C.3 Lieux géométriques et fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$

C.3.1 Intentions

Nous nous intéressons, dans ce paragraphe, à toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ et, en particulier aux lignes de niveaux

$$E_\lambda = f^{-1}(\{\lambda\}) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } f(z) = \lambda\}$$

C.3.2 Exemples de lignes de niveaux associées aux modules

1. Soit $\omega \in \mathbb{C}$ et

$$\begin{cases} f : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad z & \longmapsto & f(z) = |z - \omega| \end{cases}$$

Alors :

(a) Si $\lambda < 0$, alors $E_\lambda = f^{-1}(\{\lambda\}) = \emptyset$

(b) Si $\lambda = 0$, alors $E_\lambda = f^{-1}(\{0\}) = \{\omega\}$

(c) Si $\lambda > 0$, alors $E_\lambda = f^{-1}(\{\lambda\})$ est un cercle de centre ω et de rayon Λ

2. Soient $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq b$. Nous considérons

$$\begin{cases} g : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad z & \longmapsto & g(z) = |z - a| + |z - b| \end{cases}$$

Avant de rechercher les lignes de niveau, remarquons que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$|a - b| = |a - z + z - b| \leqslant |z - a| + |z - b|$$

Ainsi si

(a) Si $\lambda < |a - b|$, alors, comme $|a - b| \leqslant |z - a| + |z - b|$, jamais nous n'aurons $\lambda = |z - a| + |z - b|$, d'où :

$$E_\lambda = g^{-1}(\{\lambda\}) = \emptyset$$

(b) Si $\lambda = |a - b|$, alors z appartient à l'intervalle $[A, B]$ et donc $E_\lambda = g^{-1}(\{\lambda\}) = [A, B]$ où A a pour affixe a et B a pour affixe b

(c) Si $\lambda > |a - b|$ alors $E_\lambda = g^{-1}(\{\lambda\})$ est l'ellipse de foyers A et B et de grand axe λ

3. Soient $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq b$. Nous considérons

$$\begin{cases} h : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad z & \longmapsto & h(z) = ||z - a| - |z - b|| \end{cases}$$

A nouveau, remarquons que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$||z - a| - |z - b|| \leqslant |a - b|$$

Ainsi si

(a) Si $\lambda > |a - b|$, alors, comme $|a - b| \geqslant ||z - a| - |z - b||$, jamais nous n'aurons $\lambda = ||z - a| - |z - b||$, d'où :

$$E_\lambda = h^{-1}(\{\lambda\}) = \emptyset$$

(b) Si $\lambda = |a - b|$, alors z appartient à la droite (AB) privée du segment $]A, B[$ et donc $E_\lambda = h^{-1}(\{\lambda\}) = (AB) \setminus]A, B[$ où A a pour affixe a et B a pour affixe b

(c) Si $\lambda < |a - b|$ alors $E_\lambda = h^{-1}(\{\lambda\})$ est l'hyperbole de foyers A et B et de grand axe λ

C.3.3 Lemme de géométrie

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$
L'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $MA^2 = \lambda^2 MB^2$ avec $\lambda > 0$ et $\lambda \neq 1$ est un cercle

Démonstration

L'affirmation du lemme ci-dessus ne donne ni le centre ni le rayon ni le diamètre du cercle ; c'est ce que nous tenterons de faire.
Ce lemme est à rapprocher (et sérieusement !!) des fonctions scalaires de Leibniz vues dans le paragraphe 16.6

1. Premières remarques
   Nous aurions pu étudier $MA^2 = \lambda MB^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$
   → Or, si $\lambda < 0$, l'égalité $MA^2 = \lambda MB^2$ est impossible et on peut conclure que l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ est vide
   → Si $\lambda = 0$, alors $MA^2 = 0$ et l'ensemble est réduit au point A
   → D'où la nécessité de $\lambda > 0$; l'énoncé qui donne λ^2 nous simplifie la vie dans la démonstration et l'énoncé du résultat ; nous aurions pu garder $\lambda > 0$ sans l'élever au carré.
   → Si $\lambda = 1$, alors nous avons $MA^2 = MB^2 \iff MA = MB$ et l'ensemble des points M tels que $MA = MB$ est la médiatrice du segment $[A; B]$
2. Etudions maintenant l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $MA^2 = \lambda^2 MB^2$ avec $\lambda > 0$ et $\lambda \neq 1$
   Nous avons $MA^2 = \lambda^2 MB^2 \iff MA^2 - \lambda^2 MB^2 = 0$. D'après les leçons sur le produit scalaire, nous avons :
   $$MA^2 - \lambda^2 MB^2 = \left\langle \overrightarrow{MA} + \lambda\overrightarrow{MB} \mid \overrightarrow{MA} - \lambda\overrightarrow{MB} \right\rangle$$
   Nous devons donc rechercher les points tels que $\left\langle \overrightarrow{MA} + \lambda\overrightarrow{MB} \mid \overrightarrow{MA} - \lambda\overrightarrow{MB} \right\rangle = 0$
   (a) Considérons le système pondéré $\{(A, 1) ; (B, \lambda)\}$.
   Comme $\lambda + 1 \neq 0$, il existe un barycentre G du système pondéré $\{(A, 1) ; (B, \lambda)\}$; ce barycentre est défini, pour tout $M \in \mathcal{P}$ par :
   $$(\lambda + 1)\,\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \lambda\overrightarrow{MB}$$
   (b) De la même manière, le système pondéré $\{(A, 1) ; (B, -\lambda)\}$, comme $1 - \lambda \neq 0$, admet un barycentre H défini, pour tout $M \in \mathcal{P}$ par :
   $$(1 - \lambda)\,\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MA} - \lambda\overrightarrow{MB}$$
   (c) De telle sorte que :
   $$\begin{aligned} MA^2 - \lambda^2 MB^2 = 0 &\iff \left\langle \overrightarrow{MA} + \lambda\overrightarrow{MB} \mid \overrightarrow{MA} - \lambda\overrightarrow{MB} \right\rangle = 0 \\ &\iff \left\langle (\lambda+1)\,\overrightarrow{MG} \mid (1-\lambda)\,\overrightarrow{MH} \right\rangle = 0 \\ &\iff (1-\lambda^2)\left\langle \overrightarrow{MG} \mid \overrightarrow{MH} \right\rangle = 0 \\ &\iff \left\langle \overrightarrow{MG} \mid \overrightarrow{MH} \right\rangle = 0 \end{aligned}$$
   (d) L'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $MA^2 = \lambda^2 MB^2$ est l'ensemble des points tels que $\left\langle \overrightarrow{MG} \mid \overrightarrow{MH} \right\rangle = 0$, c'est à dir el'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MH}$ soient orthogonaux ; c'est donc le cercle de diamètre $[GH]$
   (e) En fait, en faisant $M = A$, nous avons :
   ⋆ $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\lambda}{\lambda + 1}\overrightarrow{AB}$; G est sur le segment $[AB]$
   ⋆ $\overrightarrow{AH} = \dfrac{\lambda}{\lambda - 1}\overrightarrow{AB}$; H est toujours en dehors du segment $[AB]$

C.3.4 Théorème

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$. Soient $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$ 2 nombres complexes tels que $a \neq b$; a est l'affixe d'un point $A \in \mathcal{P}$ et b est l'affixe de $B \in \mathcal{P}$.
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $\lambda > 0$
Alors, l'ensemble $E_\lambda = \{z \in \mathbb{C}$ tels que $|z - a| = \lambda\,|z - b|\}$ est :

1. La médiatrice du segment $[AB]$ si $\lambda = 1$

2. Un cercle de centre $\Omega \in \mathcal{P}$ d'affixe $\omega = \dfrac{a-\lambda^2 b}{1-\lambda^2}$ et de rayon $R = \dfrac{\lambda\,|a-b|}{|1-\lambda^2|}$ si $\lambda \neq 1$

Démonstration

1. Premières remarques
   (a) Evidemment, si $\lambda < 0$, alors $E_\lambda = \emptyset$ et si $\lambda = 0$, alors $z = a$
   (b) Supposons $\lambda = 1$
   Alors $E_1 = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z-a| = |z-b|\}$; cet ensemble a déjà été étudié en C.2.3 ; c'est bien la médiatrice du segment $[AB]$
   (c) Si $\lambda > 0$ et $\lambda \neq 1$, alors $a \notin E_\lambda$ et $b \notin E_\lambda$
   En effet, si $a \in E_\lambda$, alors $|a-a| = \lambda\,|a-b| \iff \lambda\,|a-b| = 0$, ce qui est impossible.
   De même, $b \in E_\lambda$, alors $|b-a| = \lambda\,|b-b| \iff \lambda\,|b-a| = 0$, ce qui est impossible puisque $a \neq b$
   Donc $a \notin E_\lambda$ et $b \notin E_\lambda$
2. Supposons $\lambda > 0$ et $\lambda \neq 1$
   Alors $|z-a| = \lambda\,|z-b| \iff |z-a|^2 = \lambda^2\,|z-b|^2$. Si z est l'affixe d'un point $M \in \mathcal{P}$, nous avons alors $MA^2 = \lambda^2 MB^2$. Nous avons déjà résolu la question dans le lemme C.3.3.
   E_λ est donc un cercle de diamètre $[GH]$ où $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH} = \dfrac{\lambda}{\lambda-1}\overrightarrow{AB}$
   $\to$ Si $g \in \mathbb{C}$ est l'affixe de G, nous avons $g - a = \dfrac{\lambda}{\lambda+1}(b-a) \iff g = \dfrac{a+\lambda b}{\lambda+1}$
   $\to$ De même si $h \in \mathbb{C}$ est l'affixe de H, nous avons $h - a = \dfrac{\lambda}{\lambda-1}(b-a) \iff h = \dfrac{a-\lambda b}{1-\lambda}$
   $\to$ Le centre est donc donné par Ω d'affixe
$$\omega = \frac{g+h}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a+\lambda b}{\lambda+1} + \frac{a-\lambda b}{1-\lambda}\right) = \frac{a-\lambda^2 b}{1-\lambda^2}$$
   $\to$ Le rayon R est donné par $R = \dfrac{1}{2}\,|g-h|$ et donc :
$$R = \frac{1}{2}\,|g-h| = \frac{1}{2}\left|\frac{a+\lambda b}{\lambda+1} - \frac{a-\lambda b}{1-\lambda}\right| = \frac{\lambda\,|b-a|}{|1-\lambda^2|}$$

Ce que nous voulions

Remarque 8 :

Nous sommes toujours dans les hypothèses et les notations de C.3.4
La médiatrice du segment $[AB]$ définie par $|z-a| = |z-b|$ coupe le plan affine $\mathcal{P}$ en 2 demi-plans ouverts.
$\Rightarrow$ Un premier demi plan $\mathcal{P}_1$ défini par $|z-a| < |z-b|$ qui contient le point A d'affixe a
$\Rightarrow$ Un second demi plan $\mathcal{P}_2$ défini par $|z-a| > |z-b|$ qui contient le point B d'affixe b
Se reporter à la figure C.1

Exemple 1 :

Exercice résolu *Quel est l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z+3| = 2\,|z|$?*

Voilà un exercice d'application directede C.3.4
Dans notre cas, nous avons $a = -3$, $b = 0$ et $\lambda = 2$. L'ensemble recherché est donc un cercle de centre $\Omega \in \mathcal{P}$ d'affixe $\omega = \dfrac{-3}{1-4} = 1$ et de rayon $R = \dfrac{2\,|-3|}{|1-4|} = 2$

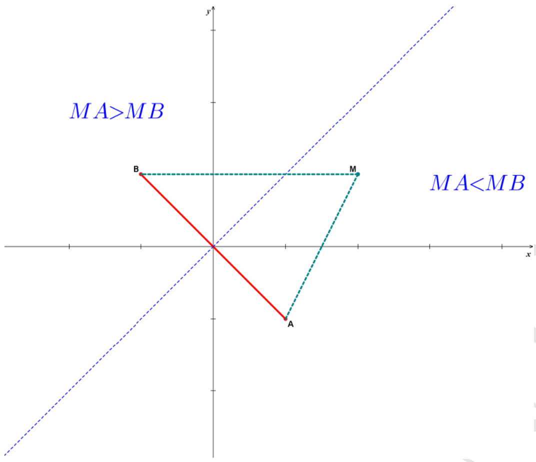

FIGURE C.1 – Régionnement du plan : $MA > MB \iff |z-a| > |z-b|$ ou $MA < MB \iff |z-a| < |z-b|$

Exercice 1 :

Quel est l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z-i| = |z-iz| = |z-1|$?

Exercice 2 :

1. Montrer que pour tout nombre complexe $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$, nous avons :
$$|z-a|^2 + |z-b|^2 = 2\left|z - \frac{a+b}{2}\right|^2 + \frac{|b-a|^2}{2}$$
2. $\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.
Trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $MA^2 + MB^2 = \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

C.3.5 Lignes de niveau associées à l'argument d'un nombre complexe

Le $\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
Soit $\omega \in \mathbb{C}$ fixé et on s'intéresse à la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f : \mathbb{C} \setminus \{\omega\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad z & \longmapsto & f(z) = \arg(z-\omega) \end{cases}$$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $E_\theta = f^{-1}(\{\theta\}) = \{z \in : \mathbb{C} \setminus \{\omega\}$ tel que $\arg(z-\omega) \equiv \theta\,[2\pi]\}$
$\mathcal{E}_\theta$ est le sous ensemble du plan $\mathcal{P}$ correspondant
Alors l'ensemble E_θ est identifié à la demie droite passant par le point Ω d'affixe ω et d'angle polaire θ, privée du point Ω

Démonstration

Si $\arg(z-\omega) = \theta\,[2\pi]$, alors $z - \omega = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et donc $z = \omega + \rho e^{i\theta}$.

Remarque 9 :

Nous vérifions, sans plus de difficulté que $F_\theta = \{z \in : \mathbb{C} \setminus \{\omega\}$ tel que $\arg(z-\omega) \equiv \theta\,[\pi]\}$ est identifié à une droite passant par Ω et d'angle polaire θ

C.3.6 Lemme

Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors : $\left(\arg z \equiv \theta\,[\pi]\right) \iff \left(z = \overline{z}e^{2i\theta}\right)$

Démonstration

1. Supposons $\arg z \equiv \theta\,[\pi]$
   Alors $z = \rho e^{i\theta}$ ou $z = \rho e^{i(\theta+\pi)}$
   $\rightarrow$ Si $z = \rho e^{i\theta}$, alors $z = \rho e^{i(-\theta+2\theta)} = \rho e^{-i\theta}e^{2i\theta} = \overline{z}e^{2i\theta}$
   $\rightarrow$ Si $z = \rho e^{i(\theta+\pi)}$, alors $z = \rho e^{-i\theta-i\pi+2i\theta+2i\pi} = \rho e^{-i(\theta+\pi)}e^{2i\theta+2i\pi} = \rho e^{-i(\theta+\pi)}e^{2i\theta} = \overline{z}e^{2i\theta}$
   Ainsi, si $\arg z \equiv \theta\,[\pi]$, alors $z = \overline{z}e^{2i\theta}$
2. Réciproquement, supposons $z = \overline{z}e^{2i\theta}$
   Alors, si $z = \rho e^{i\alpha}$, nous avons $z = \rho e^{-i\alpha}e^{2i\theta} = \rho e^{-i\alpha+2i\theta} = \rho e^{i(-\alpha+2\theta)}$
   Donc, nous avons $\alpha = -\alpha + 2\theta + 2k\pi \iff 2\alpha = 2\theta + 2k\pi \iff \alpha = \theta + k\pi \iff \alpha \equiv \theta\,[\pi]$.
   Autrement dit, $\arg z \equiv \theta\,[\pi]$

C.3.7 Théorème

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
Soient $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$, 2 nombres complexes tels que $a \neq b$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Nous appelons :

$$E_\theta = \left\{z \in \mathbb{C} \setminus \{a;b\} \textbf{ tels que } \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) \equiv \theta\,[\pi]\right\}$$

Alors :

1. **Si $\theta \equiv 0\,[\pi]$, alors E_θ est la droite (AB) privée des points A et B**
2. **Si θ n'est pas congru à 0 modulo π, alors E_θ est un cercle de centre le point $\Omega \in \mathcal{P}$ d'affixe $\omega = \left(\frac{a+b}{2}\right) + i\left(\frac{a-b}{2}\right)\cot\theta$ et de rayon $R = \frac{|a-b|}{2\,|\sin\theta|}$**

Démonstration

1. Les points M, A et$B$ sont alignés si et seulement si, au niveau des affixes, $z - a = \lambda\,(z-b)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, c'est à dire, si et seulement si $\frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R}$, c'est à dire $\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) \equiv 0\,[\pi]$.
   Donc, si $\theta \equiv 0\,[\pi]$, alors E_θ est la droite (AB) privée des points A et B
2. Supposons que θ n'est pas congru à 0 modulo π
   D'après le lemme C.3.6, nous avons :

$$\left(\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) \equiv \theta\,[\pi]\right) \iff \left(\frac{z-a}{z-b} = \overline{\left(\frac{z-a}{z-b}\right)}e^{2i\theta}\right)$$

   Nous allons maintenant démontrer le résultat proposé par une méthode très calculatoire [1]
   $\Rightarrow$ Tout d'abord :

$$\frac{z-a}{z-b} = \overline{\left(\frac{z-a}{z-b}\right)}e^{2i\theta} \iff (z-a)\left(\overline{z}-\overline{b}\right) = e^{2i\theta}\,(z-b)\,(\overline{z}-\overline{a})$$

   Ce qui, tous calculs faits, nous donne :

$$(z-a)\left(\overline{z}-\overline{b}\right) = e^{2i\theta}\,(z-b)\,(\overline{z}-\overline{a})$$
$$\iff$$
$$\left(1-e^{2i\theta}\right)z\overline{z} + \left(e^{2i\theta}\overline{a}-\overline{b}\right)z + \left(be^{2i\theta}-a\right)\overline{z} + a\overline{b} - e^{2i\theta}\overline{a}b = 0$$
$$\iff$$
$$z\overline{z} + \frac{\left(e^{2i\theta}\overline{a}-\overline{b}\right)}{\left(1-e^{2i\theta}\right)}z + \frac{\left(be^{2i\theta}-a\right)}{\left(1-e^{2i\theta}\right)}\overline{z} + \frac{a\overline{b}-e^{2i\theta}\overline{a}b}{\left(1-e^{2i\theta}\right)} = 0$$

1. Et un peu longuette !!

⇒ **Nous allons, maintenant, simplifier** $1 - e^{2i\theta}$
Tout d'abord, $1 - e^{2i\theta} = (1 - \cos 2\theta) - i \sin 2\theta$
→ Nous avons $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$, de telle sorte que $(1 - \cos 2\theta) = 2\sin^2\theta$
→ De plus, $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$
Donc $1 - e^{2i\theta} = 2\sin^2\theta - 2i\sin\theta\cos\theta = 2\sin\theta\left(\sin\theta - i\cos\theta\right)$
Or, en regardant les lignes trigonométriques, nous avons :

$$\sin\theta = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \theta\right) \text{ et } -\cos\theta = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

Donc : $\sin\theta - i\cos\theta = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2} + \theta\right) = e^{i\left(-\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = -ie^{i\theta}$
Donc :

$$1 - e^{2i\theta} = -2i\sin\theta e^{i\theta}$$

⇒ D'où nous avons :

$$z\overline{z} + \frac{\left(e^{2i\theta}\overline{a} - \overline{b}\right)}{\left(1 - e^{2i\theta}\right)}z + \frac{\left(be^{2i\theta} - a\right)}{\left(1 - e^{2i\theta}\right)}\overline{z} + \frac{a\overline{b} - e^{2i\theta}\overline{a}b}{\left(1 - e^{2i\theta}\right)} = 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$z\overline{z} + \frac{\left(e^{2i\theta}\overline{a} - \overline{b}\right)}{-2i\sin\theta e^{i\theta}}z + \frac{\left(be^{2i\theta} - a\right)}{-2i\sin\theta e^{i\theta}}\overline{z} + \frac{a\overline{b} - e^{2i\theta}\overline{a}b}{-2i\sin\theta e^{i\theta}} = 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$z\overline{z} - \frac{\left(e^{2i\theta}\overline{a} - \overline{b}\right)}{2i\sin\theta e^{i\theta}}z - \frac{\left(be^{2i\theta} - a\right)}{2i\sin\theta e^{i\theta}}\overline{z} - \frac{a\overline{b} - e^{2i\theta}\overline{a}b}{2i\sin\theta e^{i\theta}} = 0$$

⇒ Notons $\omega = \dfrac{\left(be^{2i\theta} - a\right)}{2i\sin\theta e^{i\theta}}$. Alors,

$$\omega = \frac{\left(be^{2i\theta} - a\right)}{2i\sin\theta e^{i\theta}} = \frac{\left(be^{i\theta} - ae^{-i\theta}\right)}{2i\sin\theta}$$

De la même manière :

$$\frac{\left(e^{2i\theta}\overline{a} - \overline{b}\right)}{2i\sin\theta e^{i\theta}} = \frac{\left(e^{i\theta}\overline{a} - \overline{b}e^{-i\theta}\right)}{2i\sin\theta} = \overline{\omega}$$

De telle sorte que

$$z\overline{z} + \frac{\left(e^{2i\theta}\overline{a} - \overline{b}\right)}{-2i\sin\theta e^{i\theta}}z + \frac{\left(be^{2i\theta} - a\right)}{-2i\sin\theta e^{i\theta}}\overline{z} - \frac{a\overline{b} - e^{2i\theta}\overline{a}b}{2i\sin\theta e^{i\theta}} = 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$z\overline{z} - \overline{\omega}z - \omega\overline{z} - \frac{a\overline{b} - e^{2i\theta}\overline{a}b}{2i\sin\theta e^{i\theta}} = 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\left(z - \omega\right)\left(\overline{z} - \overline{\omega}\right) - |\omega|^2 - \frac{a\overline{b} - e^{2i\theta}\overline{a}b}{2i\sin\theta e^{i\theta}} = 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$|z - \omega|^2 = |\omega|^2 + \frac{a\overline{b} - e^{2i\theta}\overline{a}b}{2i\sin\theta e^{i\theta}}$$

⇒ Simplifions l'écriture de ω

$$\begin{aligned}\omega = \frac{\left(be^{i\theta} - ae^{-i\theta}\right)}{2i\sin\theta} &= \frac{b\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) + a\left(\cos\theta - i\sin\theta\right)}{2i\sin\theta} \\ &= \frac{\cos\theta\left(b - a\right) + i\sin\theta\left(a + b\right)}{2i\sin\theta} \\ &= \left(\frac{a + b}{2}\right) + \frac{i\left(a - b\right)\sin\theta}{2\sin\theta} \\ &= \left(\frac{a + b}{2}\right) + i\left(\frac{a - b}{2}\right)\cot\theta\end{aligned}$$

⇒ Simplifions maintenant, l'écriture de $|\omega|^2 + \dfrac{a\overline{b} - e^{2i\theta}\overline{a}b}{2i\sin\theta e^{i\theta}}$
Nous allons le faire en plusieurs temps

→ Tout d'abord, par un calcul simple, de $|\omega|^2 = \omega \times \overline{\omega}$, nous avons :

$$|\omega|^2 = \omega \times \overline{\omega} = \frac{\left(be^{i\theta} - ae^{-i\theta}\right)}{2i\sin\theta} \times \frac{\left(e^{i\theta}\overline{a} - \overline{b}e^{-i\theta}\right)}{2i\sin\theta} = \frac{|b|^2 - b\overline{a}e^{2i\theta} - a\overline{b}e^{2i\theta} + |a|^2}{4\sin^2\theta}$$

→ D'autre part, $2i\sin\theta = 2i \times \left(\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right) = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$, de telle sorte que :

$$\begin{aligned}
\frac{a\overline{b} - e^{2i\theta}\overline{a}b}{2i\sin\theta e^{i\theta}} &= \frac{a\overline{b}e^{-i\theta} - e^{i\theta}\overline{a}b}{2i\sin\theta} \\
&= \frac{-2i\sin\theta\left(a\overline{b}e^{-i\theta} - e^{i\theta}\overline{a}b\right)}{4\sin^2\theta} \\
&= \frac{\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)\left(a\overline{b}e^{-i\theta} - e^{i\theta}\overline{a}b\right)}{4\sin^2\theta} \\
&= \frac{a\overline{b}e^{-2i\theta} - \overline{a}b - a\overline{b} + e^{2i\theta}\overline{a}b}{4\sin^2\theta}
\end{aligned}$$

→ En additionnant, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
|\omega|^2 + \frac{a\overline{b} - e^{2i\theta}\overline{a}b}{2i\sin\theta e^{2i\theta}} &= \frac{|b|^2 - b\overline{a}e^{2i\theta} - a\overline{b}e^{2i\theta} + |a|^2}{4\sin^2\theta} + \frac{a\overline{b}e^{-2i\theta} - \overline{a}b - a\overline{b} + e^{2i\theta}\overline{a}b}{4\sin^2\theta} \\
&= \frac{|b|^2 - b\overline{a} - a\overline{b} + |a|^2}{4\sin^2\theta} \\
&= \frac{(a-b)\left(\overline{a} - \overline{b}\right)}{4\sin^2\theta} \\
&= \frac{|a-b|^2}{4\sin^2\theta}
\end{aligned}$$

Ainsi, l'affixe des points $M \in \mathcal{P}$, vérifiant $\arg\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right) \equiv \theta\,[\pi]$ où θ n'est pas un réel congru à 0 modulo π vérifie : $|z-\omega|^2 = \dfrac{|a-b|^2}{4\sin^2\theta}$

C'est donc un cercle de centre le point $\Omega \in \mathcal{P}$ d'affixe $\omega = \left(\dfrac{a+b}{2}\right) + i\left(\dfrac{a-b}{2}\right)\cot\theta$ et de rayon $R = \dfrac{|a-b|}{2\,|\sin\theta|}$

Remarque 10 :

1. Lorsque θ n'est pas un réel congru à 0 modulo π, alors $A \in E_\theta$ et $B \in E_\theta$

   En effet, nous avons :

   $$|a-\omega| = \left|a - \left(\left(\frac{a+b}{2}\right) + i\left(\frac{a-b}{2}\right)\cot\theta\right)\right| = \left|\left(\left(\frac{a-b}{2}\right) + i\left(\frac{a-b}{2}\right)\cot\theta\right)\right| = \left|\frac{a-b}{2}\right| \times |1 + i\cot\theta|$$

   Or, $|1+i\cot\theta|^2 = 1 + \cot^2\theta = \dfrac{1}{\sin^2\theta}$ et donc $|1+i\cot\theta| = 1 + \cot^2\theta = \dfrac{1}{|\sin\theta|}$.

   Donc $|a-\omega| = \left|\dfrac{a-b}{2}\right| \times \dfrac{1}{|\sin\theta|} = R$ et donc A est bien sur le cercle de centre Ω et de rayon R

   Le calcul serait identique pour mour montrer que B est sur le cercle de centre Ω et de rayon R

2. Si $\theta \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$, alors $\omega = \dfrac{a+b}{2}$ et E_θ est donc le cercle de diamètre $[A; B]$ sauf A et B

3. Si θ n'est pas un réel congru à 0 modulo π, le centre du cercle E_θ $\omega_\theta = \left(\dfrac{a+b}{2}\right) + i\left(\dfrac{a-b}{2}\right)\cot\theta$ peut s'écrire, puisque $\cot\theta \in \mathbb{R}$, $\omega = \left(\dfrac{a+b}{2}\right) + i\lambda\,(a-b)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

Ainsi, l'ensemble des centres Ω est une droite Δ dont l'équation complexe est

$$z = \left(\frac{a+b}{2}\right) + i\lambda\,(a-b) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Cette droite Δ passe par le milieu I du segment $[A;B]$.
En fait, Δ est la médiatrice du segment $[A;B]$.
Pour le démontrer, il suffit de montrer que les droites Δ et (AB) sont perpendiculaires.
Soit $M \in \Delta$; alors :

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{IM} \mid \overrightarrow{IA} \right\rangle &= \operatorname{Re}\left[\left(z - \frac{a+b}{2}\right)\overline{\left(a - \frac{a+b}{2}\right)}\right] \\
&= \operatorname{Re}\left[\left(\left(\frac{a+b}{2}\right) + i\lambda\,(a-b) - \frac{a+b}{2}\right)\overline{\left(a - \frac{a+b}{2}\right)}\right] \\
&= \operatorname{Re}\left[(i\lambda\,(a-b))\overline{\left(\frac{a-b}{2}\right)}\right] \\
&= \operatorname{Re}\left[i\lambda\frac{|a-b|^2}{2}\right] = 0
\end{aligned}$$

C.3.8 Corollaire

Le $\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
Soient A, B, C et D 4 points du plan d'affixe respective $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$ et $d \in \mathbb{C}$
Ces points sont alignés ou cocycliques si et seulement si $\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right) \times \left(\dfrac{d-a}{d-b}\right) \in \mathbb{R}$

Démonstration

Nous avons $\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right) \times \left(\dfrac{d-a}{d-b}\right) \in \mathbb{R} \iff \arg\left[\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right) \times \left(\dfrac{d-a}{d-b}\right)\right] \equiv 0\,[\pi]$
Des propriétés de l'argument, nous avons : $\arg\left[\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right) \times \left(\dfrac{d-a}{d-b}\right)\right] = \arg\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right) + \arg\left(\dfrac{d-a}{d-b}\right)$.
De là, nous tirons :

$$\begin{aligned}
\arg\left[\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \times \left(\frac{d-a}{d-b}\right)\right] \equiv 0\,[\pi] &\iff \arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) + \arg\left(\frac{d-a}{d-b}\right) \equiv 0\,[\pi] \\
&\iff \arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv -\arg\left(\frac{d-a}{d-b}\right)\,[\pi] \\
&\iff \arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv \arg\left(\frac{d-b}{d-a}\right)\,[\pi]
\end{aligned}$$

Donc, $\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right) \times \left(\dfrac{d-a}{d-b}\right) \in \mathbb{R} \iff \arg\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{d-b}{d-a}\right)\,[\pi]$

1. Supposons A, B et C alignés ; alors, d'après C.3.7, $\arg\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right) \equiv 0\,[\pi]$
   Comme $\arg\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{d-b}{d-a}\right)\,[\pi]$, nous avons $\arg\left(\dfrac{d-b}{d-a}\right) \equiv 0\,[\pi]$, et donc les points A, D et B sont alignés, et donc A, B, C et D sont alignés.
2. Supposons A, B et C non alignés ; alors, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, tel que θ soit non congru à 0 modulo π telle que $\arg\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right) \equiv \theta\,[\pi]$.
   D'après C.3.7, C est situé sur un cercle $\mathcal{C}_1$.
   Comme $\arg\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{d-b}{d-a}\right)\,[\pi]$, nous avons $\arg\left(\dfrac{d-b}{d-a}\right) \equiv \theta\,[\pi]$, et donc, comme A, B et C, D se trouve aussi sur le cercle $\mathcal{C}_1$
   Les points A, B, C et D sont donc cocycliques.

C.3.9 Corollaire

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
Soient $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$, 2 nombres complexes tels que $a \neq b$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Nous appelons :

$$F_\theta = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{a; b\} \text{ tels que } \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) \equiv \theta \,[2\pi] \right\}$$

Alors :

1. **Si $\theta \equiv 0\,[2\pi]$, alors F_θ est la droite (AB) privée du segment $[A; B]$**
2. **Si $\theta \equiv \pi\,[2\pi]$, alors F_θ est le segment $[A; B]$ privé des points A et B, c'est à dire le segment ouvert $]A; B[$**
3. **Si θ n'est pas congru à 0 modulo 2π, alors F_θ est un arc de cercle privé des points A et B**

C.3.10 Inégalité et théorème de Ptolémée

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
Soient A, B, C et D, 4 points du plan $\mathcal{P}$ 2 à 2 distincts et $ABCD$ le quadrilatère correspondant.

1. **Inégalité de Ptolémée**
   Nous avons toujours $AC.BD \leqslant AB.CD + AD.BC$
2. **Le théorème de Ptolémée**
   Le quadrilatère convexe $ABCD$ est inscriptible dans un cercle si et seulement si le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés, c'est à dire

$$AC.BD = AB.CD + AD.BC$$

Démonstration

1. Inégalité de Ptolémée
   Il est très facile de vérifier par le calcul la relation :

$$(a-c)(b-d) = (a-b)(c-d) + (a-d)(b-c)$$

   D'où, en passant aux modules :

$$|(a-c)(b-d)| = |(a-b)(c-d) + (a-d)(b-c)| \leqslant |(a-b)(c-d)| + |(a-d)(b-c)|$$

   C'est à dire en passant aux points du plan :$AC.BD \leqslant AB.CD + AD.BC$
   C'est donc l'inégalité de Ptolémée
2. Le théorème de Ptolémée
   Le théorème de Ptolémée revient donc à chercher les cas d'égalité dans l'inégalité de Ptolémée.
   D'après 8.3.6, nous avons $|(a-c)(b-d)| = |(a-b)(c-d)| + |(a-d)(b-c)|$ si et seulement si

$$\frac{(a-b)(c-d)}{(a-d)(b-c)} \in \mathbb{R}^+$$

   Or

$$\frac{(a-b)(c-d)}{(a-d)(b-c)} \in \mathbb{R}^+ \Longleftrightarrow \frac{(a-b)(d-c)}{(a-d)(b-c)} \in \mathbb{R}^-$$

   D'après C.3.8, les points A,B,C et D sont alignés ou cocycliques