20.4 Etude des similitudes définies par $z' = az + b$ et $z' = a\overline{z} + b$

Comme vu dans le chapitre 8, nous identifions le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$. Ainsi, si $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est un repère orthonormé de $\mathcal{P}$, si $M \in \mathcal{P}$ est un point de coordonnées (x, y), on appelle affixe de M le nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = x + iy$.
Pour tout fonction $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$, nous pouvons associer une fonction complexe $f_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tel que si z est l'affixe de M, alors $z' = f_{\mathbb{C}}(z)$ est l'affixe de $M' = f(M)$.
Dans la suite, nous ne faisons pas de différence entre f et $f_{\mathbb{C}}$

20.4.1 Théorème

Soit $S : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une similitude directe définie par $S(z) = z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$. Alors :

1. **Le rapport de la similitude est $|a|$**
2. **Si $a = 1$, alors S est une translation**
3. **Si $a \neq 1$, alors S possède un unique point invariant Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$**
   - **Une forme réduite de S est donnée par $z' - \omega = a(z - \omega)$**
   - **$S = r \circ h = h \circ r$ où r est une rotation de centre Ω et d'angle $\arg a$ et h est une homothétie de rapport $|a|$**

<u>Démonstration</u>

1. Soit $M \in \mathcal{E}$ d'affixe $z \in \mathbb{C}$ et $N \in \mathcal{E}$ d'affixe $z_1 \in \mathbb{C}$. Alors :
$$M'N' = |z_1' - z'| = |az_1 + b - (az + b)| = |a(z_1 - z)| = |a|\,|z_1 - z| = |a|\,MN$$
Et donc $|a|$ est le rapport de la similitude.
2. <u>Supposons $a = 1$</u>
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{M'N'}$ est $z_1' - z'$. Or $z_1' - z' = (z_1 + b) - (z + b) = z_1 - z$; et $z_1 - z$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MN}$. Nous avons donc $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$
S est donc bien une translation.
3. <u>Recherchons les points invariants par S</u>
Soit $\omega \in \mathbb{C}$, l'affixe de ce point invariant, alors, nous avons :
$$\omega = a\omega + b \Longleftrightarrow \omega(1 - a) = b$$
Donc :
→ Si $a = 1$ et $b = 0$, alors, l'ensemble des points invariants est $\mathbb{C}$
→ Si $a = 1$ et $b \neq 0$, alors, l'ensemble des points invariants est vide *(Il n'y a pas de point invariant)*
→ Si $a \neq 1$, alors il n'y a qu'un seul point invariant $\omega = \dfrac{b}{1-a}$
4. <u>Supposons $a \neq 1$</u>
Nous pouvons écrire $z' = az + b$ et $\omega = a\omega + b$, et en soustrayant, nous avons $z' - \omega = a(z - \omega)$
→ De $z' - \omega = a(z - \omega)$, nous tirons
$$\arg(z' - \omega) = \arg a + \arg(z - \omega) \Longleftrightarrow \arg(z' - \omega) - \arg(z - \omega) = \arg a$$
Et donc $\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right)} = \arg a$
→ D'autre part, $\Omega M' = |a|\,\Omega M$
→ Donc S est la composée commutative d'une homothétie $H_{\Omega,|a|}$ de centre Ω et de rapport $|a|$ et d'une rotation $R(\Omega, \arg a)$ de centre Ω et d'angle $\arg a$
C'est à dire que nous avons $S = H_{\Omega,|a|} \circ R(\Omega, \arg a) = R(\Omega, \arg a) \circ H_{\Omega,|a|}$

Remarque 11 :

Dans cette remarque, nous ré-écrivons ou reprécisons ce que nous avons démontré dans le théorème 20.4.1

1. **Centre, rapport et mesure de l'angle** d'une similitude directe sont les éléments caractéristiques de la similitude.
2. On peut écrire la forme réduite d'une similitude par $z' - \omega = \rho e^{i\theta}(z - \omega)$. Dans ce cas :
   - ρ est le rapport de la similitude
   - θ est l'angle de la similitude
   - ω est l'affixe du centre de la similitude.
3. Soit S une similitude directe définie par la relation complexe $z' = az + b$
   $\rightarrow$ S est une dilatation *(ou homothétie-translation)* si et seulement si $a \in \mathbb{R}$
   $\rightarrow$ S est une translation si et seulement si $a = 1$
4. Une similitude directe S définie par la relation complexe $z' = az + b$ est une isométrie positive *(ou déplacement)* si et seulement si $|a| = 1$

Exemple 5 :

Quelques exercices résolus

1. *Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$. On considère l'application S dont la définition complexe est donnée par $z' = \left(1 + i\sqrt{3}\right)z - \sqrt{3}$. En donner les éléments caractéristiques*

   De manière évidente, S est une similitude directe
   $\rightarrow$ Le point invariant a pour affixe $\omega = \dfrac{-\sqrt{3}}{1 - \left(1 + i\sqrt{3}\right)} = \dfrac{1}{i} = -i$; le point invariant $\Omega \in \mathcal{P}$ a donc pour coordonnées $(0, -1)$
   $\rightarrow$ Le rapport de la similitude est donné par $\left|1 + i\sqrt{3}\right| = 2$
   $\rightarrow$ La forme trigonométrique de $1 + i\sqrt{3}$ est $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et l'angle de la similitude est donc de $\dfrac{\pi}{3}$
   $\rightarrow$ La forme réduite de S est $z' + i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(z + i)$
2. *Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$. Soit S une similitud edirecte de centre O transformant 2 points $M \in \mathcal{P}$ et $N \in \mathcal{P}$ respectivement en $M' \in \mathcal{P}$ et $N' \in \mathcal{P}$.*
   Démontrer que la similitude directe S_1 de centre O qui transforme M en N transforme aussi M' en N'

   Cette question pose peu de difficultés.
   Nous appelons $m \in \mathbb{C}$ l'affixe de $M \in \mathcal{P}$, $n \in \mathbb{C}$ l'affixe de $N \in \mathcal{P}$, $m' \in \mathbb{C}$ l'affixe de $M' \in \mathcal{P}$ et $n' \in \mathbb{C}$ l'affixe de $N' \in \mathcal{P}$
   Comme $M' = S(M)$, $N' = S(N)$ et que S est une similitude de centre O, nous avons $m' = am$ et $n' = an$ avec $a \in \mathbb{C}$.
   Soit S_1 la similitude directe de centre O qui transforme M en N ; il existe alors $a_1 \in \mathbb{C}$ tel que $n = a_1 m$. Alors :
   $$n' = an = a(a_1 m) = a_1(am) = a_1 m'$$
   C'est à dire $N' = S_1(M')$
3. *Déterminer la similitude directe s (centre, rapport, mesure) transformant le bipoint (A, B) en le bipoint (A', B'), dans le cas où $A(1; 2)$, $B(3; -1)$,$A'(0; -3)$ et $B'(1; 1)$*

   C'est une question qui ne pose aucune difficulté, mais qui introduit aux systèmes linéaires en nombres complexes.
   - ⋆ Si z_A est l'affixe du point A, z_B, celle du point B, z'_A l'affixe du point A' z'_B celle de B', nous avons :

$\longrightarrow z_A = 1 + 2i$ $\longrightarrow z_B = 3 - i$ $\longrightarrow z'_A = -3i$ $\longrightarrow z'_B = 1 + i$

⋆ S'il existe une similitude directe s telle que $s(A) = A'$ et $s(B) = B'$, l'expression complexe de s est donnée par $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$, et nous avons :

$$\begin{cases} z'_A = & az_A + b \\ z'_B = & az_B + b \end{cases}$$

Il faut donc trouver a et b

En soustrayant les différentes lignes, nous obtenons $z'_A - z'_B = a(z_A - z_B)$ d'où $a = \dfrac{z'_A - z'_B}{z_A - z_B}$ d'où nous tirons $b = \dfrac{z_A z'_B - z'_A z_B}{z_A - z_B}$. D'où, la similitude s a pour expression :

$$z' = \frac{(z'_A - z'_B) z + z_A z'_B - z'_A z_B}{z_A - z_B}$$

Ce qui est une expression générale

⋆ La fin de l'exercice n'est qu'une application numérique. Nous trouvons donc :

$\rightarrow a = \dfrac{1}{13}(-10 + 11i)$ $\rightarrow b = \dfrac{4}{13}(11 - 3i)$

Donc s a pour expression complexe :

$$z' = \frac{1}{13}((-10 + 11i) z + 4(11 - 3i))$$

Nous venons aussi de montrer qu'il n'existe qu'une seule similitude directe qui transforme un bipoint (A, B) en un autre bipoint (A', B')

20.4.2 Exercices

Dans tous les exercices qui suivent, $\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

Exercice 8 :

1. On considère l'application S du plan qui, à tout point $M \in \mathcal{P}$ d'affixe $z \in \mathbb{C}$ associe le point $M' \in \mathcal{P}$ d'affixe $z' \in \mathbb{C}$ donnée par la relation $z' = 2iz + 1 - i$
   Déterminer la nature de S et en donner les éléments caractéristiques
2. Reprendre la question précédente dans les cas suivants :
   (a) $z' = z + 2 - i$
   (b) $z' = 2z + i$
   (c) $z' = iz$
   (d) $z' = (1 + i) z - i$
   (e) $z' = \left(\sqrt{3} - i\right) z + 1 + i\left(\sqrt{3} - i\right)$
   (f) $z' = \left(\dfrac{1 + i}{\sqrt{2}}\right) z - (1 - i)$

Exercice 9 :

Déterminer la similitude directe s *(centre, rapport, mesure)* transformant le bipoint (A, B) en le bipoint (A', B'), dans les cas suivants :

1. $A(1; 0)$, $B(3; -1)$, $A'(0; 1)$ et $B'(2; 2)$
2. $A(0; 1)$, $B(0; 3)$, $A'(2; 2)$ et $B'(-1; -1)$
3. $A(1; 0)$, $B(0; 1)$, $A'(3; 0)$ et $B'(0; -3)$

Exercice 10 :

Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation suivante d'inconnue z

$$z^3 - \left(4 + i\sqrt{3}\right) z^2 + \left(3 + 4i\sqrt{3}\right) z - 3i\sqrt{3} = 0$$

1. Montrer que cette équation admet deux racines réelles *(on les notera α et β avec $\alpha < \beta$)* et une racine imaginaire pure notée ω
2. Soit f une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que :

$$f(z) = az + b \text{ avec } a \in \mathbb{C} \text{ et } b \in \mathbb{C}$$

   (a) Calculer les nombres complexes a et b de telle sorte que $f(\alpha) = \beta$ et $f(\omega) = \omega$

   (b) Calculer le module et l'argument de a et caractériser géométriquement la transformation ponctuelle Φ du plan complexe associée à f.

Exercice 11 :

On considère 2 transformations du plan $\mathcal{P}$ appelées T_1 et T_2 qui associent respectivement au point $M \in \mathcal{P}$ d'affixe $z \in \mathbb{C}$ le point $M_1 = T_1(M)$ et le point $M_2 = T_2(M)$ d'affixe $z_1 = \left(-1 + i\sqrt{3}\right) z$ et $z_2 = \dfrac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right) z$

1. Quelle est la nature de ces deux transformations ? Donner leurs éléments respectifs
2. Exprimer, en fonction de z, l'affixe de l'image de M par la transformation composée $T_2 \circ T_l$ et donner les éléments de cette transformation

Exercice 12 :

Dans le plan complexe, au point $M \in \mathcal{P}$, d'affixe z, on fait correspondre le point M' d'affixe Z, par la transformation T_k définie par :

$$Z = kiz + 1 + k^2$$

k étant un paramètre réel strictement positif et i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Quelle est la nature de la transformation T_k ?
2. Montrer que T_k, possède un point invariant ω_k, et un seul, que l'on déterminera.
3. Préciser les éléments caractéristiques de T_k
4. Déterminer l'ensemble des points ω_k lorsque k décrit l'ensemble des réels positifs.
5. k_1 et k_2 étant deux réels strictement positifs, on considère les transformations $T_{k_2} \circ T_{k_1}$ et $T_{k_1} \circ T_{k_2}$ Montrer que $T_{k_2} \circ T_{k_1} = T_{k_1} \circ T_{k_2}$ si et seulement si $k_1 = k_2$
6. Quelle est la nature de la transformation $T_k \circ T_k$?

Exercice 13 :

Soit $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

1. On considère l'application f de $\mathcal{P}$ dans lui-même qui, à tout point M de coordonnées (x, y) fait correspondre le point M' de coordonnées (x', y') définies par :

$$\begin{cases} x' = & x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y' = & x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases}$$

   Déterminer le point double de f *(ou point invariant de f)*

2. On désigne par $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$ les affixes des points M et M'. Montrer que z et z' sont par une relation du type :

$$z' - z_0 = a(z - z_0)$$

   où a et z_0 sont des nombres complexes que l'on déterminera. Caractériser alors la transformation f.

Exercice 14 :

Le plan $\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.
On considère les points A et B qui ont respectivement pour coordonnées $(1, 0)$ et $(-1, 0)$ et la droite D passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{j}$
Soit S la similitude directe dont le centre est B, dont l'angle est $+\dfrac{\pi}{2}$ et dont le rapport est $\dfrac{1}{2}$

1. (a) Déterminer $A' = S(A)$.
   (b) Montrer que l'ensemble des images M' des points $M \in D$ par S est une droite D' qui coupe D en un point I,
   (c) Déterminer $I' = S(I)$ et démontrer que, pour tout $M \in D$, si $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AI}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\overrightarrow{A'M'} = \lambda\overrightarrow{A'I'}$
   (Représenter graphiquement les points et les droites)
2. Soit $M"$ le barycentre des points M et M' respectivement affectés des coefficients 2 et -1.
   (a) Démontrer que $M"$ est l'image de M dans une similitude directe S_1 de centre B
   (b) Démontrer que l'ensemble des points $M"$ images des points $M \in D$ est une droite D_1 que l'on déterminera.

20.4.3 Théorème

Soit $S : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une similitude inverse définie par $S(z) = z' = a\overline{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$. Alors :

1. **Si $|a| = 1$, alors S est un antidéplacement (ou isométrie négative)**
   (a) Si $a\overline{b} + b = 0$, alors S est une symétrie orthogonale par rapport à une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ d'affixe $u = a\overline{b} + b$
   (b) Si $a\overline{b} + b \neq 0$, alors S est la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation. La translation a pour vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe $u = \dfrac{1}{2}\left(a\overline{b} + b\right)$ et l'axe de la symétrie orthogonale a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ d'affixe $v = a\overline{b} + b$
2. **Si $|a| \neq 1$, alors S admet une unique point fixe Ω d'affixe $\omega = \dfrac{a\overline{b} + b}{1 - |a|^2}$**
   S est alors <u>la composée commutative d'une homothétie</u> $H(\Omega, |a|)$ de centre Ω et de rapport $|a|$ et <u>d'une symétrie orthogonale</u> S_Δ d'axe Δ passant par Ω, c'est à dire :
   $$S = H(\Omega, |a|) \circ S_\Delta = S_\Delta \circ H(\Omega, |a|)$$

<u>Démonstration</u>

1. <u>**Recherchons les points invariants de S**</u>
   (a) Si $z \in \mathbb{C}$ est invariant par S, alors $z = a\overline{z} + b$ et donc $\overline{z} = \overline{a}z + \overline{b}$; d'où :
   $$z = a\overline{z} + b \Longleftrightarrow z = a\left(\overline{a}z + \overline{b}\right) + b \Longleftrightarrow z = |a|^2 z + a\overline{b} + b \Longleftrightarrow \left(1 - |a|^2\right) z = a\overline{b} + b$$
   (b) Si $|a| = 1$ et $a\overline{b} + b \neq 0$, alors, il n'y a aucun point invariant
   (c) Si $|a| = 1$ et $a\overline{b} + b = 0$, alors, il existe une infinité de points invariants
   (d) Si $|a| \neq 1$ alors il n'existe qu'un seul point invariant Ω d'affixe $\omega = \dfrac{a\overline{b} + b}{1 - |a|^2}$
2. <u>**Supposons maintenant que $|a| = 1$**</u>
   Alors, S est un antidéplacement *(ou isométrie négative)*. D'après 19.2.13 est la composée d'une symétrie orthogonale S_D d'axe $D \subset \mathcal{P}$ et d'une translation $T_{\overrightarrow{u}}$ dont le vecteur $\overrightarrow{u}$ est directeur D. De plus, nous avons $S = S_D \circ T_{\overrightarrow{u}} = T_{\overrightarrow{u}} \circ S_D$, de telle sorte que nous ayions
   $$S \circ S = (T_{\overrightarrow{u}} \circ S_D) \circ (S_D \circ T_{\overrightarrow{u}}) = T_{2\overrightarrow{u}}$$

⇒ Calculons $S \circ S(z)$
Nous avons donc :

$$S \circ S(z) = S[S(z)] = a\overline{S(z)} + b = a\left(\overline{a}z + \overline{b}\right) + b = |a|^2 z + a\overline{b} + b = z + a\overline{b} + b$$

⇒ Si $a\overline{b} + b = 0$, alors $S \circ S = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$ et S est donc une symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ qui a pour vecteur directeur, un vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe $a\overline{b} + b$

⇒ Si $a\overline{b} + b = 0$, alors $S \circ S$ est une translation de vecteur d'affixe $a\overline{b} + b$, c'est à dire que S est la composée d'une symétrie orthogonale d'axe Δ qui a pour vecteur directeur, un vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe $a\overline{b} + b$ et d'une translation $T_{\frac{1}{2}\overrightarrow{u}}$

3. **Supposons maintenant que $|a| \neq 1$**

Alors S admet un seul point invariant Ω d'affixe $\omega = \dfrac{a\overline{b} + b}{1 - |a|^2}$

Des 2 équations $z' = a\overline{z} + b$ et $\omega = a\overline{\omega} + b$, nous tirons :

$$z' - \omega = a(\overline{z} - \overline{\omega}) = a\overline{(z - \omega)}$$

→ Nous avons alors $|z' - \omega| = |a|\left|\overline{(z - \omega)}\right| = |a||z - \omega|$
Ainsi, si M a pour affixe z et M' pour affixe z', nous avons alors $M'\Omega = |a|\, M\Omega$

→ En termes d'argument, nous avons :

$$\arg(z' - \omega) = \arg a - \arg(z - \omega)$$

→ Soit $U \in \mathcal{P}$ d'affixe $u \in \mathbb{C}$ tel que $\arg(u - \omega) = \dfrac{\arg a}{2}$.

En fait U appartient à une droite Δ fixe, passant par Ω et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{\arg a}{2}\right) \\ \sin\left(\dfrac{\arg a}{2}\right) \end{pmatrix}$

Nous avons donc :

$$\begin{cases} \arg(z' - \omega) + \arg(z - \omega) = \arg a \\ \arg(u - \omega) + \arg(u - \omega) = \arg a \end{cases}$$

Et donc

$$\arg(z' - \omega) - \arg(u - \omega) + \arg(z - \omega) - \arg(u - \omega) = 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\arg(z' - \omega) - \arg(u - \omega) = \arg(u - \omega) - \arg(z - \omega)$$

C'est à dire, en termes d'angles :

$$\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega U}, \overrightarrow{\Omega M'}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega U}\right)}$$

Ce qui montre que S est la composée d'une symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ et d'une homothétie de rapport $|a|$

Exemple 6 :

Exercice résolu

1. *Le plan $\mathcal{P}$ étant un plan affine euclidien rapporté à un repère othonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$. On considère la similitude inverse s définie par :*

$$s(z) = (2 + i)\,\overline{z} + 1 - 3i$$

C'est une similitude inverse qu'il faut caractériser

- Le rapport de cette similitude est donné par $|2 + i| = \sqrt{5}$

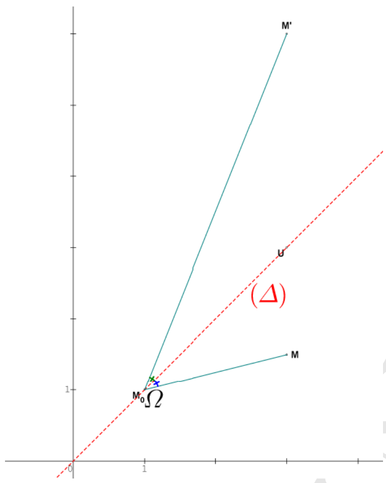

FIGURE 20.5 – Visialisation d'une similitude inverse avec un point invariant

- Comme $|a| \neq 1$, s admet un unique point fixe Ω d'abscisse
$$\omega = \frac{a\bar{b}+b}{1-|a|^2} = \frac{(2+i)(1+3i)+1-3i}{-4} = -i$$
Le point $\Omega(0,-1)$ est donc le point fixe de s. La forme réduite de s est donc donnée par :
$$z'-\omega = (2+i)\overline{(z-\omega)} \iff z' = (2+i)\overline{(z-\omega)}+\omega$$
- s se décompose en le produit d'une homothétie H de centre Ω et de centre $\sqrt{5}$ et d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ passant par Ω.
Nous avons donc $s = H \circ S_\Delta \iff S_\Delta = H^{-1} \circ s$
L'écriture complexe de l'homothétie H est donnée par $z'-\omega = \sqrt{5}(z-\omega) \iff z' = \sqrt{5}(z-\omega)+\omega$ et celle de H^{-1} est donnée par $z' = \frac{1}{\sqrt{5}}(z-\omega)+\omega$; d'où nous avons la définition complexe de S_Δ :
$$S_\Delta(z) = H^{-1}(s(z)) = \frac{1}{\sqrt{5}}(s(z)-\omega)+\omega = \frac{1}{\sqrt{5}}\left((2+i)\overline{(z-\omega)}+\omega-\omega\right)+\omega = \frac{2+i}{\sqrt{5}}\overline{(z-\omega)}+\omega$$
Et donc $S_\Delta(z) = \frac{2+i}{\sqrt{5}}\overline{(z+i)}-i$
Si $z = x+iy$ et $S_\Delta(z) = x'+iy'$, nous avons :
$$\begin{aligned} x'+iy' &= \frac{2+i}{\sqrt{5}}(x-iy-i)-i \\ &= \frac{2+i}{\sqrt{5}}x+\frac{1-2i}{\sqrt{5}}y+\frac{1-2i}{\sqrt{5}}-i \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}}x+\frac{1}{\sqrt{5}}y+\frac{1}{\sqrt{5}}+i\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x-\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{2}{\sqrt{5}}-1\right) \end{aligned}$$
Nous obtenons donc le système :
$$\begin{cases} x' = \frac{2}{\sqrt{5}}x+\frac{1}{\sqrt{5}}y+\frac{1}{\sqrt{5}} \\ y' = \frac{1}{\sqrt{5}}x-\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{2}{\sqrt{5}}-1 \end{cases}$$
Δ est l'ensemble des points fixes. Les coordonnées des points de Δ vérifient donc :
$$\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}}x+\frac{1}{\sqrt{5}}y+\frac{1}{\sqrt{5}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}x-\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{2}{\sqrt{5}}-1 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{5}x = 2x+y+1 \\ \sqrt{5}y = x-2y-2-\sqrt{5} \end{cases} \iff \begin{cases} \left(\sqrt{5}-2\right)x-y-1 = 0 \\ -x+\left(\sqrt{5}+2\right)y+2+\sqrt{5} = 0 \end{cases}$$

La première ligne est obtenue en multipliant la seconde ligne par $2-\sqrt{5}$, en d'autres termes, le système est donc équivalent à une seule équation :

$$x-\left(\sqrt{5}+2\right)y-\left(2+\sqrt{5}\right)=0$$

C'est l'équation cartésienne de la droite Δ

2. *Déterminer la similitude inverse s transformant le bipoint (A,B) en le bipoint (A',B'), dans le cas où $A\,(1;2)$, $B\,(3;-1)$,$A'\,(0;-3)$ et $B'\,(1;1)$*

   Remarquez que nous avons déjà cherché la similitude directe qui transforme (A,B) en le bipoint (A',B'). Ainsi, s'il n'existe qu'une seule similitude inverse qui transforme (A,B) en le bipoint (A',B'), il n'existe donc que 2 similitudes (l'une directe, l'autre inverse) transformant un bipoint (A,B) en un bipoint (A',B'). Nous reprenons la trame de la résolution de l'exercice résolu précédent.

   ⋆ Si z_A est l'affixe du point A, z_B, celle du point B, z'_A l'affixe du point A' z'_B celle de B', nous avons :

   $\longrightarrow z_A=1+2i$ $\longrightarrow z_B=3-i$ $\longrightarrow z'_A=-3i$ $\longrightarrow z'_B=1+i$

   ⋆ S'il existe une similitude inverse s telle que $s(A)=A'$ et $s(B)=B'$, l'expression complexe de s est donnée par $z'=a\overline{z}+b$ avec $a\in\mathbb{C}$ et $b\in\mathbb{C}$, et nous avons :

$$\begin{cases} z'_A = & a\overline{z_A}+b \\ z'_B = & a\overline{z_B}+b \end{cases}$$

   Il faut donc trouver a et b

   En soustrayant les différentes lignes, nous obtenons $z'_A-z'_B=a\overline{(z_A-z_B)}$ d'où $a=\dfrac{z'_A-z'_B}{\overline{z_A-z_B}}$ d'où nous tirons $b=\dfrac{\overline{z_A}z'_B-\overline{z'_A}z_B}{\overline{z_A-z_B}}$. D'où, la similitude s a pour expression :

$$z'=\frac{\left(z'_A-z'_B\right)\overline{z}+\overline{z_A}z'_B-\overline{z'_A}z_B}{\overline{z_A-z_B}}$$

   Ce qui est une expression générale

   ⋆ La fin de l'exercice n'est qu'une application numérique. Nous trouvons donc :

   $\rightarrow a=\dfrac{1}{13}(14+5i)$ $\rightarrow b=\dfrac{1}{13}(30+20i)$

   Donc s a pour expression complexe :

$$z'=\frac{1}{13}\left((14+5i)\overline{z}+4(30+20i)\right)$$

Nous venons aussi de montrer qu'il n'existe qu'une seule similitude inverse qui transforme un bipoint (A,B) en un autre bipoint (A',B')

20.4.4 Exercices

Dans tous les exercices qui suivent, $\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

Exercice 15 :

Déterminer la similitude inverse s transformant le bipoint (A,B) en le bipoint (A',B'), dans les cas suivants :

1. $A\,(1;0)$, $B\,(3;-1)$, $A'\,(0;1)$ et $B'\,(2;2)$
2. $A\,(0;1)$, $B\,(0;3)$, $A'\,(2;2)$ et $B'\,(-1;-1)$
3. $A\,(1;0)$, $B\,(0;1)$, $A'\,(3;0)$ et $B'\,(0;-3)$

Exercice 16 :

On considère l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, qui à tout nombre complexe z, associe $z' = f(z) = 2i\overline{z} + 2 - i$. On désigne par F la transformation du plan complexe, qui au point M d'affixe z, fait correspondre le point $M' = F(M)$, d'affixe $z' = f(z)$.

1. La transformation F admet-elle des points invariants ?
2. Déterminer la nature de F et préciser les éléments géométriques qui la caractérisent : centre, rapport, axe.

Exercice 17 :

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

1. (a) Soit T_1 la transformation du plan $\mathcal{P}$ qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' d'affixe :
$$z' = (i-1)\,\overline{z} + 3$$
Quelle est la nature de T_1 et, s'il existe, quel en est son centre Ω ?
   (b) Soit S la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$. Quelle est la nature de la transformation $T_1 \circ S$?
2. Soit T_2 la similitude directe ayant pour centre le point B d'affixe $3+i$, pour rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et pour mesure $\dfrac{\pi}{4}$. Caractériser la transformation $T_2 \circ T_1 \circ S$

Exercice 18 :

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

1. Détermine l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ dont l'affixe z vérifie la relation :
$$|2i\overline{z} - 1 - i| = \sqrt{2}$$
2. Soit T l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point $M \in \mathcal{P}$ d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = 2i\overline{z} - 1 - i$.
   (a) Montrer que T admet un point invariant Ω unique.
   (b) Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $\overrightarrow{\Omega M'} = 2\overrightarrow{\Omega M}$
   (c) Indiquer alors la nature et les éléments géométriques précis de l'application T
3. Utiliser la question 2 pour retrouver les résultats de la question 1 par une méthode géométrique.