C.5 Problèmes

L'objet de ces problèmes est de montrer que nous pouvons définir des applications de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui ne sont pas affines. Ces applications sont définies à partir des nombres complexes. C'est aussi l'occasion de résoudre des problèmes transversaux.

Exercice 6 :

Soient $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls, $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et $\mathcal{P}^*$ le plan $\mathcal{P}$ privé de O, c'est à dire $\mathcal{P}^* = \mathcal{P} \setminus \{O\}$
Nous considérons l'application $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ définie par :

$$\begin{cases} f : \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ \quad z & \longmapsto & f(z) = \dfrac{1}{z^2} \end{cases}$$

Nous considérerons aussi, l'application $F : \mathcal{P}^* \longrightarrow \mathcal{P}^*$ qui au point $M \in \mathcal{P}^*$ d'affixe $z \in \mathbb{C}^*$ associe le point $F(M) \in \mathcal{P}$ d'affixe $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$

1. **Quelques manipulations**
   (a) Soit un nombre complexe $z \in \mathbb{C}^*$, de module r non nul et d'argument θ. Montrer que $f(z)$ s'écrit $f(z) = \dfrac{1}{r^2}\left(e^{-2i\theta}\right)$
   (b) L'application f est-elle surjective ? Est-elle injective ?
   (c) Etudier l'équation $z = f(z)$
   (d) Le cercle unité
      i. On désigne par $M \in \mathcal{P}^*$ un point de $\mathcal{P}^*$ dont l'affixe $z \in \mathbb{C}^*$ a pour module un Construire l'image de M par F .
      ii. Représenter les points invariants par F
      iii. Etant donné un point $M \in \mathcal{P}^*$ dont l'affixe $Z \in \mathbb{C}^*$ a pour module un, quel est l'ensemble des points m tels que $F(m) = M$? Construire ces points.
   (e) Soit $(d) \subset \mathcal{P}$ une demi-droite de $\mathcal{P}$, d'origine O. Construire l'image par F de $(d) \setminus \{O\}$ Quelle est l'image par F d'une droite passant par 0, mais privée de O ?
   (f) Etant donné, dans $\mathcal{P}$, une droite (Δ) passant par O, quel est l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}^*$ tels que $F(M)$ appartienne à $(\Delta) \setminus \{O\}$

   On considère l'ensemble γ des points de $\mathcal{P}$ dont l'affixe est

$$z = -2\cos^2\theta - 2i\sin\theta\cos\theta$$

   où $\theta \in \left]\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right[$

2. (a) Démontrer que γ est inclus dans un cercle passant par O
   (b) Donner, en fonction de θ,le module et un argument de l'affixe z d'un point $M \in \gamma$.
   (c) Exprimer, en fonction de $\tan\theta$, les coordonnées X et Y de $F(M)$.
   (d) En déduire l'équation de l'image Γ de γ par l'application F. Quelle est la nature de Γ ?
   (e) Vérifier que les points I et J de γ définis respectivement par $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ et $\theta = \dfrac{4\pi}{3}$ appartiennent aussi à Γ . En expliquer la raison.
   (f) On considère les fonctions vectorielles g et G de l'intervalle $\left]\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right[$ de $\mathbb{R}$ dans l'espace vectoriel $\overrightarrow{P}$ associé à $\mathcal{P}$ définies par

$$g(\theta) = \overrightarrow{OM} \text{ et } G(\theta) = \overrightarrow{OF(M)}$$

   où M est le point de γ d'argument θ

i. Déterminer, s'ils existent, les vecteurs dérivés $\overrightarrow{g'(\theta)}$ et $\overrightarrow{G'(\theta)}$

ii. Comparer $\overrightarrow{g'\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$ et $\overrightarrow{G'\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$

3. Dans cette question, l'affixe de $M \in \mathcal{P}$ est $z = \cos t + i \sin t$ où le paramètre t désigne le temps et décrit l'intervalle $[0; 2\pi[$

   (a) Quelle est la trajectoire du point M ?

   (b) Quelle est la trajectoire du point $F(M)$?

   (c) Préciser les mouvements de M et $F(M)$. Les points$M$ et $F(M)$ peuvent-ils être confondus ? Dans l'affirmative, à quelles dates et en quels points de la trajectoire ?

   (d) Soit $P \in \mathcal{P}$ le point défini par $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MF(M)}$

      i. Calculer les coordonnées de P en fonction de t

      ii. Calculer les coordonnées du vecteur-vitesse $\overrightarrow{V(t)}$ du point P

      iii. Le vecteur $\overrightarrow{V(t)}$ peut-il être nul ? Où sont alors situés les points M, $F(M)$ et P ?

      iv. Montrer que, dans le cas où $\overrightarrow{V(t)}$ n'est pas nul, la tangente à la trajectoire de P est orthogonale à la droite $(M, F(M))$.

Exercice 7 :

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

1. On se donne un point $\Omega \in \mathcal{P}$ et un nombre réel $k > 0$. On considère l'application f définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f : \mathcal{P} \setminus \{\Omega\} & \longrightarrow & \mathcal{P} \setminus \{\Omega\} \\ M & \longmapsto & f(M) \end{array} \right. \quad \text{où } \overrightarrow{\Omega f(M)} = \frac{k}{\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|^2}\overrightarrow{\Omega M}$$

   (a) Démontrer que f est involutive

   (b) Quelle est l'image, par f du cercle Γ de centre Ω et de rayon $\sqrt{k}$?

   (c) Quel est l'ensemble des points invariants par f ? f est-elle une application affine ?

   (d) $\mathcal{P}$ est identifié au plan complexe $\mathbb{C}$. On note z l'affixe de M, Z celle de $f(M)$ et ω l'affixe du point Ω. Etablir la relation :

$$Z = \omega + \frac{k}{\overline{z - \omega}}$$

2. On appelle f' l'application de $\mathcal{P}$ associée à la relation dans $\mathbb{C}$ définie par $Z - 1 = \frac{k}{\overline{z} - 1}$ où $k > 0$, f_1 celle associée à la relation définie par $Z - 1 - b = \frac{|b|^2}{\overline{z - 1 - b}}$ où $b \in \mathbb{C}$ est un nombre complexe non nul

   (a) i. Sur quel ensemble E_1 la composée $\varphi_1 = f' \circ f_1 \circ f'$ est-elle définie ?

      ii. Etablir la relation entre les affixes de M et de son image par $f_1 \circ f'$

      iii. En déduire que la relation entre les affixes de M et de son image M_1 par φ_1 est :

$$Z_1 = \frac{b + \overline{b} + k}{\overline{b}} - \frac{b}{\overline{b}}\overline{z} \tag{C.1}$$

   (b) Pour $\theta \neq k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on pose, désormais, $k = \sin^2\theta$ et $b = \frac{\sin\theta}{2}(-\sin\theta + i\cos\theta)$

      i. En utilisant la relation (C.3), montrer que φ_1 , est alors la restriction à E_1, d'une symétrie orthogonale S_1 par rapport à une droite (Δ_1) passant par O. On appelle (D) la droite $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$, déterminer l'angle $\widehat{((D);(\Delta_1))}$

ii. On appelle f_2 l'application associée à la relation :

$$Z - 1 - \overline{b} = \frac{|b|^2}{\overline{z - 1 - \overline{b}}}$$

et φ_2 la composée $\varphi_2 = f' \circ f_2 \circ f'$
Montrer sans nouveaux calculs que φ_2 est aussi la restriction à un ensemble E_2, d'une symétrie orthogonale S_2, par rapport à une droite (Δ_2) que l'on précisera.

iii. Prouver l'identité de $f' \circ f_2 \circ f_1 \circ f'$ et de R où R désigne la restriction de $S_2 \circ S_1$ à une partie $\mathcal{P}_1$ de $\mathcal{P}$ que l'on précisera. Préciser la nature de cette application R.

iv. Quelles valeurs donner à θ pour que la rotation R soit associée à la définition $Z = z\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$.

(c) Soit les applications définies dans $\mathcal{P} \setminus \{O\}$ par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_1' : \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & f_1'(z) = \dfrac{1}{\overline{z}} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} f_2' : \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & f_2'(z) = \dfrac{1-k}{\overline{z}} \end{array}\right.$$

i. Démontrer que la composée $H = f_2' \circ f_1'$ est la restriction à $\mathcal{P} \setminus \{O\}$ d'une homothétie à préciser

ii. On considère R dont la définition complexe est $Z = z\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$. Montrer que l'application $H \circ R$ est associée à la relation :

$$Z = (1-k)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z \tag{C.2}$$

(d) On appelle Σ l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ associée à la relation (C.4). Déterminer la nature de Σ et ses éléments remarquables.