23.2 Coniques définies par foyers et directrices

23.2.1 Présentation

Dans un plan euclidien $\mathcal{P}$, soient $F \in \mathcal{P}$ et une droite $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ telle que $F \notin \mathcal{D}$
L'objet du problème est de connaître l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que la distance de M à F et la distance de M à $\mathcal{D}$ soient dans un rapport constant.

Autrement dit, tels que $\dfrac{d(M,F)}{d(M,\mathcal{D})} = e$ où e est un nombre donné au préalable.

Le plus souvent, le problème est donné sous cette forme :

$$\frac{d(M,F)}{d(M,m)} = \frac{MF}{Mm} = e$$

Où m est la projection orthogonale de M sur $\mathcal{D}$

23.2.2 Définition *(provisoire)*

On appelle $\Gamma(F,\mathcal{D},e)$, l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $\dfrac{d(M,F)}{d(M,m)} = \dfrac{MF}{Mm} = e$ où m est la projection orthogonale de M sur $\mathcal{D}$

- $\Rightarrow$ F est appelé foyer de la courbe $\Gamma(F,\mathcal{D},e)$
- $\Rightarrow$ $\mathcal{D}$ est appelé directrice de la courbe $\Gamma(F,\mathcal{D},e)$
- $\Rightarrow$ e est appelé excentricité de la courbe $\Gamma(F,\mathcal{D},e)$
- $\Rightarrow$ Si K est la projection orthogonale de F sur la droite $\mathcal{D}$, la droite (FK) est appelée axe focal.

Exercice 8 :

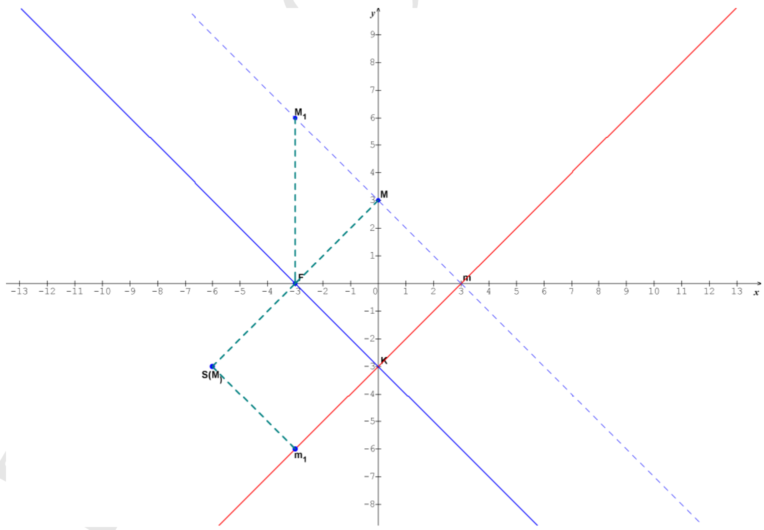

Figure 23.4 – Foyer, directrice

La représentation graphique 23.4 amène quelques questions :

1. Les 2 points M et M_1 ont même projection orthogonale m sur $\mathcal{D}$; ppartiennent-ils à la même courbe $\Gamma(F,\mathcal{D},e)$?
2. K est la projection orthogonale de F sur la droite $\mathcal{D}$, et $S(M)$ est le symétrique (orthogonal) du point M par rapport à la droite (FK). Montrer que M et $S(M)$ appartiennent à la même courbe $\Gamma(F,\mathcal{D},e)$.

On montre là que l'axe focal est un axe de symétrie de $\Gamma(F,\mathcal{D},e)$

23.2.3 Lemme

Soit $\mathcal{P}$ un plan euclidien ; alors : On appelle M' la projection orthogonale de M sur l'axe focal (FK) ; M' est aussi le milieu de $[MS(M)]$ où $S(M)$ est le symétrique (orthogonal) du point M par rapport à l'axe focal (FK). Alors :

$$M \in \Gamma(F, \mathcal{D}, e) \iff MM'^2 + M'F - e^2MK^2 = 0 \iff MM'^2 + \left\langle \overrightarrow{M'F} - e\overrightarrow{M'K} \mid \overrightarrow{M'F} + e\overrightarrow{M'K} \right\rangle = 0$$

Démonstration

Nous avons $M \in \Gamma(F, \mathcal{D}, e) \iff \dfrac{MF}{Mm} = e \iff \dfrac{MF^2}{Mm^2} = e \iff MF^2 - e^2Mm^2 = 0$

Ainsi, si M' la projection orthogonale de M sur l'axe focal (FK), des propriétés des triangles rectangles, nous avons $MF^2 = MM'^2 + M'F^2$ et $M'K^2 = Mm^2$

Donc $MF^2 - e^2Mm^2 = MM'^2 + M'F^2 - e^2M'K^2$. Comme $MM'^2 + M'F^2 - e^2M'K^2 = \left\langle \overrightarrow{M'F} - e\overrightarrow{M'K} \mid \overrightarrow{M'F} + e\overrightarrow{M'K} \right\rangle$, nous avons le résultat.

Remarque 6 :

Nous serons donc amenés à nous intéresser aus barycentres des systèmes pondérés $\{(F,1);(K,-e)\}$ et $\{(F,1);(K,e)\}$ qui sont, en fait, des données du problème

23.2.4 Théorème : cas où $e = 1$

Si $e = 1$, alors $\Gamma(F, \mathcal{D}, 1)$ est une parabole

Démonstration

Pour la démonstration, reportez vous sur la figure 23.5

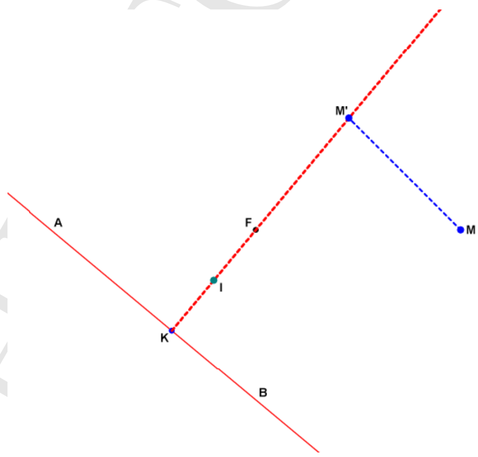

FIGURE 23.5 – La figure pour démontrer que si $e = 1$, alors $\Gamma(F, \mathcal{D}, e)$ est une parabole

- Si $e = 1$, le barycentre du système pondéré $\{(F,1);(K,-1)\}$ n'existe pas et, pour tout point $X \in \mathcal{P}$, $\overrightarrow{XF} - \overrightarrow{XK} = \overrightarrow{KF}$ et donc :

$$M \in \Gamma(F, \mathcal{D}, 1) \iff MM'^2 + \left\langle \overrightarrow{KF} \mid \overrightarrow{M'F} + \overrightarrow{M'K} \right\rangle = 0$$

- Par contre, le barycentre du système pondéré $\{(F,1);(K,1)\}$ existe, et c'est le milieu I du segment $[FK]$. Nous pouvons écrire que $I \in \Gamma(F, \mathcal{D}, 1)$

- ▷ On construit alors un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(I, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ où $\overrightarrow{i} = \dfrac{\overrightarrow{IF}}{IF}$, et en posant $FK = p$, nous avons $IF = \dfrac{p}{2}$
- ▷ Dans ce repère $\mathcal{R}\left(I, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, si M apour coordonnées (x, y), M', la projection orthogonale de M sur l'axe focal a pour coordonnées $(x, 0)$, F a pour coordonnées $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ et $K\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$; la directrice a pour équation $x = -\dfrac{p}{2}$
- ▷ De plus $\overrightarrow{KF} = \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{M'F} + \overrightarrow{M'K} = 2\overrightarrow{M'I}$; or $\overrightarrow{IM'} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$
  Donc
  $$M \in \Gamma(F, \mathcal{D}, 1) \Longleftrightarrow MM'^2 + \left\langle \overrightarrow{KF} \mid 2\overrightarrow{M'I} \right\rangle = 0 \Longleftrightarrow y^2 - 2px = 0$$
- ▷ Nous avons donc trouvé un repère, le repère $\mathcal{R}\left(I, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, dans lequel la courbe $\Gamma(F, \mathcal{D}, 1)$ a pour équation $y^2 = 2px$.
  C'est donc une parabole.

Remarque 7 :

Vocabulaire

1. $p = FK$ est le paramètre de la parabole
2. Le sommet de la parabole est I, milieu du segment $[FK]$

Exercice 9 :

Soit $M_0\,(x_0; y_0)$ un point de la parabole $\Gamma(F, \mathcal{D}, 1)$; T est le point d'intersection de la directrice avec la tangente à la parabole en M_0. Il faut montrer que l'angle $\widehat{M_0FT}$ est droit

23.2.5 Etude d'une réciproque

Soit (P) un sous-ensemble de points du plan euclidien $\mathcal{P}$ dont les coordonnées dans un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ vérifient $y^2 = 2px$.
Alors, il existe un point F et une droite $\mathcal{D}$ tels que $(P) = \Gamma(F, \mathcal{D}, 1)$

Démonstration

Il nous suffit de mettre dans des cases adaptées. Reportez vous à la figure 23.6

- ▷ Soit F, le point de coordonnées dans le repère $\mathcal{R}\left(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ et la droite d'équation $x = -\dfrac{p}{2}$
- ▷ Pour $M \in (P)$ où M a pour coordonnées $M(x, y)$ où $y^2 = 2px$. Alors :
  - ⋆ $MF^2 = \left(x - \dfrac{p}{2}\right)^2 + y^2 = x^2 + \dfrac{p^2}{4} - px + 2px = x^2 + \dfrac{p^2}{4} + px$
  - ⋆ $Mm^2 = \left(x + \dfrac{p}{2}\right)^2 = x^2 + \dfrac{p^2}{4} + px$
- ▷ Nous avons $MF^2 = Mm^2$, c'est à dire $\dfrac{MF}{Mm} = 1$ et donc $M \in \Gamma(F, \mathcal{D}, 1)$, c'est à dire $(P) \subset \Gamma(F, \mathcal{D}, 1)$

Par le résultat de 23.2.4, nous avons donc $(P) = \Gamma(F, \mathcal{D}, 1)$

Exemple 2 :

Quelques applications à des paraboles classiques

1. **La parabole** $y = x^2$
   - ▷ Tout d'abord l'origine $O\,(0, 0)$ est le sommet de la parabole

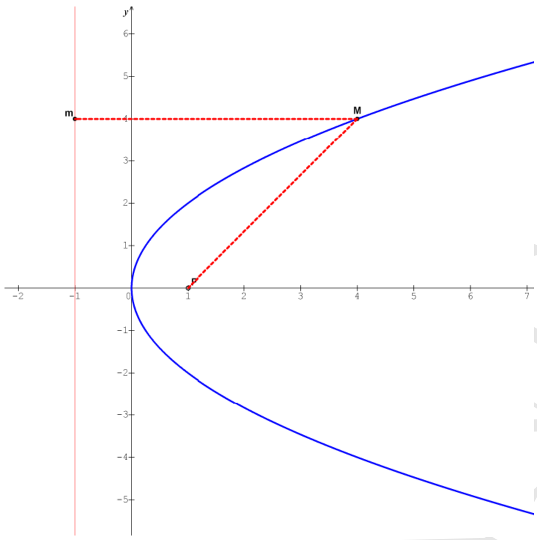

FIGURE 23.6 – Un schéma pour étudier la parabole

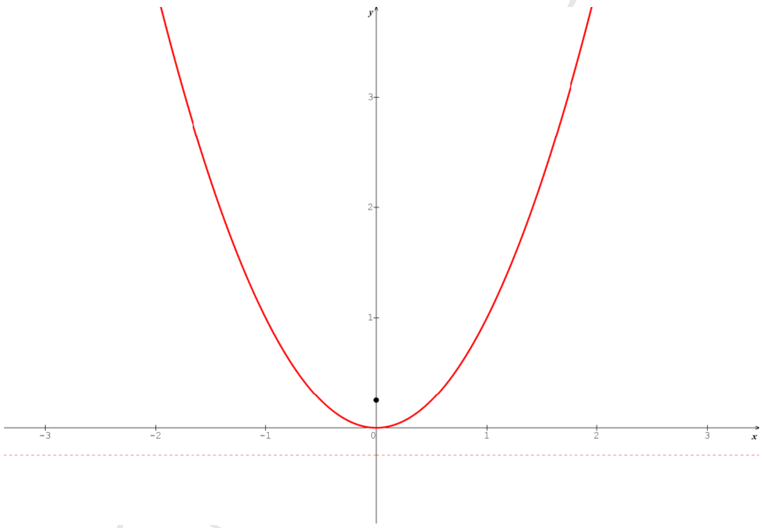

FIGURE 23.7 – La parabole $y = x^2$ avec son foyer et sa directrice

- ▷ Ensuite, pour des raisons de symétrie, nous pouvons écrire $x^2 = 2py$ et alors le foyer de cette parabole est $F\left(0, \dfrac{p}{2}\right)$ et la directrice a pour équation $y = -\dfrac{p}{2}$
- ▷ Ici, nous avons donc $p = \dfrac{1}{2}$, d'où le foyer est donc $F\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$ et la directrice a pour équation $y = -\dfrac{1}{4}$

Voir donc la figure 23.7

2. **La parabole** $y = -\dfrac{x^2}{2} + x + 1$
   - ▷ Le sommet de la parabole est donné par $\Omega\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$
   - ▷ Dans le repère $\mathcal{R}\left(\Omega, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Si X et Y sont les coordonnées d'un point M dans le repère $\mathcal{R}\left(\Omega, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et x et y dans le repère $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, les formule de changement de repère sont :

$$x = X + 1 \quad \text{et} \quad y = Y + \frac{3}{2}$$

D'où l'équation de la parabole dans le repère $\mathcal{R}\left(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est donnée par :

$$Y + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}(X+1)^2 + (X+1) + 1 \Longleftrightarrow Y + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{2} \Longleftrightarrow X^2 = -2Y$$

- ▷ En reprenant et en adaptant ce que nous avons fait dans l'exemple précédent, nous avons, dans le repère $\mathcal{R}\left(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, $X^2 = 2pY$ avec $p = -1$
- ▷ Donc, dans le repère $\mathcal{R}\left(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, le foyer F a pour coordonnées $F\left(0, \frac{-1}{2}\right)$ et la directrice $y = \frac{1}{2}$.

  Dans le repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, le foyer F a pour coordonnées $F(1,1)$ et la directrice $y = 2$.

Voir la figure 23.8

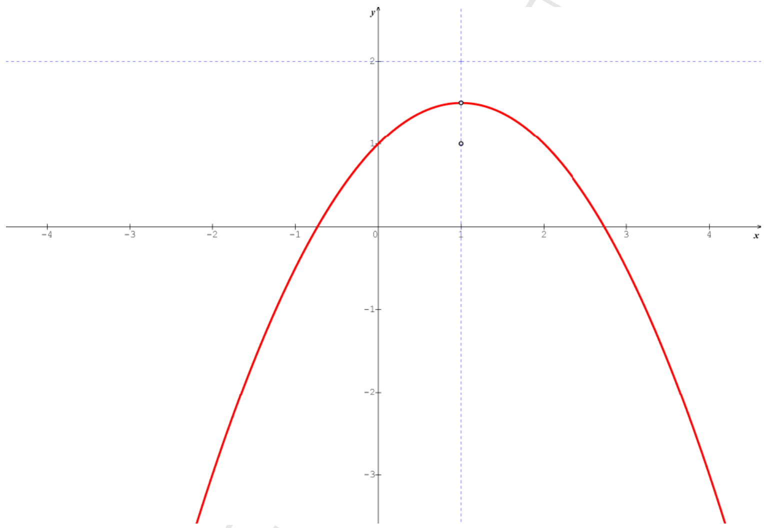

FIGURE 23.8 – La parabole $y = -\frac{x^2}{2} + x + 1$ avec son foyer, sa directrice et son axe

23.2.6 Théorème : cas où $0 < e < 1$

Si $e < 1$, alors $\Gamma(F, \mathcal{D}, e)$ est une ellipse

Démonstration

Nous appelons k l'abscisse du point K, projeté orthogonal de F sur $\mathcal{D}$. Nous considérons un repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ où $\overrightarrow{i} = \frac{\overrightarrow{KF}}{\left\|\overrightarrow{KF}\right\|}$. Nous notons $\overrightarrow{OF} = c\,\overrightarrow{i}$ où $c > 0$. Nous appelons k l'abscisse du point K, c'est à dire $K(k, 0)$.

Soit M un point de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et M' la projection orthogonale de M sur $\mathcal{D}$.*(Voir la figure 23.9)*

Alors $\overrightarrow{MF} = \begin{pmatrix} x - c \\ -y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MM'} = \begin{pmatrix} x - k \\ 0 \end{pmatrix}$

Et nous avons :

$$M \in \Gamma(F, \mathcal{D}, e) \Longleftrightarrow MF^2 = e^2 MM'^2 \Longleftrightarrow (x-c)^2 + y^2 = e^2 (x-k)^2$$

Tous calculs faits, nous avons :

$$(x-c)^2 + y^2 = e^2(x-k)^2 \Longleftrightarrow \left(1 - e^2\right)x^2 + y^2 + 2\left(ke^2 - c\right)x = e^2k^2 - c^2$$

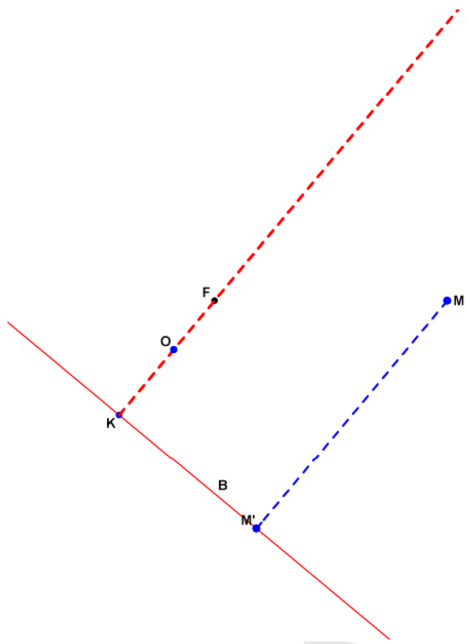

FIGURE 23.9 – Position du problème

Nous choisissons comme origine, le point O, barycentre du système pondéré $\{(F,1)\,;(K,-e^2)\}$. Dans ce cas, nous avons alors $\overrightarrow{OF}-e^2\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{0}$
Or :

$$\overrightarrow{OF}-e^2\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{0}\iff c\,\overrightarrow{i}-e^2k\,\overrightarrow{i}=\overrightarrow{0}\iff c-e^2k=0$$

Ainsi :

$$M\in\Gamma(F,\mathcal{D},e)\iff\left(1-e^2\right)x^2+y^2=\frac{c^2}{e^2}-c^2=\frac{c^2\left(1-e^2\right)}{e^2}\iff x^2+\frac{y^2}{1-e^2}=\frac{c^2}{e^2}$$

Comme $e<1$, nous avons $1-e^2>0$
- ⇒ Si $c=0$, nous avons

$$M\in\Gamma(F,\mathcal{D},e)\iff x^2+\frac{y^2}{1-e^2}=0$$

C'est à dire que le point M est confondu avec l'origine O qui est, dans notre cas F
- ⇒ Si, maintenant $c\neq 0$, alors

$$M\in\Gamma(F,\mathcal{D},e)\iff x^2+\frac{y^2}{1-e^2}=\frac{c^2}{e^2}\iff\frac{x^2}{\frac{c^2}{e^2}}+\frac{y^2}{\frac{c^2}{e^2}\left(1-e^2\right)}=1$$

C'est donc une ellipse pour laquelle $a=\dfrac{c}{e}$ et $b=a\sqrt{1-e^2}$; on peut donc dire $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2\left(1-e^2\right)}=1$

Remarque 8 :

1. Nous posons, le plus souvent, pour les coordonnées de F, $F(c,0)$; puisque nous avons $c=e^2k$, les coordonnées de K sont alors $K\left(\dfrac{c}{e^2},0\right)$; mais comme $a=\dfrac{c}{e}$, les coordonnées de K sont donc $K\left(\dfrac{a}{e},0\right)$
2. La droite perpendiculaire en O, le centre de l'ellipse à l'axe focal est <u>l'axe non focal</u>
3. Il y a donc plusieurs symétries dans cette conique :
   - ▷ L'axe focal
   - ▷ L'axe non focal

- ▷ Et O qui est le centre de l'ellipse

4. De la symétrie par rapport à l'axe non focal, on peut déduire que $\Gamma\left(F, \mathcal{D}, e\right)$ admet un autre foyer F' et une autre directrice $\mathcal{D}'$ où F' et $\mathcal{D}'$ sont les symétriques respectifs de F et $\mathcal{D}$ par rapport à l'axe focal.
   Et donc $\Gamma\left(F, \mathcal{D}, e\right) = \Gamma\left(F', \mathcal{D}', e\right)$
5. Une ellipse admet donc 2 foyers et 2 directrices. Nous admettons que ce sont les seuls

23.2.7 Réciproquement

Soit $\mathcal{P}$ un plan euclidien et $\mathcal{E}$ un ensemble de points dont les coordonnées dans un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ vérifient :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Alors, il existe $F \in \mathcal{P}$, $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ et $e \in \mathbb{R}$ où $0 < e < 1$ tels que

$$\mathcal{E} = \Gamma\left(F, \mathcal{D}, e\right)$$

Nous avons alors $OF = \sqrt{a^2 - b^2} = c$, $e = \dfrac{c}{a}$ et la directrice $\mathcal{D}$ qui a pour équation $x = \dfrac{a}{e}$

Démonstration

A faire en exercice

Remarque 9 :

1. Nous avons $b^2 = a^2\left(1 - e^2\right)$ et $K\left(\dfrac{a}{e}, 0\right)$
2. De la symétrie par rapport à l'axe non focal, nous avons $OF = OF' = c$ et donc $F'\left(-c, 0\right)$, et $\mathcal{D}'$ a pour équation $x = -\dfrac{a}{e}$
3. Si $b > a$, alors $OF = c = \sqrt{b^2 - a^2}$, $e = \dfrac{c}{b}$ et la directrice $\mathcal{D}$ a pour équation $y = \dfrac{b}{e}$

Exercice 10 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Déterminer le centre, les sommets, les foyers, les directrices et l'excentricité e des coniques d'équations :

1. $5x^2 + y^2 - 10x + 4y + 4 = 0$
2. $4x^2 + 9y^2 + 8x + 18y - 23 = 0$

23.2.8 Théorème : cas où $e > 1$

Si $e > 1$, alors $\Gamma\left(F, \mathcal{D}, e\right)$ est une hyperbole

Démonstration

La démonstration est très semblable à 23.2.6, et le schéma de référence peut toujours être 23.9
Nous choisissons une nouvelle fois comme origine, le point O, barycentre du système pondéré $\left\{\left(F, 1\right); \left(K, -e^2\right)\right\}$ et encore :

$$M \in \Gamma\left(F, \mathcal{D}, e\right) \Longleftrightarrow \left(1 - e^2\right)x^2 + y^2 = \frac{c^2}{e^2} - c^2 = \frac{c^2\left(1 - e^2\right)}{e^2} \Longleftrightarrow x^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{c^2}{e^2}$$

Mais, cette fois ci $e > 1$ et $1 - e^2 < 0$
$\Rightarrow$ Si $c = 0$, $\Gamma\left(F, \mathcal{D}, e\right)$ est réduite au point F

$\Rightarrow$ Supposons $c \neq 0$, alors :

$$M \in \Gamma(F, \mathcal{D}, e) \Longleftrightarrow x^2 - \frac{y^2}{e^2-1} = \frac{c^2}{e^2} \Longleftrightarrow \frac{x^2}{\frac{c^2}{e^2}} - \frac{y^2}{\frac{c^2}{e^2}(e^2-1)} = 1$$

L'équation $\dfrac{x^2}{\frac{c^2}{e^2}} - \dfrac{y^2}{\frac{c^2}{e^2}(e^2-1)} = 1$ est du type $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ où $a = \dfrac{c}{e}$ et $b = a\sqrt{e^2-1}$

Remarque 10 :

1. Nous posons toujours $OF = c$ et donc F a pour coordonnées $F(c, 0)$ et $OK = \dfrac{a}{e}$
2. Nous avons toujours 2 sommets. A et A' sont les sommets de la parabole.
3. On définit, comme pour l'ellipse, axe focal, axe non focal, centre de l'hyperbole ; et il y a toujours les mêmes symétries
4. Une hyperbole admet aussi 2 foyers et 2 directrices.

23.2.9 Question réciproque

Soit $\mathcal{P}$ un plan euclidien et $\mathcal{H}$ un ensemble de points dont les coordonnées dans un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ vérifient :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Alors, il existe $F \in \mathcal{P}$, $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ et $e \in \mathbb{R}$ où $e > 1$ tels que

$$\mathcal{H} = \Gamma(F, \mathcal{D}, e)$$

Nous avons alors $OF = \sqrt{a^2+b^2} = c$, $e = \dfrac{c}{a}$ et la directrice $\mathcal{D}$ qui a pour équation $x = \dfrac{a}{e}$

Démonstration

A faire en exercice

Remarque 11 :

1. C'est de $b^2 = a^2\left(e^2-1\right)$ que nous tirons c
2. Attention !! Si $\mathcal{H}$ a pour équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$, nous avons toujours $OF = \sqrt{a^2+b^2} = c$, mais $e = \dfrac{c}{b}$ et la directrice $\mathcal{D}$ qui a pour équation $y = \dfrac{b}{e}$

Exercice 11 :

1. Donner foyer, directrice, excentricité pour l'hyperpbole $y = \dfrac{1}{x}$
2. Une hyperbole est dite **équilatère** si et seulement si ses asymptotes sont perpendiculaires.
   Montrer qu'une hyperbole est équilatère si et seulement si $e = \sqrt{2}$

Exercice 12 :

Dans un plan $(\mathcal{P})$ rapporté à un repère orthonormé $(\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $x = 1$ et le point $F(3, 0)$
Soit H la projection orthogonale sur $(\mathcal{D})$ d'un point $M(x, y)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble $(\mathcal{H})$ des points M vérifiant : $MF = \sqrt{3}MH$

2. Reconnaître cet ensemble $(\mathcal{H})$; indiquer la position de ses sommets et l'éguation de ses asymptotes
3. Déterminer par le calcul le nombre de points d'intersection de $(\mathcal{H})$ et de la droite d'équation $y = mx$; on discutera selon les valeurs du paramètre réel m.