Chapitre 23

Les coniques

JE N'AI JAMAIS AIMÉ ENSEIGNÉ LES CONIQUES. C'EST UN RESTE DES COURS D'ASTRONOMIE QUE L'ON TROUVAIT DANS LES COURS DE MATHÉMATIQUES DES ANNÉES 1950 CEPENDANT, IL N'EST PAS ININTÉRESSANT D'EN PRENDRE CONNAISSANCE POUR MIEUX COMPRENDRE LES PHÉNOMÈNES GÉOMÉTRIQUES UNE NOUVELLE FOIS, C'EST UN COURS MINIMAL

23.1 Introduction aux coniques

23.1.1 Définition cartésienne d'une conique

Le plan $\mathcal{P}$ étant rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, nous appelons conique d'équation (E)

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 \text{ avec } a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0$$

un ensemble $\Gamma \subset \mathcal{P}$ de points $M \in \mathcal{P}$ dont les coordonnées x et y dans le repère $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ vérifient l'équation (E)

Remarque 1 :

1. Nous connaissons déjà des coniques :
   (a) La parabole $y = x^2 \iff x^2 - y = 0$ est une conique bien connue
   (b) De manière plus générale, les paraboles d'équation $y = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ sont des coniques
   (c) La courbe d'équation $x = y^2 \iff y^2 - x = 0$ est aussi une conique ; c'est la réunion de la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ et $y = -\sqrt{x}$ avec $x \geqslant 0$
2. Une même conique Γ peut avoir plusiers équations ; par exemple :
   $$2x^2 + 3y^2 - 2 = 0 \text{ et } 4x^2 + 6y^2 - 4 = 0$$
   définissent la même conique
3. Il est aussi possible d'avoir $\Gamma = \emptyset$: les coniques d'équation $x^2 + y^2 + 1 = 0$ et $x^2 + 2 = 0$ sont des ensembles vides

Exemple 1 :

Quelques exemples d'étude

1. Etude de $2x^2 + y^2 - 2x = 0$

Nous avons :

$2x^2+y^2-2x=0 \iff 2\left(x^2-x\right)+y^2=0 \iff 2\left[\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\right]+y^2=0 \iff 2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{2}$

En faisant le changement de repère $\mathcal{R}\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right) \dashrightarrow \mathcal{R}_1\left(\Omega,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ où $\Omega=\left(\dfrac{1}{2},0\right)$, alors, dans $\mathcal{R}_1$, l'équation de la conique devient :

$$2X^2+Y^2=\frac{1}{2} \iff \frac{X^2}{\frac{1}{4}}+Y^2=1$$

Et l'étude se simplifie

2. $-x^2+y^2-2x=0$

Nous reprenons la démarche ci-dessus :

$-x^2+y^2-2x=0 \iff -\left(x^2+2x\right)+y^2=0 \iff -\left[(x+1)^2-1\right]+y^2=0 \iff -(x+1)^2+y^2=-1$

En faisant un nouveau changement de repère $\mathcal{R}\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right) \dashrightarrow \mathcal{R}_1\left(\Omega,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ où $\Omega=(-1,0)$, alors, dans $\mathcal{R}_1$, l'équation de la conique devient :

$$-X^2+Y^2=-1$$

Et l'étude se simplifie

3. Nous étudions cette fois-ci la conique d'équation $5x^2+5y^2-2xy-4=0$

En faisant le changement de repère $\mathcal{R}\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right) \dashrightarrow \mathcal{R}_1\left(O,\overrightarrow{I},\overrightarrow{J}\right)$ en modifiant, cette fois-ci, les vecteurs de base :

$$\overrightarrow{I}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}\right) \qquad \overrightarrow{J}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}\right)$$

Si un point $M\in\mathcal{P}$ a pour coordonnées x et y dans le repère $\mathcal{R}\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ et X et Y dans le repère $\mathcal{R}_1\left(O,\overrightarrow{I},\overrightarrow{J}\right)$, nous avons, tous calculs faits :

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y) \qquad y=\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)$$

Et l'équation de la conique dans le repère $\mathcal{R}_1\left(O,\overrightarrow{I},\overrightarrow{J}\right)$, devient :

$$5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)\right)^2+5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)\right)^2-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)\right)-4=0$$
$$\iff$$
$$4X^2+6Y^2=4$$
$$\iff$$
$$X^2+\frac{Y^2}{\frac{2}{3}}=1$$

Et le calcul en devient plus simple !

23.1.2 Définition de l'ellipse

Le plan $\mathcal{P}$ étant rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$; soit $(\mathcal{C})$ la conique d'équation

$$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0 \text{ avec } a\neq 0 \text{ ou } b\neq 0$$

S'il existe un repère orthonormé $\mathcal{R}_1\left(\Omega,\overrightarrow{I},\overrightarrow{J}\right)$ dans lequel $(\mathcal{C})$ a pour équation

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$$

Alors $(\mathcal{C})$ est une ellipse

Remarque 2 :

Attention !
Les nombres réels a et b de $\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}=1$ ne sont pas forcément les mêmes que ceux de l'équation de départ $ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$

23.1.3 Etude et graphe de $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Pour plus de simplicité, nous partons d'un plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ et nous étudions l'ensemble $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.
D'autre part, comme il y a parité, nous supposons $a>0$ et $b>0$

1. Tout d'abord, les points $A(a,0)$, $A'(-a,0)$, $B(0,b)$ et $B'(0,-b)$ sont des éléments de la conique.
2. Nous avons $y^2=b^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)$

   Un simple calcul nous permet de l'affirmer. Nous avons, dès lors, quelques résultats
   - ▷ Tout d'abord, nous avons $x\in[-a;+a]$
   - ▷ Ensuite $y=b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$ ou $y=-b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$, l'une des courbes étant la symétrique de l'autre par rapport à $x'Ox$
3. Etude de la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f:[-a;+a] & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \qquad\qquad x & \longmapsto \quad f(x)=b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}} \end{cases}$$

   - ▷ Le domaine de définition de f est donc $[-a;+a]$
   - ▷ f est dérivable sur $]-a;+a[$ et, sur cet ensemble, la dérivée est donnée par $f'(x)=\dfrac{-bx}{a^2\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}}$
   - ▷ Tableau de variations de f

x	$-a$		0		a
f'	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$
f	0	$\nearrow$	b	$\searrow$	0

   - ▷ Equation des tangentes
     L'équation d'une tangente en un point $M(x_0,y_0)$ est donnée par $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.
     Dans notre cas, nous avons $f'(x_0)=\dfrac{-bx_0}{a^2\sqrt{1-\dfrac{x_0^2}{a^2}}}=\dfrac{-bx_0}{a^2\frac{y_0}{b}}=\dfrac{-b^2x_0}{a^2y_0}$, d'où l'équation de la tangente en $M(x_0,y_0)$ est donnée par :

$$y-y_0=\frac{-b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$y-y_0-\frac{-b^2x_0x}{a^2y_0}+\frac{-b^2x_0^2}{a^2y_0}=0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$yy_0-y_0^2+\frac{b^2x_0x}{a^2}-\frac{b^2x_0^2}{a^2}=0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{yy_0}{b^2}-\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{x_0x}{a^2}-\frac{x_0^2}{a^2}=0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{yy_0}{b^2}+\frac{x_0x}{a^2}-1=0$$

Ainsi, l'équation de la tangente en $M\left(x_0, y_0\right)$ est donnée par $\dfrac{yy_0}{b^2} + \dfrac{x_0 x}{a^2} = 1$

D'où la représentation graphique dans la figure 23.1 :

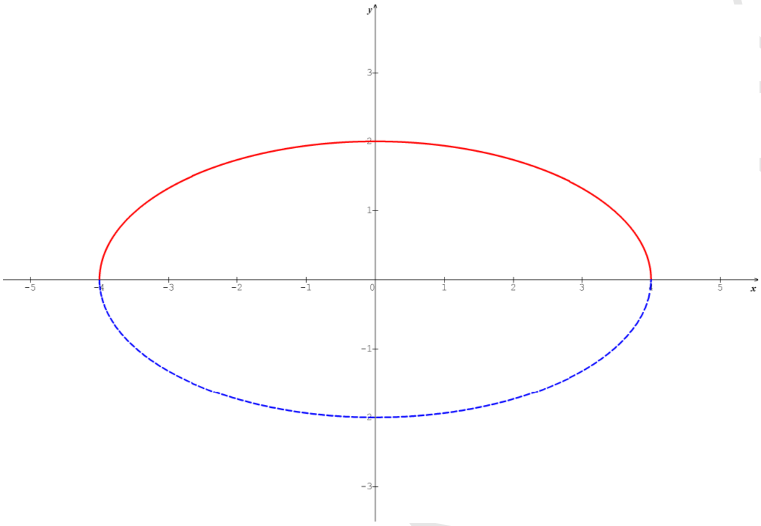

FIGURE 23.1 – Représentation graphique de l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

Remarque 3 :

Un peu de vocabulaire :

1. O est le centre de la conique
2. Si $a = b$, alors l'équation de l'ellipse devient $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = a^2$; l'ellipse est un cercle ! !
3. Les points $A\,(a, 0)$, $A'\,(-a, 0)$, $B\,(0, b)$ et $B'\,(0, -b)$ sont les sommets de la conique.
   Si $AA' > BB'$, le segment $[A; A']$ est le grand axe, alors que $[B; B']$ est le petit axe

Exercice 1 :

Etudier, suivant les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ la conique Γ d'équation dans le repère $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

$$4x^2 + y^2 + 16x - 2y + 25 - 4m = 0$$

23.1.4 Définition de l'hyperbole

Le plan $\mathcal{P}$ étant rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$; soit $(\mathcal{C})$ la conique d'équation

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 \text{ avec } a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0$$

S'il existe un repère orthonormé $\mathcal{R}_1\left(\Omega, \vec{I}, \vec{J}\right)$ dans lequel $(\mathcal{C})$ a pour équation

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = \pm 1$$

Alors $(\mathcal{C})$ est une hyperbole

23.1.5 Etude et graphe de l'hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Comme pour l'étude des ellipses et toujours pour plus de simplicité, nous partons d'un plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ et nous étudions l'ensemble $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Nous supposons toujours $a>0$ et $b>0$

1. Tout d'abord, les points $A(a,0)$ et $A'(-a,0)$, sont des éléments de la conique.
2. Nous avons $y^2=b^2\left(\dfrac{x^2}{a^2}-1\right)$

   Un simple calcul nous permet de l'affirmer. Nous avons, dès lors, quelques résultats
   - ▷ Tout d'abord, pour que y^2 soit défini, nous avons $|x|\geqslant a$, c'est à dire $x\in\,]-\infty;-a]\cup[a;+\infty[$
   - ▷ Ensuite $y=b\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}-1}$ ou $y=-b\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}-1}$, l'une des courbes étant la symétrique de l'autre par rapport à $x'Ox$
3. Etude de la fonction f définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f:\,]-\infty;-a]\cup[a;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)=b\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}-1}\end{array}\right.$$

   - ▷ Le domaine de définition de f est donc $]-\infty;-a]\cup[a;+\infty[$
   - ▷ D'autre part, f est paire et l'étude peut se réduire à l'intervalle $[a;+\infty[$
   - ▷ Nous avons $f(a)=b$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$
   - ▷ f est dérivable sur $]a;+\infty[$ et, sur cet ensemble, la dérivée est donnée par $f'(x)=\dfrac{bx}{a^2\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}-1}}$.

     La dérivée est donc toujours positive sur $]a;+\infty[$, et f y est donc croissante.
   - ▷ <u>Recherche du comportement en $+\infty$</u>

     En fait, nous allons rechercher les asymptotes.
     - ⋆ Tout d'abord,

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{b\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}-1}}{x}=\frac{b\sqrt{x^2\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{x^2}\right)}}{x}=\frac{bx\sqrt{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{x^2}}}{x}=b\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{x^2}}$$

       Et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}b\sqrt{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{b}{a}$

       f admet donc une direction asymptotique
     - ⋆ Nous avons :

$$f(x)-\frac{b}{a}x=b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}-\frac{b}{a}x=\frac{-b^2}{b\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}-1}+\dfrac{b}{a}x}$$

       Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\dfrac{b}{a}x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-b^2}{b\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}-1}+\dfrac{b}{a}x}=0$
     - ⋆ La droite $y=\dfrac{b}{a}x$ est asymptote à la courbe
   - ▷ <u>Equation des tangentes</u>

     Dans un calcul semblable au calcul de la tangente d'une ellipse, l'équation de la tangente en $M(x_0,y_0)$ est donnée par $\dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{yy_0}{b^2}=1$

   D'où la représentation graphique dans la figure 23.2 :

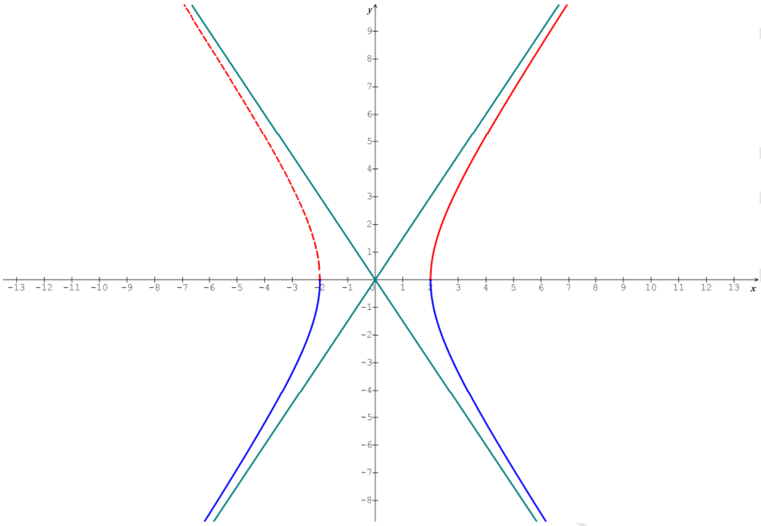

FIGURE 23.2 – Représentation graphique de l'hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

23.1.6 Etude et graphe de l'hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$

Nous partons donc d'un plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et nous étudions l'ensemble $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$.
Nous supposons toujours $a > 0$ et $b > 0$

1. Tout d'abord, les points $B\,(0, b)$ et $B'\,(0, -b)$ sont encore des éléments de la conique.
2. $\boxed{\text{Nous avons } y^2 = b^2\left(\dfrac{x^2}{a^2} + 1\right)}$

   Un simple calcul nous permet de l'affirmer. Nous avons, dès lors, quelques résultats
   - ▷ Tout d'abord, y^2 est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$
   - ▷ Ensuite $y = b\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} + 1}$ ou $y = -b\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} + 1}$, l'une des courbes étant la symétrique de l'autre par rapport à $x'Ox$
3. Etude de la fonction f définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f\,(x) = b\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} + 1} \end{array}\right.$$

   - ▷ Le domaine de définition de f est donc $\mathbb{R}$
   - ▷ D'autre part, f est paire et l'étude peut se réduire à l'intervalle $[0; +\infty[$
   - ▷ Nous avons $f\,(0) = b$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f\,(x) = +\infty$
   - ▷ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, sur $\mathbb{R}$, la dérivée est donnée par $f'\,(x) = \dfrac{bx}{a^2\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} + 1}}$.
   - ▷ Tableau de variations de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'	$-$	$-$	0	$+$	$+$
f	$+\infty$	$\searrow$	b	$\nearrow$	$+\infty$

   - ▷ Recherche du comportement en $+\infty$

     En fait, nous allons rechercher les asymptotes.

⋆ Tout d'abord,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}}{x} = \frac{b\sqrt{x^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \frac{bx\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{x^2}}}{x} = b\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{x^2}}$$

Et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} b\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{x^2}} = \frac{b}{a}$

f admet donc une direction asymptotique

⋆ Nous avons :

$$f(x) - \frac{b}{a}x = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1} - \frac{b}{a}x = \frac{b^2}{b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}+\frac{b}{a}x}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - \frac{b}{a}x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{b^2}{b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}+\frac{b}{a}x} = 0$

⋆ La droite $y = \frac{b}{a}x$ est asymptote à la courbe

▷ Equation des tangentes

Dans un calcul semblable au calcul de la tangente d'une ellipse, l'équation de la tangente en $M(x_0, y_0)$ est donnée par $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = -1$

D'où la représentation graphique dans la figure 23.3 :

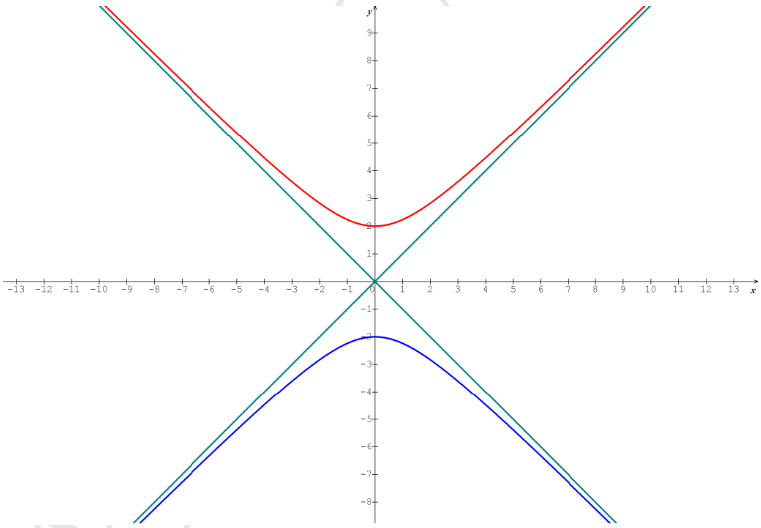

FIGURE 23.3 – Représentation graphique de l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{x} = -1$

Remarque 4 :

Nous venons aussi de montrer que, dans le cas de l'hyperbole, les asymptotes ont toujours pour équation $y = \frac{b}{a}x$ ou $y = -\frac{b}{a}x$

Exercice 2 :

Construire, dans un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, la conique Γ d'équation

$$-x^2 + 2y^2 + 2x + 8y + 5 = 0$$

23.1.7 Définition de la parabole

Le plan $\mathcal{P}$ étant rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$; soit $(\mathcal{C})$ la conique d'équation

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 \text{ avec } a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0$$

S'il existe un repère orthonormé $\mathcal{R}_1\left(\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right)$ dans lequel $(\mathcal{C})$ a pour équation

$$Y^2 = 2pX \text{ ou } Y = 2pX^2$$

Alors $(\mathcal{C})$ est une parabole

Exercice 3 :

Etudier, suivant les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ la forme de la conique d'équation

$$y^2 - (m+2)\,x + 4y + (m+1) = 0$$

Remarque 5 :

Il peut exister des coniques qui sont réunion de 2 droites ; par exemple :

$$y^2 + 2x^2 - 3yx + x - 1 = 0 \Longleftrightarrow (y - x - 1)\,(y - 2x + 1) = 0$$

C'est donc la réunion de 2 droites : $y = x + 1$ et $y = 2x - 1$

23.1.8 Exercices

Exercice 4 :

Equation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes

$\mathcal{H}$ est une hyperbole et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont les vecteurs directeurs des asymptotes de $\mathcal{H}$. O est le point de rencontre des asymptotes.

Montrer que l'équation de $\mathcal{H}$ dans le repère $\mathcal{R}\,(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est de la forme $XY = k$

Exercice 5 :

Soit $\mathcal{C}$ la conique qui a pour équation dans un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

$$4x^2 - 9y^2 + 16x + 18y - 29 = 0$$

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est une hyperbole. Trouver son centre Ω, ses axes, ses sommets et ses asymptotes. Représenter graphiquement $\mathcal{C}$.
2. On considère les vecteurs $\overrightarrow{U} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{V} = 3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$. Donner l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}\left(\Omega, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}\right)$

Exercice 6 :

Construire dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ la courbe d'équation :

$$16\,(x+6)\,|x+6| + 36y\,|y| = 576$$

Exercice 7 :

On donne l'application Φ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\begin{cases} \Phi : \mathbb{C} & \longrightarrow \quad \mathbb{C} \\ \quad\;\; z & \longmapsto \quad \Phi(z) = z^2 + z + 1 \end{cases}$$

Dans le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, construire l'ensemble E des points M d'affixe $z \in \mathbb{C}$ tels que $+\dfrac{\pi}{2}$ soit un représentant de l'argument de $\Phi(z)$