma_{\overrightarrow{D_1}} = \sigma_{\overrightarrow{D}}$, c'est à dire $\overrightarrow{D_1} = \overrightarrow{D}$, et donc $D \parallel D_1$
   Pour tout $M \in \mathcal{P}$, si $M_1 = T(M)$, la droite (MM_1) est parallèle à D. Si $M_2 = S_D(M_1)$, le milieu du segment $[M_1M_2]$ est sur D, et en considérant le triangle MM_1M_2, le milieu de $[MM_2]$ est aussi sur D ; or, $M_2 = f(M)$.
   De la même manière, en étudiant $S_{D_1} \circ T_1$, nous montrerions que le milieu de $[MM_2]$ est sur D_1.
   D'où $D = D_1$, et donc $S_{D_1} = S_D$ et $T = T_1$. La décomposition est donc unique
4. <u>Nous avons $S_D \circ T = T \circ S_D$</u>
   L'endomorphisme associé à $S_D \circ T$ ou $T \circ S_D$ est le même, c'est à dire $\sigma_{\overrightarrow{D}}$.
   Soit $A \in \mathcal{P}$
   → Intéressons nous à $T \circ S_D$
     Posons $A_1 = S_D(A)$, $A_2 = T(A_1)$, c'est à dire $T \circ S_D(A) = A_2$
   → Intéressons nous à $S_D \circ T$
     Posons $A' = T(A)$, $A'' = S_D(A')$, c'est à dire $S_D \circ T(A) = A''$

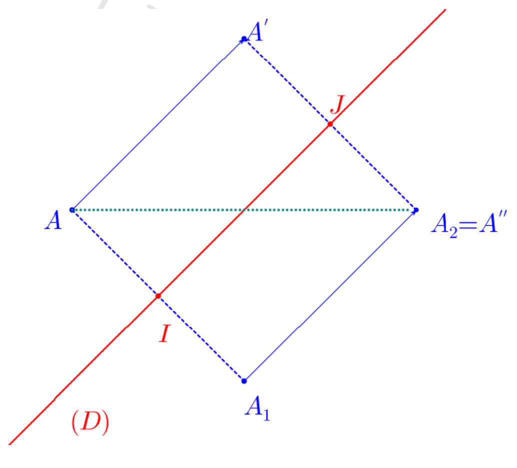

FIGURE 19.8 – La composition d'une symétrie et d'une translation

Il faut donc montrer que $A_2 = A''$

→ De $A_2 = T(A_1)$ et $A' = T(A)$, nous avons $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{A_1A_2}$ et donc le quadrilatère $AA'A_2A_1$ est un parallélogramme et donc $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{A'A_2}$
→ Ensuite, les droites $(A'A_2)$ et (AA_1) étant toutes deux othogonales à D sont parallèles.
  Soit I le milieu du segement $[A, A_1]$ et J celui du segment $[A', A'']$. Alors, puisque $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AA'}$, le quadrilatère $AA'JI$ est un rectangle et donc $\overrightarrow{A'J} = \overrightarrow{AI}$. Or :
  - ⋆ $\overrightarrow{AA_1} = 2\overrightarrow{AI}$
  - ⋆ Et $\overrightarrow{A'A''} = 2\overrightarrow{A'J} = 2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{A'A_2}$

De $\overrightarrow{A'A''} = \overrightarrow{A'A_2}$, nous tirons $A'' = A_2$

C'est à dire que pour tout $A \in \mathcal{P}$, nous avons $S_D \circ T\,(A) = T \circ S_D\,(A)$, c'est à dire $S_D \circ T = T \circ S_D$

19.2.14 Définition

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$
On appelle symétrie glissée d'axxe $D \subset \mathcal{P}$ et de vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D}$, le produit $\sigma = S_D \circ T_{\overrightarrow{u}}$

Remarque 13 :

1. Une symétrie orthogonale est une symétrie glissée particulière : $S_D = S_D \circ T_{\overrightarrow{0}}$.
2. L'antidéplacement f que nous évoquons en 19.2.13 peut très bien être une simple symétrie orthogonale.
3. En 19.2.13, nous avons aussi démontré la commutativité ; nous avons donc, pour les symétries glissées : $\sigma = S_D \circ T_{\overrightarrow{u}} = T_{\overrightarrow{u}} \circ S_D$
4. Nous avons $\sigma \circ \sigma = T_{2\overrightarrow{u}}$ et cette égalité détermine le vecteur $\overrightarrow{u}$

   En effet :

$$\sigma \circ \sigma = \left(T_{\overrightarrow{u}} \circ S_D\right) \circ \left(S_D \circ T_{\overrightarrow{u}}\right) = T_{\overrightarrow{u}} \circ \left(S_D \circ S_D\right) \circ T_{\overrightarrow{u}} = T_{\overrightarrow{u}} \circ T_{\overrightarrow{u}} = T_{2\overrightarrow{u}}$$

Remarque 14 :

Pour démontrer la commutativité $S_D \circ T = T \circ S_D$ où le vecteur de la translation est un vecteur directeur de D, il est possible d'utiliser la décomposition des translations en 2 symétries d'axes parallèles. Faisons le ! !

1. **Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$**
   La composition de 2 symétries orthogonales d'axes orthogonaux est commutative, autrement dit :

$$\left(\forall D_1 \in \mathcal{P}\right)\left(\forall D_2 \in \mathcal{P}\right)\left(\left(D_1 \perp D_2\right) \Longrightarrow \left(S_{D_1} \circ S_{D_2} = S_{D_2} \circ S_{D_1}\right)\right)$$

Démonstration

Soient $D_1 \in \mathcal{P}$ et $D_2 \in \mathcal{P}$ tels que $D_1 \perp D_2$

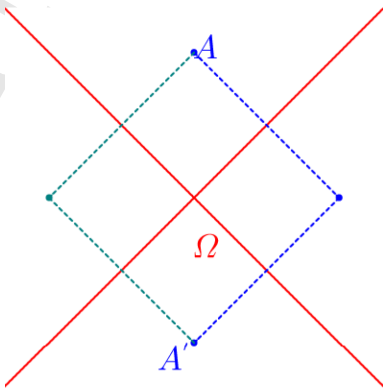

Figure 19.9 – La composition de 2 symétries orthogonales

Soit $\{\Omega\} = D_1 \cap D_2$; alors $S_{D_1} \circ S_{D_2}$ est une rotation de centre Ω et d'angle π, notée $R\,(\Omega, \pi)$; c'est aussi une homothétie de centre Ω et de rapport -1.

De la même manière $S_{D_2} \circ S_{D_1} = R\,(\Omega, \pi)$, et donc $S_{D_1} \circ S_{D_2} = S_{D_2} \circ S_{D_1}$

2. **Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$**
Soit $D \subset \mathcal{P}$ et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$; alors :

$$T_{\overrightarrow{u}} \circ S_D = S_D \circ T_{\overrightarrow{u}}$$

Démonstration

Soit D_1 une droite quelconque parpendiculaire à D, et $D_2 \parallel D$ telle que D_2 soit l'image de D par la translation de vecteur $\dfrac{\overrightarrow{u}}{2}$; donc, nous avons aussi $D_2 \perp D$ et $T_{\overrightarrow{u}} = S_{D_2} \circ S_{D_1}$

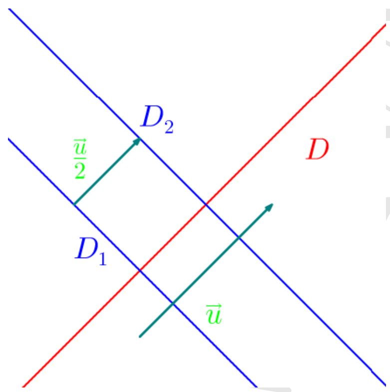

FIGURE 19.10 – Autre façon de démontrer la commutativité

De là, nous tirons :

$$\begin{array}{rcll} S_D \circ T_{\overrightarrow{u}} & = & S_D \circ (S_{D_2} \circ S_{D_1}) & \\ & = & (S_D \circ S_{D_2}) \circ S_{D_1} & \text{par associativité de la composition} \\ & = & (S_{D_2} \circ S_D) \circ S_{D_1} & \text{par commutativité de la composition} \\ & & & \text{de symétries d'axes orthogonaux} \\ & = & S_{D_2} \circ (S_D \circ S_{D_1}) & \text{par associativité de la composition} \\ & = & S_{D_2} \circ (S_{D_1} \circ S_D) & \text{par commutativité de la composition} \\ & & & \text{de symétries d'axes orthogonaux} \\ & = & (S_{D_2} \circ S_{D_1}) \circ S_D & \text{par associativité de la composition} \\ & = & T_{\overrightarrow{u}} \circ S_D & \end{array}$$

Nous avons donc $S_D \circ T_{\overrightarrow{u}} = T_{\overrightarrow{u}} \circ S_D$; ce que nous voulions

Exercice 11 :

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien orienté de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

1. Soit S_D une symétrie orthogonale de $\mathcal{P}$ et T une translation quelconque de $\mathcal{P}$.
Démontrez, qu'en général, $T \circ S_D$ et $S_D \circ T$ sont des symétries glissées d'axe parallèle à D, en général distinctes.
2. Démontrer que tout antidéplacement de la forme $f = T_{\overrightarrow{u}} \circ S_D$ où $\overrightarrow{u}$ est un vecteur de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ non nul n'admet aucun point invariant.

Exercice 12 :

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien orienté de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

1. Soit σ une symétrie glissée de $\mathcal{P}$ d'axe D. Démontrer que, pour tout point $M \in \mathcal{P}$, si $M' = \sigma(M)$, le milieu I du segment $[MM']$ est sur D

2. Soit σ une symétrie glissée de $\mathcal{P}$ d'axe D et de vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul $(\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0})$. Démontrez que σ n'admet aucun point fixe.
3. Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ et $D \subset \mathcal{P}$. Démontrer que si $T_{\overrightarrow{u}} \circ S_D = S_D \circ T_{\overrightarrow{u}}$, alors $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D}$

Exercice 13 :

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien orienté de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et rapporté à un repère orthonomé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Nous considérons le point $A\left(0, \sqrt{3}\right)$ et le point $B\,(1;0)$. On considère les rotations $R\left(A; \frac{\pi}{6}\right)$ et $R\left(B; \frac{\pi}{3}\right)$

1. Caractériser $R\left(B; \frac{\pi}{3}\right) \circ R\left(A; \frac{\pi}{6}\right)$
2. Soient $A \in \mathcal{P}$ et $B \in \mathcal{P}$ 2 points du plan, d'image respective A' et B' par $R\left(B; \frac{\pi}{3}\right) \circ R\left(A; \frac{\pi}{6}\right)$. Démontrer que la droite $(A'B')$ est la médiatrice du segment $[A; B]$

Exercice 14 :

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien orienté de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et rapporté à un repère orthonomé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Nous considérons la transformation ponctuelle $\mathcal{U}_\alpha$ dont la définition analytique est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{rl} x' = & 4\cos\alpha - x\cos 2\alpha - y\sin 2\alpha \\ y' = & 4\sin\alpha - x\sin 2\alpha - y\cos 2\alpha \end{array}\right. \quad \text{avec } \alpha \in \left]-\pi; +\pi\right]$$

1. Démontrer que $\mathcal{U}_\alpha$ est une symétrie orthogonale par rapport à un axe D_α
2. Démontrer que pour tout $\alpha \in \left]-\pi; +\pi\right]$, la droite D_α reste tangente au cercle de centre O et de rayon 2

19.2.15 Définition

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$
On dit que 2 triangles non aplatis ABC et $A'B'C'$ sont isométriques si et seulement si nous avons les égalités $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $BC = B'C'$

Remarque 15 :

Cette définition, et surtout l'utilisation du mot isométrique est cohérente ; en effet :

> Si $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ est une isométrie du plan, que $\{A, B, C\}$ soit un repère affine de $\mathcal{P}$, l'isométrie f étant une bijection, $\{f(A), f(B), f(C)\}$ est aussi un repère affine tel que, si nous posons $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$, nous avons :
>
> $$AB = A'B' \quad AC = A'C' \quad BC = B'C'$$

19.2.16 Théorème

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$
Soient ABC et $A'B'C'$ 2 triangles non aplatis isométriques ; alors, il existe une unique isométrie $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ telle que $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$

Démonstration

1. Que ABC et $A'B'C'$ soient des triangles non aplatis signifie que $\{A, B, C\}$ et $\{A', B', C'\}$ sont des repères affines de $\mathcal{P}$ et que, donc, $\left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ et $\left\{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right\}$ forment 2 bases différentes *(à priori)* de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$

→ Il existe une et une seule application linéaire φ de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ telle que $\varphi\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{A'B'}$ et $\varphi\left(\overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{A'C'}$. Comme nous avons affaire à 2 bases de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, cette application linéaire φ est bijective

→ D'après 17.2.4 il existe une et une seule application affine f, d'application linéaire associée φ et telle que $f(A) = A'$

→ Dans ce cas, nous avons :
  - ⋆ $\varphi\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{f(A)\,f(B)} = \overrightarrow{A'f(B)} = \overrightarrow{A'B'}$ et donc $f(B) = B'$
  - ⋆ De la même manière, nous avons $f(C) = C'$

→ Il existe donc une et une seule application affine telle que $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$

Reste, maintenant à prouver que c'est une isométrie

2. Nous allons, en fait, construire une isométrie qui transforme le triangle ABC en le triangle $A'B'C'$; cette isométrie étant une application affine particulière, l'unicité en découlera.

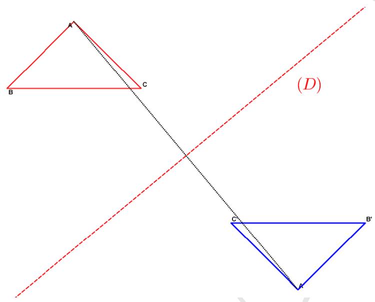

FIGURE 19.11 – Les triangles isométriques

(a) Soit D la médiatrice du segment $[AA']$; alors $S_D(A) = A'$
Posons $B_1 = S_D(B)$ et $C_1 = S_D(C)$. Si $B_1 = B'$ et $C_1 = C'$, alors S_D est l'isométrie qui convient.

(b) Sinon, si $B_1 \neq B'$, nous appelons Δ la médiatrice de $[B_1; B']$.
Comme tout à l'heure $S_\Delta(B_1) = B'$ et nous avons donc $S_\Delta \circ S_D(B) = B'$.
Mais, que dire de $S_\Delta \circ S_D(A)$?
Nous avons $A'B_1 = S_D(A)\,S_D(B) = AB$, car S_D est une isométrie. Comme $AB = A'B'$, nous avons $A'B_1 = A'B'$, ce qui veut dire que A' est sur la médiatrice de $[B_1; B']$, c'est à dire $A' \in \Delta$ et donc, $S_\Delta(A') = A'$. Nous avons donc $S_\Delta \circ S_D(A) = A'$
Posons $C_2 = S_\Delta(C_1) = S_\Delta \circ S_D(C)$; alors, si $C_2 = C'$, $f = S_\Delta \circ S_D$ convient

(c) Sinon, si $C_2 \neq C'$, appelons Δ_1 la médiatrice de $[C_2; C']$.
Nous avons alors $S_{\Delta_1}(C_2) = C'$, c'est à dire $S_{\Delta_1} \circ S_\Delta \circ S_D(C) = C'$.
Maintenant, que dire de $S_{\Delta_1}(B')$ et $S_{\Delta_1}(A')$
  - ⋆ Nous avons $A'C_2 = S_\Delta(A')\,S_\Delta(C_1) = A'C_1 = S_D(A)\,S_D(C) = AC = A'C'$, et donc, de $A'C_2 = A'C'$ et donc A' est situé sur la médiatrice de $[C_2; C']$, c'est à dire $A' \in \Delta_1$ et donc $S_{\Delta_1}(A') = A'$, c'est à dire $S_{\Delta_1} \circ S_\Delta \circ S_D(A) = A'$
  - ⋆ De même, nous avons $B'C_2 = S_\Delta(B_1)\,S_\Delta(C_1) = B_1C_1 = S_D(B)\,S_D(C) = BC = B'C'$, et donc de $B'C_2 = B'C'$ nous tirons que B' est situé sur la médiatrice de $[C_2; C']$, c'est à dire $B' \in \Delta_1$ et donc $S_{\Delta_1}(B') = B'$, c'est à dire $S_{\Delta_1} \circ S_\Delta \circ S_D(B) = B'$

Et donc, l'isométrie $f = S_{\Delta_1} \circ S_\Delta \circ S_D$, convient

Remarque 16 :

Nous venons de montrer qu'étant donnés 2 repères affines du plan $\mathcal{P}$, il existe une et une seule application affine f qui transforme l'un des repères en l'autre repère. Qui plus est, cette application affine est bijective ; ce résultat se généralise facilement à la dimension n

19.2.17 Corollaire

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$
Alors :

1. **Soit ABC un triangle non aplati, f et g 2 isométries telles que $f(A) = g(A)$, $f(B) = g(B)$ et $f(C) = g(C)$, alors $f = g$**
2. **Toute isométrie du plan est le produit d'au plus 3 symétries orthogonales par rapport à des droites.**

Remarque 17 :

Une autre formulation de l'énoncé précédent, est de dire que *l'ensemble des symétries orthogonales du plan génère le groupe des isométries du plan*[2].

Exercice 15 :

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien orienté de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

1. On considère un carré $PQRS$ de centre O, pour lequel $\widehat{\left(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}\right)} = \frac{\pi}{2}$. Soient A, B, C et D un parallélogrammetel que les points P, Q, R et S appartiennent respectivement aux segments $[A; B]$, $[B; C]$, $[C; D]$ et $[D; A]$
   (a) Montrer que les droites (AD) et (DC) sont les images, par la symétrie centrale S de centre O des droites (BC) et (AB)
   (b) Montrer que O est le centre du parallélogramme $ABCD$
   (c) Soit Δ l'image de la droite AB par la rotation $R\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Etablir que $(BC) \cap \Delta = \{Q\}$
2. On considère les points $A(1, -2)$, $B(3, 2)$, $C(-1, 2)$ et $D(-3, -2)$. En utilisant la question précédente, construire un carré inscrit dans le parallélogramme $ABCD$

2. C'est le titre d'une leçon de CAPES