# Annexe C

# Nombres complexes et géométrie

Cet exposé vient en complément du chapitre 8 sur les nombres complexes et du chapitre 20 sur les similitudes planes

## C.1 Introduction

Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est supposé construit *(voir le chapitre 8)*.
On rappelle que $\mathbb{C}$ est un corps commutatif et un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, de base canonique $\{1, i\}$ où $i$ est une solution complexe de l'équation $x^2 + 1 = 0$, c'est à dire que $i$ est une racine carrée de $-1$.
On suppose connu le plan affine euclidien que l'on note $\mathcal{P}$ et que l'on munit d'un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, en désignant par $P$ le plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$.
Nous rappelons rapidement quelques notions utiles pour la suite.

### C.1.1 Rappels élémentaires

- $\longrightarrow$ **Un point $M \in \mathcal{P}$ est repéré par ses coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ce qui signifie qu'on a l'égalité $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ dans $P$.**
- $\longrightarrow$ **L'affixe du point $M \in \mathcal{P}$ est donc $z = x + iy$**
- $\longrightarrow$ **Un vecteur $\overrightarrow{u} \in P$ est repéré par ses coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ce qui signifie qu'on a l'égalité $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ dans $P$.**
- $\longrightarrow$ **L'affixe du vecteur $\overrightarrow{u}$ est le nombre complexe $z = x + iy$**
- $\longrightarrow$ **L'axe $Ox = \mathbb{R}\overrightarrow{i}$, appelé axe des réels, est identifié à l'ensemble des nombres réels.**
- $\longrightarrow$ **L'axe $Oy = \mathbb{R}\overrightarrow{j}$, appelé axe des imaginaires purs, est identifié à l'ensemble des nombres imaginaires purs**
- $\longrightarrow$ **Si $a \in \mathbb{C}$ est l'affixe du point $A$ et $b \in \mathbb{C}$, celui du point $B$, l'affixe du point $C \in \mathcal{P}$ défini par $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ est $a + b$, et l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = b - a$**
- $\longrightarrow$ **Si $a \in \mathbb{C}$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{u}$ et $b \in \mathbb{C}$, celui du vecteur $\overrightarrow{v}$, alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ est $a + b$**

### C.1.2 Déterminant, produit scalaire

**Soient $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ 2 vecteurs de $P$ d'affixes respectives $z = x + iy$ et $z_1 = x_1 + iy_1$ ; alors :**

1. $\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle = \mathrm{Re}\,(z\overline{z_1}) = \mathrm{Re}\,(\overline{z}z_1)$
2. $\det(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} x & x_1 \\ y & y_1 \end{vmatrix} = xy_1 - x_1y = \mathrm{Im}\,(\overline{z}z_1)$

**Démonstration**

La démonstration est simple, calculatoire, et laissée au lecteur

**Remarque 1 :**

Nous avons, bien entendu : $\overline{z}z_1 = \mathrm{Re}\,(\overline{z}z_1) + i\,\mathrm{Im}\,(\overline{z}z_1) = \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle + i\det(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$, mais, cela n'apporte pas grand chose !!

### C.1.3 Colinéarité, alignement

**Soit $\mathcal{P}$ un plan affine que l'on munit d'un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, et $P$ le plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$ de base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$**

1. **Soient $\overrightarrow{u} \in P$ et $\overrightarrow{v} \in P$ d'affixes respectives $u$ et $v$.**
   **Alors, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si**

$$\frac{u}{v} \in \mathbb{R} \iff u\overline{v} \in \mathbb{R}$$

2. **Soient $A$, $B$ et $C$ 3 points du plan affine $\mathcal{P}$ d'affixes respectives $a$, $b$ et $c$.**
   **Alors les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés si et seulement si :**

$$\frac{b-a}{c-a} \in \mathbb{R} \iff (b-a)\,\overline{(c-a)} \in \mathbb{R}$$

**Démonstration**

1. Nous allons utiliser 2 méthodes *(toutes deux élémentaires)* pour démontrer le résultat
   (a) Si $\overrightarrow{u} \in P$ et $\overrightarrow{v} \in P$ sont colinéaires alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$, ce qui, en se référant aux affixes donne $u = \lambda v$, et donc $\frac{u}{v} = \lambda$, et donc $\frac{u}{v} \in \mathbb{R}$
   La réciproque est évidente.
   (b) La seconde méthode consiste à dire que si $\overrightarrow{u} \in P$ et $\overrightarrow{v} \in P$ sont colinéaires alors $\det(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = 0$, c'est à dire $\mathrm{Im}\,(\overline{z}z_1) = 0$, c'est à dire $(\overline{z}z_1) \in \mathbb{R}$, et

$$(\overline{z}z_1) \in \mathbb{R} \iff (\overline{z}z_1) = \overline{(\overline{z}z_1)} = (z\overline{z_1})$$

2. Les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Il suffit d'appliquer le résultat précédent aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

**Remarque 2 :**

Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ 4 points du plan. Les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. Ainsi, si $a$,$b$,$c$ et $d$ sont les affixes des points $A$, $B$, $C$ et $D$ les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles si et seulement si

$$\frac{b-a}{d-c} \in \mathbb{R} \iff (b-a)\,\overline{(d-c)} \in \mathbb{R}$$

### C.1.4 Orthogonalité

Dans cet énoncé, nous notons $i\mathbb{R}$ les nombres complexes du type $\lambda i$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, c'est à dire les imaginaires purs.

**Soit $\mathcal{P}$ un plan affine que l'on munit d'un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, et $P$ le plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$ de base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$**

1. **Soient $\overrightarrow{u} \in P$ et $\overrightarrow{v} \in P$ d'affixes respectives $u$ et $v$.
   Alors, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si**

$$\frac{u}{v} \in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow u\overline{v} \in i\mathbb{R}$$

2. **Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ 4 points du plan affine $\mathcal{P}$ d'affixes respectives $a$, $b$, $c$ et $d$.
   Alors les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont perpendiculaires si et seulement si :**

$$\frac{b-a}{d-c} \in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow (b-a)\,\overline{(d-c)} \in \mathbb{R}$$

**Démonstration**

1. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle = 0$.
   Comme $\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle = \mathrm{Re}\,(u\overline{v})$, si $\mathrm{Re}\,(u\overline{v}) = 0$, ceci signifie que $u\overline{v}$ est imaginaire pur.
   D'autre part, $u\overline{v} = \frac{u}{v} v\overline{v} = \frac{u}{v} |v|^2$
   Comme $|v|^2 \in \mathbb{R}$, $u\overline{v}$ est imaginaire pur si et seulement si $\frac{u}{v}$ est imaginaire pur.
2. Les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont perpendiculaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux. Il suffit donc maintenant d'appliquer le point précédent.

### C.1.5 Equation d'une droite

**Soit $\mathcal{P}$ un plan affine que l'on munit d'un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, et $P$ le plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$ de base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$**

1. **Soit $(D)$ une droite de $\mathcal{P}$ passant par $A \in \mathcal{P}$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} \in P$. $a$ est l'affixe de $A$ et $u$ est l'affixe de $\overrightarrow{u}$. Alors l'affixe $z \in \mathbb{C}$ des points $M \in (D)$ est donné par $z = a + \lambda u$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$
   $z = a + \lambda u$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ est l'équation complexe de la droite $(D)$**
2. **Soient $A$ et $B$ 2 points du plan affine $\mathcal{P}$ d'affixes respectives $a$ et $b$. Alors l'équation complexe de la droite $(AB)$ est donnée par $z = a + \lambda\,(b-a) = (1-\lambda)\,a + \lambda b$ où $\lambda \in \mathbb{R}$**

**Démonstration**

1. Pour $M \in (D)$, nous avons $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, et en revenant aux affixes, nous avons $z - a = \lambda u$, c'est à dire $z = a + \lambda u$
2. Pour la droite $(AB)$, il suffit, une nouvelle fois, le point précédent.

**Remarque 3 :**

1. La notation $z = a + \lambda u$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ est à rapprocher de la notation de Grassmann, que, volontairement, je n'ai pas voulu utiliser. On retrouve très souvent cette notation dans les livres de géométrie de $L_3$
2. L'équation de la droite $(AB)$ $z = (1-\lambda)\,a + \lambda b$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ est à rapprocher du calcul barycentrique : le droite $(AB)$ est l'ensemble des barycentres du système pondéré $\{(A; (1-\lambda))\,; (B; \lambda)\}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\lambda \in [0;1]$ alors $z = (1-\lambda)\,a + \lambda b$ décrit le segment $[A;B]$