C.6 Corrections de quelques exercices

Exercice 1 :

Quel est l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z-i| = |z-iz| = |z-1|$?

Ce n'est pas un problème qui doit poser de grosses difficultés.
Nous appelons $S = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z-i| = |z-iz| = |z-1|\}$; c'est l'emsemble des solutions.
Soit $A_1 = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z-i| = |z-iz|\}$ et $A_2 = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z-i| = |z-1|\}$. Alors $S = A_1 \cap A_2$

→ Déterminons A_1.
Pour commencer, nous avons $|z-iz| = |z| \times |1-i| = \sqrt{2}\,|z|$, et donc $|z-i| = |z-iz| \iff |z-i| = \sqrt{2}\,|z|$
Nous sommes donc, là, devant une identité de la forme $|z-a| = \lambda\,|z-b|$ avec $a=i$, $b=0$ et $\lambda = \sqrt{2}$.
A_1 est donc un cercle de centre $\omega = \dfrac{i}{1-2} = -i$ et de rayon $R = \dfrac{\sqrt{2}\,|i|}{|1-2|} = \sqrt{2}$

→ Détermination de A_2
Clairement, A_2 est la médiatrice du segment $[AB]$ où A apour affixe i et B pour affixe 1 ; en fait, A_2 est la droite d'équation $y = x$, et l'affixe des points de A_1 est donné par $z = x\,(1+i)$ avec $x \in \mathbb{R}$

Quels sont les éléments de S ?
Ces éléments doivent vérifier $|z-i| = \sqrt{2}\,|z| \iff |z-i|^2 = 2\,|z|^2$ et donc, nous avons :

$$|x\,(1+i) - i|^2 = 2\,|x\,(1+i)|^2 \iff |x + i\,(x-1)|^2 = 2x^2\,|1+i|^2 \iff x^2 + (x-1)^2 = 4x^2$$

Il nous suffit de résoudre l'équation du second degre $3x^2 - (x-1)^2 = 0 \iff \left(\sqrt{3}x + (x-1)\right)\left(\sqrt{3}x - (x-1)\right) = 0$.
Nous obtenons donc 2 solutions : $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1}{\sqrt{3}-1} = -\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$. Ainsi :

$$S = \left\{ S_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\,(1+i)\ ,\ S_2 = -\frac{\sqrt{3}+1}{2}\,(1+i) \right\}$$

Une représentation graphique des ensembles A_1, A_2 et S est donnée dans la figure C.8

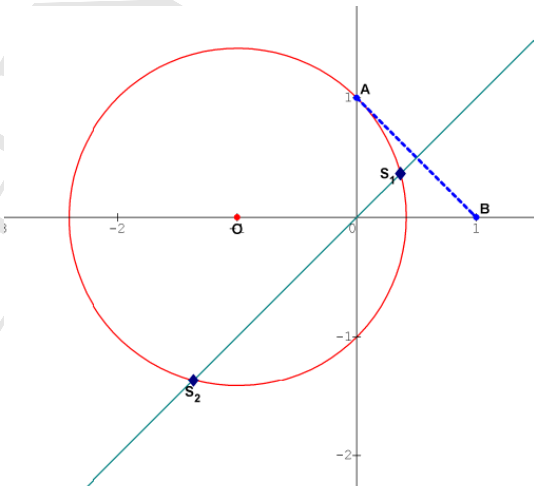

FIGURE C.8 – Représentation graphique de A_1 etA_2 et de S

Exercice 2 :

1. *Montrer que pour tout nombre complexe $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$, nous avons :*
$$|z-a|^2 + |z-b|^2 = 2\left|z - \frac{a+b}{2}\right|^2 + \frac{|b-a|^2}{2}$$

   ⋆ Il suffit d'écrire $|z-a|^2 = \left|z - \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\right|^2$ et remarquer que :
$$\begin{aligned}\left|z - \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\right|^2 &= \left(z - \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\right)\overline{\left(z - \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\right)} \\ &= \left(\left(z - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{b-a}{2}\right)\left(\overline{\left(z - \frac{a+b}{2}\right)} + \overline{\frac{b-a}{2}}\right) \\ &= \left|z - \frac{a+b}{2}\right|^2 + \left(z - \frac{a+b}{2}\right)\overline{\frac{b-a}{2}} + \frac{b-a}{2}\overline{\left(z - \frac{a+b}{2}\right)} + \left|\frac{b-a}{2}\right|^2\end{aligned}$$

   ⋆ De la même manière, nous démontrons que :
$$|z-b|^2 = \left|z - \frac{a+b}{2}\right|^2 + \left|\frac{b-a}{2}\right|^2 + \left(z - \frac{a+b}{2}\right)\overline{\frac{a-b}{2}} + \frac{a-b}{2}\overline{\left(z - \frac{a+b}{2}\right)}$$

   ⋆ En additionnant, nous avons :
$$|z-a|^2 + |z-b|^2 = 2\left|z - \frac{a+b}{2}\right|^2 + 2\frac{|b-a|^2}{4} = 2\left|z - \frac{a+b}{2}\right|^2 + \frac{|b-a|^2}{2}$$

   Ce que nous voulions

2. *$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.*
   Trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $MA^2 + MB^2 = \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

   Soit $z \in \mathbb{C}$, l'affixe de M, $a \in \mathbb{C}$ celui de A et $b \in \mathbb{C}$, l'affixe de B.
   Alors, l'identité $MA^2+MB^2 = \lambda$ se traduit, dans l'ensemble des nombres complexes, par $|z-a|^2 + |z-b|^2 = \lambda$.

   D'après la question précédente, $|z-a|^2+|z-b|^2 = 2\left|z - \frac{a+b}{2}\right|^2 + \frac{|b-a|^2}{2}$ et nous arrivons donc à l'identité :
$$2\left|z - \frac{a+b}{2}\right|^2 + \frac{|b-a|^2}{2} = \lambda \iff \left|z - \frac{a+b}{2}\right|^2 = \frac{\lambda - \frac{|b-a|^2}{2}}{2}$$

   En remarquant que $\frac{a+b}{2}$ est l'affixe du milieu I de l'intervalle $[A;B]$

   → Si $\lambda < \frac{|b-a|^2}{2}$, l'ensemble est vide ; il n'y a pas de points M qui vérifie $MA^2 + MB^2 = \lambda$

   → Si $\lambda = \frac{|b-a|^2}{2}$, alors $\left|z - \frac{a+b}{2}\right|^2 = 0$ et la solution complexe est $z_0 = \frac{a+b}{2}$, c'est à dire que le seul point M tel que $MA^2 + MB^2 = \lambda$ est le milieu I de l'intervalle $[A;B]$

   → Si $\lambda > \frac{|b-a|^2}{2}$, alors l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $MA^2 + MB^2 = \lambda$ est le cercle de centre I et de rayon $R = \frac{\sqrt{2\lambda - |b-a|^2}}{2}$

C.6.1 Problèmes

Exercice 6 :

Soient $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls, $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et $\mathcal{P}^*$ le plan $\mathcal{P}$ privé de O, c'est à dire $\mathcal{P}^* = \mathcal{P} \setminus \{O\}$

MATHINFOVANNES©

Nous considérons l'application $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f : \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & f(z) = \dfrac{1}{z^2} \end{array} \right.$$

Nous considérerons aussi, l'application $F : \mathcal{P}^* \longrightarrow \mathcal{P}^*$ qui au point $M \in \mathcal{P}^*$ d'affixe $z \in \mathbb{C}^*$ associe le point $F(M) \in \mathcal{P}$ d'affixe $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$

1. (a) *Soit un nombre complexe $z \in \mathbb{C}^*$, de module r non nul et d'argument θ. Montrer que $f(z)$ s'écrit $f(z) = \dfrac{1}{r^2}\left(e^{-2i\theta}\right)$*

Pas très difficile !!

Si $z \in \mathbb{C}^*$ est de module r non nul et d'argument θ, alors $z = re^{i\theta}$ et donc, très simplement :

$$f(z) = f\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{r^2 e^{2i\theta}} = \frac{1}{r^2} e^{-2i\theta}$$

C'est fini !!

(b) *L'application f est-elle surjective ? Est-elle injective ?*

$\Rightarrow$ f est surjective.
En effet, soit $z \in \mathbb{C}^*$, de module r non nul et d'argument θ ; nous pouvons écrire $z = re^{i\theta}$ alors $u = \dfrac{1}{\sqrt{r}} e^{-i\frac{\theta}{2}}$ est tel que $f(u) = z$; en effet :

$$f(u) = \frac{1}{u^2} = \frac{1}{\frac{1}{r} e^{-i\theta}} = re^{i\theta} = z$$

A tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe donc un antécédent $u \in \mathbb{C}^*$ tel que $f(u) = z$

$\Rightarrow$ Par contre, f n'est pas injective.
En effet, $f(-1) = f(1) = 1$.
Il existe donc $z = 1 \in \mathbb{C}^*$ et $z_1 = -1 \in \mathbb{C}^*$ avec $z \neq z_1$ et $f(z) = f(z_1) = 1$

(c) *Etudier l'équation $z = f(z)$*

Nous recherchons donc les points fixes de f, et ces points fixes sont donc définis par $z = f(z)$

Nous avons $z = f(z) \Longleftrightarrow z = \dfrac{1}{z^2} \Longleftrightarrow z^3 = 1$

Ces points fixes sont donc les racines cubiques de 1 ; il y en a donc 3 : $z_1 = 1$, $z_2 = j$ et $z_3 = j^2$ *(cf figure C.9)*

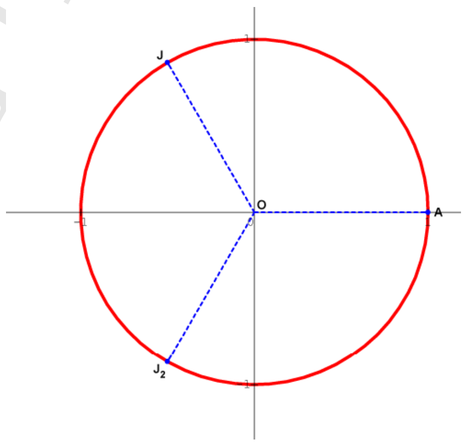

FIGURE C.9 – Représentation des points invariants par F

MATHINFOVANNES©

(d) i. *On désigne par $M \in \mathcal{P}^*$ un point de $\mathcal{P}^*$ dont l'affixe $z \in \mathbb{C}^*$ a pour module un Construire l'image de M par F*

Si $z \in \mathbb{C}^*$ est de module 1, z peut donc s'écrire $z = e^{i\theta}$ et donc $f(z) = e^{-2i\theta}$ *(cf figure C.10)*

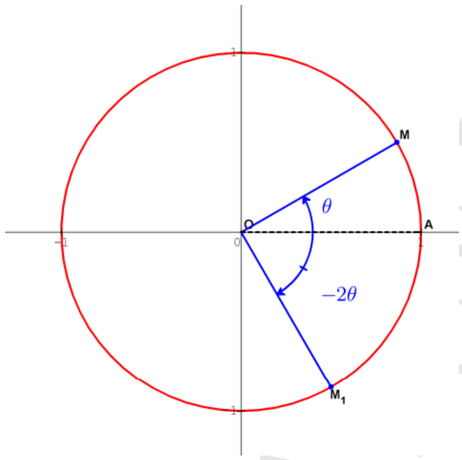

Figure C.10 – Représentation M et de son point image $M_1 = F(M)$

ii. *Etant donné un point $M \in \mathcal{P}^*$ dont l'affixe $Z \in \mathbb{C}^*$ a pour module un, quel est l'ensemble des points m tels que $F(m) = M$? Construire ces points.*

Si $z \in \mathbb{C}^*$ est de module 1, z peut donc s'écrire $z = e^{i\theta}$, alors un antécédent $u \in \mathbb{C}^*$ est tel que $f(u) = z$.

Si $u = re^{i\alpha}$, alors $f(u) = \dfrac{1}{r^2}\left(e^{-2i\alpha}\right)$ et donc :

$$\left\{\begin{array}{rl} \dfrac{1}{r^2} = & 1 \\ -2i\alpha = & \theta + 2k\pi \end{array}\right. \Longleftrightarrow [\left\{\begin{array}{rl} r = & 1 \\ \alpha = & \dfrac{-\theta}{2} + k\pi \end{array}\right.$$

Ce qui signifie que si $u \in \mathbb{C}^*$ est un antécédent de z, $-u$ en est un autre et que, d'autre part, si z est sur le cercle unité *(i.e.* $|z| = 1$*)*, ses antécédents se trouvent sur le cercle unité. *(cf figure C.11)*

Le cercle unité est <u>globalement invariant</u> par f

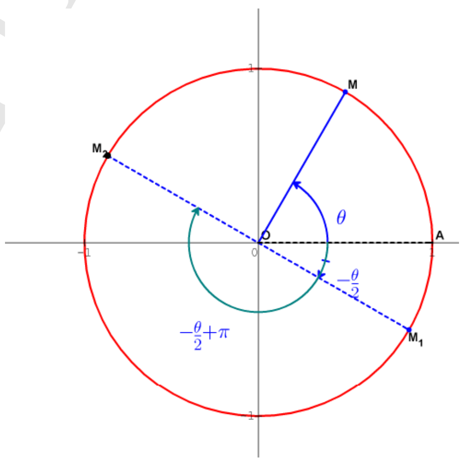

Figure C.11 – Représentation M et de ses antécédents M_1 et M_2

MATHINFOVANNES©

(e) *Soit $(d) \subset \mathcal{P}$ une demi-droite de $\mathcal{P}$, d'origine O. Construire l'image par F de $(d) \setminus \{O\}$ Quelle est l'image par F d'une droite passant par O, mais privée de O ?*

Les points $M \in (d) \setminus \{O\}$ ont tous pour affixe $z = \rho e^{i\theta_0}$ avec $\theta_0 \in \mathbb{R}$ fixé *(angle polaire)* et $\rho > 0$. L'image $F(M)$ a pour affixe $f(z) = \dfrac{1}{\rho^2} e^{-2i\theta_0}$; c'est donc aussi une demie-droite issue de O.

Il faut remarquer que si $|z| = \rho > 1$, alors $|f(z)| = \dfrac{1}{\rho^2} < 1$ et l'image $F(M)$ est donc à l'intérieur du cercle unité, tout comme si $|z| = \rho < 1$, alors $|f(z)| = \dfrac{1}{\rho^2} > 1$ et l'image $F(M)$ est donc à l'extérieur du cercle unité *(cf figure C.12)*

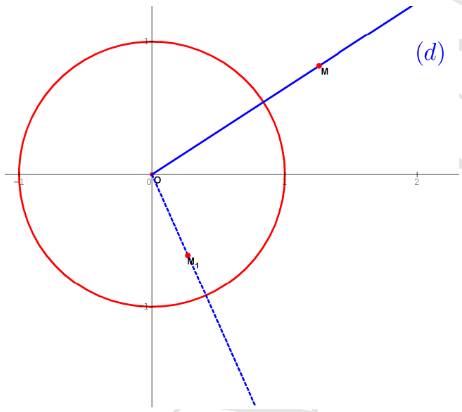

FIGURE C.12 – Une demie-droite et son image

(f) *Etant donné, dans $\mathcal{P}$, une droite (Δ) passant par O, quel est l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}^*$ tels que $F(M)$ appartienne à $(\Delta) \setminus \{O\}$*

Soit (Δ) une droite passant par O. Les points $M \in (\Delta) \setminus \{O\}$ ont pour affixe $z = \rho e^{i\theta_0}$ ou $z = \rho e^{i(\theta_0 + \pi)}$ avec $\theta_0 \in \mathbb{R}$ fixé et $\rho > 0$.

L'image des affixes z par f est donc donné par $f(z) = \dfrac{1}{\rho^2} e^{-2i\theta_0}$ ou $f(z) = \dfrac{1}{\rho^2} e^{-2i\theta_0 - 2i\pi} = \dfrac{1}{\rho^2} e^{-2i\theta_0}$.

L'image de $(\Delta) \setminus \{O\}$ par F est donc une demie-droite issue de O *(cf figure C.13)*

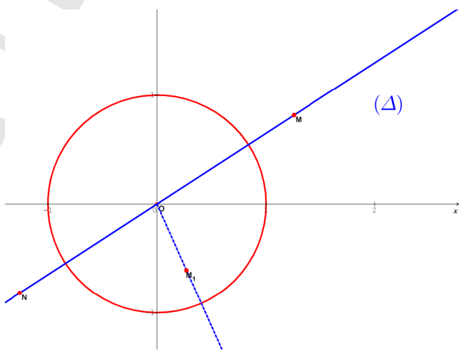

FIGURE C.13 – La droite $(\Delta) \setminus \{O\}$ et son image qui est la demie-droite issue de O

2. *On considère l'ensemble γ des points de $\mathcal{P}$ dont l'affixe est*

$$z = -2\cos^2\theta - 2i\sin\theta\cos\theta$$

MATHINFOVANNES©

où $\theta \in \left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$

(a) *Démontrer que γ est inclus dans un cercle passant par O*

C'est ici que les formules trigonométriques *(simples)* interviennent.
→ Tout d'abord, $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$
→ Ensuite, $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ et donc $-2\cos^2\theta = -1-\cos 2\theta$
D'où $z = -2\cos^2\theta - 2i\sin\theta\cos\theta = -1-\cos 2\theta - i\sin 2\theta = -1-e^{2i\theta}$, de telle sorte que $z+1 = -e^{2i\theta}$.
Nous avons donc $|z+1| = 1$ et donc M est sur le cercle de centre le point d'affixe -1 et de rayon 1. Ce cercle passe bien évidemment par l'origine O

(b) *Donner, en fonction de θ, le module et un argument de l'affixe z d'un point $M \in \gamma$*

L'affixe z d'un point $M \in \gamma$ est donnée par $z = -2\cos^2\theta - 2i\sin\theta\cos\theta$ où $\theta \in \left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$.

Nous avons $z = -2\cos^2\theta - 2i\sin\theta\cos\theta = -2\cos\theta\,(\cos\theta + i\sin\theta) = -2\cos\theta e^{i\theta}$

Comme $\theta \in \left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$, alors $\cos\theta < 0$ et donc $|z| = -2\cos\theta$. La forme trigonométrique de l'affixe z d'un point $M \in \gamma$ est donc $z = -2\cos\theta e^{i\theta}$.

Le module de z est donc $-2\cos\theta$ et l'argument θ avec $\theta \in \left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$ *(Voir la figure C.14)*

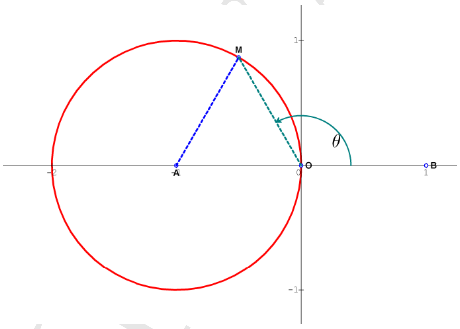

FIGURE C.14 – Le cercle γ

(c) *Exprimer, en fonction de $\tan\theta$, les coordonnées X et Y de $F(M)$.*

L'affixe de $M \in \gamma$ est donc $z = -2\cos\theta e^{i\theta}$ où $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$. Comme décrit dans la question 1, $f(z) = \frac{1}{4\cos^2\theta}e^{-2i\theta}$. Or :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\cos^2\theta}e^{-2i\theta} &= \frac{1}{4\cos^2\theta}(\cos 2\theta - i\sin 2\theta)\\
&= \frac{1}{4\cos^2\theta}\left(2\cos^2\theta - 1 - i2\sin\theta\cos\theta\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(2 - \frac{1}{\cos^2\theta} - i2\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)
\end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{\cos^2\theta} = 1+\tan^2\theta$ et $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$, nous avons :

$$\frac{1}{4\cos^2\theta}e^{-2i\theta} = \frac{1}{4}\left(1-\tan^2\theta - i2\tan\theta\right) = \left(\frac{1-\tan^2\theta}{4}\right) - i\frac{\tan\theta}{2}$$

Ainsi, $X = \frac{1-\tan^2\theta}{4}$ et $Y = \frac{\tan\theta}{2}$ avec $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$.

Comme $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$, on peut remarquer que $Y \in \mathbb{R}$ et $X \geqslant \frac{1}{4}$

(d) *En déduire l'équation de l'image Γ de γ par l'application F. Quelle est la nature de Γ ?*

Il est facile de voir que X et Y vérifient l'équation $X = \dfrac{1}{4} - Y^2 \Longleftrightarrow Y^2 + X - \dfrac{1}{4} = 0$.

Γ est une parabole qui peut s'étudier en 2 parties : la première en regardant $Y = \sqrt{\dfrac{1}{4} - X}$ et $Y = -\sqrt{\dfrac{1}{4} - X}$ avec, bien sûr $X \leqslant \dfrac{1}{4}$

(e) *Vérifier que les points I et J de γ définis respectivement par $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ et $\theta = \dfrac{4\pi}{3}$ appartiennent aussi à Γ . En expliquer la raison.*

En appelant z_I l'affixe de I, nous avons $z_I = -2\cos\dfrac{2\pi}{3} e^{\frac{2i\pi}{3}} = -2 \times \dfrac{-1}{2} \times e^{\frac{2i\pi}{3}} = e^{\frac{2i\pi}{3}} = j$.
Or, j est une racine cubique de 1 et le point d'affixe j est invariant par f. D'où $F(I) = I$ et $I \in \gamma$ et $I \in \Gamma$

De même, en appelant z_J l'affixe de J, nous avons $z_J = -2\cos\dfrac{4\pi}{3} e^{\frac{4i\pi}{3}} = -2 \times \dfrac{-1}{2} \times e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{\frac{4i\pi}{3}} = j^2 = \overline{j}$. Or, j^2 est aussi une racine cubique de 1 et le point d'affixe j^2 est invariant par f. D'où $F(J) = J$ et $J \in \gamma$ et $J \in \Gamma$

QED

(f) *On considère les fonctions vectorielles g et G de l'intervalle $\left]\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right[$ de $\mathbb{R}$ dans l'espace vectoriel $\overrightarrow{P}$ associé à $\mathcal{P}$ définies par $g(\theta) = \overrightarrow{OM}$ et $G(\theta) = \overrightarrow{OF(M)}$ où M est le point de γ d'argument θ*

i. *Déterminer, s'ils existent, les vecteurs dérivés $\overrightarrow{g'(\theta)}$ et $\overrightarrow{G'(\theta)}$*

→ Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe $g(\theta)$.
Nous avons $g(\theta) = \begin{pmatrix} -2\cos^2\theta \\ -\sin 2\theta \end{pmatrix}$
Et donc $g'(\theta) = \begin{pmatrix} 4\cos\theta\sin\theta \\ -2\cos 2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sin 2\theta \\ -2\cos 2\theta \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \sin 2\theta \\ -\cos 2\theta \end{pmatrix}$

→ De même, le vecteur $\overrightarrow{OF(M)}$ a pour affixe $G(\theta)$.
Nous avons $G(\theta) = \begin{pmatrix} \dfrac{1-\tan^2\theta}{4} \\ \dfrac{\tan\theta}{2} \end{pmatrix}$
Et donc $G'(\theta) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\tan\theta\left(1+\tan^2\theta\right)}{2} \\ \dfrac{1+\tan^2\theta}{2} \end{pmatrix}$

ii. *Comparer $\overrightarrow{g'\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)}$ et $\overrightarrow{G'\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)}$*

→ Nous avons $\overrightarrow{g'\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)} = 2\begin{pmatrix} \sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) \\ -\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$

→ Nous avons $\tan\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ et donc $G'\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

Nous avons donc $\overrightarrow{G'\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)} = -2\overrightarrow{g'\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)}$

3. *Dans cette question, l'affixe de $M \in \mathcal{P}$ est $z = \cos t + i\sin t$ où le paramètre t désigne le temps et décrit l'intervalle $[0; 2\pi[$*

(a) *Quelle est la trajectoire du point M ?*

MATHINFOVANNES©

C'est évident !! $z = \cos t + i \sin t$ avec $t \in [0; 2\pi[$ décrit le cercle unité. La trajectoire du point M est donc le cercle de centre O et de rayon 1.

(b) *Quelle est la trajectoire du point $F(M)$?*

Si $f(z)$ est l'affixe de $F(M)$, comme $z = \cos t + i \sin t = e^{it}$, nous avons $f(z) = e^{-2it}$ qui est sur le cercle unité et la trajectoire de $F(M)$ est le cercle de centre O et de rayon 1.

(c) *Préciser les mouvements de M et $F(M)$. Les points$M$ et $F(M)$ peuvent-ils être confondus ? Dans l'affirmative, à quelles dates et en quels points de la trajectoire ?*

Le point M parcourt le cercle unité dans le sens direct et le point $F(M)$ parcourt le cercle unité dans le sens rétrograde à une vitesse angulaire deux fois plus importante.

(d) *Soit $P \in \mathcal{P}$ le point défini par $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MF(M)}$*

i. *Calculer les coordonnées de P en fonction de t*

Appelons z l'affixe de M, $f(z)$ celui de $F(M)$ et z_P celui de P. Alors, de l'égalité $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MF(M)}$, nous déduisons celle des affixes :

$$z_P - z = \frac{1}{3}(f(z) - z) \Longleftrightarrow z_P = \frac{1}{3}f(z) + \frac{2}{3}z$$

P apparaît donc comme le barycentre du système pondéré $\{(M, 2); (F(M), 1)\}$ [3]

Ainsi : $z_P = \frac{1}{3}e^{-2it} + \frac{2}{3}e^{it} = \left(\frac{\cos 2t + 2\cos t}{3}\right) + i\left(\frac{2\sin t - \sin 2t}{3}\right)$

Les coordonnées de P sont donc $P = \left(\frac{\cos 2t + 2\cos t}{3}; \frac{2\sin t - \sin 2t}{3}\right)$

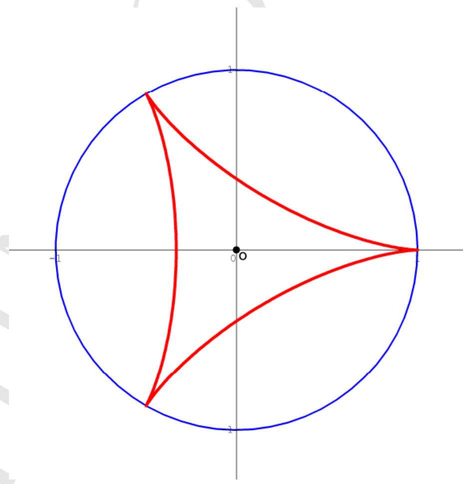

FIGURE C.15 – La trajectoire du point P en rouge

ii. *Calculer les coordonnées du vecteur-vitesse $\overrightarrow{V(t)}$ du point P*

Classiquement, il suffit de dériver. D'où

$$\overrightarrow{V(t)} = \begin{pmatrix} \dfrac{-2\sin 2t - 2\sin t}{3} \\ \dfrac{2\cos t - 2\cos 2t}{3} \end{pmatrix}$$

iii. *Le vecteur $\overrightarrow{V(t)}$ peut-il être nul ? Où sont alors situés les points M, $F(M)$ et P ?*

3. Il était possible, en utilisant le calcul vectoriel, de retrouver ce résultat

Le vecteur $\overrightarrow{V(t)}$ est nul si et seulement si ses coordonnées sont nulles, c'est à dire si et seulement si

$$\sin 2t + \sin t = 0 \text{ et } \cos t - \cos 2t = 0$$

- Nous avons $\sin 2t + \sin t = 0$ si et seulement si $\sin 2t = -\sin t = \sin -t$, c'est à dire :

$$2t = -t + 2k\pi \text{ ou } 2t = \pi + t + 2k\pi$$

Donc $t = \dfrac{2k\pi}{3}$ ou $t = (2k+1)\pi$. Comme nous devons avoir $0 \leqslant t < 2\pi$, nous avons comme solution :

$$t = 0 \quad t = \frac{2\pi}{3} \quad t = \frac{4\pi}{3} \quad t = \pi$$

- Nous avons $\cos t - \cos 2t = 0$ si et seulement si $\cos 2t = \cos t$, c'est à dire :

$$2t = t + 2k\pi \text{ ou } 2t = -t + 2k\pi$$

Donc $t = \dfrac{2k\pi}{3}$ ou $t = 2k\pi$. Comme nous devons avoir $0 \leqslant t < 2\pi$, nous avons comme solution :

$$t = 0 \quad t = \frac{2\pi}{3} \quad t = \frac{4\pi}{3}$$

Les seuls moments où $\overrightarrow{V(t)}$ est nul est pour $t = 0 \quad t = \dfrac{2\pi}{3} \quad t = \dfrac{4\pi}{3}$

iv. *Montrer que, dans le cas où $\overrightarrow{V(t)}$ n'est pas nul, la tangente à la trajectoire de P est orthogonale à la droite $(M, F(M))$.*

Le vecteur directeur de la droite $(M, F(M))$ est $\overrightarrow{MF(M)}$ de coordonnées $\overrightarrow{MF(M)} = \begin{pmatrix} \cos 2t - \cos t \\ -\sin 2t - \sin t \end{pmatrix}$

La tangente à la trajectoire de P admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{V(t)}$

Il nous faut donc montrer que $\left\langle \overrightarrow{V(t)} \mid \overrightarrow{MF(M)} \right\rangle = 0$. Or :

$$\left\langle \overrightarrow{V(t)} \mid \overrightarrow{MF(M)} \right\rangle = \left(\frac{-2\sin 2t - 2\sin t}{3}\right)(\cos 2t - \cos t) + (-\sin 2t - \sin t)\left(\frac{2\cos t - 2\cos 2t}{3}\right) = 0$$

La trajectoire de P est donc orthogonale à la droite $(M, F(M))$

Exercice 7 :

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

1. *On se donne un point $\Omega \in \mathcal{P}$ et un nombre réel $k > 0$. On considère l'application f définie par :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} f : \mathcal{P} \setminus \{\Omega\} & \longrightarrow & \mathcal{P} \setminus \{\Omega\} \\ M & \longmapsto & f(M) \end{array}\right. \quad \text{où } \overrightarrow{\Omega f(M)} = \frac{k}{\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|^2} \overrightarrow{\Omega M}$$

(a) *Démontrer que f est involutive*

f est involutive si et seulement si, pour tout $M \in \mathcal{P}$, nous avons $f[f(M)] = M$.
Soit $M \in \mathcal{P}$; nous avons alors :

$$\overrightarrow{\Omega f[f(M)]} = \frac{k}{\left\|\overrightarrow{\Omega f(M)}\right\|^2} \overrightarrow{\Omega f(M)} = \frac{k}{\left\|\overrightarrow{\Omega f(M)}\right\|^2} \times \frac{k}{\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|^2} \overrightarrow{\Omega M} = \frac{k^2}{\left\|\overrightarrow{\Omega f(M)}\right\|^2 \times \left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|^2} \overrightarrow{\Omega M}$$

MATHINFOVANNES©

Or, $\left\|\overrightarrow{\Omega f(M)}\right\| = \dfrac{k}{\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|^2}\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\| = \dfrac{k}{\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|} \iff \left\|\overrightarrow{\Omega f(M)}\right\| \times \left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\| = k$. D'où :

$$\overrightarrow{\Omega f[f(M)]} = \frac{k^2}{k^2}\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{\Omega M}$$

Et donc $f[f(M)] = M$ et f est involutive.

(b) *Quelle est l'image, par f du cercle Γ de centre Ω et de rayon $\sqrt{k}$?*

Tout point $M \in \Gamma$ est tel que $\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\| = \sqrt{k}$, et donc, pour $M \in \Gamma$

$$\overrightarrow{\Omega f(M)} = \frac{k}{\sqrt{k}^2}\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{\Omega M}$$

C'est à dire que $f(M) = M$. Les points de Γ sont invariants et l'image, par f du cercle Γ de centre Ω et de rayon $\sqrt{k}$ est Γ lui même.

(c) *Quel est l'ensemble des points invariants par f ? f est-elle une application affine ?*

Nous savons que les points de Γ sont invariants. Sont-ce les seuls ?.
Soit alors M un point invariant par f. alors :

$$\overrightarrow{\Omega M} = \frac{k}{\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|^2}\overrightarrow{\Omega M} \iff \frac{k}{\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|^2} = 1 \iff \left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\| = \sqrt{k}$$

L'ensemble des points invariants par f est donc le cercle Γ de centre Ω et de rayon $\sqrt{k}$
f ne peut pas être affine puisque l'ensemble des points invariants n'est pas un sous-espace affine du plan $\mathcal{P}$

(d) *$\mathcal{P}$ est identifié au plan complexe $\mathbb{C}$. On note z l'affixe de M, Z celle de $f(M)$ et ω l'affixe du point Ω. Etablir la relation :*

$$Z = \omega + \frac{k}{\overline{z-\omega}}$$

Traduisons la relation $\overrightarrow{\Omega f(M)} = \dfrac{k}{\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|^2}\overrightarrow{\Omega M}$ en termes d'affixes. Nous avons donc :

$$Z - \omega = \frac{k}{|z-\omega|^2}(z-\omega) = \frac{k}{(z-\omega)\overline{(z-\omega)}}(z-\omega) = \frac{k}{\overline{(z-\omega)}}$$

Ce qui nous donne bien $Z = \omega + \dfrac{k}{\overline{z-\omega}}$

2. *On appelle f' l'application de $\mathcal{P}$ associée à la relation dans $\mathbb{C}$ définie par $Z - 1 = \dfrac{k}{\overline{z}-1}$ où $k > 0$, f_1 celle associée à la relation définie par $Z - 1 - b = \dfrac{|b|^2}{\overline{z-1-b}}$ où $b \in \mathbb{C}$ est un nombre complexe non nul*

Pour plus de clarté, re-écrivons f_1 et f'. Nous avons, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

- ⋆ $f'(z) = 1 + \dfrac{k}{\overline{z}-1}$
- ⋆ $f_1(z) = b + 1 + \dfrac{|b|^2}{\overline{z-1-b}} = b + 1 + \dfrac{|b|^2}{\overline{z-(b+1)}}$

Remarquons, de plus que 1 est un point fixe de f_1, puisque :

$$f_1(1) = b + 1 + \frac{|b|^2}{\overline{1-(b+1)}} = b + 1 + \frac{|b|^2}{-\overline{b}} = b + 1 - \frac{b\overline{b}}{\overline{b}} = b + 1 - b = 1$$

MATHINFOVANNES©

D'autre part, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{+1\}$, $f'(z) \neq 1$. En effet, l'équation $1 + \dfrac{k}{\overline{z} - 1} = 1$ n'a aucune solution, puisque :

$$1 + \frac{k}{\overline{z} - 1} = 1 \iff \frac{k}{\overline{z} - 1} = 0 \iff k = 0$$

(a) i. *Sur quel ensemble E_1 la composée $\varphi_1 = f' \circ f_1 \circ f'$ est-elle définie ?*

$\Rightarrow$ Tout d'abord, l'application φ_1 est involutive
En effet :

$$\begin{aligned}
\varphi_1 \circ \varphi_1 = &\ (f' \circ f_1 \circ f') \circ (f' \circ f_1 \circ f') \\
= &\ f' \circ f_1 \circ (f' \circ f') \circ f_1 \circ f' \\
= &\ f' \circ (f_1 \circ f_1) \circ f' \\
= &\ f' \circ f' \\
= &\ \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Pour commencer, nous devons avoir $z \neq 1$ *(Il faut que nous puissions calculer, en premier $f'(1)$, or, c'est impossible)*
Ensuite, nous devons avoir $f'(z) \neq b + 1$, c'est à dire $z \neq f'(b+1)$.
Or, $f'(b+1) = 1 + \dfrac{k}{\overline{b+1} - 1} = 1 + \dfrac{k}{\overline{b}}$. Nous devons donc aussi avoir $z \neq 1 + \dfrac{k}{\overline{b}}$.

$\Rightarrow$ De la même manière, nous devons avoir $f_1 \circ f'(z) \neq 1$. Or :

$$f_1 \circ f'(z) = 1 \iff f'(z) = f_1(1) \iff f'(z) = 1$$

Or, l'équation $f'(z) = 1$ n'a aucune solution

Donc, le domaine de définition de φ_1 est $\mathbb{C} \setminus \left\{+1; 1 + \dfrac{k}{\overline{b}}\right\}$

ii. *Etablir la relation entre les affixes de M et de son image par $f_1 \circ f'$*

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{+1; 1 + \dfrac{k}{\overline{b}}\right\}$ qui est l'affixe de M ; il suffit de calculer $f_1 \circ f'(z)$.
Tout d'abord :

$$f_1 \circ f'(z) = f_1[f'(z)] = b + 1 + \frac{|b|^2}{\overline{f'(z) - (b+1)}}$$

Puis $f'(z) - (b+1) = 1 + \dfrac{k}{\overline{z} - 1} - (b+1) = \dfrac{k}{\overline{z} - 1} - b$ et donc :

$$\overline{f'(z) - (b+1)} = \frac{k}{z-1} - \overline{b} = \frac{k - \overline{b}(z-1)}{z-1} \iff \frac{1}{\overline{f'(z) - (b+1)}} = \frac{z-1}{k - \overline{b}(z-1)}$$

Ainsi :

$$f_1 \circ f'(z) = b + 1 + \frac{|b|^2}{\overline{f'(z) - (b+1)}} = b + 1 + \frac{|b|^2 (z-1)}{k - \overline{b}(z-1)}$$

iii. *En déduire que la relation entre les affixes de M et de son image M_1 par φ_1 est :*

$$Z_1 = \frac{b + \overline{b} + k}{\overline{b}} - \frac{b}{\overline{b}}\overline{z} \tag{C.3}$$

Il faut donc calculer $\varphi_1(z)$ pour $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{+1; 1 + \dfrac{k}{\overline{b}}\right\}$.

Calculer $\varphi_1(z)$, c'est calculer $f'[f_1 \circ f'(z)]$. Nous connaissons déjà $f_1 \circ f'(z)$; il suffit de l'intégrer dans la définition de f'. Ainsi :

$$\varphi_1(z) = f'[f_1 \circ f'(z)] = 1 + \frac{k}{\overline{f_1 \circ f'(z)} - 1}$$

MATHINFOVANNES©

Nous avons

$$\begin{aligned}
\overline{f_1 \circ f'(z)} - 1 = & \ \overline{b} + 1 + \frac{|b|^2(\overline{z}-1)}{k - b(\overline{z}-1)} - 1 \\
= & \ \overline{b} + \frac{|b|^2(\overline{z}-1)}{k - b(\overline{z}-1)} \\
= & \ \frac{\overline{b}(k - b(\overline{z}-1)) + |b|^2(\overline{z}-1)}{k - b(\overline{z}-1)} \\
= & \ \frac{\overline{b}k - |b|^2(\overline{z}-1) + |b|^2(\overline{z}-1)}{k - b(\overline{z}-1)} \\
= & \ \frac{\overline{b}k}{k - b(\overline{z}-1)}
\end{aligned}$$

Et donc $\dfrac{1}{\overline{f_1 \circ f'(z)} - 1} = \dfrac{k - b(\overline{z}-1)}{\overline{b}k}$, ce qui fait que $\dfrac{k}{\overline{f_1 \circ f'(z)} - 1} = \dfrac{k - b(\overline{z}-1)}{\overline{b}}$

D'où

$$\varphi_1(z) = 1 + \frac{k - b(\overline{z}-1)}{\overline{b}} = \frac{\overline{b} + k - b(\overline{z}-1)}{\overline{b}} = \frac{b + \overline{b} + k - b\overline{z}}{\overline{b}} = \frac{b + \overline{b} + k}{\overline{b}} - \frac{b}{\overline{b}}\overline{z}$$

Ce que nous voulions

φ_1 apparaît donc comme une similitude inverse du type $a\overline{z} + b$ où $a = \dfrac{b}{\overline{b}}$, et comme $|a| = \left|\dfrac{b}{\overline{b}}\right| = 1$, cette similitude inverse est une isométrie, c'est à dire une symétrie orthogonale par rapport à une droite

(b) *Pour $\theta \neq k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on pose, désormais, $k = \sin^2\theta$ et $b = \dfrac{\sin\theta}{2}(-\sin\theta + i\cos\theta)$*

i. *En utilisant la relation (C.3), montrer que φ_1 , est alors la restriction à E_1, d'une symétrie orthogonale S_1 par rapport à une droite (Δ_1) passant par O. On appelle (D) la droite $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$, déterminer l'angle $\widehat{((D);(\Delta_1))}$*

Nous avons déjà vu que φ_1 était une symétrie orthogonale par rapport à une droite. Dans cette question, nous faisons juste une « application numérique ».

→ Ainsi, pour $k = \sin^2\theta$ et $b = \dfrac{\sin\theta}{2}(-\sin\theta + i\cos\theta)$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\varphi_1(z) = & -\frac{-\sin\theta + i\cos\theta}{-\sin\theta - i\cos\theta}\overline{z} \\
= & \ \frac{-\sin\theta + i\cos\theta}{\sin\theta + i\cos\theta}\overline{z} \\
= & \ \frac{\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}\overline{z} \\
= & \ \frac{e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}}{e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}}\overline{z} \\
= & \ e^{2i\theta}\overline{z}
\end{aligned}$$

Et donc $\varphi_1(z) = e^{2i\theta}\overline{z}$

→ En posant $z' = e^{2i\theta}\overline{z}$, et en utilisant la forme algébrique des nombres complexes, nous avons :

$$x' + iy' = (\cos 2\theta + i\sin 2\theta)(x - iy) = (x\cos 2\theta + y\sin 2\theta) + i(x\sin 2\theta - y\cos 2\theta)$$

Rechercher l'axe de la symétrie, c'est rechercher les points invariants par φ_1 donc les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $\varphi_1(z) = z$, et nous avons donc :

$$\left\{\begin{array}{rl} x\cos 2\theta + y\sin 2\theta = & x \\ x\sin 2\theta - y\cos 2\theta = & y \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} x(\cos 2\theta - 1) + y\sin 2\theta = & 0 \\ x\sin 2\theta - y(\cos 2\theta + 1) = & 0 \end{array}\right.$$

MATHINFOVANNES©

Nous avons :

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$

D'où, nous obtenons comme système :

$$\left\{\begin{array}{rl} x\left(-2\sin^2\theta\right) + 2y\sin\theta\cos\theta = & 0 \\ 2x\sin\theta\cos\theta + 2y\cos^2\theta = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} 2\sin\theta\left(-x\sin\theta + y\cos\theta\right) = & 0 \\ 2\cos\theta\left(x\sin\theta + y\cos\theta\right) = & 0 \end{array}\right.$$

* Si $\theta = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, le système est réduit à une seule équation

$$\pm 2 \pm y = 0 \iff y = 0$$

φ_1 est donc une symétrie orthogonale par rapport à (D) la droite $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$

* Si $\theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ et comme $\theta \neq k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, alors $\sin\theta \neq 0$ et le système précédent est donc équivalent à la seule équation

$$-x\sin\theta + y\cos\theta = 0 \iff y = x\tan\theta$$

L'angle $\widehat{((D)\,;(\Delta_1))}$ est donc θ

Lien avec les matrices

Si Φ_1 est l'application linéaire associée à l'application affine représentée par φ_1. Alors la matrice de Φ_1 dans la base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\right\}$ est donnée par :

$$\mathcal{M}\left(\Phi_1\right)_{\left\{\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\right\}} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

ii. *On appelle f_2 l'application associée à la relation :*

$$Z - 1 - \overline{b} = \frac{|b|^2}{\overline{z - 1 - \overline{b}}}$$

et φ_2 la composée $\varphi_2 = f' \circ f_2 \circ f'$
Montrer sans nouveaux calculs que φ_2 est aussi la restriction à un ensemble E_2, d'une symétrie orthogonale S_2, par rapport à une droite (Δ_2) que l'on précisera.

Refaisons le travail de simplification. Nous avons

$$f_2(z) = \left(\overline{b} + 1\right) + \frac{|b|^2}{\overline{z - \left(1 - \overline{b}\right)}}$$

En fait, c'est f_1 où nous avons changé b en $\overline{b}$, et alors :

$$\varphi_2(z) = -\frac{\overline{b}}{b}\overline{z} + \frac{b + \overline{b} + k}{b}$$

Et lorsque nous choisissons $k = \sin^2\theta$ et $b = \dfrac{\sin\theta}{2}\left(-\sin\theta + i\cos\theta\right)$, nous obtenons :

$$\varphi_2(z) = -\frac{-\sin\theta - i\cos\theta}{-\sin\theta + i\cos\theta}\overline{z} = e^{-2i\theta}\overline{z}$$

S_2 est bien une symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ_2 d'équation $y = -x\tan\theta$

iii. *Prouver l'identité de $f' \circ f_2 \circ f_1 \circ f'$ et de R où R désigne la restriction de $S_2 \circ S_1$ à une partie $\mathcal{P}_1$ de $\mathcal{P}$ que l'on précisera. Préciser la nature de cette application R.*

Nous allons utiliser le fait que f' est une application involutive, c'est à dire que $f' \circ f' = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$. Alors :

$$f' \circ f_2 \circ f_1 \circ f' = f' \circ f_2 \circ (f' \circ f') \circ f_1 \circ f' = (f' \circ f_2 \circ f') \circ (f' \circ f_1 \circ f') = S_2 \circ S_1 = R$$

MATHINFOVANNES©

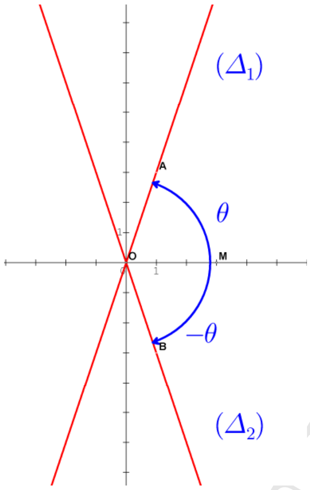

FIGURE C.16 – Représentation de Δ_1 et Δ_2

R est donc la composée de 2 symétries orthogonales ; c'est donc une rotation.
La représentation complexe de R peut être donnée par $\varphi_2 \circ \varphi_1$. Nous avons :

$$\varphi_2 \circ \varphi_1 (z) = \varphi_2 [\varphi_1 (z)] = e^{-2i\theta}\overline{\varphi_1 (z)} = e^{-2i\theta}\overline{e^{2i\theta}\overline{z}} = e^{-4i\theta}z$$

$\varphi_2 \circ \varphi_1$ apparaît donc comme une rotation de centre O et d'angle -4θ modulo 2π

iv. *Quelles valeurs donner à θ pour que la rotation R soit associée à la définition $Z = z\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$.*

La définition complexe associée à R est donc $Z = e^{-4i\theta}z$. Il faut donc trouver $\theta \in \mathbb{R}$ pour que $e^{-4i\theta} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

Des relations trigonométriques, nous devons donc avoir $\cos(-4\theta) = \dfrac{1}{2}$ et $\sin(-4\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

* Résolution de $\cos(-4\theta) = \dfrac{1}{2}$

  Nous avons $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ et donc :
  $\Rightarrow \; -4\theta = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \iff \theta = \dfrac{-\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{2}$
  $\Rightarrow \; -4\theta = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \iff \theta = \dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{2}$

* Résolution de $\sin(-4\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

  Nous avons $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et donc :
  $\Rightarrow \; -4\theta = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \iff \theta = \dfrac{-\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{2}$
  $\Rightarrow \; -4\theta = \pi - \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \iff -4\theta = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \iff \theta = \dfrac{-\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{2}$

Les valeurs de θ pour que la rotation R soit associée à la définition $Z = z\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$ sont donc $\theta = \dfrac{-\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

(c) *Soit les applications définies dans $\mathcal{P} \setminus \{O\}$ par :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_1' : \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & f_1'(z) = \dfrac{1}{\overline{z}} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} f_2' : \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & f_2'(z) = \dfrac{1-k}{\overline{z}} \end{array}\right.$$

MATHINFOVANNES©

i. *Démontrer que la composée $H = f_2' \circ f_1'$ est la restriction à $\mathcal{P} \setminus \{O\}$ d'une homothétie à préciser*

Cette question ne pose pas de difficultés.

$$f_2' \circ f_1'(z) = f_2'[f_1'(z)] = \frac{1-k}{\overline{f_1'(z)}} = \frac{1-k}{\frac{1}{\overline{\overline{z}}}} = (1-k)\,z$$

$H = f_2' \circ f_1'$ est bien la restriction à $\mathcal{P} \setminus \{O\}$ d'une homothétie de centre O et de rapport $1-k$.
Si nous choisissons $k = \sin^2\theta$, nous avons alors $1 - k = 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$

ii. *On considère R dont la définition complexe est $Z = z\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$. Montrer que l'application $H \circ R$ est associée à la relation :*

$$Z = (1-k)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z \tag{C.4}$$

Toujours aussi simple !

$$H \circ R(z) = H[R(z)] = (1-k)\,R(z) = (1-k)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z$$

(d) *On appelle Σ l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ associée à la relation (C.4). Déterminer la nature de Σ et ses éléments remarquables.*

On voit, facilement que Σ est une similitude de centre O, de rapport $1 - k = \cos^2\theta$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$

MATHINFOVANNES©