C.4 Les triangles dans le plan complexe

Dans ce paragraphe, nous revisitons le programme du collège avec, comme piment supplémentaire, l'introduction des nombres complexes

C.4.1 Définition de « vrai triangle »

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction P rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
On appelle vrai triangle du plan $\mathcal{P}$, la donnée de 3 points $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ et $C \in \mathcal{P}$ non alignés

Remarque 11 :

Si $T = ABC$ est un vrai triangle, nous notons :

$$\theta_A = \widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)} \quad \theta_B = \widehat{\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)} \quad \theta_C = \widehat{\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)}$$

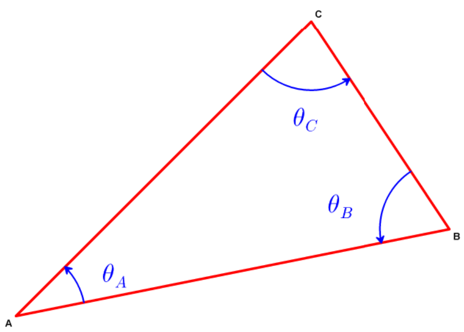

FIGURE C.2 – Un vrai triangle

C.4.2 Proposition

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction P rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
Soient 3 points $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ et $C \in \mathcal{P}$ non alignés alors :

$$\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \det\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \det\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)$$

Démonstration

En utilisant les propriétés du déterminant, nous avons :

$$\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \det\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC}\right) = \det\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}\right) + \det\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC}\right) = -\det\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right) = \det\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$$

Puis,

$$\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}\right) + \det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = -\det\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) = \det\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)$$

D'où le résultat $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \det\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \det\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)$

C.4.3 Définition

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction P rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
Soient 3 points $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ et $C \in \mathcal{P}$ non alignés
On dit que le triangle $T = ABC$ est orienté positivement si $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) > 0$

Remarque 12 :

1. Evidemment, le triangle $T = ABC$ est dit orienté négativement si $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) < 0$
2. De la relation $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = AB \times AC \sin \widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)} = AB \times AC \sin \theta_A$, nous obtenons :
$$\sin\theta_A = \frac{\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)}{AB \times AC} \quad \sin\theta_B = \frac{\det\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)}{BC \times BA} \quad \sin\theta_C = \frac{\det\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)}{CA \times CB}$$
Ce qui montre que $\sin\theta_A$, $\sin\theta_B$ et $\sin\theta_C$ sont de même signe

C.4.4 Théorème

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction P rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
Soient 3 points $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ et $C \in \mathcal{P}$ non alignés
Alors, $\theta_A + \theta_B + \theta_C \equiv \pi\,[2\pi]$

Démonstration

Nous avons :
$$\begin{aligned}
\theta_A + \theta_B + \theta_C &= \widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)} \\
&= \widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)} \\
&= \widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)} \\
&= \widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}\right)}
\end{aligned}$$

Or, $\widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}\right)} \equiv \pi\,[2\pi]$. Donc $\theta_A + \theta_B + \theta_C \equiv \pi\,[2\pi]$

C.4.5 Relation dans un triangle

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction P rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
Soient 3 points $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ et $C \in \mathcal{P}$ non alignés
Dans le triangle $T = ABC$, nous avons les relations suivantes :
$$\frac{BC}{\sin\theta_A} = \frac{AC}{\sin\theta_B} = \frac{AB}{\sin\theta_C}$$

Démonstration

Des relations
$\rightarrow$ $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = AB \times AC \sin\theta_A$
$\rightarrow$ $\det\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = BC \times BA \sin\theta_B$
$\rightarrow$ $\det\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = CA \times CB \sin\theta_C$

et de la proposition C.4.2, nous avons :

$$AB \times AC \sin\theta_A = BC \times BA \sin\theta_B = CA \times CB \sin\theta_C$$

⇒ De la première égalité $AB \times AC \sin\theta_A = BC \times BA \sin\theta_B$, nous tirons :

$$\frac{AB \times AC}{\sin\theta_B} = \frac{BC \times BA}{\sin\theta_A} \iff \frac{AC}{\sin\theta_B} = \frac{BC}{\sin\theta_A}$$

⇒ En utilisant une seconde égalité $BC \times BA \sin\theta_B = CA \times CB \sin\theta_C$, nous avons :

$$\frac{BC \times BA}{\sin\theta_C} = \frac{CA \times CB}{\sin\theta_B} \iff \frac{AB}{\sin\theta_C} = \frac{CA}{\sin\theta_B}$$

De la transitivité de l'égalité, nous avons : $\dfrac{BC}{\sin\theta_A} = \dfrac{AC}{\sin\theta_B} = \dfrac{AB}{\sin\theta_C}$

Remarque 13 :

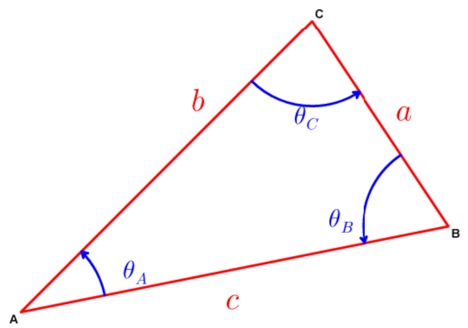

FIGURE C.3 – Relations dans un triangle triangle

Traditionnellement, il était noté $BC = a$, $AB = c$ et $AC = b$, d'où les relations dans un triangle deviennent :

$$\frac{a}{\sin\theta_A} = \frac{b}{\sin\theta_B} = \frac{c}{\sin\theta_C}$$

Exercice 3 :

Démontrer que pour tout triangle direct $T = ABC$, nous avons :

$$CB^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos\theta_A \iff a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos\theta_A$$

Que se passe-t-il si $\theta_A = \dfrac{\pi}{2}$?

C.4.6 Aire d'un triangle

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction P rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
Soient 3 points $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ et $C \in \mathcal{P}$ non alignés qui forment un vrai triangle $T = ABC$
L'aire du triangle $T = ABC$, est donné par $\mu(T) = \dfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right|$

C.4.7 Proposition

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction P rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
Soient 3 points $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ et $C \in \mathcal{P}$ non alignés qui forment un vrai triangle $T = ABC$
Alors l'aire du triangle $T = ABC$, est donné par $\mu(T) = \dfrac{1}{2} AH \times BC$ où H est la projection orthogonale de A sur la droite (BC)

Démonstration

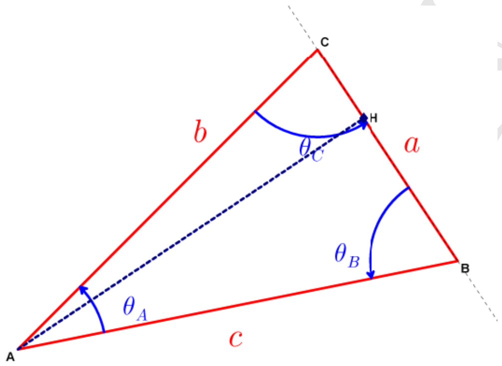

Figure C.4 – Aire d'un triangle

Soit donc H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) et nous considérons le repère orthonormé $\mathcal{R}\left(H, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Alors, les coordonnées des points A, B et C dans ce repère sont $A(0, y_A)$ $B(x_B, 0)$ et $C(x_C, 0)$, de telle sorte que

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B \\ -y_A \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_C \\ -y_A \end{pmatrix}$$

Donc $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \begin{vmatrix} x_B & x_C \\ -y_A & -y_A \end{vmatrix} = y_A(x_C - x_B)$

Donc $\mu(T) = \dfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right| = \dfrac{1}{2}|y_A(x_C - x_B)| = \dfrac{1}{2}|y_A||(x_C - x_B)| = \dfrac{1}{2} AH \times BC$

Remarque 14 :

On retrouve cette fameuse formule sur l'aire des triangles :

Base multipliée par la hauteur et divisée par 2

Remarque 15 :

Dans cette remarque, nous montrons des résultats très simples

1. On pourrait aussi démontrer, mais cela n'apporte pas grand chose, que :

$$\frac{2\mu(T)}{AB \times AC \times BC} = \frac{|\sin\theta_A|}{BC} = \frac{|\sin\theta_B|}{AC} = \frac{|\sin\theta_C|}{AB}$$

2. Expression complexe de l'aire d'un triangle $T = ABC$

   Si $a \in \mathbb{C}$ est l'affixe du point A, $b \in \mathbb{C}$ celle du point B et $c \in \mathbb{C}$ l'affixe du point C, nous avons :

$$\mu(T) = \frac{1}{2}\left|\operatorname{Im}\overline{(b-a)}(c-a)\right|$$

Démonstration

D'après les rappels C.1.2, nous avons, si $a \in \mathbb{C}$ est l'affixe du point A, $b \in \mathbb{C}$ celle du point A et $c \in \mathbb{C}$ l'affixe du point C, $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \operatorname{Im}\left[\overline{(b-a)}\,(c-a)\right]$.
D'où le résultat

3. Une majoration de l'aire

Si $T = ABC$ est un vrai triangle, on a alors :

$$\mu(T) \leqslant \frac{1}{2} AB \times AC$$

L'égalité est réalisée si, et seulement si, le triangle T est rectangle en A

Démonstration

Nous allons utiliser 2 méthodes pour démontrer ce résultat.

(a) Tout d'abord, rappelons que $\mu(T) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right|$.
Partant de $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = AB \times AC \times \sin\theta_A$, c'est à dire :

$$\mu(T) = \frac{1}{2}\left|AB \times AC \times \sin\theta_A\right| = \frac{1}{2} AB \times AC \left|\sin\theta_A\right|$$

Et remarquant que $|\sin\theta_A| \leqslant 1$, nous avons $\mu(T) = \frac{1}{2} AB \times AC\,|\sin\theta_A| \leqslant \frac{1}{2} AB \times AC$
Ainsi, si T est un triangle rectangle en A, alors, l'angle θ_A est droit et $|\sin\theta_A| = 1$; donc $\mu(T) = \frac{1}{2} AB \times AC$

(b) Une autre méthode consiste à utiliser les nombres complexes et utiliser l'inégalité $|\operatorname{Im}(z)| \leqslant |z|$
$\Rightarrow$ Comme $\mu(T) = \frac{1}{2}\left|\operatorname{Im}\overline{(b-a)}\,(c-a)\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|\overline{(b-a)}\,(c-a)\right|$ et comme

$$\frac{1}{2}\left|\overline{(b-a)}\,(c-a)\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{(b-a)}\right| \times |c-a| = \frac{1}{2}|b-a| \times |c-a| = \frac{1}{2} AB \times AC$$

Nous avons bien $\mu(T) \leqslant \frac{1}{2} AB \times AC$
$\Rightarrow$ L'égalité $\mu(T) = \frac{1}{2} AB \times AC$ est équivalente à l'égalité :

$$\left|\operatorname{Im}\overline{(b-a)}\,(c-a)\right| = \left|\overline{(b-a)}\,(c-a)\right|$$

Et cette égalité n'est réalisée que si $\overline{(b-a)}\,(c-a)$ est imaginaire pur, c'est à dire si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires

C.4.8 Centre de gravité d'un triangle

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction P rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
Soient 3 points $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ et $C \in \mathcal{P}$ non alignés formant un vrai triangle $T = ABC$ et d'affixes respectives $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$
L'affixe du centre de gravité G de T est $z_G = \dfrac{a+b+c}{3}$

Démonstration

Si G est le centre de gravité du triangle $T = ABC$, alors $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$, et en passant aux affixes, si z_G est l'affixe de G, nous avons :

$$(z_G - a) + (z_G - b) + (z_G - c) = 0 \iff z_G = \frac{a+b+c}{3}$$

Remarque 16 :

Rappelons nous l'exposé sur le calcul barycentrique :

→ G se trouve sur la droite passant par les points d'affixe c et $\dfrac{a+b}{2}$

→ G se trouve sur la droite passant par les points d'affixe b et $\dfrac{a+c}{2}$

→ G se trouve sur la droite passant par les points d'affixe a et $\dfrac{c+b}{2}$

On retrouve le fait que les médianes d'un triangle sont concourrantes.

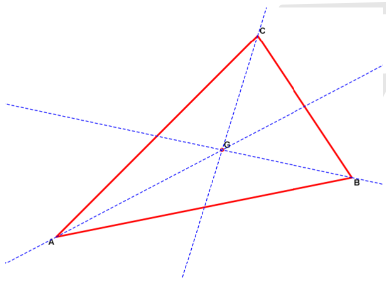

FIGURE C.5 – Centre de gravité d'un triangle

C.4.9 Cercle Circonscrit

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction P rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
Soient 3 points $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ et $C \in \mathcal{P}$ non alignés formant un vrai triangle $T = ABC$ et d'affixes respectives $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$

Si Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle T, alors $2\widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}\right)}\,[2\pi]$

Démonstration

1. Les points A, B et C étant non alignés, si $\theta = \arg\left(\dfrac{a-c}{b-c}\right)$, alors θ n'est pas congru à 0 modulo π.
   Appelons $\mathcal{C} = \mathcal{E}_\theta \cup \{A, B\}$ où
   $$\mathcal{E}_\theta = \left\{ M \in \mathcal{P} \setminus \{A, B\} \text{ tels que } \widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)} \equiv \theta\,[\pi] \right\}$$
   $\mathcal{C}$ est un cercle contenant les points A, B et C ; c'est donc le cercle circonscrit au triangle T.
   Un point $M \in \mathcal{P}$ d'affixe $z \in \mathbb{C}$ est un point du cercle circonscrit $\mathcal{C}$ si et seulement si $\arg\left(\dfrac{a-z}{b-z}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{a-c}{b-c}\right)[\pi]$
2. En utilisant la relation de Chasles, nous avons :
   $$\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega A}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega B}\right)} \equiv 0\,[2\pi]$$

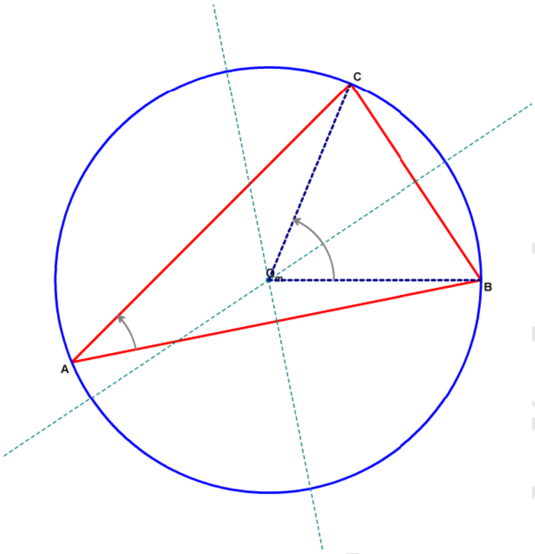

Figure C.6 – Un cercle circonscrit à un triangle

Dans le triangles ΩAB nous avons :

$$\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Omega}\right)}+\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}\right)}+\widehat{\left(\overrightarrow{B\Omega},\overrightarrow{BA}\right)}\equiv\pi\,[2\pi]$$

Dans le triangles ΩAC nous avons :

$$\widehat{\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{C\Omega}\right)}+\widehat{\left(\overrightarrow{A\Omega},\overrightarrow{AC}\right)}+\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega A}\right)}\equiv\pi\,[2\pi]$$

Les triangles ΩAB et ΩAC sont isocèles et donc $\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Omega}\right)}=\widehat{\left(\overrightarrow{B\Omega},\overrightarrow{BA}\right)}$ et $\widehat{\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{C\Omega}\right)}=\widehat{\left(\overrightarrow{A\Omega},\overrightarrow{AC}\right)}$, et donc nous avons :

$$2\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Omega}\right)}+\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}\right)}\equiv\pi\,[2\pi]$$

Et

$$2\widehat{\left(\overrightarrow{A\Omega},\overrightarrow{AC}\right)}+\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega A}\right)}\equiv\pi\,[2\pi]$$

En additionnant les 2 dernières égalités, nous obtenons :

$$2\left[\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Omega}\right)}+\widehat{\left(\overrightarrow{A\Omega},\overrightarrow{AC}\right)}\right]+\left[\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}\right)}+\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega A}\right)}\right]\equiv\pi+\pi\equiv0\,[2\pi]$$

C'est à dire

$$2\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}-\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega C}\right)}\equiv0\,[2\pi]$$

Ce que nous voulions

Remarque 17 :

Le centre du cercle circonscrit est le point de concours des médiatrices des côtés du triangle.

C.4.10 Lemme

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction P rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

Soient 3 points $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ et $C \in \mathcal{P}$ non alignés formant un vrai triangle $T = ABC$ et d'affixes respectives $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$
Un point $M \in \mathcal{P}$ d'affixe $z \in \mathbb{C}$ est sur la hauteur de T issue de A si et seulement si $(z-a)\overline{(c-b)}$ est imaginaire pur

Démonstration

Si M est sur la hauteur issue de A, alors $\left\langle \overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{BC} \right\rangle = 0$.
Or, $\left\langle \overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{BC} \right\rangle = \mathrm{Re}\left((z-a)\overline{(c-b)}\right) = 0$, ce qui veut dire que $(z-a)\overline{(c-b)}$ est imaginaire pur

Remarque 18 :

Si $(z-a)\overline{(c-b)}$ est imaginaire pur, ceci veut dire que $\arg(z-a) - \arg(c-b) \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$.
Comme $\arg(z-a) - \arg(c-b) \equiv \arg\left(\dfrac{z-a}{c-b}\right)$, il est équivalent de dire que $(z-a)\overline{(c-b)}$ est imaginaire pur et $\dfrac{z-a}{c-b}$ est imaginaire pur.

C.4.11 Egalité de Wallace

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction P rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
Soients 3 points $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ et $C \in \mathcal{P}$ quelconques. Alors, pour tout $M \in \mathcal{P}$, nous avons :

$$\left\langle \overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{BC} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{BM} \mid \overrightarrow{CA} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{CM} \mid \overrightarrow{AB} \right\rangle = 0$$

Démonstration

Soient $a \in \mathbb{C}$ l'affixe de A, $b \in \mathbb{C}$ l'affixe de B, $c \in \mathbb{C}$ l'affixe de C et $z \in \mathbb{C}$ l'affixe de M, alors, d'après l'expression du produit scalaire, nous avons :

$$\left\langle \overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{BC} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{BM} \mid \overrightarrow{CA} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{CM} \mid \overrightarrow{AB} \right\rangle = \mathrm{Re}\left((z-a)\overline{(c-b)} + (z-b)\overline{(a-c)} + (z-c)\overline{(b-a)}\right)$$

Nous allons démontrer que $(z-a)\overline{(c-b)} + (z-b)\overline{(a-c)} + (z-c)\overline{(b-a)}$ est un nombre imaginaire pur.

$$\begin{aligned}
(z-a)\overline{(c-b)} = (z-a)\left(\overline{c}-\overline{b}\right) &= (z-b+b-a)\left(\overline{c}-\overline{b}\right) \\
&= (z-b)\left(\overline{c}-\overline{b}\right) + (b-a)\left(\overline{c}-\overline{b}\right) \\
&= (z-b)\left(\overline{c}-\overline{a}+\overline{a}-\overline{b}\right) + (b-a)\left(\overline{c}-\overline{b}\right) \\
&= (z-b)\left(\overline{c}-\overline{a}\right) + (z-b)\left(\overline{a}-\overline{b}\right) + (b-a)\left(\overline{c}-\overline{b}\right) \\
&= (z-b)\left(\overline{c}-\overline{a}\right) + (z-c+c-b)\left(\overline{a}-\overline{b}\right) + (b-a)\left(\overline{c}-\overline{b}\right) \\
&= (z-b)\left(\overline{c}-\overline{a}\right) + (z-c)\left(\overline{a}-\overline{b}\right) + (c-b)\left(\overline{a}-\overline{b}\right) + (b-a)\left(\overline{c}-\overline{b}\right) \\
&= -(z-b)\overline{(a-c)} - (z-c)\left(\overline{b-a}\right) + (c-b)\left(\overline{a-b}\right) + (b-a)\left(\overline{c-b}\right)
\end{aligned}$$

D'où

$$(z-a)\overline{(c-b)} + (z-b)\overline{(a-c)} + (z-c)\overline{(b-a)} = (c-b)\left(\overline{a-b}\right) + (b-a)\left(\overline{c-b}\right)$$

En posant $U = (c-b)\left(\overline{a-b}\right)$, nous avons $\overline{U} = (a-b)\left(\overline{c-b}\right)$ et donc :

$$(z-a)\overline{(c-b)} + (z-b)\overline{(a-c)} + (z-c)\overline{(b-a)} = U - \overline{U} = 2i\,\mathrm{Im}(U) = 2i\,\mathrm{Im}\left((c-b)\left(\overline{a-b}\right)\right)$$

Ce qui montre donc que $(z-a)\overline{(c-b)} + (z-b)\overline{(a-c)} + (z-c)\overline{(b-a)}$ est un nombre imaginaire pur et que sa partie réelle est nulle. Ainsi :

$$\left\langle \overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{BC} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{BM} \mid \overrightarrow{CA} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{CM} \mid \overrightarrow{AB} \right\rangle = 0$$

Remarque 19 :

Nous venons aussi de montrer que, pour tout nombre complexe $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ $c \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$ que si 2 quantités parmi $(z-a)\,\overline{(c-b)}$, $(z-b)\,\overline{(a-c)}$ et $(z-c)\,\overline{(b-a)}$ sont des nombres imaginaires purs, alors la troisième quantité est aussi imaginaire pure.

C.4.12 Théorème

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction P rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
Soient 3 points $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ et $C \in \mathcal{P}$ non alignés formant un vrai triangle $T = ABC$. Alors, les hauteurs de ce triangle sont concourrantes. Le point de concours s'appelle orthocentre [2]

Démonstration

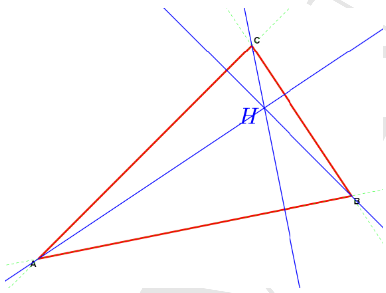

FIGURE C.7 – L'orthocentre, point de rencontre des hauteurs

Soient $a \in \mathbb{C}$ l'affixe de A, $b \in \mathbb{C}$ l'affixe de B, $c \in \mathbb{C}$ l'affixe de C. Nous appelons H_A la hauteur issue de A et H_B la hauteur issue de B.
Soit $M \in \mathcal{P}$ tel que $M \in H_A$; alors l'affixe $z \in \mathbb{C}$ de M vérifie $\text{Re}\left((z-a)\,\overline{(b-c)}\right) = 0$, c'est à dire que $(z-a)\,\overline{(b-c)}$ est imaginaire pur.
De même, si $M \in \mathcal{P}$ tel que $M \in H_B$; alors l'affixe $z \in \mathbb{C}$ de M vérifie $\text{Re}\left((z-b)\,\overline{(a-c)}\right) = 0$, c'est à dire que $(z-b)\,\overline{(a-c)}$ est imaginaire pur.
Si $M \in H_A \cap H_B$, alors $(z-a)\,\overline{(b-c)}$ et $(z-b)\,\overline{(a-c)}$ sont imaginaires purs.
D'après le résultat montré précédemment, nous pouvons conclure que $(z-c)\,\overline{(a-b)}$ est imaginaire pur et que donc $M \in H_C$, la hauteur issue de C
Les 3 hauteurs sont donc concourrantes

C.4.13 La droite d'Euler

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction P rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
Soient 3 points $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ et $C \in \mathcal{P}$ non alignés formant un vrai triangle $T = ABC$ et d'affixes respectives $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$
Soient G le centre de gravité de T, Ω le centre du cercle circonscrit et H l'orthocentre.
Alors $\overrightarrow{\Omega H} = 3\overrightarrow{\Omega G}$, ce qui veut dire que les 3 points G, Ω et H sont alignés, formant ainsi la droite d'Euler

Démonstration

Soit Ω le centre du cercle circonscrit au triangle $T = ABC$
Sans perdre de généralité, nous considérons le repère orthonormé $\mathcal{R}\left(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, c'est à dire que nous considérons que $\Omega = O$.

2. Qu'il ne faut pas confondre avec **hortocentre** qui a tout d'une jardinerie

Nous avons alors, puisque Ω est le centre du cercle circonscrit :

$$|a| = \Omega A = \Omega B = |b| = |c| = \Omega C = R$$

Si G est l'isobarycentre de T, alors, l'affixe $g \in \mathbb{C}$ de G est donnée par $g = \dfrac{a+b+c}{3}$.
Soit H le point de $\mathcal{P}$ d'affixe $h = a+b+c$.
Nous allons montrer que H est l'orthocentre de T.
Tout d'abord, nous avons, en termes d'affixes $h - a = b + c$, ce qui se traduit, en termes vectoriels par : $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C}$. Nous avons, alors :

$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{AH} \mid \overrightarrow{CB} \right\rangle &= \left\langle \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C} \mid \overrightarrow{\Omega B} - \overrightarrow{\Omega C} \right\rangle \\ &= \Omega B^2 - \Omega C^2 = R^2 - R^2 = 0\end{aligned}$$

Ce qui veut dire que les droites (AH) et (BC) sont orthogonales et que H est sur la hauteur issue de A.
Nous démontrerions, de la même manière que $\left\langle \overrightarrow{BH} \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle = 0$, et que, donc, les droites (BH) et (AC) sont orthogonales et que H est sur la hauteur issue de B.
H est donc l'orthocentre du triangle T, et comme $3g = h$, nous avons $\overrightarrow{\Omega H} = 3\overrightarrow{\Omega G}$.
Ainsi, les points Ω, H et G sont alignés.

C.4.14 Triangle équilatéral

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction P rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
Soient 3 points $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ et $C \in \mathcal{P}$ non alignés formant un vrai triangle $T = ABC$ et d'affixes respectives $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$
Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. **Le triangle $T = ABC$ est équilatéral**
2. $|b-a| = |b-c| = |c-a|$
3. $\dfrac{1}{a-b} + \dfrac{1}{b-c} + \dfrac{1}{c-a} = 0$
4. $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$
5. **j et $\overline{j} = j^2$ étant les racines cubiques de l'unité, l'une ou l'autre est racine du polynôme du second degré $az^2 + bz + c$**

Démonstration

La démonstration de ce résultat est très calculatoire, et, parfois, astucielle.

1. Il est évident que nous avons l'équivalence :

$$ABC \text{ triangle équilatéral } \iff |b-a| = |b-c| = |c-a|$$

Cette équivalence est liée à la définition de triangle équilatéral et au lien entre distance et module de nombres complexes

2. **Supposons que** $|b-a| = |b-c| = |c-a|$ et démontrons que $\dfrac{1}{a-b} + \dfrac{1}{b-c} + \dfrac{1}{c-a} = 0$
$\rightarrow$ Nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{1}{a-b} &= \frac{1}{a-b} \times \frac{\overline{a-b}}{\overline{a-b}} = \frac{\overline{a-b}}{|a-b|^2} \\ &= \frac{\overline{a-b}}{|b-c|^2} = \frac{1}{b-c} \times \frac{\overline{a-b}}{\overline{b-c}} \\ &= \frac{1}{b-c} \times \frac{\overline{a-b-c+c}}{\overline{b-c}} \\ &= \frac{1}{b-c} \times \left(\frac{\overline{a-c}}{\overline{b-c}} - \frac{\overline{b-c}}{\overline{b-c}}\right) \\ &= \frac{1}{b-c} \times \left(\frac{\overline{a-c}}{\overline{b-c}} - 1\right)\end{aligned}$$

→ Comme :

$$\begin{aligned}\frac{|a-c|}{|b-c|}=1 \iff & \frac{|a-c|^2}{|b-c|^2}=1\\ \iff & \frac{\overline{(a-c)}\,(a-c)}{\overline{(b-c)}\,(b-c)}=1\\ \iff & \frac{\overline{(a-c)}}{\overline{(b-c)}}=\frac{(b-c)}{(a-c)}\end{aligned}$$

D'où $\left(\frac{\overline{a-c}}{\overline{b-c}}-1\right)=\left(\frac{(b-c)}{(a-c)}-1\right)$

→ Et donc :

$$\frac{1}{a-b}=\frac{1}{b-c}\times\left(\frac{(b-c)}{(a-c)}-1\right)=\frac{1}{a-c}-\frac{1}{b-c}$$

C'est à dire $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}=0$

3. **Supposons** $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}=0$
   Alors, en multipliant cette égalité par le produit $(b-c)(a-b)(c-a)$ et nous obtenons alors :
   $$(b-c)(c-a)+(a-b)(c-a)+(b-c)(a-b)=0$$
   En développant, nous avons $ab+ac+bc-a^2-b^2-c^2=0$, c'est à dire $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$
4. **Supposons maintenant que** $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$
   → Dans un premier temps, il faut remarquer que j la racine cubique complexe de 1 est telle que $j^2=\overline{j}$, que $1+j+j^2=0$, qu'en particulier $j+j^2=-1$, que $1+\overline{j}+\overline{j}^2=0$, que $j=\overline{j}^2$
   → En second lieu,
   $$\begin{aligned}\left(c+bj+aj^2\right)\left(c+b\overline{j}+a\overline{j}^2\right)= & \left(aj^2+bj+c\right)\left(aj+bj^2+c\right)\\ = & a^2+abj+acj^2+abj^2+b^2+bcj+acj+bcj^2+c^2\\ = & a^2+b^2+c^2+ab\left(j+j^2\right)+ac\left(j+j^2\right)+bc\left(j+j^2\right)\\ = & a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0\end{aligned}$$
   Donc, j ou $\overline{j}$ est racine de l'équation $az^2+bz+c=0$
5. **Supposons que** j **soit racine de** $az^2+bz+c=0$
   Nous allons utiliser le fait que $1+j+j^2=0$
   Nous avons alors $aj^2+bj+c=0$.
   ⇒ Alors :
   $$aj^2+bj+c=0 \iff aj^2+bj-c\left(j+j^2\right)=0 \iff (a-c)\,j^2=(c-b)\,j$$
   Comme $|j|=\left|j^2\right|=1$, nous avons $|a-c|=|c-b|$
   ⇒ D'autre part :
   $$aj^2+bj+c=0 \iff aj^2-b\left(j+j^2\right)+c=0 \iff (a-b)\,j^2=(b-c)\,j$$
   Et donc $|a-b|=|b-c|$
   D'où nous avons $|a-b|=|b-c|=|a-c|$ et le triangle ABC est bien équilatéral

Nous venons de montrer $1 \iff 2 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 4 \Longrightarrow 5 \Longrightarrow 2$
Il y a donc équivalence entre les 5 propositions.

Exercice 4 :

Quelles relations doivent exister entre les nombres complexes dont les images sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés ?

Exercice 5 :

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction P rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
Soient 3 points $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ et $C \in \mathcal{P}$ distincts et d'affixes respectives $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$
A chaque triplet de points (A, B, C) nous associons les nombres :

$$u\left(A,B,C\right) = a + bj + cj^2 \quad u\left(A,B,C\right) = a + bj^2 + cj \quad w\left(A,B,C\right) = \frac{u\left(A,B,C\right)}{v\left(A,B,C\right)}$$

Où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est une racine cubique de 1

1. Soit $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ une transformation du plan.
   Nous appelons $A' = f\left(A\right)$, $B' = f\left(B\right)$ et $C' = f\left(C\right)$.
   Exprimer $u\left(A', B', C'\right)$, $v\left(A', B', C'\right)$ et $w\left(A', B', C'\right)$ en fonction de $u\left(A,B,C\right)$, $v\left(A,B,C\right)$ et $w\left(A,B,C\right)$
   (a) Lorsque f est une translation
   (b) Lorsque f est une rotation de centre O
   (c) Lorsque f est une homothétie de centre O
2. Montrer que deux triangles $T = ABC$ et $T' = A'B'C'$ sont semblables si et seulement si $w\left(A,B,C\right) = w\left(A', B', C'\right)$
3. Trouver tous les triangles $T = ABC$ tels que $u\left(A,B,C\right) = 0$ ou $v\left(A,B,C\right) = 0$