22.3 Quelques exercices

Exercice 6 :

Dans l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$, rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, soit le point M de coordonnées à tout instant $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = & 1 + 2\cos \omega t \\ y = & 3 + 2\sin \omega t \\ z = & 2 \end{cases}$$

Quelle est la nature du mouvement de M ?

Exercice 7 :

Le plan $\mathcal{P}$ étant rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on donne les coordonnées d'un point mobile M en fonction du temps t :

$$\begin{cases} x = & \sin t \\ y = & -2 - \cos 2t. \end{cases}$$

1. Déterminer la relation indépendante de t liant x et y.
2. Caractériser la trajectoire du mobile M et tracer son graphe dans le repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, lorsque $t \in [0, 2\pi]$.
3. Calculer, à la date $t = \dfrac{3\pi}{4}$, les coordonnées :
   (a) Du vecteur espace $\overrightarrow{OM\,(t)}$
   (b) Du vecteur vitesse $\overrightarrow{V\,(t)}$
   (c) Du vecteur accélération $\overrightarrow{\gamma\,(t)}$
4. Tracer les vecteurs $\overrightarrow{OM\,(t)}$, $\overrightarrow{V\,(t)}$ et $\overrightarrow{\gamma\,(t)}$

Exercice 8 :

1. Dans un repère orthonormé du plan $\mathcal{P}$ $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, les coordonnées d'un mobile M sont exprimées, en fonction du temps t, par :
$$\begin{cases} x = & \cos t \\ y = & \cos 3t - l \end{cases}$$
Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire du mobile. Construire cette trajectoire.
2. Le mouvement débute à l'instant $t = 0$. A quelles dates le mobile passe-t-il pour la première fois aux points M_1, et M_2, de la trajectoire d'abscisses respectives $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{-1}{2}$. calculer les composantes du vecteur-vitesse et du vecteur-accélération correspondant à chacun de ces deux points.

Exercice 9 :

La lettre t désignant le temps, soit la fonction vectorielle $\overrightarrow{F}$ définie dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ par :

$$\begin{cases} \overrightarrow{F} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \quad t & \longmapsto & \overrightarrow{F}\,(t) = \overrightarrow{OM\,(t)} = x\,(t)\,\overrightarrow{i} + y\,(t)\,\overrightarrow{j} \end{cases}$$

où $x\,(t) = 2 + 2\cos^2 t$ et $y\,(t) = 4\sin t\cos t$

1. Trouver une équation cartésienne de la trajectoire de $M\,(t)$ et les caractéristiques simples qui permettent de construire cette trajectoire.
2. Calculer les composantes du vecteur-vitesse $\overrightarrow{V\,(t)}$ de $M\,(t)$
3. Calculer les composantes du vecteur-accélération $\overrightarrow{\Gamma}$ de $M\,(t)$
4. Pour quelles valeurs de t les vecteurs $\overrightarrow{V\,(t)}$ et $\overrightarrow{\Gamma}$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice 10 :

Tracer la représentation graphique de la courbe paramétrée :

$$\left\{ \begin{array}{ll} x(t) = & -1 + \ln t \\ y(t) = & -2t + t \ln t \end{array} \right.$$

Avec $t > 0$