Chapitre 20

Les similitudes

20.1 Les similitudes vectorielles

20.1.1 Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien. Une similitude de E est une application linéaire φ de E dans E (i.e. $\varphi \in \mathcal{L}(E)$) telle que :

$$(\exists k > 0)\,(\forall \overrightarrow{u} \in E)\,(\|\varphi(\overrightarrow{u})\| = k \|\overrightarrow{u}\|)$$

k est appelé le rapport de la similitude

20.1.2 Proposition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien.

1. **La composition de 2 similitudes est encore une similitude**
2. **Une similitude est une application linéaire injective**

Démonstration

1. Soient f et g 2 similitudes de rapports respectifs k_f et k_g.
   Soit $\overrightarrow{u} \in E$. Alors :
   $$\|g \circ f(\overrightarrow{u})\| = \|g[f(\overrightarrow{u})]\| = k_g \|f(\overrightarrow{u})\| = k_g \times k_f \|\overrightarrow{u}\|$$
   Ainsi, $g \circ f$ est une similitude de rapport $k_g \times k_f$
2. Soit f une similitude de rapport k_f
   Soit $\overrightarrow{u} \in \ker f$
   Alors $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$ et donc $\|f(\overrightarrow{u})\| = 0$. Comme f est une similitude, $k_f \|\overrightarrow{u}\| = 0$ et donc, comme $k_f > 0$, nous avons $\|\overrightarrow{u}\| = 0$, c'est à dire $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
   Donc, comme $\ker f = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, f est injective

Remarque 1 :

Si E est de dimension finie, f est en fait bijective.

20.1.3 Décomposition d'une similitude

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien. Alors, $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ est une similitude si et seulement si elle se décompose en le produit d'une homothétie vectorielle H et d'une isométrie $\theta \in \mathcal{L}(E)$, c'est à dire :

$$\varphi = H \circ \theta = \theta \circ H$$

Démonstration

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien

1. Soit $\varphi = \theta \circ H$ où H est une homothétie de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ et θ une isométrie de $\mathcal{L}(E)$
   Alors φ est une application linéaire comme composée de 2 applications linéaires .
   D'autre part, soit $\overrightarrow{u} \in E$, alors :
   $$\|\varphi(\overrightarrow{u})\| = \|\theta(H(\overrightarrow{u}))\| = \|\theta(k\overrightarrow{u})\| = \|k\theta(\overrightarrow{u})\| = |k|\,\|\theta(\overrightarrow{u})\| = k\,\|\overrightarrow{u}\|$$
   Ce qui montre que φ est une similitude de rapport $|k| > 0$
2. Réciproquement, soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ où φ est une similitude de rapport $k > 0$
   On considère l'homothétie H de rapport $\dfrac{1}{k}$, et soit $\theta = H \circ \varphi$.
   Tout d'abord θ est linéaire comme composée de 2 applications linéaires .
   De plus, on démontre, sans difficulté que θ est une isométrie et donc que $\varphi = H^{-1} \circ \theta$.
   H^{-1} est aussi une homothétie, mais de rapport k. et donc φ est la composée d'une homothétie et d'une isométrie.

Remarque 2 :

1. D'autre part, dans la décomposition $\varphi = H \circ \theta = \theta \circ H$, les θ et H sont, à priori, différents
2. Le rapport de la similitude $k > 0$ est bien entendu unique et ne dépend que de la similitude

Exercice 1 :

Montrer que le rapport k d'une similitude S est unique.

Exemple 1 :

Exemples de similitudes
Commençons par donner des exemples de similitudes

1. Toute isométrie du $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien E est une similitude ; c'est une similitude de rapport $k = 1$
2. Toute homothétie de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien E est une similitude ; c'est une similitude de rapport $|k|$

20.1.4 Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien. Alors :
$\varphi \in \mathcal{L}(E)$ est une similitude si et seulement si φ est une application linéaire de E non constante telle qu'il existe $\alpha > 0$ telle que pour tout $\overrightarrow{u} \in E$ et tout $\overrightarrow{v} \in E$, nous ayons $\langle \varphi(\overrightarrow{u}) \mid \varphi(\overrightarrow{v}) \rangle = \alpha \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle$

Démonstration

1. Soit φ une similitude de E de rapport $k > 0$
   Alors, d'après 20.1.3, $\varphi = H \circ \theta$ où $\theta \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie de E, c'est à dire un endomorphisme orthogonal conservant le produit scalaire et H une homothétie de rapport k.
   Alors, pour tout $\overrightarrow{u} \in E$ et tout $\overrightarrow{v} \in E$, nous avons :
   $$\begin{aligned} \langle \varphi(\overrightarrow{u}) \mid \varphi(\overrightarrow{v}) \rangle &= \langle H \circ \theta(\overrightarrow{u}) \mid H \circ \theta(\overrightarrow{v}) \rangle \\ &= \langle H[\theta(\overrightarrow{u})] \mid H[\theta(\overrightarrow{v})] \rangle \\ &= \langle k\theta(\overrightarrow{u}) \mid k\theta(\overrightarrow{v}) \rangle \\ &= k^2 \langle \theta(\overrightarrow{u}) \mid \theta(\overrightarrow{v}) \rangle \\ &= k^2 \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle \text{ car } \theta \text{ est un endomorphisme orthogonal} \end{aligned}$$
   Ainsi, si φ est une similitude de E de rapport $k > 0$, alors, il existe $\alpha = k^2 > 0$ tel que pour tout $\overrightarrow{u} \in E$ et tout $\overrightarrow{v} \in E$, nous avons $\langle \varphi(\overrightarrow{u}) \mid \varphi(\overrightarrow{v}) \rangle = \alpha \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle$

2. Réciproquement
   Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, non constante, tel qu'il existe $\alpha > 0$ telle que pour tout $\overrightarrow{u} \in E$ et tout $\overrightarrow{v} \in E$, nous ayons $\langle \varphi(\overrightarrow{u}) \mid \varphi(\overrightarrow{v})\rangle = \alpha \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v}\rangle$
   $\longrightarrow$ Tout d'abord, $\alpha \neq 0$
   Supposons $\alpha = 0$; alors, pour tout $\overrightarrow{u} \in E$ et tout $\overrightarrow{v} \in E$, nous ayons $\langle \varphi(\overrightarrow{u}) \mid \varphi(\overrightarrow{v})\rangle = 0$
   Donc, lorsque $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$, pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, nous avons $\langle \varphi(\overrightarrow{u}) \mid \varphi(\overrightarrow{u})\rangle = \|\varphi(\overrightarrow{u})\|^2 = 0$, c'est à dire $\varphi(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$
   Et φ est une application linéaire constante. Il y a donc contradiction. Donc $\alpha \neq 0$
   $\longrightarrow$ Ensuite, nous avons $\alpha > 0$
   En effet, pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, nous avons :
   $$\langle \varphi(\overrightarrow{u}) \mid \varphi(\overrightarrow{u})\rangle = \alpha \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{u}\rangle \iff \|\varphi(\overrightarrow{u})\|^2 = \alpha \|\overrightarrow{u}\|^2$$
   Et donc $\alpha > 0$
   Soit $\theta = H_{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} \circ \varphi$ où $H_{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}$ est une homothétie de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$
   Alors, θ est linéaire comme composée d'applications linéaires et θ est une isométrie puisque, si $\overrightarrow{u} \in E$:
   $$\|\theta(\overrightarrow{u})\|^2 = \left\| H_{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} \circ \varphi(\overrightarrow{u}) \right\|^2 = \frac{1}{\alpha}\|\varphi(\overrightarrow{u})\|^2 = \frac{1}{\alpha} \times \alpha \|\overrightarrow{u}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2$$
   C'est à dire que nous avons $\|\theta(\overrightarrow{u})\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 \iff \|\theta(\overrightarrow{u})\| = \|\overrightarrow{u}\|$.
   θ est donc une isométrie.
   Ainsi, $\varphi = \left(H_{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}\right)^{-1} \circ \theta = H_{\sqrt{\alpha}} \circ \theta$
   Ce qui montre que φ, composée d'une homothétie de rapport $\sqrt{\alpha}$ et d'une isométrie θ est une similitude de rapport $\sqrt{\alpha}$

Remarque 3 :

Une remarque importante, **c'est que nous avons aussi démontré que $\alpha > 0$ et que la similitude a un rapport de $\sqrt{\alpha}$**

20.1.5 Corollaire de 20.1.4

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie. Alors, toute similitude φ de E est un automorphisme

Démonstration

On sait qu'une similitude est injective. Comme E est de dimension finie, et que la similitude est une application linéaire , cette similitude est donc aussi une bijection.
Ce qu'il fallait démontrer

20.1.6 Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie. Nous appellons $Sim(E)$ l'ensemble des similitudes de E. Alors $Sim(E)$ muni de la composition des applications est un groupe non commutatif

Démonstration

1. La loi $\circ$ est associative
2. Nous savons déjà que la composition de 2 similitudes est une similitude. La composition des applications est donc interne.

3. E étant de dimension finie, toute similitude $\varphi \in \mathcal{S}im\,(E)$ est un automorphisme, donc bijective : φ est donc inversible

   Mais, si φ est une similitude, est ce que φ^{-1} est une similitude ?
   Si φ est une similitude, alors φ se décompose en un produite d'une homothétie H et d'une isométrie θ , et donc $\varphi = H \circ \theta$.
   Nous avons $\varphi^{-1} = (H \circ \theta)^{-1} = \theta^{-1} \circ H^{-1}$
   $\rightarrow$ H étant une homothétie, H^{-1} en est une aussi
   $\rightarrow$ Si θ est une isométrie, θ^{-1} en est une aussi

   Donc $\varphi^{-1} = \theta^{-1} \circ H^{-1}$ est une similitude.

Nous pouvons donc conclure que $\mathcal{S}im\,(E)$ muni de la composition des applications est un groupe.

20.1.7 Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien et $\mathcal{S}im\,(E)$ l'ensemble des similitudes de E. Alors, $\mathcal{S}im\,(E)$ est exactement l'ensemble des endomorphismes de E qui conservent l'orthogonalité, c'est à dire l'ensemble des endomorphismes $\varphi \in \mathcal{L}\,(E)$ tels que :

$$(\forall \overrightarrow{u} \in E)\,(\forall \overrightarrow{v} \in E)\,((\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle = 0) \Longrightarrow (\langle \varphi\,(\overrightarrow{u}) \mid \varphi\,(\overrightarrow{v}) \rangle = 0))$$

Démonstration

1. Soit $\varphi \in \mathcal{S}im\,(E)$
   Alors, d'après 20.1.4, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $\overrightarrow{u} \in E$ et tout $\overrightarrow{v} \in E$, nous ayons $\langle \varphi\,(\overrightarrow{u}) \mid \varphi\,(\overrightarrow{v}) \rangle = \alpha \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle$
   Donc, si $\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle = 0$, alors $\langle \varphi\,(\overrightarrow{u}) \mid \varphi\,(\overrightarrow{v}) \rangle = 0$
2. Réciproquement
   Soit $\varphi \in \mathcal{L}\,(E)$ telle que

$$(\forall \overrightarrow{u} \in E)\,(\forall \overrightarrow{v} \in E)\,((\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle = 0) \Longrightarrow (\langle \varphi\,(\overrightarrow{u}) \mid \varphi\,(\overrightarrow{v}) \rangle = 0))$$

   Nous allons démontrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $\overrightarrow{u} \in E$ et tout $\overrightarrow{v} \in E$, nous ayons $\langle \varphi\,(\overrightarrow{u}) \mid \varphi\,(\overrightarrow{v}) \rangle = \alpha \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle$, et d'après 20.1.4, nous aurons démontré que φ est une similitude.
   $\rightarrow$ Soit $\overrightarrow{x} \in E$ tel que $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$ et nous considérons :

$$\begin{cases} \Phi : E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad y & \longmapsto & \Phi\,(y) = \langle \varphi\,(\overrightarrow{y}) \mid \varphi\,(\overrightarrow{x}) \rangle \end{cases}$$

   - **Φ est une forme linéaire**
     Soient $y_1 \in E$, $y_2 \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} \Phi\,(\lambda \overrightarrow{y_1} + \mu \overrightarrow{y_2}) = & \ \langle \varphi\,(\lambda \overrightarrow{y_1} + \mu \overrightarrow{y_2}) \mid \varphi\,(\overrightarrow{x}) \rangle \\ = & \ \langle \lambda \varphi\,(\overrightarrow{y_1}) + \mu \varphi\,(\overrightarrow{y_2}) \mid \varphi\,(\overrightarrow{x}) \rangle \\ = & \ \lambda \langle \varphi\,(\overrightarrow{y_1}) \mid \varphi\,(\overrightarrow{x}) \rangle + \mu \langle \varphi\,(\overrightarrow{y_2}) \mid \varphi\,(\overrightarrow{x}) \rangle \\ = & \ \lambda \Phi\,(\overrightarrow{y_1}) + \mu \Phi\,(\overrightarrow{y_2}) \end{aligned}$$

   - $\{\overrightarrow{x}\}^{\perp} \subset \ker \Phi$
     Rappel :$\{\overrightarrow{x}\}^{\perp} = \{\overrightarrow{y} \in E$ tels que $\langle \overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x} \rangle = 0\}$
     Soit $\overrightarrow{y} \in \{\overrightarrow{x}\}^{\perp}$; alors $\langle \overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x} \rangle = 0$.
     $\Phi\,(\overrightarrow{y}) = \langle \varphi\,(\overrightarrow{y}) \mid \varphi\,(\overrightarrow{x}) \rangle$; or, comme $\langle \overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x} \rangle = 0$, alors $\langle \varphi\,(\overrightarrow{y}) \mid \varphi\,(\overrightarrow{x}) \rangle = 0$, c'est à dire $\overrightarrow{y} \in \ker \Phi$
     Nous avons dons $\{\overrightarrow{x}\}^{\perp} \subset \ker \Phi$
     Ce qui signifie que la forme linéaire est nulle sur l'ensemble $\{\overrightarrow{x}\}^{\perp}$

→ Nous appelons $\Gamma(\{\overrightarrow{x}\})$ le sous-espace vectoriel de E engendré par le vecteur $\overrightarrow{x}$, c'est à dire :

$$\Gamma(\{\overrightarrow{x}\}) = \{\overrightarrow{y} \in E \text{ tel qu'il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{y} = \lambda\overrightarrow{x}\}$$

Nous avons $E = \Gamma(\{\overrightarrow{x}\}) \oplus \{\overrightarrow{x}\}^\perp$, c'est à dire que tout $\overrightarrow{y} \in E$ peut s'écrire de manière unique $\overrightarrow{y} = \lambda\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}_1$ où $\overrightarrow{y}_1 \in \{\overrightarrow{x}\}^\perp$

- Pour tout $\overrightarrow{y} \in E$, $\overrightarrow{y} = \lambda\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}_1$ où $\overrightarrow{y}_1 \in \{\overrightarrow{x}\}^\perp$, nous avons $\Phi(\overrightarrow{y}) = \lambda\Phi(\overrightarrow{x})$ puisque la forme linéaire Φ est nulle sur $\{\overrightarrow{x}\}^\perp$
  Nous avons :
  $$\Phi(\overrightarrow{y}) = \lambda\Phi(\overrightarrow{x}) \Longleftrightarrow \langle\varphi(\overrightarrow{y}) \mid \varphi(\overrightarrow{x})\rangle = \lambda\langle\varphi(\overrightarrow{x}) \mid \varphi(\overrightarrow{x})\rangle = \lambda\|\varphi(\overrightarrow{x})\|^2$$
- Comme $\Phi(\overrightarrow{y})$ il existe un nombre $\alpha_x \in \mathbb{R}^*$ tel que $\Phi(\overrightarrow{y}) = \alpha_x\langle\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x}\rangle$
  Nous avons :
  $$\alpha_x\langle\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x}\rangle = \alpha_x\langle\lambda\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}_1 \mid \overrightarrow{x}\rangle = \alpha_x\lambda\langle\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x}\rangle = \lambda\alpha_x\|\overrightarrow{x}\|^2$$
  De l'égalité $\Phi(\overrightarrow{y}) = \lambda\|\varphi(\overrightarrow{x})\|^2 = \lambda\alpha_x\|\overrightarrow{x}\|^2$, nous tirons : $\alpha_x = \dfrac{\|\varphi(\overrightarrow{x})\|^2}{\|\overrightarrow{x}\|^2}$
  Ainsi, pour tout $\overrightarrow{y} \in E$, nous avons $\langle\varphi(\overrightarrow{y}) \mid \varphi(\overrightarrow{x})\rangle = \dfrac{\|\varphi(\overrightarrow{x})\|^2}{\|\overrightarrow{x}\|^2}\langle\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x}\rangle$
- Nous allons démontrer que la quantité $\alpha_x = \dfrac{\|\varphi(\overrightarrow{x})\|^2}{\|\overrightarrow{x}\|^2}$ est constante et indépendante de $\overrightarrow{x}$
  - ⋆ **Supposons 2 vecteurs** $\overrightarrow{x}_1 \in E \setminus \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ **et** $\overrightarrow{x}_2 \in E \setminus \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ **dépendants,** c'est à dire que $\overrightarrow{x}_2 = \lambda\overrightarrow{x}_1$, alors, nous avons :
    $$\begin{aligned} \alpha_{\overrightarrow{x}_2} &= \frac{\|\varphi(\overrightarrow{x}_2)\|^2}{\|\overrightarrow{x}_2\|^2} \\ &= \frac{\|\varphi(\lambda\overrightarrow{x}_1)\|^2}{\|\lambda\overrightarrow{x}_1\|^2} \\ &= \frac{\|\lambda\varphi(\overrightarrow{x}_1)\|^2}{\|\lambda\overrightarrow{x}_1\|^2} \\ &= \frac{\lambda^2\|\varphi(\overrightarrow{x}_1)\|^2}{\lambda^2\|\overrightarrow{x}_1\|^2} \\ &= \frac{\|\varphi(\overrightarrow{x}_1)\|^2}{\|\overrightarrow{x}_1\|^2} \\ &= \alpha_{\overrightarrow{x}_1} \end{aligned}$$
    Nous avons donc $\alpha_{\overrightarrow{x}_2} = \alpha_{\overrightarrow{x}_1}$ et le nombre $\alpha_{\overrightarrow{x}}$ ne dépend pas du vecteur $\overrightarrow{x}$
  - ⋆ **Soient, maintenant,** $\overrightarrow{x}_1 \in E \setminus \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ **et** $\overrightarrow{x}_2 \in E \setminus \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ **2 vecteurs linéairement indépendants**.
    Alors, pour tout $\overrightarrow{y} \in E$, nous avons :
    $$\begin{aligned} \langle\varphi(\overrightarrow{y}) \mid \varphi(\overrightarrow{x}_1 + \overrightarrow{x}_2)\rangle &= \alpha_{(\overrightarrow{x}_1+\overrightarrow{x}_2)}\langle\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x}_1 + \overrightarrow{x}_2\rangle \\ &= \alpha_{(\overrightarrow{x}_1+\overrightarrow{x}_2)}\langle\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x}_1\rangle + \alpha_{(\overrightarrow{x}_1+\overrightarrow{x}_2)}\langle\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x}_2\rangle \\ &= \langle\varphi(\overrightarrow{y}) \mid \varphi(\overrightarrow{x}_1)\rangle + \langle\varphi(\overrightarrow{y}) \mid \varphi(\overrightarrow{x}_2)\rangle \\ &= \alpha_{\overrightarrow{x}_1}\langle\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x}_1\rangle + \alpha_{\overrightarrow{x}_2}\langle\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x}_2\rangle \end{aligned}$$
    Ainsi, nous avons :
    $$\alpha_{(\overrightarrow{x}_1+\overrightarrow{x}_2)}\langle\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x}_1\rangle + \alpha_{(\overrightarrow{x}_1+\overrightarrow{x}_2)}\langle\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x}_2\rangle = \alpha_{\overrightarrow{x}_1}\langle\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x}_1\rangle + \alpha_{\overrightarrow{x}_2}\langle\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x}_2\rangle$$
    $$\Longleftrightarrow$$
    $$\left(\alpha_{(\overrightarrow{x}_1+\overrightarrow{x}_2)} - \alpha_{\overrightarrow{x}_1}\right)\langle\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x}_1\rangle + \left(\alpha_{(\overrightarrow{x}_1+\overrightarrow{x}_2)} - \alpha_{\overrightarrow{x}_2}\right)\langle\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x}_2\rangle = 0$$

En posant $\lambda_1 = \alpha_{\left(\overrightarrow{x}_1+\overrightarrow{x}_2\right)} - \alpha_{\overrightarrow{x}_1}$ et $\lambda_2 = \alpha_{\left(\overrightarrow{x}_1+\overrightarrow{x}_2\right)} - \alpha_{\overrightarrow{x}_2}$, nous pouvons écrire :

$$\left(\alpha_{\left(\overrightarrow{x}_1+\overrightarrow{x}_2\right)} - \alpha_{\overrightarrow{x}_1}\right)\langle\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x}_1\rangle + \left(\alpha_{\left(\overrightarrow{x}_1+\overrightarrow{x}_2\right)} - \alpha_{\overrightarrow{x}_2}\right)\langle\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x}_2\rangle = 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\lambda_1\langle\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x}_1\rangle + \lambda_2\langle\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x}_2\rangle = 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\langle\overrightarrow{y} \mid \lambda_1\overrightarrow{x}_1 + \lambda_2\overrightarrow{x}_2\rangle = 0$$

Ceci étant vrai pour tout $\overrightarrow{y} \in E$, nous avons $\lambda_1\overrightarrow{x}_1 + \lambda_2\overrightarrow{x}_2 = \overrightarrow{0}$
Les vecteurs $\overrightarrow{x}_1$ et $\overrightarrow{x}_2$ étant indépendants, alors $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et donc

$$\lambda_1 = \alpha_{\left(\overrightarrow{x}_1+\overrightarrow{x}_2\right)} - \alpha_{\overrightarrow{x}_1} = 0 \text{ et } \lambda_2 = \alpha_{\left(\overrightarrow{x}_1+\overrightarrow{x}_2\right)} - \alpha_{\overrightarrow{x}_2} = 0$$

C'est à dire :

$$\alpha_{\left(\overrightarrow{x}_1+\overrightarrow{x}_2\right)} = \alpha_{\overrightarrow{x}_1} = \alpha_{\overrightarrow{x}_2}$$

α ne dépend donc pas du vecteur $\overrightarrow{x}$

Le nombre α est donc indépendant de $\overrightarrow{x} \in E$

Donc, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $\overrightarrow{u} \in E$ et tout $\overrightarrow{v} \in E$, nous ayons $\langle\varphi(\overrightarrow{u}) \mid \varphi(\overrightarrow{v})\rangle = \alpha\langle\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v}\rangle$, et d'après 20.1.4, nous avons démontré que φ est une similitude.

20.1.8 Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien. Alors, les similitudes conservent les angles non orientés, c'est à dire que, pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, tout $\overrightarrow{v} \in E$ et toute similitude $\varphi \in \mathcal{S}im(E)$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) = \cos\left(\widehat{\varphi(\overrightarrow{u}), \varphi(\overrightarrow{v})}\right)$$

Démonstration

Soient $\overrightarrow{u} \in E$, tout $\overrightarrow{v} \in E$ et $\varphi \in \mathcal{S}im(E)$, une similitude de rapport $k > 0$. Alors :

$$\cos\left(\widehat{\varphi(\overrightarrow{u}), \varphi(\overrightarrow{v})}\right) = \frac{\langle\varphi(\overrightarrow{u}) \mid \varphi(\overrightarrow{v})\rangle}{\|\varphi(\overrightarrow{u})\| \times \|\varphi(\overrightarrow{v})\|} = \frac{k^2\langle\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v}\rangle}{k\|\overrightarrow{u}\| \times k\|\overrightarrow{v}\|} = \frac{\langle\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v}\rangle}{\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|} = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)$$