22.2 Dérivées et tangentes

22.2.1 Définition

Soit Γ une courbe paramétrée du plan $\mathbb{R}^2$ de représentation graphique $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j}$
Si les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont dérivables en $t_0 \in I$, on appelle vecteur-dérivé en t_0, le vecteur noté $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0)$ défini par :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0) = x'(t_0)\overrightarrow{i} + y'(t_0)\overrightarrow{j}$$

Remarque 2 :

1. En référence à la cinématique du point, le vecteur dérivé $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0)$ est souvent appelé vecteur vitesse
2. Si $P(t)$ et $Q(t)$ sont les projections orthogonales de $M(t)$ sur les différents axes, $x'(t)$ désigne la vitesse de $P(t)$ et $y'(t)$ celle de $Q(t)$
3. Le nombre $v(t) = \left\| \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t) \right\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)}$ désigne la vitesse numérique
4. Si la vitesse numérique $v(t)$ est constante, le mouvement d'un mobile est dit uniforme

Exemple 2 :

Comme exemple de mouvement uniforme, nous prenons le mouvement circulaire uniforme
On considère un mobile dont la trajectoire en fonction du temps est donnée par :

$$x(t) = R\cos\omega t \qquad y(t) = R\sin\omega t$$

Il est facile de démontrer que ma trajectoire de $M(t) = (x(t)\,;y(t))$ est un cercle de centre O et de rayon R
A quelle vitesse $M(t)$ parcourt-il sa trajectoire ? Il suffit de calculer $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t)$. Nous avons :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t) = -R\omega\sin\omega t\overrightarrow{i} + R\omega\cos\omega t\overrightarrow{j}$$

Et donc, $v(t) = \left\| \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t) \right\| = \sqrt{R^2\omega^2\sin^2\omega t + R^2\omega^2\cos^2\omega t} = R\omega$

La vitesse numérique est donc constante et donnée par $v = \omega R$. L'expression $\omega = \dfrac{v}{R}$ est la vitesse angulaire, laquelle est aussi constante.
Autre chose, ce n'est pas parce que la vitesse numérique est constante que le vecteur vitesse est constant !!
Il se modifie en fonction de t ; c'est sa norme (ou son module) qui est constante.

22.2.2 Théorème

Si la fonction Γ est dérivable en t_0, et si $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$, alors Γ admet une droite tangente en $M(t_0)$ de vecteur directeur $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0)$

Remarque 3 :

1. L'équation cartésienne de la tangente est donnée par $\det\left(\overrightarrow{MM(t_0)}, \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0)\right) = 0$, c'est à dire :
$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{MM(t_0)}, \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0)\right) = \begin{vmatrix} x - x(t_0) & x'(t_0) \\ y - y(t_0) & y'(t_0)\end{vmatrix} &= [(x - x(t_0))\, y'(t_0)] - [x'(t_0)\,(y - y(t_0))] \\ &= xy'(t_0) - yx'(t_0) - x(t_0)\, y'(t_0) + x'(t_0)\, y(t_0) = 0\end{aligned}$$
Le coefficient directeur de la tangente, est, si $x'(t_0) \neq 0$, $\alpha = \dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$
2. Le vecteur $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0)$ définit une orientation de la tangente en $M(t_0)$
3. Un point $M(t_0)$ admettant une tangente ou une dérivée non nulle, c'est à dire $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$ est <u>un point régulier</u>, sinon, c'est un <u>point stationnaire</u>

Exemple 3 :

1. Soit Γ la fonction vectorielle qui représente le mouvement circulaire uniforme, définie par :
$$\left\{\begin{array}{rcl}\Gamma : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \Gamma(t) = (\cos t, \sin t)\end{array}\right.$$
Alors $x'(t) = -\sin t$ et $y'(t) = \cos t$, c'est à dire $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t\end{pmatrix}$
On peut remarquer que $\left\langle \overrightarrow{OM(t)} \,|\, \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t)\right\rangle = 0$

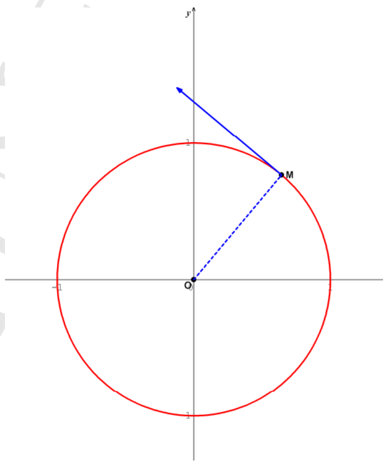

FIGURE 22.3 – La visualisation du mouvement circulaire uniforme

2. <u>Paramétrisation d'une ellipse</u>
Soit Γ la fonction vectorielle qui représente l'équation paramétrique d'une ellipse, définie par :
$$\left\{\begin{array}{rcl}\Gamma : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \Gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)\end{array}\right.$$
Bien entendu, si $a = b$, nous nous retrouvons devant un cercle.
Alors $x'(t) = -a\sin t$ et $y'(t) = b\cos t$, c'est à dire $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t\end{pmatrix}$

On peut remarquer que $\left\langle \overrightarrow{OM}(t) \mid \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t) \right\rangle = b^2 - a^2$ *(Si $b = \pm a$, c'est à dire, si c'est un cercle, nous retrouvons la nullité du produit scalaire)*

L'équation de la tangente en $M(t_0) = (x(t_0)\,;y(t_0))$ est donc donnée par :

$$\begin{vmatrix} x - a\cos t_0 & -a\sin t_0 \\ y - b\sin t_0 & b\cos t_0 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \frac{x\cos t_0}{a} + \frac{y\sin t_0}{b} = 1 \Longleftrightarrow \frac{xx(t_0)}{a^2} + \frac{yy(t_0)}{b^2} = 1$$

Voir figure 22.4

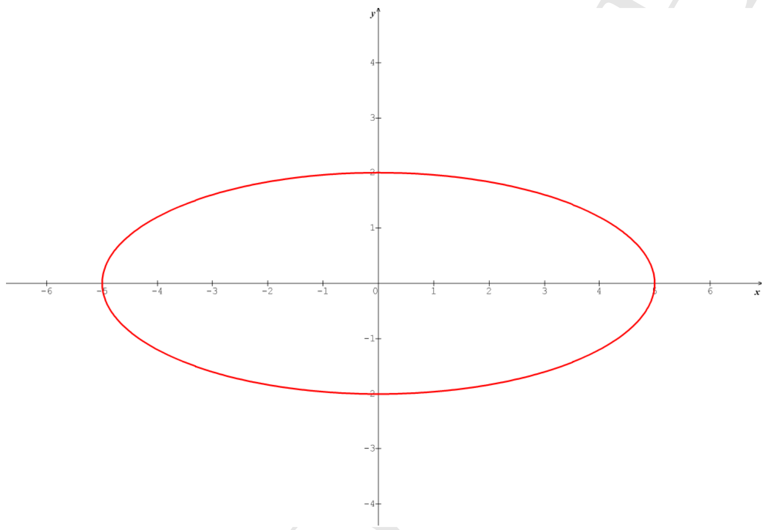

FIGURE 22.4 – La visualisation d'une ellipse

Exercice 4 :

$\mathcal{P}$ est le plan rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On considère les points $M_1(t)$ et $M_2(t)$ dont les coordonnées sont données en fonction de $t \in \mathbb{R}$, avec $a > 0$, par :

$$M_1(t)\begin{cases} x_1(t) = & a\cos t \\ y_1(t) = & a\sin t \end{cases} \qquad M_2(t)\begin{cases} x_2(t) = & a\cos 2t \\ y_2(t) = & -a\sin 2t \end{cases}$$

1. Quelles sont les trajectoires des points $M_1(t)$ et $M_2(t)$?
2. On appelle $G(t)$ le barycentre du système pondéré $\{(M_1(t), 2)\,;(M_2(t), 1)\}$. A quelles dates les points $G(t)$, $M_1(t)$ et $M_2(t)$ sont-ils confondus ?
3. $\overrightarrow{V(t)}$ est le vecteur vitesse de $G(t)$; démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, les vecteurs $\overrightarrow{V(t)}$ et $\overrightarrow{M_1(t)\,M_2(t)}$ sont orthogonaux.

Exercice 5 :

Rechercher les points stationnaire de l'arc paramétré $M(t)$ défini par :

$$M(t)\begin{cases} x(t) = & 2\cos t + \cos 2t \\ y(t) = & 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$$