C.2 Géométrie et module d'un nombre complexe

C.2.1 Résultat

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction P rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

1. **Si $\overrightarrow{u} \in P$ a pour affixe $u = x + iy$ alors $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = |u|$**
2. **Si $M \in \mathcal{P}$ d'affixe $z = x + iy$, alors $OM = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$**
3. **Si a est l'affixe de $A \in \mathcal{P}$ et b celle de $B \in \mathcal{P}$, alors $AB = |a - b|$**

Démonstration

Il n'y a pas de démonstration....C'est juste une vérification calculatoire

C.2.2 Proposition

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction P rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
L'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ dont l'affixe z vérifie $|z - \omega| = R$ où $R > 0$ est un cercle de centre Ω, d'affixe ω et de rayon R

Démonstration

La démonstration est évidente, puisque si ω est l'affixe de Ω, alors, nous avons $M\Omega = R$, ce qui est la définition du cercle.

Remarque 4 :

Si nous nous intéressons à l'ensemble $C \subset \mathbb{C}$ défini par $C = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z - \omega| = R\}$, alors :

→ Si $R < 0$, alors $C = \emptyset$
→ Si $R = 0$, alors $C = \{\omega\}$
→ Si $R > 0$, alors C est le cercle de centre ω et de rayon R

C.2.3 Proposition

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction P rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
Pour $A \in \mathcal{P}$ d'affixe a et $B \in \mathcal{P}$ d'affixe b, avec $A \neq B$, l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ dont l'affixe z vérifie $|z - a| = |z - b|$ est la médiatrice du segment $[A; B]$

Démonstration

C'est très facile, puisque ceci traduit $MA = MB$ qui est la définition même de la médiatrice

Remarque 5 :

L'équation complexe de la médiatrice est donnée par $z = \dfrac{a+b}{2} + \lambda i\,(b - a)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

Il est très facile de comprendre pourquoi.
Le vecteur directeur de cette médiatrice est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}$ d'affixe $b - a$, et un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ aura pour affixe $i\,(b - a)$, et cette médiatrice passe par le milieu du segment $[A; B]$, lequel a pour affixe $\dfrac{a+b}{2}$

C.2.4 Egalité du parallélogramme

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $z' \in \mathbb{C}$, nous avons :

1. $|z+z'|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2$
2. $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$

Démonstration

Soient $\overrightarrow{u} \in P$ et $\overrightarrow{v} \in P$ d'affixes respectives z et z'.
D'après l'identité du parallélogramme vue en 15.1.8, nous avons :

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \langle \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{u} \rangle + 2\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{v} \rangle$$

Et

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = 2\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$$

Il suffit ensuite de reprendre ces égalités en y mettant les affixes. Nous avons donc

$$|z+z'|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2 \text{ et } |z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$$

Remarque 6 :

L'objet de cet exposé est de faire le lien entre géométrie et nombres complexes ; d'où la démonstration ci-dessus en utilisant le produit scalaire et les normes.
Ceci dit, en remarquant que $|z+z'|^2 = (z+z')\,\overline{(z+z')}$, il était tout à fait possible de le faire de manière calculatoire *(Le faire...c'est très facile !!)*

C.2.5 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $z' \in \mathbb{C}$, nous avons :

$$\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) \leqslant |z| \times |z'|$$

Démonstration

Nous allons réutiliser les résultats sur le produit scalaire :
Soient $\overrightarrow{u} \in P$ et $\overrightarrow{v} \in P$ d'affixes respectives z et z'.
D'après le lemme de Schwarz en 15.1.3, nous avons :

$$|\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle| \leqslant \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|$$

Il suffit ensuite de reprendre cette inégalités en y mettant les affixes. Nous avons donc

$$\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) \leqslant |z| \times |z'|$$

Remarque 7 :

1. De cette inégalité de Schwarz, nous retrouvons l'inégalité triangulaire vraie pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $z' \in \mathbb{C}$: $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$, l'égalité n'ayant lieu que si $z' = \lambda z$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$
2. Une conséquence de l'inégalité triangulaire, est cette autre inégalité, vraie pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $z' \in \mathbb{C}$: $||z| - |z'|| \leqslant |z| + |z'|$