23.3 Quelques exercices complémentaires

23.3.1 Définition bifocale de l'ellipse ou de l'hyperbole

Exercice 13 :

1. **Soit $\mathcal{E}$ une ellipse** de foyers F et F', de directrice $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ et d'excentricité e.
   Montrer que, pour tout point $M \in \mathcal{E}$ nous avons $MF + MF' = 2a$ où $2a$ est la distance entre les deux sommets
2. Réciproquement, soient F et F', 2 points distincts du plan, c'est à dire tels que $FF' > 0$. Quel est l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ vérifiant $MF + MF' = \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un nombre fixé au départ.

Exercice 14 :

1. **Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole** de foyers F et F', de directrice $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ et d'excentricité e.
   Montrer que, pour tout point $M \in \mathcal{H}$ nous avons $|MF - MF'| = 2a$ où $2a$ est la distance entre les deux sommets
2. Réciproquement, soient F et F', 2 points distincts du plan, c'est à dire tels que $FF' > 0$. Quel est l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ vérifiant $|MF - MF'| = \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un nombre fixé au départ.

23.3.2 Définition paramétrique des coniques

Exercice 15 :

Montrer que :

$$\begin{cases} x = & \dfrac{t^2}{2p} \\ y = & t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

est une représentation paramétrique d'une parabole

Exercice 16 :

Montrer que :

$$\begin{cases} x = & a\cos\varphi \\ y = & b\sin\varphi \end{cases} \quad \text{où } \varphi \in \left]-\pi; +\pi\right]$$

est une représentation paramétrique d'une ellipse

Exercice 17 :

Quelle est la courbe $\mathcal{C}$ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = & a\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = & \dfrac{2bt}{1+t^2} \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

Exercice 18 :

Quelle est la courbe $\mathcal{C}$ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = & a\dfrac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y = & b\dfrac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

Note : on appelle $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ et $\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$

Exercice 19 :

Quelle est la courbe $\mathcal{C}$ de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{rl} x = & \dfrac{a}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right) \\ y = & \dfrac{b}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right) \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R}^*$$

23.3.3 Many and different

Exercice 20 :

Soit $\mathcal{P}$ le plan affine rapporté au repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

1. Déterminer l'ensemble E des points M de $\mathcal{P}$ dont l'affixe $z \in \mathbb{C}$ vérifie :

$$10\,|z|^2 + 3\left(z^2 + \overline{z}^2\right) = 4$$

   où $\overline{z}$ est le complexe conjugré de z. Indiquer ses foyers F et F' ainsi que ses directrices.
2. Soit f la composée de l'homothétie de centre O et de rapport 2 et de la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$. Déterminer l'équation de E' image de E par f
3. Montrer que E' est une ellipse de foyer $f(F)$ et $f(F')$. Comparer les excentricités de E et E'.
4. Construire E et E', sur un même dessin

Exercice 21 :

Dans.un plan affine rapporté au repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on considère la famille de courbes C_m d'équation :

$$2mx^2 -^8 mx - (m-1)\,y^2 + 12m - 2 = 0$$

m étant un paramètre réel.

1. Discuter selon les valeurs de m de la nature de C_m
2. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles C_m est :
   (a) Un cercle
   (b) Une hyperbole équilatère
   Construire ces deux courbes.

Exercice 22 :

Dans le plan $\mathcal{P}$, soit $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé, f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M d'affixe $z \in \mathbb{C}$ associe le point M' d'affixe $z' = z^2 + iz + l$

1. Déterminer l'ensemble des points M dont l'image par f est le point A d'affixe $3i$.
2. Soient $M \in \mathcal{P}$ un point de de coordonnées x et y, et $M' = f(M)$ de coordonnées x' et y' son image par f. Déterminer x' et y' en fonction de x et y
3. Soit Γ l'ensemble des points M du plan dont l'image est sur la droite d'équation $x = -1$. Déterminer une équation cartésienne de Γ.
4. Soit $\mathcal{C}$ l'image par f de la droite $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.
5. Montrer que Γ et $\mathcal{C}$ sont des coniques dont on déterminera les éléments remarquables *(notamment le centre, les axes, les asymptotes et les sommets lorsqu'ils existent)* et que l'on construira.

Exercice 23 :

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on appelle disque unité l'ensemble :

$$D = \{M \in \mathcal{P} \text{ tels que } OM \leqslant 1\}$$

On appelle <u>distance d'un point M à une droite (D)</u>,et on la note $d\,(M, (D))$, la plus petite des distances de M aux points de (D).

1. Démontrer que si M est extérieur au disque, alors $d\,(M, (D)) = MM_0$ où M_0 est l'intersection du cercle unité avec le segment $[O; M]$
2. En déduire que si x et y sont les coordonnées de M, on a alors $d\,(M, (D)) = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$
3. Soit Δ la droite d'équation $y = -2$. Chercher I'ensemble des points M du plan tels que $d\,(M, (D)) = 2d\,(M, \Delta)$ Représenter (D), Δ et l'ensemble obtenu sur une même figure.

Exercice 24 :

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on définit les trois points :

$$A\,(1, 0) \qquad B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \qquad B\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

et la droite D dont une équation est :$x = 1$

1. Déterminer les coordonnées du point G tel que$\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB}$ Quelle est la nature du quadrilatèrc (A, B, G, C) ?
2. On note (Γ) I'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$, coordonnées (x, y), qui vérifient la relation : $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2\,(x - l)^2$.
   (a) Montrer que les points B et C appartiennent à (Γ)
   (b) Montrer que (Γ) est I'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que :
   $$MG = \sqrt{2}d\,(M, D)$$
   où $d\,(M, D)$ désigne la distance de M à la droite D.
   (c) En déduire la nature de (Γ) et en préciser les éléments remarquables. Représenter (Γ) dans le repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

Exercice 25 :

1. Le plan $\mathcal{P}$ étant rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, les coordonnées x et y d'un point mobile M sont données, à chaque instant $t \in \mathbb{R}$, par
   $$\begin{aligned} x &= \ 1 + 2\cos^2 t \\ y &= \ 2\sin t \cos t. \end{aligned}$$
   Montrer que la trajectoire de M est un cercle $\mathcal{C}$ et décrit un mouvement uniforme. Écrire, en fonction de t, l'équation de la tangente en M à $\mathcal{C}$.
2. On appelle ≪ <u>transformé</u> ≫ du point $M\,(x, y)$ appartenant à $\mathcal{C}$ le point $M'\,(X, Y)$ défini par les deux conditions suivantes :
   $\Rightarrow$ $\overrightarrow{OM'}$ est perpendiculaire à la tangente en M à $\mathcal{C}$.
   $\Rightarrow$ Le produit scalaire $\left\langle \overrightarrow{OM} \mid \overrightarrow{OM'} \right\rangle$ est égal à 3.
   Soit Γ l'ensemble des points M'. Établir que les coordonnées X et Y de M' vérifient le système suivant :
   $$X\,(2 + \cos 2t) + Y \sin 2t = 3 \text{ et } X \sin 2t - Y \cos 2t = 0$$
   Former l'équation cartésienne de Γ. Montrer que Γ est une hyperbole

3. Exprimer les coordonnées X, Y de M' en fonction de t. Déterminer un système de paramètres directeurs de la tangente en M' à Γ. Montrer que cette tangente est perpendiculaire à la droite (OM) en un point m ; vérifier que ce point m appartient au cercle $\mathcal{C}$.
4. On donne à t deux valeurs t_1 et t_2, qui diffèrent de $\dfrac{\pi}{2}$. Montrer que les points correspondants M_1 et M_2 sont diamétralement opposés sur $\mathcal{C}$ et que leurs transformés M_1' et M_2' sont alignés avec O

Exercice 26 :

A l'instant t, réel positif ou nul, on considère un point M de coordonnées (x, y) dans le repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ telles que :

$$x = \cos t \quad \text{et} \quad y = 2\sin t$$

Quelle est la trajectoire de M lorsque $t \in \mathbb{R}$? Quel est le vecteur vitesse de M à l'instant t ?

Exercice 27 :

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère, orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

1. On considère la courbe (H) d'équation $x^2 - 2y^2 = 1$
   Quelle est la nature de cette courbe ? Déterminer ses sommets, ses asymptotes et la dessiner.
2. On considère dans le plan $\mathcal{P}$ le mouvement du point $M(x, y)$ tel que :

$$\begin{cases} x = & \dfrac{1}{\cos 2t} \\ y = & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \tan 2t \end{cases}$$

   (a) Montrer que la trajectoire (T) est une partie de (H) que l'on précisera.
   (b) Déterminer les composantes du vecteur vitesse $\overrightarrow{V}$ dans la base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$. Vérifier que la fonction $N(t) = \left\|\overrightarrow{V}\right\|$ est croissante.

Exercice 28 :

Image d'une ellipse par une symétrie

1. (a) Dans le plan affine $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère, orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on donne la courbe (C) d'équation :
   $$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$$
   Construire cette courbe et en préciser les éléments.
   (b) Soit M un point mobile de coordonnées :
   $$\begin{cases} x = & 2\displaystyle\int_0^t \sin 2u \, \mathrm{d}u \\ y = & 2 + 2\sqrt{2}\displaystyle\int_0^t \cos 2u \, \mathrm{d}u \end{cases} \quad \text{avec } t \in [0; \pi]$$
   Calculer les composantes du vecteur-vitesse et du vecteuraccélération. Déterminer les intervalles de temps pendant lesquels le mouvement est accéléré.
   (c) Montrer que la trajectoire de M est la courbe (C).
2. (a) Soit (D_k) la droite d'équation $2x + y + k = 0$ où k désigne un paramètre réel. Montrer que l'intersection de (C) et de (D_k) est, pour certaines valeurs de k *(que l'on précisera)*, constituée de 2 points M_k et N_k, éventuellement confondus.
   Soit alors I_k, le milieu du segment M_kN_k Calculer ses coordonnées. Quel est, lorsque k varie, l'ensemble des points I_k ?

(b) On considère l'application affine f, qui au point M de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') définies par :

$$\begin{cases} x' = & \frac{1}{3}(x + 2y - 2) \\ y' = & \frac{1}{3}(4x - y + 4) \end{cases}$$

i. Montrer que f est une involution.

ii. Trouver l'ensemble des points invariants par f

iii. Quelle est la nature de l'application f ?

(c) Déterminer les images directe et réciproque de (C) par f

Exercice 29 :

Le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Soit (D) la droite d'équation $x = 6$ et F le point de coordonnées $(8, 0)$.
Soit θ un nombre réel tel que $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$
On désigne par Γ_θ I'ensemble des points M du plan tels que :

$$\frac{MF}{MH} = \frac{1}{\cos\theta}$$

où H est le projeté orthogonal de M sur (D).

1. Préciser la nature de Γ_θ suivant les valeurs de θ
2. Construire la courbe Γ_0 correspondant à $\theta = 0$.
3. (a) Écrire une équation cartésienne de Ia courbe $\Gamma_{\frac{\pi}{6}}$ correspondant à $\theta = \frac{\pi}{6}$
   (b) Préciser les élénents caractéristiques de cette courbe *(foyers, sommets, éléments de symétrie, asymptotes)*
   (c) Construire la courbe $\Gamma_{\frac{\pi}{6}}$
4. Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 10.
   (a) Écrire une équation cartésienne de la courbe (E) transformée de (C) par l'affinité orthogonale d'axe la droite d'équation $y = 0$ et de rapport $\frac{3}{5}$
   (b) Préciser les foyers de (E)
   (c) En déduire que les tangentes à $\Gamma_{\frac{\pi}{6}}$ et à (E) aux points d'intersection de ces courbes sont perpendiculaires.

Exercice 30 :

α et β étant deux nombres réels donnés, on considère l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$z^2 + \alpha z + \beta = 0 \tag{23.1}$$

1. Le plan étant muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, soit M le point de coordonnées (α, β). Quel est l'ensemble des points M tels que l'équation 23.1 possède :
   (a) Une solution double ?
   (b) Deux solutions réelles distinctes ?
   (c) Deux solutions distinctes, non réelles ? *(On représentera ces différents ensembles dans le plan.)*
2. y étant un réel quelconque, exprimer les solutions de l'équation 23.1 dans le cas où $\alpha = -2y$ et $\beta = -1$
   Vérifier que ces solutions sont réelles, de signes contraires, puis résoudre l'équation d'inconnue x réelle :

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$

3. Résoudre l'équation 23.1 dans le cas où $\alpha = 13$ et $\beta = 49$
4. En déduire les solutions de l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$\left(z^2 - 1\right)\left(z^4 + 13z^2 + 49\right) = 0$$

   Vérifier que ses solutions sontles nombres complexes :

$$z_k = 2e^{ik\frac{\pi}{3}} - e^{-ik\frac{\pi}{3}} \; (k \text{ décrivant } \{0, 1, 2, 3, 4, 5\})$$

5. Dans le plan muni du repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ on note M_k Ie point d'affixe z_k avec $k \in \{0, 1, 2, 3; 4, 5\}$ Démontrer que les points M_k sont sur une même ellipse (E).
6. Démontrer qu'une affinité orthogonale d'axe $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$ transformant (E) en le cercle de diamètre $[M_0; M_3]$ transforme l'hexagone $M_0M_1M_2M_3M_4M_5$ en un hexagone régulier.
7. En déduire que les droites (M_0M_1),(M_1M_2), (M_2M_3),(M_3M_4), $((M_4M_5)$ et (M_5M_0) sont tangentes à une même ellipse (E_1) Tracer les ellipses (E) et (E_1) et placer les points M_k