Chapitre 22

Les courbes paramétrées

Voici un cours très minimal sur les courbes paramétrées. C'est un chapitre très utilisé en physique

22.1 Introduction aux courbes paramétrées

22.1.1 Définition

On appelle courbe paramétrée Γ du plan, toute application d'une partie $I \subset \mathbb{R}$ dans le $\mathbb{R}^2$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Gamma : I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x(t), y(t)) \end{array} \right.$$

Si $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est un repère orthonormé du plan, nous avons $\overrightarrow{OM(t)} = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$
L'ensemble des points $M(t)$ lorsque t décrit I est le support de la courbe paramétrée Γ

Exemple 1 :

Quelques exemples :

1. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $R > 0$, la fonction Γ, définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Gamma : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (a + R\cos t, b + R\sin t) \end{array} \right.$$

   est une représentation paramétrique d'un cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon R

2. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$; la fonction Γ, définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Gamma : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (a + \cos t, b + \cos t) \end{array} \right.$$

   est une représentation paramétrique d'un intervalle situé sur une droite.
   Cette droite a une équation simple : si $x = a + \cos t \iff \cos t = x - a$, en remplaçant $\cos t$ par sa valeur dans y, nous obtenons $y = b + x - a \iff y = x + b - a$.
   Le support de la courbe paramétré est donc la droite d'équation $y = x + b - a$, mais la courbe paramétrée n'est qu'un segment de cette courbe. *(cf figure 22.1)*

3. Soit Γ, définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Gamma : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (2 - 3t^2, -1 + t^2) \end{array} \right.$$

   Le support de cette courbe paramétrée est une demie droite. *(cf figure 22.2)*

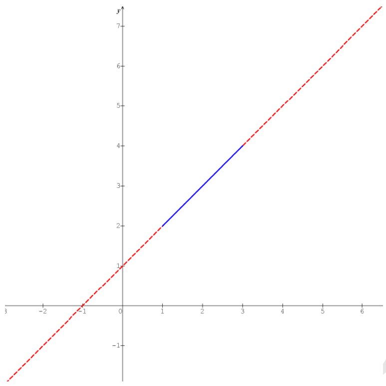

FIGURE 22.1 – La courbe paramétrée $x(t) = 2 + \cos t$ et $y(t) = 3 + \cos t$ en bleu et son support, la droite $y = x + 1$ en pointillés rouges

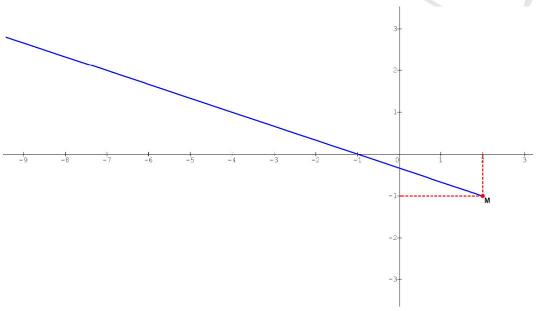

FIGURE 22.2 – La courbe paramétrée $x(t) = 2 - 3t^2$ et $y(t) = -1 + t^2$

Remarque 1 :

1. Si l'intervalle $I = [a; b]$, on dit que la courbe paramétrée est un arc d'origine $M(a) = (x(a); y(a))$ et d'extrémité $M(b) = (x(b); y(b))$. Si $M(a) = M(b)$, on dit que l'arc est fermé

   Exemple d'arc fermé

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Gamma : [0; 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos t, \sin t) \end{array}\right.$$

   Nous avons $M(0) = M(2\pi)$

2. Une même courbe peut avoir plusieurs représentations paramétriques

   Exemple

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Gamma_1 : [0; 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos t, \sin t) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Gamma_2 : [0; 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\sin t, \cos t) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Gamma_3 : [0; 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos 2t, \sin 2t) \end{array}\right.$$

   Γ_1, Γ_2 et Γ_3 sont 3 représentations paramétriques d'un même cercle $\mathcal{C}(0; 1)$

3. Notion de point simple et de point double

   Un point d'une courbe est dit simple s'il n'existe qu'un seul paramètre à lui correspondre ; il est multiple sinon

   Exemples

⇒ Dans :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\Gamma_1 : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos t, \sin t)\end{array}\right.$$

Tous les points sont multiples.

⇒ Dans :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\Gamma_2 : [0;2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos t, \sin t)\end{array}\right.$$

Tous les points sont simples.

⇒ Dans :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\Gamma_3 : [0;2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos 2t, \sin 2t)\end{array}\right.$$

Tous les points sont doubles.

⇒ Dans :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\Gamma_4 : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \left(2-3t^2, -1+t^2\right)\end{array}\right.$$

Tous les points sont doubles sauf $M(0) = (2, -1)$

22.1.2 Quelques exercices d'application

Exercice 1 :

Déterminer l'ensemble des points $M(x, y)$ dont une représentation paramétrique est :

1. $\left\{\begin{array}{l} x(t) = \dfrac{2t}{1-t} \\ y(t) = \dfrac{2-3t}{1-t}\end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{l} x(t) = -2\sqrt{1-t^2} \\ y(t) = 2+\sqrt{1-t^2}\end{array}\right.$

Exercice 2 :

À tout réel $t \in \mathbb{R}$, on associe le point $M(t) \in \mathbb{R}^2$ de coordonnées :

$$x(t) = 2 + 2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \qquad y(t) = -3 + \frac{4t}{1+t^2}$$

Démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point $M(t)$ appartient à un cercle dont on donnera le centre et le rayon.
Tout point du cercle est-il un point $M(t)$?

Exercice 3 :

Dans le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ rapporté au repère cartésien $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, nous considérons le point A de coordonnées $(2a, 0)$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[O, A]$

1. Donner une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$
2. Pour tout $M \in \mathcal{C}$, où $M \neq O$, on pose $\theta \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}\right)}\ [2\pi]$ où $\theta \in]-\pi; +\pi[$
   Exprimer les coordonnées de $M \in \mathcal{C}$ en fonction de θ ; on obtient ainsi une représentation paramétrique de $\mathcal{C}$
3. Donner le module et l'argument du nombre complexe $z = a\left(1 + e^{i\theta'}\right)$ où $\theta' \in [-\pi; \pi[$ et $a > 0$