23.4 Correction de quelques exercices

Exercice 1 :

Etudier, suivant les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ la conique Γ d'équation dans le repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

$$4x^2 + y^2 + 16x - 2y + 25 - 4m = 0$$

Nous avons :

$$4x^2 + y^2 + 16x - 2y = 4\left(x^2 + 4x\right) + \left(y^2 - 2y\right) = 4\left(x+2\right)^2 - 16 + \left(y-1\right)^2 - 1 = 4\left(x+2\right)^2 + \left(y-1\right)^2 - 17$$

De telle sorte que :

$$4x^2+y^2+16x-2y+25-4m = 0 \Longleftrightarrow 4\left(x+2\right)^2+\left(y-1\right)^2-17+25-4m = 0 \Longleftrightarrow 4\left(x+2\right)^2+\left(y-1\right)^2 = 4m-8 = 4\left(m-2\right)$$

Ainsi :
- $\rightarrow$ Si $m < 2$, alors $\Gamma = \emptyset$
- $\rightarrow$ Si $m = 2$, Γ est réduit au seul point de coordonnées $(-2, 1)$
- $\rightarrow$ Si $m > 2$, nous avons alors :

$$4\left(x+2\right)^2 + \left(y-1\right)^2 = 4\left(m-2\right) \Longleftrightarrow \frac{\left(x+2\right)^2}{m-2} + \frac{\left(y-1\right)^2}{4\left(m-2\right)} = 1$$

Et Γ est alors une ellipse de centre $C = (-2, 1)$

Représentation graphique dans la figure 23.10 pour $m = 3$:

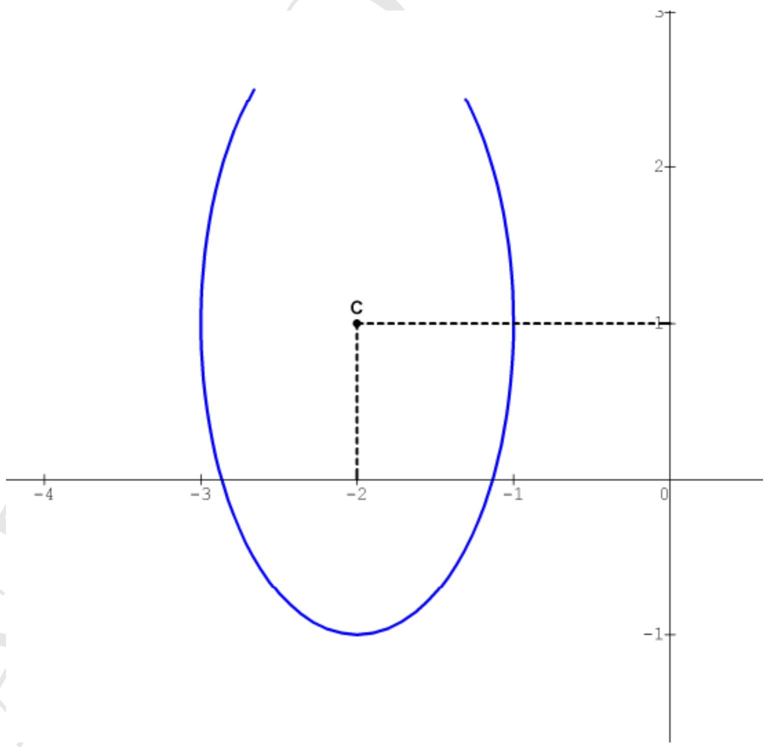

FIGURE 23.10 – Représentation graphique de Γ pour $m = 3$

Exercice 3 :

Etudier, suivant les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ la forme de la conique d'équation

$$y^2 - (m+2)x + 4y + (m+1) = 0$$

1. On suppose $m = -2$

   Alors, nous avons $y^2 - (m+2)x + 4y + (m+1) = 0 \iff y^2 + 4y - 1 = 0 \iff (y+2)^2 - 4 - 1 = 0 \iff \left(y + 2 + \sqrt{5}\right)\left(y + 2 - \sqrt{5}\right) = 0$

   La conique est alors la réunion de 2 droites, la première d'équation $y = -2 - \sqrt{5}$ et la seconde $y = -2 + \sqrt{5}$

2. On suppose, maintenant $m \neq -2$

   Alors :

$$\begin{gathered} y^2 - (m+2)x + 4y + (m+1) = 0 \\ \iff \\ y^2 + 4y = (m+2)x - (m+1) \\ \iff \\ y^2 + 4y + 4 - 4 = (m+2)x - (m+1) \\ \iff \\ (y+2)^2 = (m+2)x - (m+1) + 4 \\ \iff \\ (y+2)^2 = (m+2)x - m - 1 + 4 = (m+2)x - m + 3 \\ \iff \\ (y+2)^2 = (m+2)x - m - 1 + 4 = (m+2)\left(x - \frac{m-3}{m+2}\right) \end{gathered}$$

   On appelle Ω_m le point du plan de coordonnées $\Omega_m = \left(\frac{m-3}{m+2}; -2\right)$. Considérons le repère $\mathcal{R}\left(\Omega_m, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Si X et Y sont les coordonnées d'un point M dans le repère $\mathcal{R}\left(\Omega_m, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, nous avons $X = y + 2$ et $X = x - \dfrac{m-3}{m+2}$.

   Dans le repère $\mathcal{R}\left(\Omega_m, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, l'équation de la courbe est donnée par $Y^2 = (m+2)X$; c'est donc une parabole.

Exercice 4 :

$\mathcal{H}$ est une hyperbole et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont les vecteurs directeurs des asymptotes de $\mathcal{H}$. O est le point de rencontre des asymptotes.

Montrer que l'équation de $\mathcal{H}$ dans le repère $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est de la forme $XY = k$

Supposons que l'hyperbole ait dans un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ pour équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \pm 1$.

L'hyperbole a alors pour asymptotes les droites d'équation $y = \dfrac{b}{a}x$ et $y = -\dfrac{b}{a}x$.

- Un vecteur directeur de la droite $y = \dfrac{b}{a}x$ est doné par $\overrightarrow{X} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$, et un vecteur normé *(ou de norme 1)* est donné par :

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{\left\|\overrightarrow{X}\right\|}\overrightarrow{X} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}\right)$$

  En posant $\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\beta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, nous avons $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j}$ et $\|\overrightarrow{u}\| = 1$

- De la même manière, en étudiant la droite $y = -\dfrac{b}{a}x$, un vecteur directeur normé de l'asymptote est donné par $\overrightarrow{v} = -\alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j}$ et $\|\overrightarrow{u}\| = 1$

Le changement de repère *(passage du repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ au repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$)* donne, comme changement de coordonnées, si x et y sont les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et X et Y celles du même point M dans le repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, nous obtenons :

$$x = \alpha\left(X - Y\right) \text{ et } y = \beta\left(X + Y\right)$$

Ainsi, en remplaçant x et y par leur valeur, nous avons :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{\alpha^2\left(X - Y\right)^2}{a^2} - \frac{\beta^2\left(X + Y\right)^2}{b^2} = \pm 1$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{\alpha^2}{a^2}\left(X^2 + Y^2 - 2XY\right) - \frac{\beta^2}{b^2}\left(X^2 + Y^2 + 2XY\right) = \pm +$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2}\right)\left(X^2 + Y^2\right) - 2XY\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2}\right) = \pm 1$$

Or, nous avons

$$\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} = \frac{a^2}{a^2\left(a^2 + b^2\right)} - \frac{b^2}{b^2\left(a^2 + b^2\right)} = 0$$

et

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = \frac{a^2}{a^2\left(a^2 + b^2\right)} + \frac{b^2}{b^2\left(a^2 + b^2\right)} = \frac{2}{\left(a^2 + b^2\right)}$$

Donc :

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2}\right)\left(X^2 + Y^2\right) - 2XY\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2}\right) = \pm 1$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{4XY}{a^2 + b^2} = \pm 1$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$XY = \pm\frac{a^2 + b^2}{4}$$

$XY = \pm\frac{a^2 + b^2}{4}$ est bien du type $XY = k$
Ce que nous voulions

Exercice 5 :

Cet exercice est une application de l'exercice précédent
Soit $\mathcal{C}$ la conique qui a pour équation dans un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

$$4x^2 - 9y^2 + 16x + 18y - 29 = 0$$

1. *Montrer que $\mathcal{C}$ est une hyperbole. Trouver son centre Ω, ses axes, ses sommets et ses asymptotes. Représenter graphiquement $\mathcal{C}$.*

Nous allons commencer par « triturer » l'équation :

$$\begin{gathered}4x^2-9y^2+16x+18y-29=0\\ \Longleftrightarrow\\ 4\left(x^2+4x\right)-9\left(y^2-2y\right)=29\\ \Longleftrightarrow\\ 4\left[(x+2)^2-4\right]-9\left[(y-1)^2-1\right]=29\\ \Longleftrightarrow 4\,(x+2)^2-9\,(y-1)^2=36\\ \Longleftrightarrow\\ \frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{4}=1\end{gathered}$$

- ▷ Le centre de cette conique est le point Ω de coordonnées $\Omega\,(-2,1)$
- ▷ Dans le repère orthonormé $\mathcal{R}\left(\Omega,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$, l'équation de la conique devient :

$$\frac{X^2}{9}-\frac{Y^2}{4}=1$$

Dans le repère $\mathcal{R}\left(\Omega,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$, les sommets sont donnés par :

$$A=(3,0)\ \text{ et }\ A'=(-3,0)$$

C'est à dire, dans le repère $\mathcal{R}\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$

$$A=(1,0)\ \text{ et }\ A'=(-5,0)$$

- ▷ Dans le repère $\mathcal{R}\left(\Omega,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$, les asymptotes ont pour équation :

$$Y=\frac{2}{3}X \text{ et } Y=-\frac{2}{3}X$$

Et donc, dans le repère $\mathcal{R}\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$

$$y-1=\frac{2}{3}\,(x+2)\ \text{ et }\ y-1=-\frac{2}{3}\,(x+2)\Longleftrightarrow y=\frac{2}{3}\left(x+\frac{7}{2}\right)\ \text{ et }\ y=-\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

La représentation graphique est la figure 23.11

2. *On considère les vecteurs $\overrightarrow{U}=3\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{V}=3\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}$. Donner l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}\left(\Omega,\overrightarrow{U},\overrightarrow{V}\right)$*

Nous pouvons d'ores et déjà remarquer que $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ sont les vecteurs directeurs des asymptotes. L'objet de cette question est de donner une équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes.

- ▷ Il faut d'abord donner les formules de changement de repère.
  Soit M un point du plan. Nous appelons X et Y les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}\left(\Omega,\overrightarrow{U},\overrightarrow{V}\right)$ et x et y, les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.
  Nous avons donc $\overrightarrow{\Omega M}=X\overrightarrow{U}+Y\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}$
  Or :

$$\overrightarrow{\Omega M}=\overrightarrow{\Omega 0}+\overrightarrow{OM}$$

  C'est à dire $X\overrightarrow{U}+Y\overrightarrow{V}=-\left(-2\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}\right)+x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}=(x+2)\overrightarrow{i}+(y-1)\overrightarrow{i}$
- ▷ D'autre part, comme $\overrightarrow{U}=3\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{V}=3\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}$, nous avons :

$$X\overrightarrow{U}+Y\overrightarrow{V}=X\left(3\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}\right)+Y\left(3\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}\right)=(3X+3Y)\overrightarrow{i}+(2X-2Y)\overrightarrow{j}$$

- ▷ D'où nous obtenons :

$$\begin{cases} x+2= & 3X+3Y\\ y-1= & 2X-2Y\end{cases}$$

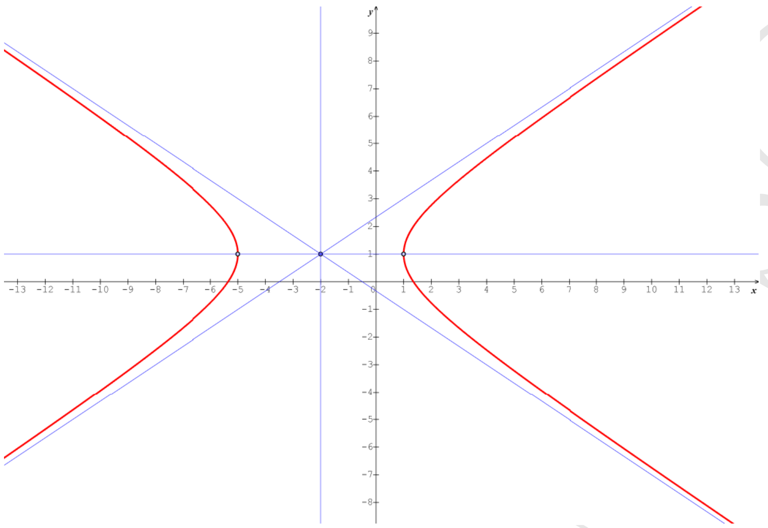

FIGURE 23.11 – Représentation graphique de $\mathcal{C}$ avec le centre, les sommets, les axes et les asymptotes de l'hyperbole

Il est donc possible, maintenant de remplacer x et y dans l'équation $\dfrac{(x+2)^2}{9} - \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$, et nous obtenons :

$$\frac{(3X+3Y)^2}{9} - \frac{(2X-2Y)^2}{4} = 1$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(X+Y)^2 - (X-Y)^2 = 1$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$4XY = 1$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$XY = \frac{1}{4}$$

L'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}\left(\Omega, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}\right)$ est donc $XY = \dfrac{1}{4}$