20.3 Les similitudes planes

Après avoir travaillé les similitudes dans le cas général, nous nous situons, dans ce paragraphe, dans le cadre plus restreint du plan affine euclidien $\mathcal{P}$ de dimension finie égale à 2.
Nous allons donc étudier les similitudes planes

20.3.1 Théorème

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$

1. **L'application $S : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ est <u>une similitude directe</u> du plan si et seulement si il existe un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ dans lequel la définition analytique de S soit :**

$$\left\{\begin{array}{rl} x' = & ax - by + x_0 \\ y' = & bx + ay + y_0 \end{array}\right. \quad \textbf{avec } a^2 + b^2 > 0$$

Le rapport de la similitude est donné par $\sqrt{a^2+b^2}$

2. **L'application $S : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ est <u>une similitude inverse</u> du plan si et seulement si il existe un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ dans lequel la définition analytique de S soit :**

$$\left\{\begin{array}{rl} x' = & ax + by + x_0 \\ y' = & bx - ay + y_0 \end{array}\right. \quad \textbf{avec } a^2 + b^2 > 0$$

Le rapport de la similitude est donné par $\sqrt{a^2+b^2}$

Démonstration

1. **Démonstration du premier point**

$\rightarrow$ <u>Supposons que S soit une similitude directe de rapport $k > 0$</u>

Alors, S se décompose en une homothétie de rapport k et une isométrie φ positive ($\varphi \in \mathcal{I}s^{+}(\mathcal{P})$), c'est à dire, puisque nous sommes dans le plan, une rotation.

Nous avons donc $\overrightarrow{S} = k\overrightarrow{\varphi}$.

$\overrightarrow{\varphi}$ étant une rotation de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, il existe une base orthonormée $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$ de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ dans laquelle la matrice de $\overrightarrow{\varphi}$ est donnée par :

$$\mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}}\left(\overrightarrow{\varphi}\right) = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \text{ avec } a_1^2 + b_1^2 = 1$$

La matrice de $\overrightarrow{S}$ dans la base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$ est donc :

$$\mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}}\left(\overrightarrow{S}\right) = \begin{pmatrix} ka_1 & -kb_1 \\ kb_1 & ka_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ en posant } a = ka_1 \text{ et } b = kb_1$$

Soit $O \in \mathcal{P}$; le repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est un repère orthonormé et posons $O' = S(O)(x_0, y_0)$

Alors, pour tout point $M(x, y)$ d'image $M' = S(M)(x', y')$, nous avons

$$\overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{S(O)\,S(M)} = \overrightarrow{S}\left(\overrightarrow{OM}\right)$$

Matriciellement, nous avons alors :

$$\begin{pmatrix} x' - x_0 \\ y' - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x' - x_0 = & ax - by \\ y' - y_0 = & bx + ay \end{array}\right.$$

C'est à dire que si S est une similitude directe du plan alors sa définition analytique est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{rl} x' = & ax - by + x_0 \\ y' = & bx + ay + y_0 \end{array}\right.$$

Nous avons $k^2 = k^2\left(a_1^2 + b_1^2\right) = (ka_1)^2 + (kb_1)^2 = a^2 + b^2$ et donc $k = \sqrt{a^2+b^2}$

→ Réciproquement, soit f une application affine dont la définition analytique dans un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = & ax - by + x_0 \\ y' = & bx + ay + y_0 \end{array}\right. \quad \text{avec } a^2 + b^2 > 0$$

Si $\overrightarrow{f}$ est l'endomorphisme associé à f, alors, sa matrice dans la base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$ est donnée par :

$$\mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}}\left(\overrightarrow{f}\right) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Soient $a_1 = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $b_1 = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$; alors :

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a^2+b^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2+b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$$

La matrice $\begin{pmatrix} \sqrt{a^2+b^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2+b^2} \end{pmatrix}$ est la matrice d'une homothétie de rapport $\sqrt{a^2+b^2}$, alors que la matrice $\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$ est celle d'une rotation du plan

f est donc la composée d'une homothétie de rapport $\sqrt{a^2+b^2}$ et d'une rotation. C'est donc une similitude directe de rapport $\sqrt{a^2+b^2}$

2. **Démonstration du second point**
   La démonstration de ce second point est totalement semblable à celle du premier ; elle est donc laissée au lecteur.

Exemple 3 :

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère othonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et une application f de définition analytique :

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = & x - y + 1 \\ y' = & x + y \end{array}\right.$$

C'est la définition analytique d'une similitude directe de rapport $k = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$
Son point fixe est donné par le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{ll} x = & x - y + 1 \\ y = & x + y \end{array}\right. \Longleftrightarrow y = 1 \text{ et } x = 0$$

Le centre de similitude *(ou point fixe)* est donc $\Omega\,(0, 1)$.

Il est facile aussi de trouver l'angle de la rotation. La matrice de cette rotation est donnée par $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

L'angle de la rotation est donc $\dfrac{\pi}{4}$ et le centre de la rotation affine, comme celui de l'homothétie est $\Omega\,(0, 1)$.
Nous avons donc :

$$f = H_{\Omega, \frac{1}{\sqrt{2}}} \circ R\left(\Omega, \frac{\pi}{4}\right) = R\left(\Omega, \frac{\pi}{4}\right) \circ H_{\Omega, \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Pour visualiser cette transformation, reportez vous à la figure 20.2

20.3.2 Théorème

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère othonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ que l'on identifie au corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

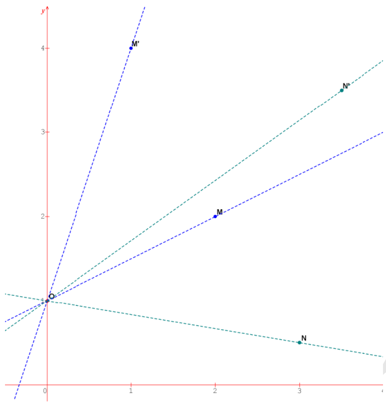

FIGURE 20.2 – Visualisation de la similitude f

1. (a) **Toute similitude plane directe S de rapport $k > 0$ peut être définie par une relation de la forme**
$$z' = az + b \text{ avec } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}$$
où, si $z \in \mathbb{C}$ est l'affixe de $M \in \mathcal{P}$, $z' \in \mathbb{C}$ est celle de $M' = S(M)$
Le rapport de la similitude est $k = |a|$
   (b) **Réciproquement, toute application f du plan $\mathcal{P}$ définie de manière complexe par**
$$z' = az + b \text{ avec } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}$$
est une similitude directe de rapport $|a|$
2. (a) **Toute similitude plane inverse S de rapport $k > 0$ peut être définie par une relation de la forme**
$$z' = a\overline{z} + b \text{ avec } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}$$
où, si $z \in \mathbb{C}$ est l'affixe de $M \in \mathcal{P}$, $z' \in \mathbb{C}$ est celle de $M' = S(M)$
Le rapport de la similitude est $k = |a|$
   (b) **Réciproquement, toute application f du plan $\mathcal{P}$ définie de manière complexe par**
$$z' = a\overline{z} + b \text{ avec } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}$$
est une similitude inverse de rapport $|a|$

Démonstration

1. **Démonstration du premier point**
   (a) Supposons S similitude plane directe
   Alors, d'après 20.3.1, sa définition analytique est donnée par
$$\begin{cases} x' = & ax - by + x_0 \\ y' = & bx + ay + y_0 \end{cases} \text{ avec } a^2 + b^2 > 0 \tag{20.1}$$
   Et le rapport de cette similitude est $\sqrt{a^2 + b^2}$
   En réutilisant le système (20.1) et en multipliant la seconde ligne par le nombre complxe i, nous avons :
$$\begin{cases} x' = & ax - by + x_0 \\ iy' = & ibx + iay + iy_0 \end{cases}$$
   et en additionnant, nous obtenons :
$$\begin{aligned} (x' + iy') = (a + ib)\,x + (ai - b)\,y + x_0 + iy_0 &\iff (x' + iy') = (a + ib)\,x + i\,(a + ib)\,y + x_0 + iy_0 \\ &\iff (x' + iy') = (a + ib)\,(x + iy) + x_0 + iy_0 \end{aligned}$$
   En posant $z' = x' + iy'$, $z = x + iy$, $A = a + ib$ et $B = x_0 + iy_0$, nous obtenons une égalité de la forme $z' = Az + B$ avec $|A| = \sqrt{a^2 + b^2}$ qui est le rapport de la similitude

(b) Réciproquement, soit $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une transformation complexe définie par $\varphi(z) = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. Si nous identifions $\mathcal{P}$ à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, en prenant $M(x, y)$ d'affixe z et $M'(x', y')$ d'affixe $\varphi(z)$, nous avons :

$$x' + iy' = a(x + iy) + b$$

En posant $a = a_1 + ia_2$ et $b = b_1 + ib_2$, nous obtenons :

$$x' + iy' = a(x + iy) + b \Longleftrightarrow x' + iy' = (a_1 + ia_2)(x + iy) + (b_1 + ib_2)$$

En identifiant parties réelles et imaginaires, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{rl} x' = & a_1 x - a_2 y + b_1 \\ y' = & a_2 x - a_2 y + b_2 \end{array} \right.$$

Ainsi, la transformation f du plan $\mathcal{P}$ de définition analytique

$$\left\{ \begin{array}{rl} x' = & a_1 x - a_2 y + b_1 \\ y' = & a_2 x - a_2 y + b_2 \end{array} \right.$$

est une similitude directe de rapport $\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |a|$

Ce que nous voulions.

2. **Démonstration du second point**

Comme tout à l'heure, la démonstration de ce second point est la copie conforme du premier ; je la laisse donc au lecteur

Exemple 4 :

Quelques exercices résolus

1. *Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère othonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ que l'on identifie au corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.*

Définir analytiquement la similitude inverse S définie par $z' = 2i\overline{z} + 1 - i$; on déterminera aussi l'ensemble des points invariants par S

La résolution de cet exercice est très rudimentaire ; nous donnerons, dans un prochain paragraphe, des outils plus efficaces

Soit $M(x, y) \in \mathcal{P}$ de transformé $M'(x', y') \in \mathcal{P}$ par S. Alors, nous avons :

$$x' + iy' = 2i(x - iy) + 1 - i$$

Ce qui nous donne, en identifiant parties réelles et parties imaginaires :

$$\left\{ \begin{array}{rl} x' = & 2y + 1 \\ y' = & 2x - 1 \end{array} \right.$$

On peut remarquer que la matrice de $\overrightarrow{S}$ dans la base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$ est donnée par $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{S}$ est donc la composée d'une homothétie de rapport 2 et de la symétrie orthogonale par rapport à la droite $y = x$.

Si $I(x, y)$ est un point fixe de de S, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{rl} x = & 2y + 1 \\ y = & 2x - 1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} x - 2y = & 1 \\ -2x + y = & -1 \end{array} \right.$$

D'où nous tirons $x = \dfrac{1}{3}$ et $y = -\dfrac{1}{3}$

2. *Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère othonormé $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ que l'on identifie au corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.*
Soient $A \in \mathcal{P}$, , $B \in \mathcal{P}$, $A' \in \mathcal{P}$ et $B' \in \mathcal{P}$ 4 points de $\mathcal{P}$ tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$
Montrer qu'il existe 2 similitudes S et 2 seulement telles que $A' = S(A)$ et $B' = S(B)$

Nous allons résoudre cette question de 2 façons : la première avec les nombres complexes, la seconde à l'aide de transformations géométriques plus classiques

(a) **Utilisation des nombres complexes**

Nous appelons z_A l'affixe de A, z_B, celle de B, z'_A, l'affixe de A' et z'_B celle de B'

i. Recherche d'une similitude directe

S'il existe une similitide directe S telle que $A' = S(A)$ et $B' = S(B)$, nous avons le système :

$$\begin{cases} z'_A = & az_A + b \\ z'_B = & az_B + b \end{cases} \quad \text{avec } a \in \mathbb{C} \text{ et } b \in \mathbb{C}$$

D'où nous tirons :

$$\rightarrow a = \frac{z'_A - z'_B}{z_A - z_B} \qquad \rightarrow b = \frac{z_A z'_B - z_B z'_A}{z_A - z_B}$$

Comme nous avons $A \neq B$, nous avons donc $z_A - z_B \neq 0$ et les valeurs a et b sont bien définies.

Il existe donc une seule similitude *directe* S telle que $A' = S(A)$ et $B' = S(B)$

Le rapport de la similitude est donc $|a| = \left|\dfrac{z'_A - z'_B}{z_A - z_B}\right| = \dfrac{|z'_A - z'_B|}{|z_A - z_B|} = \dfrac{A'B'}{AB}$

L'angle de la similitude est donné par

$$\arg a = \arg\left(\frac{z'_A - z'_B}{z_A - z_B}\right) = \arg(z'_A - z'_B) - \arg(z_A - z_B) = \widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)}$$

ii. Recherche d'une similitude inverse

S'il existe une similitide inverse S telle que $A' = S(A)$ et $B' = S(B)$, nous avons le système :

$$\begin{cases} z'_A = & a\overline{z_A} + b \\ z'_B = & a\overline{z_B} + b \end{cases} \quad \text{avec } a \in \mathbb{C} \text{ et } b \in \mathbb{C}$$

De ce système, nous tirons $b = z'_A - a\overline{z_A}$ et donc, en remplaçant dans la seconde équation :

$$z'_B = a\overline{z_B} + b \Longleftrightarrow z'_B = a\overline{z_B} + z'_A - a\overline{z_A} \Longleftrightarrow z'_B - z'_A = a\left(\overline{z_B} - \overline{z_A}\right) \Longleftrightarrow a = \frac{z'_B - z'_A}{\overline{z_B - z_A}}$$

Comme tout à l'heure, nous avons $z_A - z_B \neq 0$ et la valeur de a est bien définie.

D'où, par calcul, nous trouvons $b = \dfrac{z'_A\overline{z_B} - \overline{z_A}z'_B}{\overline{z_B - z_A}}$

Il existe donc une seule similitude *inverse* S telle que $A' = S(A)$ et $B' = S(B)$.

(b) **Méthode géométrique**

i. Recherche de la similitude directe

$\rightarrow$ Considérons la translation $T_{\overrightarrow{AA'}}$

Alors $T_{\overrightarrow{AA'}}(A) = A'$ et posons $T_{\overrightarrow{AA'}}(B) = X$. Ainsi, $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BX} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'X}$

$\rightarrow$ Nous considérons maintenant, la rotation $R(A', \theta)$ où θ est une mesure de l'angle de vecteurs $\widehat{\overrightarrow{A'X}, \overrightarrow{A'B'}}$ modulo 2π.

Alors $R(A', \theta)(A') = A'$ et $R(A', \theta)(X) = X_1$

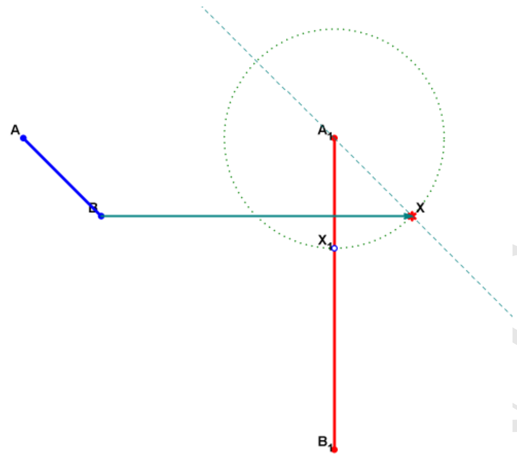

FIGURE 20.3 – Les différentes étapes de la construction de la similitude directe

→ Nous considérons maintenant l'homothétie $H_{A',\frac{A'B'}{A'X_1}}$
$R(A',\theta)$ étant une isométrie, nous avons $A'X_1 = A'X = AB$ et donc, $H_{A',\frac{A'B'}{A'X_1}} = H_{A',\frac{A'B'}{AB}}$
Alors $H_{A',\frac{A'B'}{AB}}(A') = A'$ et $H_{A',\frac{A'B'}{AB}}(X_1) = B'$

→ Ainsi, la transformation $S = H_{A',\frac{A'B'}{AB}} \circ R(A',\theta) \circ T_{\overrightarrow{AA'}}$ est telle que $A' = S(A)$ et $B' = S(B)$ et S est bien une similitude directe.

ii. <u>Recherche de la similitude inverse</u>

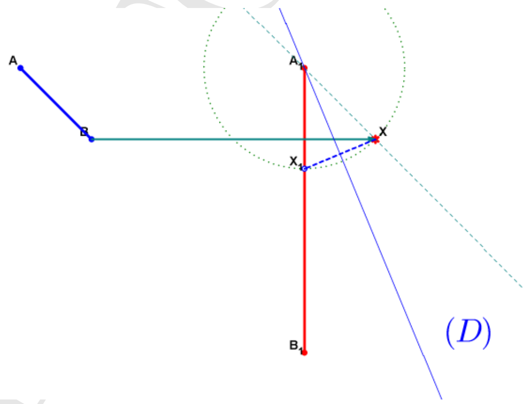

FIGURE 20.4 – Les différentes étapes de la construction de la similitude inverse

Cette fois ci, rien de plus facile : il suffit de remplacer la rotation $R(A',\theta)$ par S_D la symétrie orthogonale par rapport à la droite D médiatrice du segment $[X, X_1]$.
La similitude inverse cherchée est donc $S_I = H_{A',\frac{A'B'}{AB}} \circ S_D \circ T_{\overrightarrow{AA'}}$

20.3.3 Exercices

Exercice 5 :

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère othonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On considère l'application $S : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ dont la définition analytique est :

$$\begin{cases} x' = & 2x + y - 1 \\ y' = & -x + 2y + 1 \end{cases}$$

1. Démontrer que S est une similitude dont on donnera le rapport et l'unique point fixe
2. Démontrer que S transforme une droite (D) d'équation $y = ax + b$ en une droite (D_1) dont on donnera l'équation.

Exercice 6 :

Le plan $\mathcal{P}$ étant un plan affine euclidien rapporté à un repère othonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On considère l'application $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ dont la définition analytique est :

$$\begin{cases} x' = & x - 3y - 3 \\ y' = & -3x - y + 1 \end{cases}$$

1. Démontrer qu'il existe 2 droites (D) et (Δ) et 2 seulement invariantes par f
2. Démontrer que (D) et (Δ) sont perpendiculaires et donner les coordonnées du point d'intersection I.

Exercice 7 :

Enoncé du concours général de 1877
Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien. Nous considérons un triangle ABC rectangle en A et de hauteur AH.
On désigne par r_1, r_2 et r_3, les rayons des cercles inscrits aux triangles ABC, ABH et ACH.
Il faut montrer que $r_1^2 = r_2^2 + r_3^2$.
Pour le démontrer, répondez aux questions suivantes :

1. Soit D le symétrique de A par rapport à la droite (BC). Montrer que les triangles HBD et ABC sont semblables
2. Soit S la similitude de rapport $k > 0$ qui transforme le triangle ABC en HBD. Evaluer k en fonction de BA et BC. En déduire que $r_2 = \dfrac{BA}{BC} r_1$
3. Pourquoi avons nous $r_3 = \dfrac{AC}{BC} r_1$?
4. Montrer que $\left(\dfrac{BA}{BC}\right)^2 + \left(\dfrac{AC}{BC}\right)^2 = 1$.
5. En déduire l'égalité demandée