20.5 Problèmes

Dans tous les exercices qui suivent, $\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

Exercice 19 :

Le plan $\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Soit $z \in \mathbb{C}$ l'affixe d'un point $M \in \mathcal{P}$

1. Quel est l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $|(1+i)\,z - 2i| = 2$
2. Etudier les transformations de $\mathcal{P}$ qui , à chaque point $M \in \mathcal{P}$ d'affixe $z \in \mathbb{C}$ fait correspondre le point $M' \in \mathcal{P}$ d'affixe $z' = (1+i)\,z - 2i$
3. Faire le lien entre les deux questions précédentes

20.5.1 Questions liées à la structure de l'ensemble des similitudes

Exercice 20 :

Cet exercice est en 2 parties, indépendantes, mais qui ont un thème commun

1. Soit S_0 la similitude directe définie par $S_0(z) = iz + 2$
   (a) i. Trouver toutes les similitudes directes qui commutent avec S_0
   ii. Déterminer le centre d'une telle similitude
   (b) Démontrer que l'ensemble des similitudes directes qui commutent avec S_0 est un sous-groupe de $\mathcal{S}im^+(\mathcal{P})$, groupe des similitudes directes de $\mathcal{P}$
   (c) Existe-t-il une similitude inverse qui commute avec S_0 ?
2. Soit T la translation définie par la relation $z' = z + 2$
   (a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{G}_T$ des similitudes qui commutent avec T
   (b) Démontrer que $\mathcal{G}_T$ est un sous-groupe du groupe $\mathcal{S}im(\mathcal{P})$, groupe des similitudes de $\mathcal{P}$
   (c) Généraliser aux translations $z' = z + b_0$ où $b_0 \in \mathbb{C}$

Exercice 21 :

Soit G un sous-groupe du groupe multiplicatif $(\mathbb{C}^*, \times)$

1. On appelle $\mathcal{G}^+$ l'ensemble des similitudes directes $z' = az + b$ où $a \in G$ et $b \in \mathbb{C}$. Démontrer que $\mathcal{G}^+$ est un sous-groupe du groupe $\mathcal{S}im^+$ des similitudes directes du plan
2. Dans cette partie de l'exercice, nous allons étendre la question précédente à $\mathcal{G}$ ensemble des similitude de S telles que :

$$S(z) = az + b \text{ ou } S(z) = a\overline{z} + b \text{ avec } a \in G \text{ et } b \in \mathbb{C}$$

   Nous appellerons toujours $\mathcal{G}^+$ l'ensemble des similitudes directes $z' = az + b$ où $a \in G$ et $\mathcal{G}^-$ l'ensemble des similitudes inverses $z' = a\overline{z} + b$ où $a \in G$
   (a) Nous commençons, dans cette question, par un groupe simple, le groupe multiplicatif des réels non nuls, c'est à dire $G = \mathbb{R}^*$. Est-ce que $\mathcal{G}$ est un groupe pour la composition des applications ?
   (b) Nous considérons, dans cette question le sous-groupe $\mathcal{U}$ de $(\mathbb{C}^*, \times)$ défini par :

$$G = \mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| = 1\}$$

   Est-ce que $\mathcal{G}$ est un groupe pour la composition des applications ?
   (c) On considère, cette fois ci le groupe $G = \{1; i; -i; -1\}$; Que dire du groupe $\mathcal{G}$?
   (d) Même étude pour le groupe $G = \{g \in \mathbb{C} \text{ tels que il existe } n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } g = (1+i)^n\}$

20.5.2 Problèmes de géométrie

Exercice 22 :

1. Soit φ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $\varphi(z) = \dfrac{i}{2}z + 1$. On considère la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$z_0 = 0 \text{ et } z_{n+1} = \varphi(z_n)$$
   (a) Rechercher un élément $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $z_{n+1} - \omega = \dfrac{i}{2}(z_n - \omega)$
   (b) En déduire une expression de z_n en fonction de n
2. $\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le point $M_n \in \mathcal{P}$ est l'image du complexe $z_n \in \mathbb{C}$.
   (a) Par quelle transformation affine passons-nous de M_n à M_{n+1} ?
   (b) Soit $A \in \mathcal{P}$ le point de coordonnées $\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$. Calculer, en fonction de $n \in \mathbb{N}$ AM_n, puis donner $\lim\limits_{n\to+\infty} AM_n$
   (c) Représenter les points A, M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

Exercice 23 :

Soit $\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

On donne des réels r et α avec $r > 0$ et $\alpha = \dfrac{5\pi}{2}$. On note u le nombre complexe de module r et d'argument α

1. On construit une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathcal{P}$ répondant aux conditions :
   - A_0 est l'origine du repère ;
   - A_1 est le point d'affixe i ;
   - Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, le point A_n est l'image de A_{n-2} par la similitude directe de centre A_{n-l} de rapport r et dont une mesure de l'angle est α

   On note z_n l'affixe du point A_n.
   (a) Écrire pour tout entier n supérieur ou égal à 2 une relation entre z_n, z_{n-1} et z_{n-2}
   (b) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, nous avons $z_n - z_{n-1} = (-u)^{n-1}\, i$
   (c) Déterminer l'expression de l'affixe z_n de A_n en fonction de n et de u.
2. (a) Montrer qu'il existe une similitude directe S et une seule telle que :
$$A_1 = S(A_0) \text{ et } A_2 = S(A_1)$$
   Préciser les éléments caractéristiques de S.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $A_{n+1} = S(A_n)$
   (c) On note $S_0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$ l'application identique de $\mathcal{P}$, et pour tout entier naturel n, on pose $S^{n+1} = S \circ S^n$. Soit $p \in \mathbb{N}$; montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+p} = S^n(A_p)$
   (d) Montrer que S^4 est une homothétie.
   (e) En déduire que les points A_n sont éléments d'un ensemble formé par la réunion de quatre droites que l'on précisera.
3. On suppose maintenant $r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On appelle Ω le centre de la similitude S.
   (a) Démontrer que pour tout entier naturel n. les vecteurs $\overrightarrow{\Omega A_{n+1}}$ et $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$ sont orthogonaux.
   (b) Représenter graphiquement les points A_0, A_1, A_2,. . . , A_9 dans le repère orthonormé $\mathcal{R}\left(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$
   (c) Calculer $\left\|\overrightarrow{\Omega A_n}\right\|$ en fonction de n et de $\left\|\overrightarrow{\Omega A_0}\right\|$. En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left\|\overrightarrow{\Omega A_n}\right\|$
   (d) Pour tout entier n, calculer $L_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\left\|\overrightarrow{A_iA_{i+1}}\right\|$ et étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n$

Exercice 24 :

Soit $\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

Sur la figure 20.6 ci-dessous dans le plan orienté, $AFED$ est un carré de côté 1 tel que l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}}\right)$ ait pour mesure $\frac{\pi}{2}$

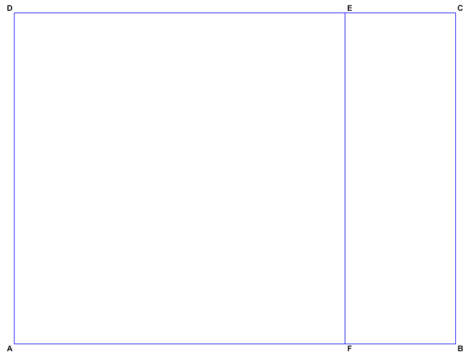

FIGURE 20.6 – La figure du problème proposé

Soit l avec $l > 1$, la longueur du segment $[AB]$ *(du rectangle $ABCD$).*

1. On suppose qu'il existe une similitude directe f telle que $f(A) = B$, $f(B) = C$, $f(C) = E$ et $f(D) = F$.

   Etablir qu'alors $l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. *(On suppose dans toute la suite que l garde cette valeur.)*
2. Quels sont l'angle et le rapport de la similitude f ?
3. Montrer que le centre de la similitude f est le point d'intersection des droites (AC) et (EB)
4. A tout point M d'affixe complexe z dans le repère $\mathcal{R}\left(A; \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}\right)$ on fait correspondre le point $g(M)$ d'affixe

   $$z' = \frac{\sqrt{5}-1}{2} iz + \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

   Montrer que g est une similitude dont on donnera le centre, l'angle, le rapport. Quelles sont les images par g de A, B, C, D ?

Exercice 25 :

$ABCD$ est un quadrilatère et α est un complexe de module $r > 0$ et d'argument θ. a, b, c, d représentent les affixes des points A, B, C et D dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

→ La similitude directe de centre A, de rapport r et d'angle θ transforme B en Q.
→ La similitude directe de centre B, de rapport r et d'angle θ transforme C en M.
→ La similitude directe de centre C, de rapport r et d'angle θ transforme D en N.
→ La similitude directe de centre D, de rapport r et d'angle θ transforme A en P.

On appellera q, m, n et p les affixes des points Q, M, N et P.

1. Déterminer q en fonction de α, a et b
2. (a) Montrer que : $MNPQ$ est un parallélogramme équivaut à $n + q = m + p$

   (b) En déduire que $MNPQ$ est un parallélogramme équivaut à $\alpha = \dfrac{1}{2}$ où $ABCD$ est un parallélogramme.

3. On suppose que $ABCD$ est un parallélogramme et que $\alpha = \dfrac{1+i}{2}$.En déduire que $MNPQ$ est un carré.

Exercice 26 :

Soit $\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.
On considère l'application F qui, à tout point $M \in \mathcal{P}$ d'affixe z associe le point M' d'affixe z' défini par :
.

$$z' = u^2 z + u - l$$

où u désigne un nombre complexe.

1. Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels F est une translation ; caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.
2. Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels F est une rotation d'angle de mesure $+\dfrac{\pi}{2}$ *(en radians)* ; caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.
3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels F est une homothétie de rapport -2 ; caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.
4. Caractériser F lorsque $u = 1 - i$.

Exercice 27 :

Soit $\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.
Soit θ un réel appartenant à l'intervalle $[0; \pi]$.
On considère l'application F_θ de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui, à un point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = (1 + \cos 2\theta + i \sin 2\theta)\, \overline{z} + 4 + 4i$$

1. Démontrer qu'il existe deux valeurs θ_0 et θ_1 de θ pour lesquelles F_θ est une isométrie.
2. Décomposer F_{θ_0} et F_{θ_1} en le produit d'une symétrie et d'une translation,
3. Discuter suivant les valeurs de θ de l'existence et l'unicité des points invariants par F_θ