20.6 Correction de quelques exercices

20.6.1 Applications directes du cours

Exercice 5 :

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère othonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On considère l'application $S : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ dont la définition analytique est :

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = & 2x + y - 1 \\ y' = & -x + 2y + 1 \end{array}\right.$$

1. *Démontrer que S est une similitude dont on donnera le rapport et l'unique point fixe*

   → Soit $\overrightarrow{S}$ l'endomorphisme associé à S. Alors, sa matrice dans la base orthonormée $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$ est donnée par :

   $$\mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}}\left(\overrightarrow{S}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Cette matrice est du type $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

   S est donc une similitude directe de rapport $k = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

   → Si $\Omega \in \mathcal{P}$ est un point fixe de S, alors $S(\Omega) = \Omega$ et ses coordonnées vérifient donc :

   $$\left\{\begin{array}{ll} x = & 2x + y - 1 \\ y = & -x + 2y + 1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x + y = & 1 \\ x - y = & 1 \end{array}\right.$$

   D'où nous tirons $x = 1$ et $y = 0$. Ainsi, $\Omega = (1, 0)$

2. *Démontrer que S transforme une droite (D) d'équation $y = ax + b$ en une droite (D_1) dont on donnera l'équation.*

   Soit (D) une droite d'équation $y = ax + b$; ainsi, si $M \in (D)$, les coordonnées de M sont $(x, ax + b)$; en posant (x', y') les coordonnées de $M' = S(M)$, nous avons :

   $$\left\{\begin{array}{ll} x' = & 2x + ax + b - 1 \\ y' = & -x + 2ax + 2b + 1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x' = & (2 + a)x + b - 1 \\ y' = & (2a - 1)x + 2b + 1 \end{array}\right.$$

   - Si $a = -2$, le système devient :

     $$\left\{\begin{array}{ll} x' = & b - 1 \\ y' = & -5x + 2b + 1 \end{array}\right.$$

     Ce qui montre que l'image de la droite $y = -2x + b$ par la similitude S est la droite $x = b - 1$

   - Maintenant si $a = \dfrac{1}{2}$, le système devient :

     $$\left\{\begin{array}{ll} x' = & \dfrac{5x}{2} + b - 1 \\ y' = & 2b + 1 \end{array}\right.$$

     Ce qui montre que l'image de la droite $y = \dfrac{x}{2} + b$ par la similitude S est la droite $y = 2b + 1$

   - Supposons maintenant $a \neq -2$ et $a \neq \dfrac{1}{2}$ alors, de

     $$\left\{\begin{array}{ll} x' = & (2 + a)x + b - 1 \\ y' = & (2a - 1)x + 2b + 1 \end{array}\right. \quad \text{nous tirons :} \quad \left\{\begin{array}{ll} x = & \dfrac{x' + (1 - b)}{a + 2} \\ x = & \dfrac{y' - (2b + 1)}{2a - 1} \end{array}\right.$$

Et donc, nous avons :

$$\frac{x'+(1-b)}{a+2}=\frac{y'-(2b+1)}{2a-1}\Longleftrightarrow (2a-1)\,(x'+(1-b))=(a+2)\,(y'-(2b+1))$$

Ainsi la droite (D) d'équation $y=ax+b$ a pour image la doite (D_1) d'équation :

$$(2a-1)\,x-(a+2)\,y+(2a-1)\,(1-b)+(a+2)\,(2b+1)=0$$

Nous pouvons remarque que si $a=\frac{1}{2}$ nous retrouvons dans l'équation ci-dessus

$$-\frac{5}{2}y+\frac{5}{2}\,(2b+1)=0$$

C'est à dire $y=2b+1$
Nous aurions le même résultat si $a=-2$.

Exercice 6 :

Le plan $\mathcal{P}$ étant un plan affine euclidien rapporté à un repère othonormé $\mathcal{R}\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$. On considère l'application $f:\mathcal{P}\longrightarrow\mathcal{P}$ dont la définition analytique est :

$$\left\{\begin{array}{ll} x'= & x-3y-3\\ y'= & -3x-y+1\end{array}\right.$$

On peut remarquer que si $\overrightarrow{f}$ est l'application linéaire associée à f alors, la matrice de $\overrightarrow{f}$ dans la base orthonormée $\left\{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right\}$ est donnée par $\begin{pmatrix}1&-3\\-3&-1\end{pmatrix}$.
Nous voyons de suite que f est une similitude inverse de rapport $\sqrt{10}$

1. *Démontrer qu'il existe 2 droites (D) et (Δ) et 2 seulement invariantes par f*

   Soit (D) une droite invariante par f. Cette droite a pour équation $y=ax+b$. Ainsi, si $M\in(D)$, ses coordonnées vérifient $M\,(x,ax+b)$ et si $M'\,(x',y')$ est tele que $M'=f\,(M)$, nous avons alors $y'=ax'+b$.
   En utilisant la définition analytique, nous avons :

$$\left\{\begin{array}{ll} x'= & x-3\,(ax+b)-3\\ y'= & -3x-(ax+b)+1\end{array}\right.\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{ll} x'= & (1-3a)\,x-3\,(b+1)\\ y'= & -(a+3)\,x+1-b\end{array}\right.$$

   Et donc :

$$\begin{array}{rl} y'=ax'+b\Longleftrightarrow & -(a+3)\,x+1-b=a\,[(1-3a)\,x-3\,(b+1)]+b\\ \Longleftrightarrow & -(a+3)\,x+1-b=a\,(1-3a)\,x-3a\,(b+1)+b\end{array}$$

   En identifiant, nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{rl} -(a+3)= & a\,(1-3a)\\ 1-b= & b-3a\,(b+1)\end{array}\right.\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rl} 3a^2-2a-3= & 0\\ 1-b= & b-3a\,(b+1)\end{array}\right.$$

   De la première équation, nous obtenons 2 solutions pour a ; d'une part $a_1=\frac{1+\sqrt{10}}{3}$ et $a_2=\frac{1-\sqrt{10}}{3}$ et de la second équation, nous tirons $b=\frac{3a+1}{2-3a}$. Ainsi :
   $\rightarrow$ Si $a=\frac{1+\sqrt{10}}{3}$ alors $b=-\frac{4+\sqrt{10}}{3}$ et l'équation de (D) est donc $y=\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right)x-\frac{4+\sqrt{10}}{3}$
   $\rightarrow$ Si $a=\frac{1-\sqrt{10}}{3}$ alors $b=-\frac{4-\sqrt{10}}{3}$ et l'équation de (Δ) est donc $y=\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}\right)x-\frac{4-\sqrt{10}}{3}$

2. *Démontrer que (D) et (Δ) sont perpendiculaires et donner les coordonnées du point d'intersection I.*
   - En collège, vous avez dû voir que 2 droites étaient perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs était égal à -1. Or :

   $$\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right) \times \left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right) = \frac{1-10}{9} = -1$$

   Les 2 droites sont bien perpendiculaires
   - L'abscisse du point d'intersection vérifie :

   $$\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right)x - \frac{4+\sqrt{10}}{3} = \left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}\right)x - \frac{4-\sqrt{10}}{3} \Longleftrightarrow \frac{2\sqrt{10}}{3}x = \frac{2\sqrt{10}}{3} \Longleftrightarrow x = 1$$

   En remplaçant x par sa valeur, nous trouvons $y = -1$. Le point I est donc $I\,(1;-1)$
   On peut remarquer que I est aussi le point invariant de f

Exercice 7 :

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien. Nous considérons un triangle ABC rectangle en A et de hauteur AH. On désigne par r_1, r_2 et r_3, les rayons des cercles inscrits aux triangles ABC, ABH et ACH. Il faut montrer que $r_1^2 = r_2^2 + r_3^2$. Pour le démontrer, répondons aux questions suivantes :

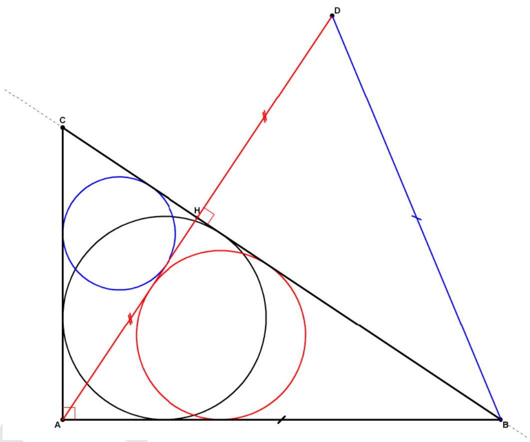

FIGURE 20.7 – Pour commencer, faisons une figure

1. *Soit D le symétrique de A par rapport à la droite (BC). Montrer que les triangles HBD et ABC sont semblables*

2. *Soit S la similitude de rapport $k > 0$ qui transforme le triangle ABC en HBD. Evaluer k en fonction de BA et BC. En déduire que $r_2 = \dfrac{BA}{BC}r_1$*

   Nous faisons la correction de ces 2 questions en même temps

   → Comme D est le symétrique de A dans la symétrie orthogonale par rapport à la droite (BC), nous avons

   $$AB = BD \text{ et } HA = HD$$

   Les 2 triangles HBA et HDB sont donc isométriques

   → En termes d'angles non orientés, nous avons $\widehat{HBA} = \widehat{HBD}$
   Comme les triangles HBD et ABC sont rectangles respectivement en H et en$A$, nous avons, toujours en termes d'angles non orientés $\widehat{ACB} = \widehat{HDB}$

— Ceci démontre que les 2 triangles ABC et HDB sont semblables et qu'il existe donc une similitude *(directe ou inverse)* qui transforme le triangle CAB en le triangle DHB et cette homothétie a pour rapport $\dfrac{DB}{BC} = \dfrac{AB}{BC}$

→ Le cercle inscrit au triangle ABC est transformé en le cercle inscrit au triangle HBD. Comme les triangles HBD et HAB sont isométriques, le rayon de leur cercle inscrit est le même. Ainsi, nous avons :

$$r_2 = \frac{AB}{BC} r_1$$

3. *Pourquoi avons nous $r_3 = \dfrac{AC}{BC} r_1$?*

   Considérons, maintenant, les triangles rectangles CAB et CHA

   Ils ont un angle commun, l'angle $\widehat{ACH}$ et donc, en termes d'angles non orientés, nous avons $\widehat{CAH} = \widehat{CBA}$

   Les triangles CHA et CAB sont donc semblables et le rapport de la similitude est donc $\dfrac{CA}{BC}$, et comme précédemment, $r_3 = \dfrac{AC}{BC} r_1$

4. *Montrer que $\left(\dfrac{BA}{BC}\right)^2 + \left(\dfrac{AC}{BC}\right)^2 = 1$.*

   D'après le théorème de Pythagorre, nous avons $BC^2 = AC^2 + AB^2$, et donc, en divisant par BC^2, nous obtenons :

$$\left(\frac{BA}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = 1$$

5. *En déduire l'égalité demandée*

   Ainsi $r_2^2 + r_3^2 = \left(\dfrac{BA}{BC} r_1\right)^2 + \left(\dfrac{AC}{BC} r_1\right)^2 = r_1^2 \left(\left(\dfrac{BA}{BC}\right)^2 + \left(\dfrac{AC}{BC}\right)^2\right) = r_1^2$

   Ce que nous voulions

20.6.2 Définition complexe des similitudes planes

Exercice 10 :

On considère 2 transformations du plan $\mathcal{P}$ appelées T_1 et T_2 qui associent respectivement au point $M \in \mathcal{P}$ d'affixe $z \in \mathbb{C}$ le point $M_1 = T_1(M)$ et le point $M_2 = T_2(M)$ d'affixe $z_1 = \left(-1 + i\sqrt{3}\right) z$ et $z_2 = \dfrac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right) z$

1. *Quelle est la nature de ces deux transformations ? Donner leurs éléments respectifs*

   Voilà une question qui n'est pas très difficile et totalement calculatoire

   - **Nature de T_1**

     → Le point fixe est évidemment l'origine du repère O

     → Le rapport de la similitude est $\left|-1 + i\sqrt{3}\right| = 2$ et comme $\left(-1 + i\sqrt{3}\right) = 2\left(\dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ l'angle de la similitude est donc $\dfrac{2\pi}{3}$

     → T_1 peut aussi s'écrire, dans les complexes $z_1 = 2e^{\frac{2i\pi}{3}} z$

   - **Nature de T_2**

     → Le point fixe est évidemment, une nouvelle fois, l'origine du repère O

     → Le rapport de la similitude est $\left|\dfrac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)\right| = 1$ et l'angle de la similitude est donc $\dfrac{\pi}{3}$

     → T_1 peut aussi s'écrire, dans les complexes $z_1 = e^{\frac{i\pi}{3}} z$. T_2 est une rotation de centre O et d'angle $\dfrac{i\pi}{3}$

2. *Exprimer, en fonction de z, l'affixe de l'image de M par la transformation composée $T_2 \circ T_l$ et donner les éléments de cette transformation*

   Pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous avons, en assimilant T_1 et T_2 à leurs fonctions complexes :

$$\begin{aligned} T_2 \circ T_l(z) = T_2\left[T_l(z)\right] &= \frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)T_l(z) \\ &= \frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(-1+i\sqrt{3}\right)z \\ &= -2z = 2e^{i\pi}z \end{aligned}$$

   $T_2 \circ T_l$ est donc une similitude directe de rapport 2 et d'angle π.

Exercice 11 :

Dans le plan complexe, au point $M \in \mathcal{P}$, d'affixe z, on fait correspondre le point M' d'affixe Z, par la transformation T_k définie par :

$$Z = kiz + 1 + k^2$$

k étant un paramètre réel strictement positif et i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. *Quelle est la nature de la transformation T_k ?*

   Clairement, T_k est une similitude directe
   - Le point invariant de T_k est donné par :

$$\omega_k = \frac{k^2}{1-ik} = \frac{(1+ik)\,k^2}{1+k^2}$$

   - Le rapport de la similitude T_k est k et l'angle est $\frac{\pi}{2}$
2. *Déterminer l'ensemble des points ω_k lorsque k décrit l'ensemble des réels positifs.*

   En posant $\Omega_k(x_k, y_k)$ le point d'affixe ω_k, nous avons :

$$\left\{\begin{array}{rl} x_k = & \dfrac{k^2}{1+k^2} \\ y_k & \dfrac{k^3}{1+k^2} \end{array}\right. \quad \text{avec } k > 0$$

   Nous sommes, là, devant une vraie courbe paramétrée.
   Remarquons, tout d'abord, que si $k > 0$ alors $0 < x_k < 1$ et $0 < y_k$, y_k pouvant être infini.
   D'autre part, de $x_k = \frac{k^2}{1+k^2}$, nous tirons $k = \sqrt{\frac{x_k}{1-x_k}}$ qui est tout à fait cohérent avec la condition $0 < x_k < 1$, d'où nous tirons $y_k = x_k\sqrt{\frac{x_k}{1-x_k}}$.

   L'ensemble des points ω_k est donc la courbe d'équation cartésienne $y = x\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ avec $0 < x < 1$

   (cf la courbe dans la figure 20.8)
3. *k_1 et k_2 étant deux réels strictement positifs, on considère les transformations $T_{k_2} \circ T_{k_1}$ et $T_{k_1} \circ T_{k_2}$ Montrer que $T_{k_2} \circ T_{k_1} = T_{k_1} \circ T_{k_2}$ si et seulement si $k_1 = k_2$*

   Comme tout à l'heure, nous assimilons T_{k_2} et T_{k_1} à leurs fonctions complexes.
   - Etudions d'abord $T_{k_1} \circ T_{k_2}(z)$

$$\begin{aligned} T_{k_1} \circ T_{k_2}(z) = T_{k_1}\left[T_{k_2}(z)\right] &= k_1 i T_{k_2}(z) + k_1^2 \\ &= k_1 i\left(k_2 iz + k_2^2\right) + k_1^2 \\ &= -k_1k_2z + k_1k_2^2 i + k_1^2 \end{aligned}$$

     Nous avons donc $T_{k_1} \circ T_{k_2}(z) = -k_1k_2z + \left(k_1^2 + k_1k_2^2 i\right)$
   - De manière symétrique, nous avons $T_{k_2} \circ T_{k_1}(z) = -k_2k_1z + \left(k_2^2 + k_2k_1^2 i\right)$

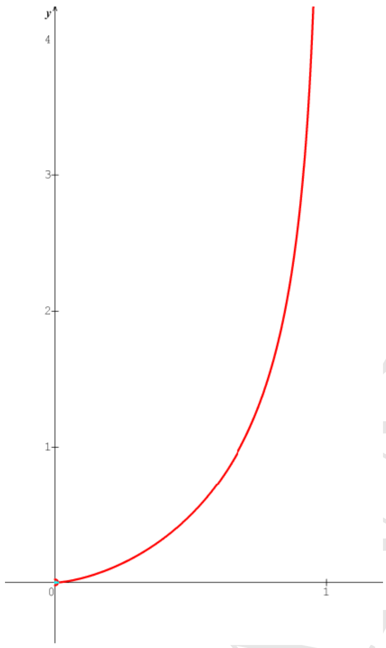

FIGURE 20.8 – Graphe de l'ensemble décrit par les ω_k où $k > 0$

Ces 2 transformations sont égale, si et seulement si, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$-k_1k_2z + k_1k_2^2i + k_1^2 = -k_2k_1z + \left(k_2^2 + k_2k_1^2i\right) \Longleftrightarrow k_1k_2^2i + k_1^2 = k_2^2 + k_2k_1^2i$$

En identifiant parties réelles et imaginaires, nous avons :

$$k_1k_2^2 = k_2k_1^2 \text{ et } k_1^2 = k_2^2 \Longleftrightarrow k_1 = k_2$$

Donc, $T_{k_2} \circ T_{k_1} = T_{k_1} \circ T_{k_2}$ si et seulement si $k_1 = k_2$

4. *Quelle est la nature de la transformation $T_k \circ T_k$?*

D'après les calculs faits, nous avons $T_k \circ T_k\,(z) = -k^2z + \left(k^2 + k^3i\right)$

$T_k \circ T_k$ est une similitude directe *(La composée de 2 similitudes directes est une similitude directe)*

- Le point invariant de T_k est donné par : $\omega_k = \dfrac{k^2\,(1+ik)}{1+k^2}$, puisque

$$T_k \circ T_k\,(\omega_k) = T_k\,[T_k\,(\omega_k)] = T_k\,(\omega_k) = \omega_k$$

- Le rapport de la similitude T_k est k^2 et l'angle est π

Exercice 12 :

Soit $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1. *On considère l'application f de $\mathcal{P}$ dans lui-même qui, à tout point M de coordonnées (x, y) fait correspondre le point M' de coordonnées (x', y') définies par :*

$$\begin{cases} x' = & x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y' = & x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases}$$

Déterminer le point double de f (ou point invariant de f)

Un point invariant de f est un point $M\,(x, y)$ tel que $M' = f\,(M) = M$. Les coordonnées vérifient donc le système d'équations :

$$\begin{cases} x = & x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y = & x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 = & -y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ 0 = & x\sqrt{3} - \sqrt{3} \end{cases} \Longleftrightarrow x = 1 \text{ et } y = 2$$

Le point invariant est donc $\Omega\,(1; 2)$

2. *On désigne par $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$ les affixes des points M et M'. Montrer que z et z' sont par une relation du type :*
$$z' - z_0 = a\,(z - z_0)$$
où a et z_0 sont des nombres complexes que l'on déterminera. Caractériser alors la transformation f.

Je présente 2 méthodes de résolution qui diffèrent peu entre elles

(a) **Première méthode**

Faisons ici, une petite incise

Dans la définition analytique de f, nous avons la partie linéaire qui est donnée par la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
C'est la matrice d'une similitude directe de rapport 2 et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$

La forme $z' - z_0 = a\,(z - z_0)$ est la forme réduite d'une similitude directe dans laquelle z_0 est l'affixe du point invariant ; donc, ici, $z_0 = 1 + 2i$.

De la remarque ci-dessus, $a = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. La représentation complexe de f est donc :
$$z' - (1 + 2i) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\,(z - (1 + 2i))$$

(b) **Seconde méthode**

Nous partons de la définition analytique :
$$\begin{cases} x' = & x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y' = & x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases}$$
En multipliant la seconde ligne par le nombre complexe i, nous obtenons :
$$\begin{aligned} x' + iy' &= \left(x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\right) + i\left(x\sqrt{3} + y - \sqrt{3}\right) \\ &\iff \\ z' &= x\left(1 + i\sqrt{3}\right) - y\left(\sqrt{3} - i\right) + \left(2\sqrt{3} - i\sqrt{3}\right) \\ &\iff \\ z' &= \left(1 + i\sqrt{3}\right)z + \left(2\sqrt{3} - i\sqrt{3}\right) \end{aligned}$$
La forme complexe de f est donc donnée par $z' = \left(1 + i\sqrt{3}\right)z + \left(2\sqrt{3} - i\sqrt{3}\right)$, d'où on retrouve facilement rapport, angle et point fixe $z_0 = \dfrac{\sqrt{3}\,(2 - i)}{-i\sqrt{3}} = 1 + 2i$

Et donc, nous avons, très facilement :
$$z' - (1 + 2i) = \left(1 + i\sqrt{3}\right)(z - (1 + 2i))$$
On peut remarquer que $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\sqrt{\pi}}{3}\right)$

Exercice 13 :

Le plan $\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

On considère les points A et B qui ont respectivement pour coordonnées $(1, 0)$ et $(-1, 0)$ et la droite D passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{j}$

Soit S la similitude directe dont le centre est B, dont l'angle est $+\dfrac{\pi}{2}$ et dont le rapport est $\dfrac{1}{2}$

Nous appellerons $a = 1$ l'affixe du point $A\,(1, 0)$ et $b = -1$ l'affixe du point $B\,(-1, 0)$

1. (a) *Déterminer $A' = S(A)$.*

Nous allons rechercher la forme complexe de S, et ce n'est pas trop difficile. Nous allons utiliser la forme réduite :

$$z' - b = \frac{e^{\frac{i\pi}{2}}}{2}(z-b) \Longleftrightarrow z'+1 = \frac{i}{2}(z+1) \Longleftrightarrow z' = \frac{i}{2}z - 1 + \frac{i}{2}$$

Et donc, si a' est l'affixe du point $A' = S(A)$, nous avons :

$$a' = \frac{i}{2}a - 1 + \frac{i}{2} = -1 + i$$

Ce qui veut dire que $A' = S(A)$ a pour coordonnées $A'(-1, 1)$

(b) *Montrer que l'ensemble des images M' des points $M \in D$ par S est une droite D' qui coupe D en un point I,*

⋆ Il est intéressant de donner la définition complexe de D.
Si $M \in D$, alors $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{j}$, et si $z \in \mathbb{C}$ est l'affixe de M, nous avons :

$$z - 1 = \lambda i \Longleftrightarrow z = 1 + \lambda i$$

Ainsi, tous les points $M \in D$ ont pour affixe $z = 1 + \lambda i$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

⋆ Comme $A \in D$, nous avons $A' = S(A) \in D'$

⋆ L'image d'un point $M \in D$ est un point M' d'affixe $z' = \frac{i}{2}(1+\lambda i) - 1 + \frac{i}{2} = i - \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)$.
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{A'M'}$ est donné par $z' - a'$, c'est à dire :

$$z' - a' = i - \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) - (-1+i) = -\frac{\lambda}{2}$$

Ce qui veut dire que la droite D' est une droite passant par A' et de vecteur directeur $\overrightarrow{i}$

(c) *Déterminer $I' = S(I)$*

Clairement, I a pour coordonnées $(1;1)$ et a donc pour affixe $z = 1 + i$ d'où l'affixe de I' est donc $z' = \frac{i}{2}(1+i) - 1 + \frac{i}{2} = -\frac{3}{2} + i$, et donc I' a pour coordonnées $\left(-\frac{3}{2}; 1\right)$

(d) *Démontrer que, pour tout $M \in D$, si $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AI}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\overrightarrow{A'M'} = \lambda\overrightarrow{A'I'}$*

Nous savons que S est une similitude ; soit $\overrightarrow{S}$ l'application linéaire associée à S.
Pour tout point $M \in D$, nous avons $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AI}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, puisque A, I, et M sont sur D. Donc :

$$\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{S(A)S(M)} = \overrightarrow{S}\left(\overrightarrow{AM}\right) = \overrightarrow{S}\left(\lambda\overrightarrow{AI}\right) = \lambda\overrightarrow{S}\left(\overrightarrow{AI}\right) = \lambda\overrightarrow{S(A)S(I)} = \lambda\overrightarrow{A'I'}$$

2. *Soit $M"$ le barycentre des points M et M' respectivement affectés des coefficients 2 et -1.*

(a) *Démontrer que $M"$ est l'image de M dans une similitude directe S_1 de centre B*

En reprenant la théorie du calcul barycentrique, pour tout point $X \in \mathcal{P}$, nous avons $\overrightarrow{XM"} = 2\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XM'}$, et en particulier lorsque X est l'origine O, nous avons $\overrightarrow{OM"} = 2\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM'}$, ce qui fait, qu'en passant aux affixes, nous avons :

$$\begin{aligned} z" = 2z - z' \Longleftrightarrow \quad & z" = 2z - \left(\frac{i}{2}z - 1 + \frac{i}{2}\right) \\ \Longleftrightarrow \quad & z" = \left(2 - \frac{i}{2}\right)z + 1 - \frac{i}{2} = \left(2 - \frac{i}{2}\right)z + 2 - \frac{i}{2} - 1 \\ \Longleftrightarrow \quad & z" + 1 = \left(2 - \frac{i}{2}\right)(z+1) \end{aligned}$$

L'application qui à $z \in \mathbb{C}$ fait correspondre $z"$ tel que $z" + 1 = \left(2 - \frac{i}{2}\right)(z+1)$ est une similitude directe S_1, dont le centre est le point d'affixe b, c'est à dire B

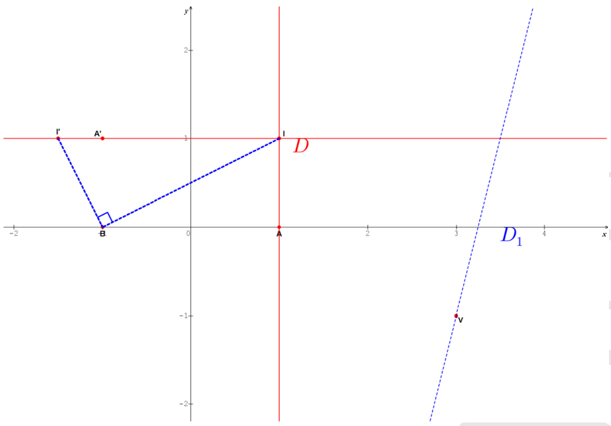

FIGURE 20.9 – La figure du problème proposé

(b) *Démontrer que l'ensemble des points $M" = S_1(M)$ images des points $M \in D$ est une droite D_1 que l'on déterminera.*

Tout point $M \in D$ a pour affixe $z = 1 + \lambda i$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, si $M" = S_1(M)$, l'affixe $z"$ de $M"$ est donnée par :

$$z" = \left(2 - \frac{i}{2}\right)(2 + \lambda i) - 1 = 2\left(2 - \frac{i}{2}\right) - 1 + \lambda i\left(2 - \frac{i}{2}\right) = (3 - i) + \lambda\left(\frac{1}{2} + 2i\right)$$

Ainsi, D_1 est la droite passant par le point $V(3; -1)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$

Exercice 17 :

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

1. (a) *Soit T_1 la transformation du plan $\mathcal{P}$ qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' d'affixe : $z' = (i-1)\overline{z} + 3$ Quelle est la nature de T_1 et, s'il existe, quel en est son centre Ω ?*

   De manière évidente, T_1 est une similitude inverse.

   Comme $|i - 1| = \sqrt{2}$, T_1 admet un point fixe Ω d'affixe $\omega = \dfrac{3(i-1)+3}{1-2} = -3i$. Donc, les coordonnées de Ω sont $(0; -3)$

   (b) *Soit S la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\left(O, \vec{i}\right)$. Quelle est la nature de la transformation $T_1 \circ S$?*

   S en tant que symétrie orthogonale est une similitude inverse. La composée de 2 similitudes inverses est une similitude directe ; donc $T_1 \circ S$ est une similitude directe.
   La définition complexe de S est $S(z) = \overline{z}$ et nous avons :

$$T_1 \circ S(z) = T_1[S(z)] = (i-1)\overline{S(z)} + 3 = (i-1)z + 3$$

   Le centre de la similitude est donné par $c = \dfrac{3}{1-(i-1)} = \dfrac{3}{2-i} = \dfrac{3}{5}(2+i)$, le rapport est $\sqrt{2}$ et l'angle $-\dfrac{\pi}{4}$

2. *Soit T_2 la similitude directe ayant pour centre le point B d'affixe $3 + i$, pour rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et pour mesure $\dfrac{\pi}{4}$.Caractériser la transformation $T_2 \circ T_1 \circ S$*

   Tout d'abord, comme $T_1 \circ S$ est une similitude directe, que T_2 en est aussi une, $T_2 \circ T_1 \circ S$ est une similitude directe.

T_2 a pour expression complexe :

$$z' - (3+i) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} (z - (3+i))$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$z' - (3+i) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2} \right) (z - (3+i))$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$z' = \frac{1}{2} (1+i) (z - (3+i)) + (3+i)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$z' = \frac{1}{2} ((1+i) z - (3+i)(1-i))$$

Il suffit, maintenant de remplacer :

$$\begin{aligned} T_2 \circ T_1 \circ S(z) &= \frac{1}{2} ((1+i) T_1 \circ S(z) - (3+i)(1-i)) \\ &= \frac{1}{2} ((1+i)((i-1) z + 3) - (3+i)(1-i)) \\ &= z + \frac{1}{2} (-1+5i) \end{aligned}$$

Ainsi, $T_2 \circ T_1 \circ S$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{U}$, d'affixe $\frac{1}{2}(-1+5i)$

20.6.3 Problèmes

Exercice 18 :

Le plan $\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Soit $z \in \mathbb{C}$ l'affixe d'un point $M \in \mathcal{P}$

1. *Quel est l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $|(1+i)z - 2i| = 2$*

   Nous avons :

$$|(1+i)z - 2i| = 2 \Longleftrightarrow |1+i| \left| z - \frac{2i}{1+i} \right| = 2 \Longleftrightarrow |z - (1+i)| = \sqrt{2}$$

   L'ensemble des points M est donc un cercle de centre le point Ω d'affixe $\omega = 1+i$ et de rayon $\sqrt{2}$

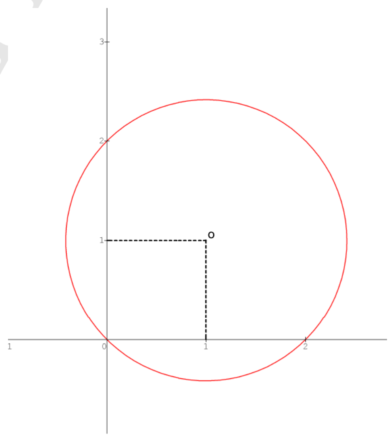

FIGURE 20.10 – L'ensemble des points M est le cercle de centre $(1;1)$ et de rayon $\sqrt{2}$

2. *Etudier les transformations de $\mathcal{P}$ qui , à chaque point $M \in \mathcal{P}$ d'affixe $z \in \mathbb{C}$ fait correspondre le point $M' \in \mathcal{P}$ d'affixe $z' = (1+i)\, z - 2i$*

   Cette transformation est une similitude directe de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et de point fixe $I = \dfrac{-2i}{1-(1+i)} = 2$

3. *Faire le lien entre les deux questions précédentes*

   Dans la première question, il nous a été demandé de trouver les $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z'| = 2$.
   Il nous était, en fait, demandé de trouver les antécédents du crcle de centre O et de rayon 2.
   Ainsi, c'est le cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{2}$ qui est l'ensemble des antécédents du cercle de centre O et de rayon 2

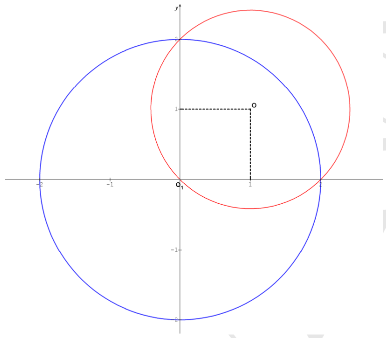

FIGURE 20.11 – Le cercle bleu est le cercle image du cercle rouge par la similitude directe

Exercice 19 :

1. *Soit S_0 la similitude directe définie par $S_0(z) = iz + 2$*

   (a) i. *Trouver toutes les similitudes directes qui commutent avec S_0*

   Soit T une similitude directe $T(z) = az + b$ qui commute avec S_0. Nous avons alors $T \circ S_0 = S_0 \circ T$. Nous avons alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

   $$T \circ S_0(z) = aS_0(z) + b = a(iz+2) + b = aiz + 2a + b$$

   Et

   $$S_0 \circ T(z) = iT(z) + 2 = i(az+b) + 2 = aiz + bi + 2$$

   Ainsi :

   $$T \circ S_0(z) = S_0 \circ T(z) \iff aiz + 2a + b = aiz + bi + 2 \iff 2a + b = bi + 2 \iff b = (1-a)(1+i)$$

   Et donc les similitudes T_a qui commutent avec S_0 sont du type $T_a(z) = az + (1-a)(1+i)$ avec $a \in \mathbb{C}^*$

   ii. *Déterminer le centre d'une telle similitude*

   Le centre d'une telle similitude est donné par $C_a = \dfrac{(1-a)(1+i)}{1-a} = 1+i$. Ainsi, toutes les similitudes T_a qui commutent avec S_0 ont-elles le même centre : le point d'affixe $C_a = 1+i$.
   Remarquons que C_a est aussi le centre de la similitude S_0 et que S_0 est une similitude T_a particulière : $S_0 = T_i$

   (b) *Démontrer que l'ensemble des similitudes directes qui commutent avec S_0 est un sous-groupe de $Sim^+(\mathcal{P})$, groupe des similitudes directes de $\mathcal{P}$*

   On appelle $\mathcal{H}$ l'ensemble des similitudes directes qui commutent avec S_0. Nous avons donc :

   $$\mathcal{H} = \{T_a \text{ avec } a \in \mathbb{C}\}$$

   Nous allons démontrer que $(\mathcal{H}, \circ)$ est **un groupe commutatif**

⇒ Premièrement, $\mathcal{H} \neq \emptyset$ puisque $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}} = T_1 \in \mathcal{H}$

⇒ La loi $\circ$ est toujours associative

⇒ <u>La composition des applications est une loi interne</u>

Nous allons utiliser 2 méthodes pour le démontrer.

⋆ **Une première méthode qui utilise la structure de $\mathcal{H}$.**

Soient $T_a \in \mathcal{H}$ et $T_b \in \mathcal{H}$; alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous avons :

$$\begin{aligned} T_a \circ T_b(z) = T_a(T_b(z)) &= aT_b(z) + (1-a)(1+i) \\ &= a(bz + (1-b)(1+i)) + (1-a)(1+i) \\ &= abz + a(1-b)(1+i) + (1-a)(1+i) \\ &= abz + (1+i)(a - ab + 1 - a) \\ &= abz + (1-ab)(1+i) = T_{ab}(z) \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons $T_a \circ T_b = T_{ab}$

⋆ **Une seconde méthode, beaucoup plus générale**

Soient $f \in \mathcal{H}$ et $g \in \mathcal{H}$; il faut montrer que $f \circ g \in \mathcal{H}$

Par hypothèses, nous avons $f \circ S_0 = S_0 \circ f$ et $g \circ S_0 = S_0 \circ g$, donc :

$$(f \circ g) \circ S_0 = f \circ (g \circ S_0) = f \circ (S_0 \circ g) = (f \circ S_0) \circ g = (S_0 \circ f) \circ g = S_0 \circ (f \circ g)$$

Donc, $f \circ g$ commute avec S_0 et donc $f \circ g \in \mathcal{H}$

⇒ <u>Chaque élément admet un inverse dans $\mathcal{H}$</u>

Toujours 2 méthodes :

⋆ La première consiste à utiliser le résultat vu dans la question précédente : $T_a \circ T_b = T_{ab}$

Comme $a \neq 0$, $T_{\frac{1}{a}}$ existe et $T_a \circ T_{\frac{1}{a}} = T_1 = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$

Donc $(T_a)^{-1} = T_{\frac{1}{a}}$

⋆ La seconde méthode consiste à dire que si $f \in \mathcal{H}$, alors f est bijective, mais avons nous $f^{-1} \in \mathcal{H}$?

De l'hypothèse $f \circ S_0 = S_0 \circ f$, nous déduisons :

$$\begin{gathered} f \circ S_0 \circ f^{-1} = S_0 \circ f \circ f^{-1} \text{ (Composition à droite)} \\ \Longleftrightarrow \\ f \circ S_0 \circ f^{-1} = S_0 \\ \Longleftrightarrow \\ f^{-1} \circ f \circ S_0 \circ f^{-1} = f^{-1} \circ S_0 \text{ (Composition à gauche)} \\ \Longleftrightarrow \\ S_0 \circ f^{-1} = f^{-1} \circ S_0 \end{gathered}$$

Et donc $f^{-1} \in \mathcal{H}$

<u>**On vient de montrer, ici, un résultat plus général :**</u>

<u>**Soit $(G, \star)$ un groupe et $s_0 \in G$. Alors, l'ensemble des éléments qui commutent avec s_0 est un sous groupe de $(G, \star)$**</u>

⇒ <u>$\mathcal{H}$ est un groupe commutatif</u>

En effet : $T_a \circ T_b = T_{ab} = T_{ba} = T_b \circ T_a$

(c) *Existe-t-il une similitude inverse qui commute avec S_0 ?*

<u>**Excellente question !!**</u>

S'il existe une similitude inverse I qui commute avec S_0, nous avons $I(z) = a\overline{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $I \circ S_0 = S_0 \circ I$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous avons :

⋆ $I \circ S_0(z) = a\overline{S_0(z)} + b = a\overline{(iz+2)} + b = -ia\overline{z} + 2a + b$

⋆ $S_0 \circ I(z) = iI(z) + 2 = i(a\overline{z} + b) + 2 = ia\overline{z} + 2 + ib$

⋆ D'où nous tirons :

$$-ia\overline{z} + 2a + b = ia\overline{z} + 2 + ib \Longleftrightarrow 2ia\overline{z} + 2(1-a) + b(i-1) = 0$$

Ce qui nous conduit à écrire $2ia = 0 \Longrightarrow a = 0$, ce qui est impossible puisque si $a = 0$, I n'est plus une similitude.

Il n'existe donc pas de similitude inverse qui commute avec S_0

2. *Soit T la translation définie par la relation $z' = z + b_0$ où $b_0 \in \mathbb{C}$*

(a) *Déterminer l'ensemble $\mathcal{G}_T$ des similitudes qui commutent avec T*

→ Quelles sont les similitudes directes qui commutent avec T ?
Soit $S(z) = az + b$ une telle similitude. Alors :

$$S \circ T(z) = S[T(z)] = aT(z) + b = a(z + b_0) + b = az + ab_0 + b$$

Et

$$T \circ S(z) = T[S(z)] = S(z) + b_0 = az + b + b_0$$

De $S \circ T = T \circ S$, nous tirons $az + ab_0 + b = az + b + b_0 \iff ab_0 = b_0 \iff b_0(a-1) = 0$.
Ainsi :

⋆ Si $b_0 = 0$, ceci signfie que $a \in \mathbb{C}$ et que $T = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$, et nous ne devrions pas être étonnés que toutes les similitudes directes commutent avec T !!

⋆ Si $b_0 \neq 0$, alors $a = 1$ et $S(z) = z + b$ où $b \in \mathbb{C}$. S est donc une translation du plan. Donc, les seules similitudes directes qui commutent avec T sont toutes les translations.

→ Quelles sont les similitudes inverses qui commutent avec T ?
Soit $S_i(z) = a\overline{z} + b$ une telle similitude. Alors :

$$S_i \circ T(z) = S_i[T(z)] = a\overline{T(z)} + b = a\overline{(z + b_0)} + b = a\overline{z} + a\overline{b_0} + b$$

Et

$$T \circ S_i(z) = T[S_i(z)] = S_i(z) + b_0 = a\overline{z} + b + b_0$$

De $S_i \circ T = T \circ S_i$, nous tirons $a\overline{z} + a\overline{b_0} + b = a\overline{z} + b + b_0 \iff a\overline{b_0} = b_0 \iff b_0(a-1) = 0$.
Ainsi :

⋆ Si $b_0 = 0$, ceci signfie que $a \in \mathbb{C}$ et que $T = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$, et nous ne devrions pas être étonnés que toutes les similitudes inverses commutent avec T !!

⋆ Si $b_0 \neq 0$, alors $a = \dfrac{b_0}{\overline{b_0}}$ et $S_i(z) = \dfrac{b_0}{\overline{b_0}}\overline{z} + b$ où $b \in \mathbb{C}$. Comme $\left|\dfrac{b_0}{\overline{b_0}}\right| = 1$, S_i est donc une isométrie négative du plan, c'est à dire une symétrie glissée.
Donc, les seules similitudes inverses qui commutent avec T forment une famille de symétries orthogonales, famille indexée par $b \in \mathbb{C}$

(b) *Démontrer que $\mathcal{G}_T$ est un sous-groupe du groupe $\mathcal{S}im(\mathcal{P})$, groupe des similitudes de $\mathcal{P}$*

Nous appelons donc $\mathcal{G}_T$ l'ensemble des similitudes qui commutent avec T. Cet ensemble est donc formé de toutes les translations du plan et des symétries du type $S(z) = \dfrac{b_0}{\overline{b_0}}\overline{z} + b$

⇒ Pour commencer, $\mathcal{G}_T \neq \emptyset$ puisque $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}} \in \mathcal{G}_T$; $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$ est une translation particulière et surtout est le neutre pour la composition des applications.

⇒ Ensuite, la composition de 2 éléments de $\mathcal{G}_T$ est-elle encore un élément de $\mathcal{G}_T$?

⋆ C'est évident lorsque nous composons 2 translations

⋆ Soient $S_i^1 \in \mathcal{G}_T$ et $S_i^2 \in \mathcal{G}_T$ et étudions $S_i^1 \circ S_i^2$.
Pour commencer, nous avons $S_i^1(z) = \dfrac{b_0}{\overline{b_0}}\overline{z} + b_1$ et $S_i^2(z) = \dfrac{b_0}{\overline{b_0}}\overline{z} + b_2$. Alors :

$$S_i^1 \circ S_i^2(z) = S_i^1\left[S_i^2(z)\right] = \frac{b_0}{\overline{b_0}}\overline{S_i^2(z)} + b_1 = \frac{b_0}{\overline{b_0}}\overline{\left(\frac{b_0}{\overline{b_0}}\overline{z} + b_2\right)} + b_1 = \frac{b_0}{\overline{b_0}} \times \frac{\overline{b_0}}{b_0} z + \overline{b_2} + b_1 = z + \overline{b_2} + b_1$$

$S_i^1 \circ S_i^2$ est donc une translation de vecteur d'affixe $\overline{b_2} + b_1$ et $S_i^1 \circ S_i^2 \in \mathcal{G}_T$

⋆ Soient $S_i \in \mathcal{G}_T$ et $\tau \in \mathcal{G}_T$ une translation ; étudions $S_i \circ \tau$
Nous avons $S_i(z) = \dfrac{b_0}{\overline{b_0}}\overline{z} + b$ et $\tau(z) = z + \mu$. Alors :

$$S_i \circ \tau(z) = S_i[\tau(z)] = \frac{b_0}{\overline{b_0}}\overline{\tau(z)} + b = \frac{b_0}{\overline{b_0}}\overline{z + \mu} + b = \frac{b_0}{\overline{b_0}}\overline{z} + \overline{\mu} + b$$

Nous avons bien $S_i \circ \tau \in \mathcal{G}_T$ puisque $S_i \circ \tau$ est de la forme d'une similitude inverse commutant avec T

Nous démontrerions de même que $\tau \circ S_i(z) = \frac{b_0}{\overline{b_0}}\overline{z} + b + \mu$ et donc $\tau \circ S_i \in \mathcal{G}_T$

⇒ Recherchons les inverses des éléments de $\mathcal{G}_T$ et ces inverses sont-ils encore des éléments de $\mathcal{G}_T$

⋆ Ceci ne pose aucune difficulté pour les translations

⋆ Soit $S_i \in \mathcal{G}_T$; alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $S_i(z) = \frac{b_0}{\overline{b_0}}\overline{z} + b$; alors :

$$(S_i)^{-1}(z) = \frac{1}{\frac{b_0}{\overline{b_0}}}\left(\overline{z} - \overline{b}\right) = \frac{b_0}{\overline{b_0}}\overline{z} - \frac{b_0}{\overline{b_0}} \times \overline{b}$$

Et donc, nous avons $(S_i)^{-1} \in \mathcal{G}_T$

Les inverses des éléments de $\mathcal{G}_T$ sont donc encore des éléments de $\mathcal{G}_T$

⇒ Un calcul simple montre que ce groupe n'est pas commutatif.

En effet, soient $S_i^1(z) = \frac{b_0}{\overline{b_0}}\overline{z} + 1$ et $S_i^2(z) = \frac{b_0}{\overline{b_0}}\overline{z} + 2i$ alors :

$$S_i^1 \circ S_i^2(z) = z + 1 - 2i \text{ et } S_i^2 \circ S_i^1(z) = z + 1 + 2i$$

Et donc $S_i^1 \circ S_i^2 \neq S_i^2 \circ S_i^1$; le groupe $\mathcal{G}_T$ n'est donc pas commutatif.

Exercice 20 :

Soit G un sous-groupe du groupe multiplicatif $(\mathbb{C}^*, \times)$

1. *On appelle $\mathcal{G}^+$ l'ensemble des <u>similitudes directes</u> $z' = az + b$ où $a \in G$ et $b \in \mathbb{C}$. Démontrer que $\mathcal{G}^+$ est un sous-groupe du groupe $\mathcal{S}im^+$ des similitudes directes du plan*

   ⇒ Tout d'abord, $\mathcal{G}^+ \neq \emptyset$ puisque $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$ est un élément de $\mathcal{G}^+$; en effet, $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}(z) = z$; nous avons $a = 1$ et $b = 0$. 1 étant le neutre pour la multiplication est un élément de G

   ⇒ Soient $f \in \mathcal{G}^+$ et $g \in \mathcal{G}^+$. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous avons $f(z) = a_f z + b_f$ et $g(z) = a_g z + b_g$ où $a_f \in G$, $a_g \in G$, $b_f \in \mathbb{C}$ et $b_g \in \mathbb{C}$.

   Nous avons $(g)^{-1}(z) = \frac{1}{a_g}z - \frac{b_g}{a_g}$. Remarquons que $a_g \neq 0$, et comme G est un groupe, $\frac{1}{a_g} \in G$.

   Alors :

   $$f \circ (g)^{-1}(z) = f\left[(g)^{-1}(z)\right] = a_f\,(g)^{-1}(z) + b_f = a_f\left(\frac{1}{a_g}z - \frac{b_g}{a_g}\right) + b_f = \frac{a_f}{a_g}z + \frac{b_f a_g - a_f b_g}{a_g}$$

   Comme G est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$, alors, comme $a_f \in G$ et $a_g \in G$, alors $\frac{a_f}{a_g} \in G$.

   Donc, $f \circ (g)^{-1} \in \mathcal{G}^+$ et $\mathcal{G}^+$ est un sous-groupe du groupe $\mathcal{S}im^+$

2. *Dans cette partie de l'exercice, nous allons étendre la question précédente à $\mathcal{G}$ ensemble des similitude de S telles que :*

   $$S(z) = az + b \text{ ou } S(z) = a\overline{z} + b \text{ avec } a \in G \text{ et } b \in \mathbb{C}$$

   Nous appellerons toujours $\mathcal{G}^+$ l'ensemble des similitudes directes $z' = az + b$ où $a \in G$ et $\mathcal{G}^-$ l'ensemble des similitudes inverses $z' = a\overline{z} + b$ où $a \in G$

   Commençons par revenir sur les différentes similitudes :

   → Si S est une similitude directe, alors $S(z) = az + b$ et $S^{-1}(z) = \frac{1}{a}z - \frac{b}{a} = \frac{z - b}{a}$. Il est clair que si $a \in G$, alors, comme G est un groupe, $\frac{1}{a} \in G$

   → Maintenant, si S est une similitude inverse, alors $S(z) = a\overline{z} + b$ et $S^{-1}(z) = \frac{1}{\overline{a}}\overline{z} - \frac{\overline{b}}{\overline{a}} = \overline{\left(\frac{z - b}{a}\right)}$.

   Par contre, si $a \in G$, même si G est un groupe, il n'est pas du tout sûr que $\frac{1}{a} \in G$

(a) *Nous commençons, dans cette question, par un groupe simple, le groupe multiplicatif des réels non nuls, c'est à dire $G = \mathbb{R}^*$. Est-ce que $\mathcal{G}$ est un groupe pour la composition des applications ?*

$\Rightarrow$ Les similitudes directes de $\mathcal{G}$ sont du type $S(z) = \lambda z + b$ ou $S(z) = \lambda \overline{z} + b$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$

- Si $S(z) = \lambda z + b$, alors S est une homothétie de rapport λ. On sait déjà que $\mathcal{G}^+$ et un groupe.
- Si $S(z) = \lambda \overline{z} + b$, alors S est une similitude inverse de rapport $|\lambda|$
- Si $S(z) = \lambda \overline{z} + b$ alors son inverse est $(S)^{-1}(z) = \dfrac{1}{\lambda}\left(\overline{z} - \overline{b}\right)$.

  Donc, si $S \in \mathcal{G}^-$, alors $(S)^{-1} \in \mathcal{G}^-$

$\Rightarrow$ La composition de 2 similitudes inverses de $\mathcal{G}^-$ est une similitude directe. Cette composition est-elle un élément de $\mathcal{G}^+$?

Soient $S_1 \in \mathcal{G}^-$ et $S_2 \in \mathcal{G}^-$ où $S_1(z) = \lambda_1 \overline{z} + b_1$ et $S_2(z) = \lambda_2 \overline{z} + b_2$

Alors $S_1 \circ S_2(z) = \lambda_1\lambda_2 z + \lambda_1 \overline{b_2} + b_1$ et donc, comme $\lambda_1\lambda_2 \in \mathbb{R}^*$, nous avons $S_1 \circ S_2 \in \mathcal{G}^+$, c'est à dire $S_1 \circ S_2 \in \mathcal{G}$

$\Rightarrow$ La composition d'une similitudes inverses de $\mathcal{G}^-$ et d'une similitude directe de $\mathcal{G}^+$ est une similitude inverse. Cette composition est-elle un élément de $\mathcal{G}$?

- Soient $S_1(z) = \lambda z + b_1$ et $S_2(z) = \mu \overline{z} + b_2$ 2 éléments de $\mathcal{G}$. Avons nous $S_1 \circ S_2 \in \mathcal{G}$? Pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous avons :

$$S_1 \circ S_2(z) = S_1[S_2(z)] = \lambda S_2(z) + b_1 = \lambda(\mu\overline{z} + b_2) + b_1 = \lambda\mu\overline{z} + \lambda b_2 + b_1$$

  Comme $\lambda\mu \in \mathbb{R}^*$, alors $S_1 \circ S_2 \in \mathcal{G}$
- Regardons, de la même manière $S_2 \circ S_1$. Donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} S_2 \circ S_1(z) = S_2[S_1(z)] &= \mu\overline{S_1(z)} + b_2 \\ &= \mu\overline{(\lambda z + b_1)} + b_2 \\ &= \mu\left(\lambda\overline{z} + \overline{b_1}\right) + b_2 \\ &= \mu\lambda\overline{z} + \mu\overline{b_1} + b_2 \end{aligned}$$

  On peut remarquer que la composition des applications n'est pas commutative.

La composition des applications est donc interne.

Ainsi, $\mathcal{G}$ est un groupe pour la composition des applications.

(b) *Nous considérons, dans cette question le sous-groupe $\mathcal{U}$ de $(\mathbb{C}^*, \times)$ défini par :*

$$G = \mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| = 1\}$$

Est-ce que $\mathcal{G}$ est un groupe pour la composition des applications ?

$\Rightarrow$ Les similitudes directes de $\mathcal{G}$ sont du type $S(z) = e^{i\theta}z + b$ ou $S(z) = e^{i\theta}\overline{z} + b$

- Si $S(z) = e^{i\theta}z + b$, alors S est une rotation d'angle θ. On sait déjà que $\mathcal{G}^+$ et un groupe.
- Si $S(z) = e^{i\theta}\overline{z} + b$, alors S est une similitude inverse et cette similitude inverse est une isométrie affine négative
- Si $S(z) = e^{i\theta}\overline{z} + b$ alors son inverse est $(S)^{-1}(z) = e^{i\theta}\left(\overline{z} - \overline{b}\right)$.

  Donc, si $S \in \mathcal{G}^-$, alors $(S_i)^{-1} \in \mathcal{G}^-$

$\Rightarrow$ La composition de 2 similitudes inverses de $\mathcal{G}^-$ est une similitude directe. Cette composition est-elle un élément de $\mathcal{G}^+$?

Soient $S_1 \in \mathcal{G}^-$ et $S_2 \in \mathcal{G}^-$ où $S_1(z) = e^{i\theta_1}\overline{z} + b_1$ et $S_2(z) = e^{i\theta_2}\overline{z} + b_2$

Alors $S_1 \circ S_2(z) = e^{i(\theta_1 - \theta_2)}z + e^{i\theta_1}\overline{b_2} + b_1$ et donc, comme $e^{i(\theta_1-\theta_2)} \in \mathcal{U}$, nous avons $S_1 \circ S_2 \in \mathcal{G}^+$, c'est à dire $S_1 \circ S_2 \in \mathcal{G}$

$\Rightarrow$ La composition d'une similitudes inverses de $\mathcal{G}^-$ et d'une similitude directe de $\mathcal{G}^+$ est une similitude inverse. Cette composition est-elle un élément de $\mathcal{G}$?

- Soient $S_1(z) = e^{i\theta_1}z + b_1$ et $S_2(z) = e^{i\theta_2}\overline{z} + b_2$ 2 éléments de $\mathcal{G}$. Avons nous $S_1 \circ S_2 \in \mathcal{G}$ Pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous avons :

$$S_1 \circ S_2(z) = S_1[S_2(z)] = e^{i\theta_1}S_2(z) + b_1 = e^{i\theta_1}\left(e^{i\theta_2}\overline{z} + b_2\right) + b_1 = e^{i(\theta_1+\theta_2)}\overline{z} + e^{i\theta_1}b_2 + b_1$$

  Comme $e^{i(\theta_1+\theta_2)} \in \mathcal{U}$, alors $S_1 \circ S_2 \in \mathcal{G}$

▷ Regardons, de la même manière $S_2 \circ S_1$. Donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} S_2 \circ S_1(z) = S_2[S_1(z)] &= e^{i\theta_2}\overline{S_1(z)} + b_2 \\ &= e^{i\theta_2}\overline{(e^{i\theta_1}z + b_1)} + b_2 \\ &= e^{i\theta_2}\left(e^{-i\theta_1}\overline{z} + \overline{b_1}\right) + b_2 \\ &= e^{i(\theta_2-\theta_1)}\overline{z} + e^{i\theta_2}\overline{b_1} + b_2 \end{aligned}$$

On peut remarquer que la composition des applications n'est pas commutative.

La composition des applications est donc interne.

Ainsi, $\mathcal{G}$ est un groupe pour la composition des applications.

(c) *On considère, cette fois ci le groupe $G = \{1; i; -i; -1\}$; Que dire du groupe $\mathcal{G}$?*

Ce groupe est un sous-groupe fini du groupe $\mathcal{U}$; c'est même un groupe cyclique engendré par $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$. C'est à dire $G = \{i^n \text{ où } n \in \mathbb{Z}\}$. Si $n \equiv k\,[4]$, alors $i^n = i^k$.

Par des calculs simples, si $f(z) = i^n z + b_1$ et $g(z) = i^m \overline{z} + b_2$, on démontre que $g^{-1} \in \mathcal{G}$, que $f \circ g \in \mathcal{G}$ et $g \circ f \in \mathcal{G}$ Et donc $\mathcal{G}$ est un groupe pour la composition des applications.

(d) *Même étude avec $G = \{g \in \mathbb{C} \text{ tels que il existe } n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } g = (1+i)^n\}$*

Ce groupe est un groupe cyclique engendré par le nombre comple $1 + i$; En fait, comme $1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$, $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}e^{\frac{in\pi}{4}}$

La question se pose donc pour les éléments de $\mathcal{G}^-$.

Si $f(z) = (1+i)^n\,\overline{z} + b = 2^{\frac{n}{2}}e^{\frac{in\pi}{4}}\,\overline{z} + b$, nous avons, par des calculs élémentaires, $f^{-1}(z) = 2^{\frac{-n}{2}}e^{\frac{in\pi}{4}}\,\overline{z} - \dfrac{\overline{b}}{2^{\frac{n}{2}}e^{\frac{-in\pi}{4}}}$

Clairement, $f^{-1} \notin \mathcal{G}$ et donc, dans notre cas, $\mathcal{G}$ n'est pas un groupe pour la composition des applications.

20.6.4 Problèmes de géométrie