22.4 Correction de quelques exercices

Exercice 1 :

Déterminer l'ensemble des points $M(x,y)$ dont une représentation paramétrique est :

1. $x(t) = \dfrac{2t}{1-t} \qquad y(t) = \dfrac{2-3t}{1-t}$

   ⇒ Tout d'abord, les fonctions x et y ne sont définies que sur $\mathbb{R} \setminus \{+1\}$

   ⇒ Ensuite, nous avons $\lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t>1}} x(t) = \lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t>1}} \dfrac{2t}{1-t} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t>1}} y(t) = \lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t>1}} \dfrac{2-3t}{1-t} = +\infty$.

   De même, $\lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t<1}} x(t) = \lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t<1}} \dfrac{2t}{1-t} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t<1}} y(t) = \lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t<1}} \dfrac{2-3t}{1-t} = -\infty$.

   De plus, $\lim\limits_{t\to\pm\infty} = x(t) = 2$ et $\lim\limits_{t\to\pm\infty} = y(t) = 3$

   ⇒ De $x(t) = \dfrac{2t}{1-t}$, nous tirons $t = \dfrac{x}{x+2}$, et, en remplaçant t par sa valeur dans y nous trouvons $y = -\dfrac{x}{2} + 2$

   L'ensemble des points $M(x,y)$ est donc la droite $y = -\dfrac{x}{2} + 2$ sauf le point $\Omega(2,3)$

2. $x(t) = -2\sqrt{1-t^2} \qquad y(t) = 2 + \sqrt{1-t^2}$

   ⇒ Comme tout à l'heure, cette courbe n'existe que si $t \in [-1;+1]$, et du fait de la parité de $\sqrt{1-t^2}$, tous les points sont doubles, sauf le point $M(0) = (x(0)\,;y(0)) = (-2,2)$ qui, lui, est simple

   ⇒ En remarquant que $\sqrt{1-t^2} = -\dfrac{x}{2}$, le support de la courbe paramétrée est la droite $y = -\dfrac{x}{2}+2$, la même que dans la question précédente, mais, la courbe en est bien différente ! ! *(cf figure 22.5)*

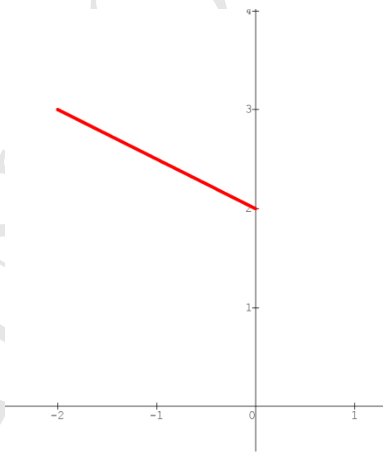

FIGURE 22.5 – Représentation graphique de la courbe $x(t) = -2\sqrt{1-t^2} \quad y(t) = 2 + \sqrt{1-t^2}$

Exercice 2 :

À tout réel $t \in \mathbb{R}$, on associe le point $M(t) \in \mathbb{R}^2$ de coordonnées :

$$x(t) = 2 + 2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \qquad y(t) = -3 + \frac{4t}{1+t^2}$$

Démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point $M(t)$ appartient à un cercle dont on donnera le centre et le rayon. Tout point du cercle est-il un point $M(t)$?

⇒ Dans un premier temps, les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$ en entier.

⇒ D'autre part, nous avons $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x(t) = 0$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y(t) = -3$, ce qui fait que le point $\Omega(0,-3)$ n'est pas atteint par la courbe paramétrée ; c'est un point limite

⇒ Ensuite, remarquons que :

$$x(t) - 2 = 2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \text{ et } y(t) + 3 = \frac{4t}{1+t^2}$$

En élevant au carré et en additionnant, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
(x(t)-2)^2 + (y(t)+3)^2 &= \left(2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\right)^2 + \left(\frac{4t}{1+t^2}\right)^2 \\
&= \frac{4(1-t^2)^2 + 16t^2}{(1+t^2)^2} \\
&= \frac{4(1+t^4-2t^2) + 16t^2}{(1+t^2)^2} \\
&= \frac{4+4t^4+8t^2}{(1+t^2)^2} \\
&= 4
\end{aligned}$$

Nous avons donc $(x(t)-2)^2 + (y(t)+3)^2 = 4$
Ainsi, les points $M(t)$ appartiennent au cercle de centre $O(2;3)$ et de rayon $R = 2$. Le seul point $\Omega(0,-3)$ du cercle n'est pas atteint par la courbe paramétrée.

Exercice 3 :

Dans le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ rapporté au repère cartésien $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, nous considérons le point A de coordonnées $(2a, 0)$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[O, A]$

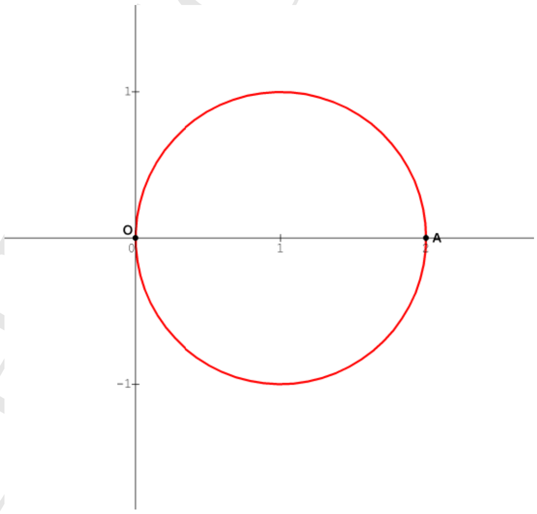

FIGURE 22.6 – Le cercle de diamètre $[O, A]$

1. *Donner une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$*

   Elle est évidente : $(x-a)^2 + y^2 = a^2$

2. *Pour tout $M \in \mathcal{C}$, où $M \neq O$, on pose $\theta \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}\right)}\ [2\pi]$ où $\theta \in]-\pi; +\pi[$*
   Exprimer les coordonnées de $M \in \mathcal{C}$ en fonction de θ ; on obtient ainsi une représentation paramétrique de $\mathcal{C}$

   Pour visualiser la question posée, il faut se reporter à la figure 22.7

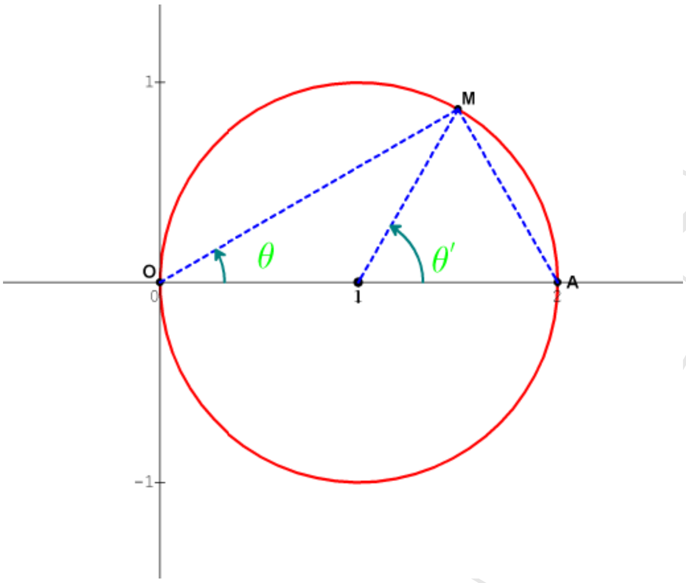

FIGURE 22.7 – La visualisation de la question posée

Nous allons appeler $I\,(a,0)$ le centre du cercle $\mathcal{C}$.
En considérant le triangle rectangle isocèle OMA et le triangle isocèle IMA, nous avons, en posant $\theta' \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IM}\right)}\,[2\pi]$, nous avons $2\theta = \theta'$
Nous avons

$$\begin{array}{rcl}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM} = & a\,\overrightarrow{i} + a\cos\theta'\,\overrightarrow{i} + a\sin\theta'\,\overrightarrow{j} \\ = & a\,(1+\cos\theta')\,\overrightarrow{i} + a\sin\theta'\,\overrightarrow{j} \\ = & a\,(1+\cos 2\theta)\,\overrightarrow{i} + a\sin 2\theta\,\overrightarrow{j}\end{array}$$

Une représentation paramétrique de $\mathcal{C}$ est donc :

$$\left\{\begin{array}{rl} x\,(\theta) = & a\,(1+\cos 2\theta) \\ y\,(\theta) = & a\sin 2\theta \end{array}\right. \quad \text{avec } \theta \in \left]-\pi;+\pi\right[$$

3. *Donner le module et l'argument du nombre complexe $z = a\left(1+e^{i\theta'}\right)$ où $\theta' \in [-\pi;\pi[$ et $a>0$*

C'est une question intéressante ; elle est en lien avec la courbe paramétrée que nous venons d'étudier. Tous les points d'affixe $z = a\left(1+e^{i\theta'}\right)$ avec $\theta' \in [-\pi;\pi[$ et $a>0$ sont situés sur le cercle $\mathcal{C}$

Nous avons donc :

$$z = a\left(1+e^{i\theta'}\right) \Longleftrightarrow z = a\,(1+\cos\theta') + ia\sin\theta'$$

Cherchons le module de z

Donc $|z| = a\sqrt{(1+\cos\theta')^2 + \sin^2\theta'} = a\sqrt{2+2\cos\theta'} = a\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\theta'}$
Nous utilisons, maintenant, les formules sur les arcs moitiés *(ou doubles)*

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Longleftrightarrow 1+\cos 2x = 2cos^2 x$$

Et donc $1+\cos\theta' = 2\cos^2\left(\dfrac{\theta'}{2}\right)$, et

$$\sqrt{1+\cos\theta'} = \sqrt{2\cos^2\left(\frac{\theta'}{2}\right)} = \sqrt{2}\left|\cos\left(\frac{\theta'}{2}\right)\right|$$

Comme $\theta' \in [-\pi;\pi[$, nous avons $\dfrac{\theta'}{2} \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ et alors $\cos\left(\dfrac{\theta'}{2}\right) \geqslant 0$ et d'où :

$$|z| = a\sqrt{2}\sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta'}{2}\right) = 2a\cos\left(\frac{\theta'}{2}\right)$$

L'argument est presque aussi simple à trouver :

$$\begin{aligned}
z = a\left(1+e^{i\theta'}\right) &= a\left(1+\cos\theta'\right) + ia\sin\theta' \\
&= 2a\cos\left(\frac{\theta'}{2}\right)\left(\frac{(1+\cos\theta')}{2\cos\left(\frac{\theta'}{2}\right)} + i\frac{\sin\theta'}{2\cos\left(\frac{\theta'}{2}\right)}\right) \\
&= 2a\cos\left(\frac{\theta'}{2}\right)\left(\frac{2\cos^2\left(\frac{\theta'}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta'}{2}\right)} + i\frac{2\sin\frac{\theta'}{2}\cos\frac{\theta'}{2}}{2\cos\left(\frac{\theta'}{2}\right)}\right) \\
&= 2a\cos\left(\frac{\theta'}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta'}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta'}{2}\right)\right) \\
&= 2a\cos\left(\frac{\theta'}{2}\right)e^{i\frac{\theta'}{2}}
\end{aligned}$$

Exercice 4 :

$\mathcal{P}$ est le plan rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. On considère les points $M_1(t)$ et $M_2(t)$ dont les coordonnées sont données en fonction de $t \in \mathbb{R}$, avec $a > 0$, par :

$$M_1(t)\left\{\begin{array}{ll} x_1(t) = & a\cos t \\ y_1(t) = & a\sin t\end{array}\right. \qquad M_2(t)\left\{\begin{array}{ll} x_2(t) = & a\cos 2t \\ y_2(t) = & -a\sin 2t\end{array}\right.$$

1. *Quelles sont les trajectoires des points $M_1(t)$ et $M_2(t)$?*

   La trajectoire des 2 mobiles est le même cercle de centre O et de rayon a
   Par contre, la trajectoire n'est pas parcourue à la même vitesse, ni dans le même sens. $M_2(t)$ a une vitesse angulaire 2 fois plus importante que $M_1(t)$ et s'il parte du même point $A(1,0)$, les 2 points parcourrent le cercle dans 2 sens différents.

2. *On appelle $G(t)$ le barycentre du système pondéré $\{(M_1(t),2);(M_2(t),1)\}$. A quelles dates les points $G(t)$, $M_1(t)$ et $M_2(t)$ sont-ils confondus ?*

   Pour reprendre la calcul barycentrique, nous pouvons écrire, pour tout $X \in \mathcal{P}$:

   $$3\overrightarrow{XG(t)} = 2\overrightarrow{XM_1(t)} + \overrightarrow{XM_2(t)}$$

   En particulier si X est l'origine O, nous avons :

   $$\overrightarrow{OG(t)} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OM_1(t)} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OM_2(t)}$$

   Les points $G(t)$, $M_1(t)$ et $M_2(t)$ sont confondus si et seulement si $M_1(t) = M_2(t)$, c'est à dire, en nous référant aux coordonnées :

   $$\left\{\begin{array}{ll}\cos t = & \cos 2t \\ \sin t = & -\sin 2t\end{array}\right.\Big]\Big[. \iff \left\{\begin{array}{ll}\cos t = & 2\cos^2 t - 1 \\ \sin t = & -2\sin t\cos t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}2\cos^2 t - \cos t - 1 = 0 \\ \sin t\,(1+2\cos t) = 0\end{array}\right.$$

   $\Rightarrow$ Résolvons $2\cos^2 t - \cos t - 1 = 0$
   En posant $X = \cos t$, nous nous réduisons à l'équation du second degré $2X^2 - X - 1 = 0$ dont les solutions sont $X = 1$ et $X = -\dfrac{1}{2}$
   D'où nous tirons $\cos t = 1 \iff t = 2k\pi$ et $\cos t = -\dfrac{1}{2} \iff t = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $t = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi$

⇒ Résolvons $\sin t\,(1+2\cos t)=0$

D'une part, nous avons $\sin t=0 \iff t=k\pi$ et $1+2\cos t=0$, c'est à dire $\cos t=-\dfrac{1}{2} \iff t=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$ ou $t=\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi$

Pour que $M_1(t)=M_2(t)$, nous devons avoir, en même temps $2\cos^2 t-\cos t-1=0$ et $\sin t\,(1+2\cos t)=0$

C'est à dire que $G(t)$, $M_1(t)$ et $M_2(t)$ sont confondus si et seulement si

$$\boxed{t=2k\pi \text{ ou } t=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \text{ ou } t=\frac{4\pi}{3}+2k\pi}$$

3. *$\overrightarrow{V(t)}$ est le vecteur vitesse de $G(t)$; démontrer que, pour tout $t\in\mathbb{R}$, les vecteurs $\overrightarrow{V(t)}$ et $\overrightarrow{M_1(t)\,M_2(t)}$ sont orthogonaux.*

▷ Tout d'abord, $\overrightarrow{V(t)}=\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG(t)}}{\mathrm{d}t}$. Or :

$$\overrightarrow{OG(t)}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OM_1(t)}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OM_2(t)}$$

Et donc ;

$$\overrightarrow{V(t)}=\frac{2}{3}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_1(t)}}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_2(t)}}{\mathrm{d}t}$$

▷ Pour commencer, nous avons $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_1(t)}}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}-a\sin t\\ a\cos t\end{pmatrix}$, puis $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_2(t)}}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}-2a\sin 2t\\ -2a\cos 2t\end{pmatrix}$

▷ De telle sorte que $\overrightarrow{V(t)}=\begin{pmatrix}\dfrac{-2a\sin t-2a\sin 2t}{3}\\ \dfrac{2a\cos t-2a\cos 2t}{3}\end{pmatrix}=\dfrac{2a}{3}\begin{pmatrix}-\sin t-\sin 2t\\ \cos t-\cos 2t\end{pmatrix}$

▷ Maintenant, $\overrightarrow{M_1(t)\,M_2(t)}=\begin{pmatrix}a\cos 2t-a\cos t\\ -a\sin 2t-a\sin t\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}\cos 2t-\cos t\\ -\sin 2t-\sin t\end{pmatrix}$

▷ De telle sorte que :

$$\left\langle \overrightarrow{M_1(t)\,M_2(t)} \mid \overrightarrow{V(t)}\right\rangle=\frac{2a^2}{3}\left[(-\sin t-\sin 2t)(\cos 2t-\cos t)+(-\sin t-\sin 2t)(\cos t-\cos 2t)\right]=0$$

Les 2 vecteurs $\overrightarrow{V(t)}$ et $\overrightarrow{M_1(t)\,M_2(t)}$ sont donc orthogonaux.

Pour visualiser l'étude précédente, reportez vous à la figure 22.8

Exercice 5 :

Rechercher les points stationnaire de l'arc paramétré $M(t)$ défini par :

$$M(t)\begin{cases} x(t)= & 2\cos t+\cos 2t\\ y(t)= & 2\sin t-\sin 2t\end{cases}$$

Nous n'allons pas étudier ce qui se passe autour des points stationnaires. Nous n'allons que préciser ces points stationnaires.

Un point stationnaire est un point tel que $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM(t)}}{\mathrm{d}t}=\overrightarrow{0}$

Nous avons

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM(t)}}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}-2\sin t-2\sin 2t\\ 2\cos t-2\cos 2t\end{pmatrix}$$

Donc, $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM(t)}}{\mathrm{d}t}=\overrightarrow{0} \iff \sin t+\sin 2t=0$ et $\cos t-\cos 2t=0$

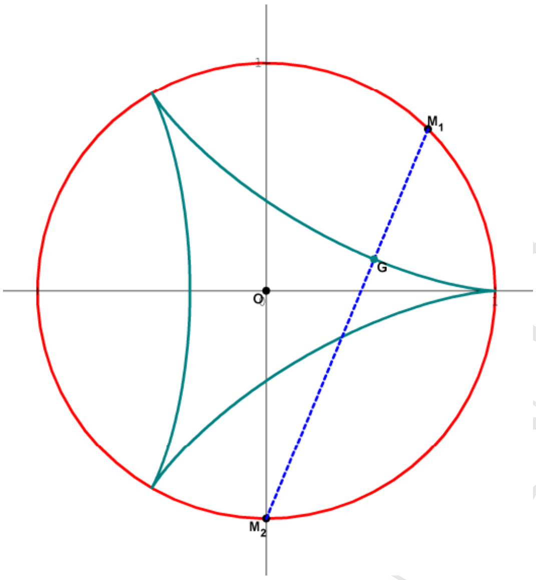

FIGURE 22.8 – Une représentation des mouvements de M_1 et M_2. Ici, M_1 et M_2 sont représentés à $t = \frac{\pi}{4}$; G est le barycentre de M_1 et M_2. En vert, est représentée la trajectoire de G

- Nous avons :
$$\sin t + \sin 2t = 0 \Longleftrightarrow \sin t = \sin -2t$$
C'est à dire que nous avons $t = -2t + 2k\pi$ ou $t = \pi - (-2t) + 2k\pi$
D'où $t = \dfrac{2k\pi}{3}$ ou $t = (2k+1)\,\pi$
- De la même manière :
$$\cos t - \cos 2t = 0 \Longleftrightarrow \cos t = \cos 2t$$
D'où nous tirons $t = 2t + 2k\pi \Longleftrightarrow t = 2k\pi$ ou $t = -2t + 2k\pi \Longleftrightarrow t = \dfrac{2k\pi}{3}$

Nous en concluons que les seules valeurs qui annulent la dérivée première sont en $t = \dfrac{2k\pi}{3}$.
Les points stationnaires sont donc en $t = \dfrac{2k\pi}{3}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 6 :

Dans l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$, rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, soit le point M de coordonnées à tout instant $t \in \mathbb{R}$
$$\begin{cases} x = & 1 + 2\cos\omega t \\ y = & 3 + 2\sin\omega t \\ z = & 2 \end{cases}$$
Quelle est la nature du mouvement de M ?

Point très difficile!!
- Tout d'abord, ce mobile se ballade dans le plan d'équation $z = 2$
- Ensuite, dans ce plan, nous avons $x - 1 = 2\cos\omega t$ et $y - 3 = 2\sin\omega t$
- Le mobile se ballade donc, dans le plan $z = 2$, et trace un cercle de centre $\Omega = (2, 3, 2)$ et de rayon $R = 2$

Exercice 7 :

Le plan $\mathcal{P}$ étant rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on donne les coordonnées d'un point mobile M en fonction du temps t :
$$\begin{cases} x = & \sin t \\ y = & -2 - \cos 2t. \end{cases}$$

1. *Déterminer la relation indépendante de t liant x et y.*

   Pas de grandes difficultés !!
   Tout d'abord, $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$ et donc $y = -2 - \left(1 - 2\sin^2 t\right) = 2\sin^2 t - 3$, c'est à dire $y = 2x^2 - 3$

2. *Caractériser la trajectoire du mobile M et tracer son graphe dans le repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, lorsque $t \in [0, 2\pi]$.*

   Il est clair que la parabole d'équation $y = 2x^2 - 3$ est <u>le support</u> de la courbe paramétrée, mais, est-ce que c'est toute cette parabole ?...Evidemment, non, puisque $-1 \leqslant x \leqslant +1$

3. *Calculer, à la date $t = \dfrac{3\pi}{4}$, les coordonnées :*

   (a) *Du vecteur espace $\overrightarrow{OM\,(t)}$*

   En $t = \dfrac{3\pi}{4}$, nous avons $x = \sin\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $y = -2 - \cos\dfrac{3\pi}{2} = -2$, et donc $\overrightarrow{OM\,(t)} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$

   (b) *Du vecteur vitesse $\overrightarrow{V\,(t)}$*

   Tour d'abord, $\overrightarrow{V\,(t)} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM\,(t)}}{\mathrm{d}t}$ et donc $\overrightarrow{V\,(t)} = \begin{pmatrix} \cos t \\ 2\sin 2t \end{pmatrix}$ Ainsi, en $t = \dfrac{3\pi}{4}$, nous avons $\overrightarrow{V\,(t)} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$

   (c) *Du vecteur accélération $\overrightarrow{\gamma\,(t)}$*

   D'après le cours de physique, nous avons :

   $$\overrightarrow{\gamma\,(t)} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V\,(t)}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM\,(t)}}{\mathrm{d}t^2}$$

   Et donc $\overrightarrow{\gamma\,(t)} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 4\cos 2t \end{pmatrix}$ et donc en $t = \dfrac{3\pi}{4}$, nous avons : $\overrightarrow{\gamma\,(t)} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

4. *Tracer les vecteurs $\overrightarrow{OM\,(t)}$, $\overrightarrow{V\,(t)}$ et $\overrightarrow{\gamma\,(t)}$*

   Voir la figure 22.9

Exercice 10 :

Tracer la représentation graphique de la courbe paramétrée :

$$\left\{\begin{array}{rl} x\,(t) = & -1 + \ln t \\ y\,(t) = & -2t + t\ln t \end{array}\right.$$

Avec $t > 0$
De l'équation $x = -1 + \ln t$, nous avons $\ln t = 1 + x$ et donc $t = e^{x+1}$ d'où $y = e^{x+1}\,(x+1)$.
Comme $t > 0$, nous avons $\ln t \in \mathbb{R}$ et donc $x \in \mathbb{R}$. La représentation paramétrique a donc pour équation cartésienne $y = e^{x+1}\,(x+1)$
Voir la figure 22.10

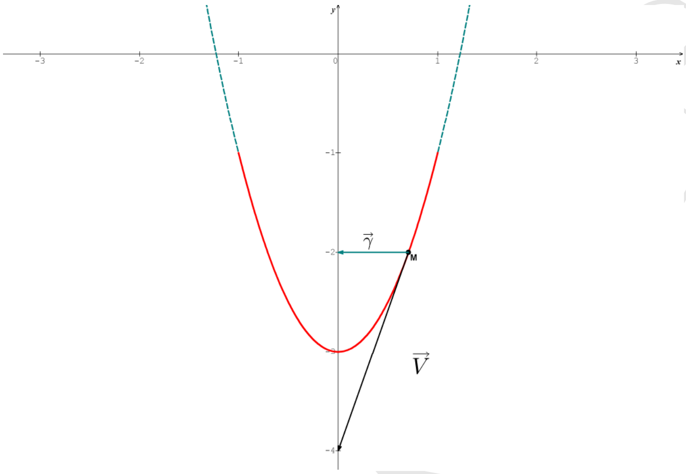

FIGURE 22.9 – Le support de la courbe paramétrée en pointillés verts, la courbe paramétrée en rouge et les vecteurs demandés

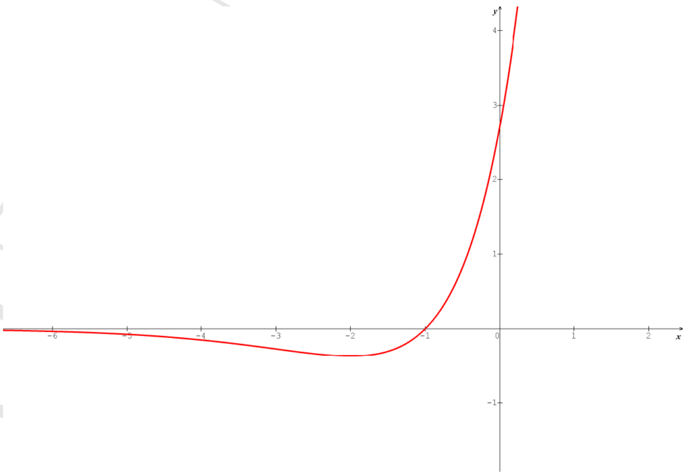

FIGURE 22.10 – La représentation graphique