20.2 Les similitudes affines

20.2.1 Définition

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien E
On appelle similitude de $\mathcal{E}$ toute application $S : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ telle que :

$$(\exists k > 0)\,(\forall M \in \mathcal{E})\,(\forall N \in \mathcal{E})\,\left(\left\|\overrightarrow{S(M)\,S(N)}\right\| = k\left\|\overrightarrow{MN}\right\|\right)$$

k est appelé le rapport de la similitude

Remarque 4 :

Pour $M \in \mathcal{E}$ et $N \in \mathcal{E}$, si $M' = S(M)$ et $N' = S(N)$, on peut aussi écrire $M'N' = kMN$ *(Utilisation de la distance entre 2 points)*

20.2.2 Proposition : décomposition d'une similitude

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien E. Alors :
$f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ est une similitude affine de rapport $k > 0$ si et seulement si f est le produit d'une homothétie de rapport k et d'une isométrie de $\mathcal{E}$

Démonstration

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien E

1. Soit $g = f \circ h$ où h est une homothétie de rapport $k > 0$ et f une isométrie
   On remarque que l'homothétie a un centre quelconque.
   Pour $M \in \mathcal{E}$ et $N \in \mathcal{E}$, nous appelons $M_1 = h(M)$, $N_1 = h(N)$, $N_2 = f(N_1)$ et $M_2 = f(M_1)$, alors :
   $$M_2N_2 = M_1N_1 = kMN$$
   $g = f \circ h$ est donc une similitude de rapport k
2. Soit g une similitude de rapport $k > 0$
   On considère la transformation $f = h_{\frac{1}{k}} \circ g$. Comme tout à l'heure, posons, pour $M \in \mathcal{E}$ et $N \in \mathcal{E}$, $M_1 = g(M)$, $N_1 = g(N)$, $N_2 = h_{\frac{1}{k}}(N_1)$ et $M_2 = h_{\frac{1}{k}}(M_1)$, alors :
   $$M_2N_2 = \frac{1}{k}M_1N_1 = \frac{1}{k} \times kMN = MN$$
   Ce qui montre que f est une isométrie de $\mathcal{E}$ et donc, de $f = h_{\frac{1}{k}} \circ g$, nous tirons que $g = \left(h_{\frac{1}{k}}\right)^{-1} \circ f = h_k \circ f$
   g peut donc se décomposer en le produit d'une isométrie et d'une homothétie de rapport k

Remarque 5 :

1. Si nous avions $g = h \circ f$ où h est une homothétie de rapport $k > 0$ et f une isométrie, g serait aussi une similitude de rapport k
2. Comme dans le cas des similitudes vectorielles, le rapport de la similitude $k > 0$ est bien entendu unique et ne dépend que de la similitude.

Exemple 2 :

Exemples de similitudes
Commençons par donner des exemples de similitudes

1. Toute isométrie de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ est une similitude ; c'est une similitude de rapport $k = 1$
2. Toute homothétie de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ est une similitude ; c'est une similitude de rapport $|k|$

   En effet, si H est une homothétie de rapport k, pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $N \in \mathcal{E}$, nous avons $\overrightarrow{H(M)H(N)} = k\overrightarrow{MN}$, c'est à dire $\left\|\overrightarrow{H(M)H(N)}\right\| = |k|\left\|\overrightarrow{MN}\right\|$

   H est donc une similitude de rapport $|k|$

Exercice 2 :

Exercice résolu
La plan euclidien $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On considère l'application $S : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ dont la définition analytique est donnée par :

$$\begin{cases} x' = & 2x + y + 1 \\ y' = & x - 2y \end{cases}$$

Montrer que S est une similitude dont on donnera le rapport

Soient $M(x, y)$ et $N(x_1, y_1)$ 2 points de $\mathcal{P}$. Posons $M' = S(M)(x', y')$ et $N' = S(N)(x'_1, y'_1)$.
Alors :

$$\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} x_1 - x \\ y_1 - y \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{M'N'} = \begin{pmatrix} x'_1 - x' \\ y'_1 - y' \end{pmatrix}$$

Et donc $MN^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2$ et $M'N'^2 = (x'_1 - x')^2 + (y'_1 - y')^2$
Et nous avons :

$$\begin{cases} x'_1 - x' = & 2(x_1 - x) + (y_1 - y) \\ y'_1 - y' = & (x_1 - x) - 2(y_1 - y) \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned} M'N'^2 = & \left(2(x_1 - x) + (y_1 - y)\right)^2 + \left((x_1 - x) - 2(y_1 - y)\right)^2 \\ = & 4(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + 4(x_1 - x)(y_1 - y) + (x_1 - x)^2 + 4(y_1 - y)^2 - 4(x_1 - x)(y_1 - y) \\ = & 5(x_1 - x)^2 + 5(y_1 - y)^2 \\ = & 5MN^2 \end{aligned}$$

Nous avons donc $M'N'^2 = 5MN^2 \Longleftrightarrow M'N' = \sqrt{5}MN$
S est donc une similitude de rapport $\sqrt{5}$

20.2.3 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien E. Alors :

1. **La composition de 2 similitudes affines est une similitude affine**
2. **Une similitude est une application affine**
3. **Si $\mathcal{S}im(\mathcal{E})$ est l'ensemble des similitudes affine de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ et $\mathcal{S}im(E)$ l'ensemble des similitudes du $\mathbb{R}$-espace vectoriel associé E, alors :**

$$f \in \mathcal{S}im(\mathcal{E}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{f} \in \mathcal{S}im(E)$$

4. **Si $\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien de dimension finie, alors :**
   - **(a) Une similitude est une bijection affine.**
   - **(b) L'ensemble $\mathcal{S}im(\mathcal{E})$ des similitudes de $\mathcal{E}$ muni de la loi de composition est un groupe**

Démonstration

1. La composition de 2 similitudes affine est une similitude affine
   Soient S_1 et S_2 2 similitudes de $\mathcal{E}$ de rapport respectif $k_1 > 0$ et $k_2 > 0$.
   Alors, pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $N \in \mathcal{E}$, nous avons :
   $$S_2 \circ S_1 (M) \, S_2 \circ S_1 (N) = k_2 S_1 (M] \, S_1 (N) = k_2 k_1 MN$$
   Ce qui montre, très simplement que $S_2 \circ S_1$ est une similitude de $\mathcal{E}$ de rapport $k_1 \times k_2$.
   Ainsi, la loi $\circ$ est une loi interne de $\mathcal{S}im\,(\mathcal{E})$
2. Une similitude est une application affine
   Dans 20.2.2, nous venons de montrer que toute similitude est la composition d'une homothétie et d'une isométrie. Une homothétie et une isométrie sont des applications affines, leur composition est une application affine ; une similitude est donc une application affine
3. $f \in \mathcal{S}im\,(\mathcal{E}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{f} \in \mathcal{S}im\,(E)$
   - Soit f une similitude de $\mathcal{E}$ de rapport $k > 0$, c'est à dire $f \in \mathcal{S}im\,(\mathcal{E})$
     Alors, d'après 20.2.2, f est la composée d'une homothétie affine h_k de rapport k et d'une isométrie affine θ, c'est à dire que $f = h_k \circ \theta$.
     Si $\overrightarrow{f}$ est l'application linéaire associée à f, alors $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{h_k} \circ \overrightarrow{\theta}$ où $\overrightarrow{h_k}$ est une homothétie vectorielle de rapport k et $\overrightarrow{\theta}$ une isométrie vectorielle.
     Donc, d'après 20.1.3, $\overrightarrow{f}$ est une similitude vectorielle et $\overrightarrow{f} \in \mathcal{S}im\,(E)$

     Il est possible d'en donner une autre démonstration
     Soit donc $f \in \mathcal{S}im\,(\mathcal{E})$ de rapport $k > 0$.
     Alors f est une application affine et soit $\overrightarrow{f}$ l'application linéaire associée. Soit aussi $P \in \mathcal{E}$ *(En quelque sorte, nous mettons une origine à* $\mathcal{E}$*)* et $\overrightarrow{u} \in E$.
     Il existe un unique point $M \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{f(P) f(M)}$, et donc :
     $$\left\| \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) \right\| = \left\| \overrightarrow{f(P) f(M)} \right\| = k \left\| \overrightarrow{PM} \right\| = k \left\| \overrightarrow{u} \right\|$$
     $\overrightarrow{f}$ est donc une similitude vectorielle, c'est à dire $\overrightarrow{f} \in \mathcal{S}im\,(E)$
   - Démontrer la réciproque n'a rien de difficile.
     Soit f une application affine de $\mathcal{E}$ d'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$ telle que $\overrightarrow{f} \in \mathcal{S}im\,(E)$ et $\overrightarrow{f}$ similitude de rapport $k > 0$.
     Soient $P \in \mathcal{E}$ et $Q \in \mathcal{E}$, alors :
     $$\left\| \overrightarrow{f(P) f(Q)} \right\| = \left\| \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{PQ}\right) \right\| = k \left\| \overrightarrow{PQ} \right\|$$
     Et donc, $f \in \mathcal{S}im\,(\mathcal{E})$

   Ce que nous voulions démontrer.
4. Supposons $\mathcal{E}$ de dimension finie
   (a) Une similitude est une bijection affine
   - Une homothétie est toujours une bijection. Dans les espaces de dimension finie, les isométries sont des bijections.
     Ainsi, dans les espaces de dimension finie, les similitudes sont donc des bijections comme composées d'applications bijectives
   - Si $S = h_k \circ f$ est une isométrie, alors l'endomorphisme associé est
     $$\overrightarrow{S} = \overrightarrow{h_k \circ f} = \overrightarrow{h_k} \circ \overrightarrow{f} = k\mathrm{Id}_E \circ \overrightarrow{f} = k\overrightarrow{f}$$

   (b) L'ensemble $\mathcal{S}im\,(\mathcal{E})$ des similitudes de $\mathcal{E}$ muni de la loi de composition est un groupe
   - On vient de montrer que la loi de composition $\circ$ était une loi interne
   - La loi $\circ$ est, par construction, associative.
   - Le neutre, pour la loi de composition, $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ est une similitude

- Les similitudes étant bijectives, il faut montrer que la réciproque d'une similitude l'est aussi.
  Soit donc S une similitude de rapport $k > 0$. Nous la décomposons en un produit d'une homothétie de rapport k avec une isométrie f. Nous avons donc : $S = h_k \circ f$. Alors :
  $$S^{-1} = (h_k \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ (h_k)^{-1} = f^{-1} \circ h_{\frac{1}{k}}$$
  f^{-1} est une isométrie, et donc S^{-1}, composée d'une isométrie et d'une homothétie de rapport $\dfrac{1}{k}$ est donc une similitude de rapport $\dfrac{1}{k}$

$\mathcal{S}im(\mathcal{E})$ muni de la loi de composition est un groupe

20.2.4 Proposition

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien E
Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application quelconque
f est une similitude de $\mathcal{E}$ si et seulement si pour tout $M \in \mathcal{E}$, tout $N \in \mathcal{E}$, tout $P \in \mathcal{E}$ et tout $Q \in \mathcal{E}$, avec $M \neq N$ et $P \neq Q$ tel que :
$$\frac{\left\|\overrightarrow{f(P)\,f(Q)}\right\|}{\left\|\overrightarrow{f(M)\,f(N)}\right\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|}{\left\|\overrightarrow{MN}\right\|}$$

Démonstration

1. <u>Supposons que f est une similitude de $\mathcal{E}$ de rapport $k > 0$</u>
   Alors, pour tout $M \in \mathcal{E}$, tout $N \in \mathcal{E}$, avec $M \neq N$, nous avons $\left\|\overrightarrow{f(M)\,f(N)}\right\| = k\left\|\overrightarrow{MN}\right\|$ et donc $\dfrac{\left\|\overrightarrow{f(M)\,f(N)}\right\|}{\left\|\overrightarrow{MN}\right\|} = k$
   De la même manière, nous avons pour tout $P \in \mathcal{E}$, tout $Q \in \mathcal{E}$, avec $P \neq Q$, nous avons $\left\|\overrightarrow{f(P)\,f(Q)}\right\| = k\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|$ et donc $\dfrac{\left\|\overrightarrow{f(P)\,f(Q)}\right\|}{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|} = k$
   De là, nous déduisons que
   $$\frac{\left\|\overrightarrow{f(M)\,f(N)}\right\|}{\left\|\overrightarrow{MN}\right\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{f(P)\,f(Q)}\right\|}{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|} \Longleftrightarrow \frac{\left\|\overrightarrow{f(P)\,f(Q)}\right\|}{\left\|\overrightarrow{f(M)\,f(N)}\right\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|}{\left\|\overrightarrow{MN}\right\|}$$
2. <u>Réciproquement, supposons $\dfrac{\left\|\overrightarrow{f(P)\,f(Q)}\right\|}{\left\|\overrightarrow{f(M)\,f(N)}\right\|} = \dfrac{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|}{\left\|\overrightarrow{MN}\right\|}$</u>
   Si cette égalité est vraie pour tout $M \in \mathcal{E}$, tout $N \in \mathcal{E}$, tout $P \in \mathcal{E}$ et tout $Q \in \mathcal{E}$, avec $M \neq N$ et $P \neq Q$, nous avons :
   $$\frac{\left\|\overrightarrow{f(P)\,f(Q)}\right\|}{\left\|\overrightarrow{f(M)\,f(N)}\right\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|}{\left\|\overrightarrow{MN}\right\|} \Longleftrightarrow \frac{\left\|\overrightarrow{f(P)\,f(Q)}\right\|}{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{f(M)\,f(N)}\right\|}{\left\|\overrightarrow{MN}\right\|} = k$$
   Nous avons donc $\dfrac{\left\|\overrightarrow{f(M)\,f(N)}\right\|}{\left\|\overrightarrow{MN}\right\|} = k \Longleftrightarrow \left\|\overrightarrow{f(M)\,f(N)}\right\| = k\left\|\overrightarrow{MN}\right\|$ et donc f est une similitude de rapport k

Remarque 6 :

1. On dit qu'une similitude conserve le rapport des distances. On peut ré-écrire 20.2.4 comme ceci :
   Si S est une similitude, $P' = S(P)$, $Q' = S(P)$, $M' = S(M)$ et $N' = S(N)$, nous avons :
$$\frac{P'Q'}{M'N'} = \frac{PQ}{MN}$$
2. **Rappelez vous les triangles semblables**
   Dans le plan affine euclidien $\mathcal{P}$, 2 triangles ABC et $A'B'C'$ sont dits semblables si et seulement si :
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$
   Ce qui signifie qu'il existe une similitude qui transforme le triangle ABC en le triangle $A'B'C'$

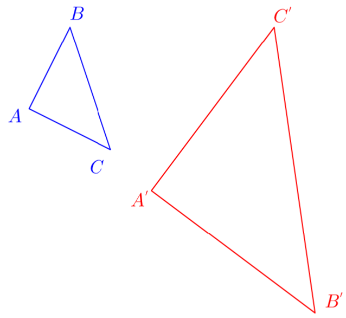

FIGURE 20.1 – 2 triangles semblables

20.2.5 Théorème

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension finie, de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien E et S une similitude de rapport $k > 0$ et $k \neq 1$. Alors :

1. **S admet un point fixe unique**
2. **$S = H_{O,k} \circ \theta = \theta \circ H_{O,k}$ où $\theta \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$ est une isométrie de $\mathcal{E}$ admettant O comme point fixe.**

Démonstration

Soit S un similitude de rapport $k > 0$ et $k \neq 1$

1. **S admet un unique point fixe**
   (a) Si S admet un point fixe, alors il est unique
   On suppose que S admet 2 points fixes I et J avec $I \neq J$. Alors $S(I) = I$ et $S(J) = J$; donc :
$$S(I)S(J) = kIJ \iff IJ = kIJ \iff (1-k)IJ = 0$$
   Comme $k \neq 1$, nous avons $1 - k \neq 0$ et donc $IJ = 0$, c'est à dire $I = J$
   (b) On démontre que S admet un point fixe
   → Soit $\overrightarrow{S}$ l'application linéaire associée à S ; alors $\overrightarrow{S} = k \times \theta$ où θ est une isométrie du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E ; alors, pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, nous avons
$$\|S(\overrightarrow{u})\| = k\|\overrightarrow{u}\|$$

→ Considérons $\overrightarrow{S}-\mathrm{Id}_E$; alors $\ker\left(\overrightarrow{S}-\mathrm{Id}_E\right)=\{\overrightarrow{u}\in E \text{ tels que } S(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u}\}$
Pour tout $\overrightarrow{u}\in\ker\left(\overrightarrow{S}-\mathrm{Id}_E\right)$, alors $\|S(\overrightarrow{u})\|=\|\overrightarrow{u}\|=k\|\overrightarrow{u}\|\Longleftrightarrow\|\overrightarrow{u}\|(1-k)=0$.
Comme $k\neq 1$, $1-k\neq 0$ et donc $\|\overrightarrow{u}\|=0$ et donc $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$. Nous en concluons que $\ker\left(\overrightarrow{S}-\mathrm{Id}_E\right)$ est réduit au seul vecteur nul, que $\overrightarrow{S}-\mathrm{Id}_E$ est donc injective. Comme le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est de dimension finie $\overrightarrow{S}-\mathrm{Id}_E$ est donc bijective.

→ Soit $O\in\mathcal{E}$. Ce faisant, nous donnons une origine à l'espace affine E.
Alors, pour tout $X\in\mathcal{E}$, nous avons :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{XS(X)}=\overrightarrow{OS(X)}-\overrightarrow{OX}= & \overrightarrow{OS(O)}+\overrightarrow{S(O)S(X)}-\overrightarrow{OX}\\ = & \overrightarrow{OS(O)}+\overrightarrow{S}\left(\overrightarrow{OX}\right)-\overrightarrow{OX}\\ = & \overrightarrow{OS(O)}+\left(\overrightarrow{S}-\mathrm{Id}_E\right)\left(\overrightarrow{OX}\right)\end{aligned}$$

L'application linéaire $\overrightarrow{S}-\mathrm{Id}_E$ étant bijective, il existe un et un seul vecteur $\overrightarrow{u}\in E$ tel que $\left(\overrightarrow{S}-\mathrm{Id}_E\right)(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{S(O)O}$
Il existe aussi un seul point $I\in\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{OI}$, et alors nous avons :

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{S}-\mathrm{Id}_E\right)\left(\overrightarrow{OI}\right)=\overrightarrow{S(O)O}\Longleftrightarrow & \left(\overrightarrow{S}-\mathrm{Id}_E\right)\left(\overrightarrow{OI}\right)+\overrightarrow{OS(O)}=\overrightarrow{0}\\ \Longleftrightarrow & \overrightarrow{IS(I)}=\overrightarrow{OS(O)}+\left(\overrightarrow{S}-\mathrm{Id}_E\right)\left(\overrightarrow{OI}\right)=\overrightarrow{0}\end{aligned}$$

Donc de $\overrightarrow{IS(I)}=\overrightarrow{0}$, nous déduisons que $S(I)=I$. I est donc le point invariant de S ; on en prouve, en même temps l'unicité

2. **Nous avons $S=H_{O,k}\circ\theta=\theta\circ H_{O,k}$ où $\theta\in\mathcal{I}s(\mathcal{E})$ est une isométrie de $\mathcal{E}$ admettant O comme point fixe.**
Nous appelons I le poinrt invariant de la similitude S et $H_{I,\frac{1}{k}}$ l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{k}$. Alors :
   - $\theta=S\circ H_{I,\frac{1}{k}}$ est une isométrie
   - De même, $\theta_1=H_{I,\frac{1}{k}}\circ S$ est aussi une isométrie

   et donc $S=\theta\circ H_{I,k}=H_{I,k}\circ\theta_1$.
Nous avons $\overrightarrow{S}=k\overrightarrow{\theta}=k\overrightarrow{\theta_1}$, ce qui veut dire que θ et θ_1 ont même endomorphisme associé.
Or, $\theta(I)=\theta_1(I)=I$; et donc, d'après 17.2.4, $\theta=\theta_1$
Nous avons donc $S=H_{O,k}\circ\theta=\theta\circ H_{O,k}$

Remarque 7 :

1. Remarquez l'importance de la dimension finie ; c'est grâce à cet argument que nous pouvons affirmer que $\overrightarrow{S}-\mathrm{Id}_E$ est bijective
2. Remarquez aussi l'importance de $k\neq 1$; c'est lorsque $k\neq 1$ que nous avons un seul point fixe. Pour $k=1$, nous avons affaire à des isométries qui peuvent admettre une infinité *(comme les symétries orthogonales)* ou aucun point fixe *(comme les translations)*
3. Nous venons aussi de montrer qu'un homothétie et une isométrie qui ont même point fixe, commutent

Exercice 3 :

On considère le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

1. On considère la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et l'homothétie H de centre $A(1,0)$ et de rapport 2. Etudier $R\circ H$ et $H\circ R$
2. On considère, cette fois ci, l'homothétie H_1 de centre O. Etudier $R\circ H_1$ et $H_1\circ R$

Que conclure ?

Exercice 4 :

Démontrer qu'une similitude qui admet 2 points invariants est une isométrie

20.2.6 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension finie et direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien E
Soient S une similitude de $\mathcal{E}$, $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{E}$,$C \in \mathcal{E}$ et $D \in \mathcal{E}$ 4 points de $\mathcal{E}$

1. **S conserve l'orthogonalité, c'est à dire :**

$$\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{CD} \right\rangle = 0 \Longrightarrow \left\langle \overrightarrow{S(A)\,S(B)} \mid \overrightarrow{S(C)\,S(D)} \right\rangle = 0$$

2. **S conserve les angles non orientés, c'est à dire**

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{S(A)\,S(B)}, \overrightarrow{S(C)\,S(D)}}\right)$$

Démonstration

Cette démonstration est exactement la redite, dans sa version affine, de 20.1.7 et de 20.1.8 L'endomorphisme associé à S est $\overrightarrow{S} = k\overrightarrow{f}$ où $\overrightarrow{f}$ est un endomorphisme orthogonal de E, c'est à dire qui conserve norme et produit scalaire.
Ainsi, comme nous avons :

$$\overrightarrow{S(A)\,S(B)} = \overrightarrow{S}\left(\overrightarrow{AB}\right) = k\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AB}\right)$$

De la même manière, nous avons $\overrightarrow{S(C)\,S(D)} = k\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{CD}\right)$ Ainsi :

$$\left\langle \overrightarrow{S(A)\,S(B)} \mid \overrightarrow{S(C)\,S(D)} \right\rangle = k^2 \left\langle \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AB}\right) \mid \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{CD}\right) \right\rangle = k^2 \left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{CD} \right\rangle$$

1. Supposons que $\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{CD} \right\rangle = 0$

   Alors, de $\left\langle \overrightarrow{S(A)\,S(B)} \mid \overrightarrow{S(C)\,S(D)} \right\rangle = k^2 \left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{CD} \right\rangle$, nous déduisons que $\left\langle \overrightarrow{S(A)\,S(B)} \mid \overrightarrow{S(C)\,S(D)} \right\rangle = 0$

2. Démontrons le second point

$$\begin{aligned}
\cos\left(\widehat{\overrightarrow{S(A)\,S(B)}, \overrightarrow{S(C)\,S(D)}}\right) &= \frac{\left\langle \overrightarrow{S(A)\,S(B)} \mid \overrightarrow{S(C)\,S(D)} \right\rangle}{\left\|\overrightarrow{S(A)\,S(B)}\right\| \times \left\|\overrightarrow{S(C)\,S(D)}\right\|} \\
&= \frac{k^2 \left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{CD} \right\rangle}{k^2 \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{CD}\right\|} \\
&= \frac{\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{CD} \right\rangle}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{CD}\right\|} \\
&= \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right)
\end{aligned}$$

Remarque 8 :

Les similitudes **ne conservent pas** le produit scalaire. En effet, nous venons de montrer que

$$\left\langle \overrightarrow{S(A)\,S(B)} \mid \overrightarrow{S(C)\,S(D)} \right\rangle = k^2 \left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{CD} \right\rangle$$

20.2.7 Définition de similitude directe, de similitude inverse

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension finie et direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien E

1. **On appelle similitude directe de $\mathcal{E}$ toute similitude $S \in \mathcal{S}im\left(\mathcal{E}\right)$ qui se décompose sous la forme $S = H \circ \theta$ où H est une homothétie et θ une isométrie positive de $\mathcal{E}$ ($\theta \in \mathcal{I}s^{+}\left(\mathcal{E}\right)$)**
2. **On appelle similitude inverse de $\mathcal{E}$ toute similitude $S \in \mathcal{S}im\left(\mathcal{E}\right)$ qui se décompose sous la forme $S = H \circ \theta$ où H est une homothétie et θ une isométrie négative de $\mathcal{E}$ ($\theta \in \mathcal{I}s^{-}\left(\mathcal{E}\right)$)**

L'ensemble des similitudes directes de $\mathcal{E}$ est noté $\mathcal{S}im^{+}\left(\mathcal{E}\right)$, alors que l'ensemble des similitudes inverses est noté $\mathcal{S}im^{-}\left(\mathcal{E}\right)$

Remarque 9 :

Nous avons $\mathcal{S}im^{+}\left(\mathcal{E}\right) = \mathcal{S}im\left(\mathcal{E}\right) \setminus \mathcal{S}im^{-}\left(\mathcal{E}\right)$

20.2.8 Proposition

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension finie et direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien E $\mathcal{S}im^{+}\left(\mathcal{E}\right)$ muni de la loi de composition des applications est un sous-groupe de $\mathcal{S}im\left(\mathcal{E}\right)$

Démonstration

La démonstration est évidente et laissée au lecteur

Remarque 10 :

Il faut aussi remarquer, à partir de leur décomposition, que la composition de 2 similitudes inverses donne une similitude directe