Jean-Luc Éveno ©

Les mathématiques de L_0

Version du 19 novembre 2023

La connaissance est un bien qui doit voyager entre les hommes,
de l'un à l'autre, d'une génération à l'autre, d'un pays à l'autre.

ARISTOTE

Table des matières

Première partie

Algèbre, Arithmétique

Chapitre 1

Théorie des ensembles, Logique

Langage formalisé

Les mathématiques, pour pouvoir être précises, et surtout pour pouvoir lever les ambiguïtés qu'on trouve dans le langage courant, ont besoin d'un langage formalisé, clair, et donc sans ambiguïté.
La mathématique n'est pas la seule science à utiliser un langage formalisé ; on peut penser à l'informatique, où tout, depuis le "langage machine" jusqu'aux langages de programmation est langage formalisé

1.1 Premières définitions

1.1.1 Assertion

Une assertion est un énoncé dont on peut dire, sans ambiguité, suivant le contexte, ou indépendamment du contexte, s'il est vrai ou faux

Exemple 1 :

— L'assertion $3 \leqslant 5$ est vraie dans $\mathbb{R}$
— Par contre, l'assertion $5 < 4$ est fausse dans $\mathbb{R}$
— « Tout triangle isocèle a ses 3 angles égaux » est une assertion fausse.

En effet, il existe des triangles isocèles qui n'ont pas les 3 angles égaux ; il suffit pour cela de penser aux triangles rectangles et isocèles. Une notion apparaît ici, c'est la notion de quantificateur vue un peu plus loin

— La millième décimale de π est 7 est une assertion dont on peut dire si elle est vraie ou fausse [1]
— « Il existe des triangles isocèles ayant ses 3 angles égaux » est une assertion vraie.

Ce sont les triangles équilatéraux

— « -3 est un carré » est une assertion fausse dans $\mathbb{R}$, mais vraie dans $\mathbb{C}$
— Nous éviterons les énoncés invalides ou imprécis du type :
  - Ce paquet pèse environ 1,5 kg
  - La robe de mademoiselle est de la même couleur que l'eau du golfe du Morbihan [2]

1.1.2 Proposition

Une proposition est un énoncé contenant une variable. On la note $A(x)$ où x désigne la variable
La proposition $A(x)$ est, sans ambiguïté, vraie pour certaines valeurs, et fausse pour d'autres

1. La solution se trouve dans un livre ! !
2. D'autant que la couleur des eaux du golfe du Morbihan est très changeante

Exemple 2 :

Quelques exemples de propositions :

1. Considérons la proposition $A(x)$: $x^2 - 4x + 3 > 0$
   Alors, $A(0)$ est vraie et $A(2)$ est fausse
2. Considérons une autre proposition P :
   $P(\mathrm{T})$: la hauteur du triangle T est médiane et médiatrice.
   Alors P (triangle isocèle) est vraie
3. En fait, une assertion est une proposition toujours vraie ou toujours fausse

1.1.3 Vocabulaire

1. Des propositions sont compatibles, s'il existe des valeurs de leurs variables les rendant vraies simultanément ; elles sont incompatibles sinon
2. Des propositions sont équivalentes, si, pour toutes les valeurs de leurs variables, elles ont même valeur de vérité.
3. Deux propositions sont contraires, si, pour toutes les valeurs de leurs variables, elles ont des valeur de vérité opposées.

1.2 Opérations de logique élémentaire

Il existe des « connecteurs logiques » destinés à assembler les différentes propositions et relations entre elles.

1.2.1 Connecteurs logiques

Les connecteurs logiques sont :

1. et avec le symbole mathématique $\wedge$
2. ou avec le symbole mathématique $\vee$
3. non avec le symbole mathématique $\neg$
4. implique avec le symbole mathématique $\Rightarrow$

Remarque 1 :

1. **Attention !!** $\wedge$, $\vee$, $\neg$ sont des notations qui peuvent changer d'un auteur à l'autre !
2. **On n'en a en fait besoin que de 2**[3]
   (a) ou avec le symbole mathématique $\vee$
   (b) non avec le symbole mathématique $\neg$
3. Nous définissons rigoureusement les connecteurs dans les lignes qui suivent.

1.2.2 Définition de la négation

La négation d'une proposition P, notée $\neg P$ ou $\overline{P}$est vraie si P est fausse
Table de vérité
On présente les résultats sous forme d'une table de vérité, en mettant 1 si la proposition est vraie et 0 si elle est fausse

P	$\neg P$
1	0
0	1

3. C'est en fait ceux que j'ai choisis ; on peut faire un autre choix !

1.2.3 Définition de la disjonction logique

La disjonction logique de 2 propositions P et Q, notée P OU Q (*mathématiquement* :$P \vee Q$), est vraie, si au moins l'une des 2 est vraie. Elle est fausse, sinon.
Table de vérité

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

1.2.4 Définition de la conjonction logique

La conjonction logique de 2 propositions P et Q, notée P ET Q (*mathématiquement* :$P \wedge Q$), est vraie, si les 2 propriétés sont vraies en même temps. Elle est fausse, sinon.
Table de vérité

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Exercice 1 :

Démontrer que les propositions $(P \wedge Q)$ et $\neg((\neg P) \vee (\neg Q))$ ont même table de vérité.

Résolution

La résolution de tels exercices, par les tables de vérité, n'est pas du tout difficile ; elle est, par contre, réellement fastidieuse.

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg((\neg P) \vee (\neg Q))$
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	1	1	1	0

Les deux propositions $P \wedge Q$ et $\neg((\neg P) \vee (\neg Q))$ ayant même table de vérité, elles sont donc logiquement équivalentes.

1.2.5 Définition

Deux propositions A et B qui ont la même table de vérité sont dites logiquement équivalentes et on écrit $A \longleftrightarrow B$ [4]

Exemple 3 :

Nous avons donc : $(P \wedge Q) \longleftrightarrow \neg((\neg P) \vee (\neg Q))$

Exercice 2 :

Montrez que nous avons $\neg(\neg P) \longleftrightarrow P$

4. On remplace, parfois, le signe $\longleftrightarrow$ par le signe $=$

1.2.6 Lois de MORGAN

Soient P et Q deux propositions. Nous avons :

1. $\boxed{\overline{(P \wedge Q)} \longleftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}}$
2. $\boxed{\overline{(P \vee Q)} \longleftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}}$

Exercice 3 :

Faire la démonstration des lois de Morgan à l'aide des tables de vérité

1.2.7 Distributivité

Étant données deux propositions P et Q

1. Distributivité du ET par rapport au OU
   Nous avons : $\boxed{P \wedge (Q \vee R) \longleftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)}$
2. Distributivité du OU par rapport au ET
   Nous avons : $\boxed{P \vee (Q \wedge R) \longleftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)}$

1.2.8 Implication logique

Etant données deux propositions P et Q, la proposition $\neg P \vee Q$ écrite aussi $\overline{P} \vee Q$ est appelée implication logique, notée $\Longrightarrow$.

Nous avons donc : $\boxed{(\neg P \vee Q) \longleftrightarrow (P \Rightarrow Q)}$

Vocabulaire :

— P est une condition suffisante pour Q
— Q est une condition nécessaire pour P

Table de vérité de l'implication

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Exercice 4 :

Montrez que nous avons $(P \Rightarrow Q) \longleftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$
On dit que $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$ est l'implication contrapposée de $(P \Rightarrow Q)$

1.2.9 Equivalence logique

Etant données deux propositions P et Q
L'équivalence logique $P \Longleftrightarrow Q$ est la relation $(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)$
Autrement dit : $(P \Longleftrightarrow Q) \longleftrightarrow ((P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P))$
Table de vérité de l'équivalence logique

P	Q	$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow P$	$P \Longleftrightarrow Q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Remarque 2 :

1. Par la table de vérité de l'équivalence logique, on peut remarquer que $P \iff Q$ est vraie si et seulement si P et Q ont même valeur de vérité.
2. Pour $(P \iff Q)$, on dit
   — P est vraie si et seulement si Q est vraie
   — Ou bien
   Pour que P soit vraie,il faut et il suffit que Q soit vraie
   — Ou bien
   La condition nécessaire et suffisante pour que P soit vraie est que Q soit vraie

1.2.10 Tautologie

Une proposition dont la table de vérité ne contient que des valeurs « VRAI », est une tautologie

Exemple 4 :

$\left[(P \Rightarrow Q) \iff (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})\right]$ est une tautologie. *(En faire la démonstration par table de vérité)*

1.2.11 Propriétés

L'équivalence et l'implication sont transitives, c'est à dire :

1. $((P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R)) \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$ est une tautologie
2. $((P \iff Q) \wedge (Q \iff R)) \Longrightarrow (P \iff R)$ est une tautologie

Démonstration

Nous allons en faire la démonstration en utilisant les tables de vérité.

1. On démontre que $((P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R)) \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$ est une tautologie
   Par simplification, on appele A la proposition $((P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R)) \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$

P	Q	R	$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow R$	$(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R)$	$P \Longrightarrow R$	A
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

2. On démontre que $((P \iff Q) \wedge (Q \iff R)) \Longrightarrow (P \iff R)$ est une tautologie
   Par simplification, on appelle B la proposition $((P \iff Q) \wedge (Q \iff R)) \Longrightarrow (P \iff R)$

P	Q	R	$P \iff Q$	$Q \iff R$	$(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \iff R)$	$P \iff R$	B
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1

1.3 Exercices de logique élémentaire

1.3.1 Tables de Vérité

Cette partie est destinée à manipuler les tables de vérité.

Exercice 5 :

Exercices de manipulation élémentaire

1. Ecrire les tables de vérité de $\overline{p} \wedge q$, $\overline{p \wedge q}$, $\overline{p} \wedge \overline{q}$, $\overline{p} \wedge p$
2. Ecrire les tables de vérité de $\overline{p} \vee q$, $\overline{p \vee q}$, $\overline{p} \vee \overline{q}$, $\overline{p} \vee p$
3. Ecrire les tables de vérité de

   (a) $(p \vee q) \wedge (\overline{p \wedge q})$
   (b) $(\bar{p} \vee q) \wedge (p \wedge \bar{q})$
   (c) $\overline{p \wedge (q \vee r)}$
   (d) $(p \vee q) \Rightarrow (\bar{p} \wedge q)$
   (e) $(\bar{p} \wedge q) \Rightarrow (p \vee \bar{q})$
   (f) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r)$

Corrigé de l'exercice

Exercice 6 :

Les propositions suivantes sont-elles des tautologies ?

1. $p \vee \overline{(p \wedge q)}$
2. $(p \Rightarrow q) \vee (p \wedge q)$
3. $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ (c'est le modus ponens)

Corrigé de l'exercice

Remarque 3 :

En n'utilisant pas les tables de vérité, le calcul propositionnel permet de démontrer que nous avons affaire ou non à une tautologie.

1.3.2 Calcul propositionnel

Exercice 7 :

Soient f et g 2 formes propositionnelles. On dit que g est une conséquence de f si $f \Rightarrow g$ est une tautologie

Par exemple, d'après le modus ponens, q est une conséquence de $[p \wedge (p \Rightarrow q)]$

Montrer que $p \Rightarrow r$ est une conséquence de $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$

Exercice 8 :

Montrer que les propositions suivantes sont logiquement équivalentes :

1. $p \Rightarrow q$ et $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ *(loi de contrapposition*
2. p et $p \vee (p \wedge q)$
3. $(p \vee q) \Rightarrow r$ et $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

Exercice 9 :

x et y étant des nombres réels, réels, résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} (x-1)(y-2) = 0 \\ (x-2)(y-3) = 0 \end{cases}$$

Exercice 10 :

1. Déterminer la contrapposée des énoncés suivants :
   (a) Si Arthur est poète, alors, il est pauvre
   (b) Si le carré d'un entier est impair, alors, cet entier est impair
   (c) Si je mange des graisses et si je ne fais pas de sport, alors j'aurai une maladie coronarienne
2. Trouver les négations des propositions précédentes *(évidemment, sans utiliser "il est faut que...." ou autre astuce du même genre !)*

Exercice 11 :

1. On définit le connecteur logique dit de SHEFFER et noté $\uparrow$ par $p \uparrow q = \text{Nand}\,(p, q)$ est logiquement équivalent à $\overline{p \wedge q}$
   (a) Ecrire la table de vérité de la fonction Nand
   (b) Exprimer $\overline{p}$ en fonction de Nand
   (c) Exprimer **"et"** en fonction de Nand
   (d) Exprimer **"ou"** en fonction de Nand
   (e) Exprimer $\Rightarrow$ en fonction de Nand
2. On définit le connecteur logique dit de PIERCE et noté $\downarrow$ par $p \downarrow q = \text{Nor}\,(p, q)$ est logiquement équivalent à $\overline{p \vee q}$
   (a) Ecrire la table de vérité de la fonction Nand
   (b) Exprimer $\overline{p}$ en fonction de Nor
   (c) Exprimer **"et"** en fonction de Nor
   (d) Exprimer **"ou"** en fonction de Nor
   (e) Exprimer $\Rightarrow$ en fonction de Nor
3. On considère le connecteur logique $\otimes$ défini par $p \otimes q \equiv p \wedge \overline{q}$
   (a) Donner la table de vérité de $p \otimes q$ et de $q \otimes p$; avons nous équivalence entre les deux propositions ?
   (b) Montrer que nous avons l'identité suivante : $p \otimes (q \vee r) = (p \otimes q) \wedge (p \otimes r)$
   (c) Montrer que $(p \otimes q) \wedge (r \otimes s) = (p \wedge r) \otimes (q \vee s)$
4. On considère le connecteur logique $\oplus$ défini par $p \oplus q = (p \vee q) \otimes (p \wedge q)$
   (a) Les propositions $p \oplus q$ et $q \oplus p$ sont-elles équivalentes ?
   (b) Montrer que $p \oplus q = (p \otimes q) \vee (q \otimes p)$
   (c) Montrer que $(p \oplus \overline{q}) \vee (p \oplus q)$est une tautologie

1.4 Axiomes et théorèmes : Raisonner, démontrer

1.4.1 Axiome

Un axiôme est une assertion énoncée explicitement une fois pour toutes

1.4.2 Théorème

Un théorème s'obtient par l'obtention répétée des 2 règles suivantes :

1. Toute proposition obtenue par l'application d'axiômes est vraie.
2. MODUS PONENS : Etant données 2 propositions R et S, si la relation R est vraie, et si $R \Rightarrow S$ est vraie, alors S est vraie

Remarque 4 :

Valeurs de la démonstration

1. La vérité mathématique est celle qui se démontre. Il y a une différence fondamentale entre les sciences expérimentales et la science mathématique.
2. Il peut exister des propositions A et $\neg A$ dont on ne sait démontrer s'ils sont vrais ou faux. On dit qu'ils sont indécidables

1.4.3 Raisonnement par l'absurde

Soit P une proposition.
S'il existe une proposition Q telle que la proposition $(\neg P \Longrightarrow Q) \wedge (\neg P \Longrightarrow \neg Q)$ soit vraie, alors, P est vraie.

Remarque 5 :

1. En utilisant une table de vérité :

P	Q	$\neg P \Longrightarrow Q$	$\neg P \Longrightarrow \neg Q$	$(\neg P \Longrightarrow Q) \wedge (\neg P \Longrightarrow \neg Q)$
1	1	1	1	1
1	0	1	1	1
0	1	1	0	0
0	0	0	1	0

   On remarque que $(\neg P \Longrightarrow Q) \wedge (\neg P \Longrightarrow \neg Q)$ a même table de vérité que P
2. Il est tout aussi possible d'utiliser le **calcul propositionnel** :

$$\begin{aligned}(\neg P \Longrightarrow Q) \wedge (\neg P \Longrightarrow \neg Q) &\longleftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)\\ &\longleftrightarrow P \vee (Q \wedge \neg Q)\\ &\longleftrightarrow P \vee 0\\ &\longleftrightarrow P\end{aligned}$$

3. **Pratiquement**
   On veut prouver que la proposition P est vraie
   On suppose alors $\neg P$ vraie et on va démontrer que $(\neg P \Longrightarrow \neg Q)$ est vraie, alors qu'on sait pertinemment que Q est vraie ; on arrive à une contradiction. On a alors,

$$(\neg P \Longrightarrow \neg Q) \longleftrightarrow Q \Longrightarrow P$$

Exemple 5 :

L'ensemble des nombres premiers est infini

Démonstration

On suppose l'ensemble des nombres premiers fini, et soit p le dernier
Soit $m = p! + 1$.
On divise alors m par l'un des quelconques autres entiers premiers, noté q, avec $q < p$. On a alors :

$$m = \left(\frac{p\,!}{q}\right) q + 1$$

Il faut faire remarquer que $\left(\frac{p\,!}{q}\right)$ est un entier. Donc, m n'est divisible par aucun nombre premier.
Ce qui est contradictoire avec le fait que m est décomposable en un produit de facteurs premiers, et donc divisible par au moins un nombre premier.
Il y a donc une contradiction
Analyse du raisonnement

P est la proposition : *L'ensemble des nombres premiers est infini*
On suppose donc, $\neg P$
Q est la proposition :*Tout nombre entier est décomposable en un produit de facteurs premiers*
En supposant $\neg P$, on a démontré $\neg Q$; il y a donc une contradiction

Remarque 6 :

Attention ! ! Il ne faut pas confondre raisonnement par l'absurde et raisonnement par contrapposée

1.5 Ensembles

La notion d'ensemble est une notion intuitive ; la définition rigoureuse en a été donnée par CANTOR en 1895.

1.5.1 Définition

On appelle ensemble une collection d'objets appelés éléments

Exemple 6 :

1. Les étudiants de l'IUT de Vannes forment un ensemble.
2. Les nombres $1; 2; \cdots; 10; 11; \cdots$ forment un ensemble ; cet ensemble est appelé **ensemble des entiers naturels** et est noté $\mathbb{N}$.
3. Les nombres $\cdots; -2; -1; 0; 1; 2; \cdots$ forment un ensemble cet ensemble est appelé **ensemble des entiers relatifs** et est noté $\mathbb{Z}$.
4. Les nombres s'écrivant comme **quotient** de deux nombres relatifs forment **l'ensemble des nombres rationnels** et se note $\mathbb{Q}$.
5. Il existe des nombres qui n'appartiennent ni à $\mathbb{N}$, ni à $\mathbb{Z}$, ni à $\mathbb{Q}$ comme par exemple $\sqrt{2}$; ces nombres forment l'ensemble des nombres réels, cet ensemble se note $\mathbb{R}$.

Remarque 7 :

Ces différents ensembles de nombres peuvent être construits rigoureusement, et donc, leur existence est prouvée.

Remarque 8 :

1. Un ensemble se note à l'aide d'accolades ; les éléments de l'ensemble sont séparés par des virgules ou des points-virgules ; par exemple : $\{2; 7; 9; 13\}$.
2. Lorsque l'on veut nommer un ensemble on utilisera une lettre majuscule, par exemple
$$E = \{2; 7; 9; 13\}$$
3. Les éléments d'un ensemble seront généralement notés à l'aide de lettres minuscules, par exemple $F = \{a; e; i; o; u; y\}$.

1.5.2 Notations

Si x est un élément de E, on écrit $\boxed{x \in E}$, sinon, $\boxed{x \notin E}$

Exemple 7 :

En prenant les exemples d'ensembles précédents, nous avons $7 \in E$ qui se lit :« 7 appartient à E » et $x \notin E$ qui se lit :« x n'appartient pas à E »

1.5.3 Définition d'un ensemble en extension, définition d'un ensemble en compréhension

Il y a 2 manières de définir un ensemble :

1. Définition en extension : en extension, on énumère tous les éléments de l'ensemble
2. Définition en compréhension : en compréhension, on définit une relation compréhensible par tous qui définit clairement les éléments de l'ensemble.

Remarque 9 :

La définition en compréhension peut se définir autrement : $x \in E$ si et seulement si, x vérifie une certaine propriété (p), qui peut s'écrire : $E = \{x \text{ tel que } p(x)\}$

Exemple 8 :

$D(24)$ est l'ensemble des diviseurs de 24

1. $D(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ est une définition en **extension**
2. $D(24) = \{n \in \mathbb{N} \text{ tq } 24 = kn \text{ où } k \in \mathbb{N}\}$ est une définition en **compréhension.**

1.5.4 Définition

L'ensemble n'ayant aucun élément est appelé ensemble vide et est noté $\emptyset$

Exemple 9 :

On peut trouver plusieurs exemples d'ensembles vides

1. L'ensemble $S = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } x^2 + 4 = 0\right\}$
2. L'ensemble $T = \left\{x \in \mathbb{Q} \text{ tels que } x^2 = \sqrt{2}\right\}$

1.6 Opérations entre ensembles

1.6.1 Inclusion-égalité

Soient E et F deux ensembles

1. On dit que l'ensemble E est inclus dans l'ensemble F , et on écrit : $E \subset F$ si et seulement si tous les éléments de E sont aussi des éléments de F. En écriture formalisée, nous avons :

$$(\forall x)\,(x \in E \Rightarrow x \in F)$$

C'est à dire : $(E \subset F) \Longleftrightarrow (\forall x)\,(x \in E \Rightarrow F)$
2. On dit que l'ensemble E est égal à l'ensemble F, et on écrit $E = F$ si et seulement si

$$E \subset F \text{ et } F \subset E$$

C'est à dire : $E = F \Longleftrightarrow E \subset F \text{ et } F \subset E$

Remarque 10 :

Si tous les éléments de E sont éléments de F, c'est à dire si $E \subset F$ on dit alors que E est un **sous-ensemble** ou une **partie** de F

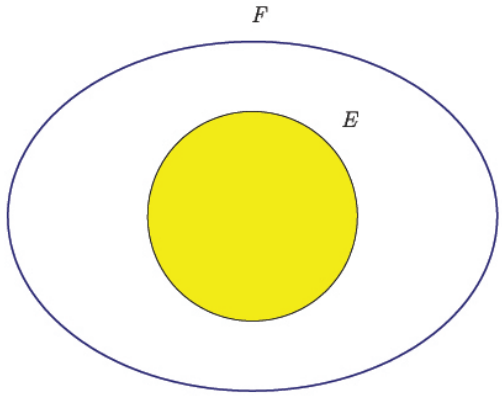


FIGURE 1.1 – Une illustration graphique de $E \subset F$

Exemple 10 :

1. Soit $P = \{0; 2; 4; 6; \cdots\}$ c'est à dire l'ensemble des entiers naturels pairs, on a alors $P \subset \mathbb{N}$
2. Pour tout ensemble E on a : $\emptyset \subset E$.
3. **Comment montrer qu'un ensemble est inclus dans un autre ?** Il suffit de montrer que tout élément de l'un est aussi élément de l'autre
   $M(24)$ est l'ensemble des multiples de 24 et $M(12)$ est l'ensemble des multiples de 12. En compréhension, nous avons :
   — $M(24) = \{m \in \mathbb{N}$ tel que $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $m = 24k\}$
   — $M(12) = \{m \in \mathbb{N}$ tel que $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $m = 12k\}$
   Il faut montrer que $M(24) \subset M(12)$
   Pour ce faire, on prend $m \in M(24)$, et on va montrer que $m \in M(12)$
   Donc, si $m \in M(24)$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $m = 24k$, or,
   $$m = 24k = 12 \times 2k = (2k) \times 12 = k' \times 12$$
   Où nous avons posé $k' = 2k$; donc, $m \in M(12)$
   On vient de montrer que si $m \in M(24)$, alors $m \in M(12)$, et donc que $M(24) \subset M(12)$

Remarque 11 :

On peut représenter, comme nous l'avons fait ci-dessus, les ensembles par des schémas. Le schéma donne, par exemple, une idée intuitive de la transitivité de l'inclusion : Si $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$

Exercice 12 :

Montrer que si $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$

Résolution

Pour le montrer, c'est simple :
— Soit $x \in A$; nous allons monter que $x \in C$
— **Par hypothèse, nous avons** $A \subset B$ **et** $B \subset C$**,** et, en particulier $A \subset B$. Comme $A \subset B$, comme $x \in A$, nous avons alors $x \in B$
— Comme nous avons aussi par hypothèse $B \subset C$ et, maintenant $x \in B$, nous avons aussi $x \in C$
— Nous sommes partis de $x \in A$, et nous avons montré que, alors, $x \in C$, donc, nous avons $A \subset C$

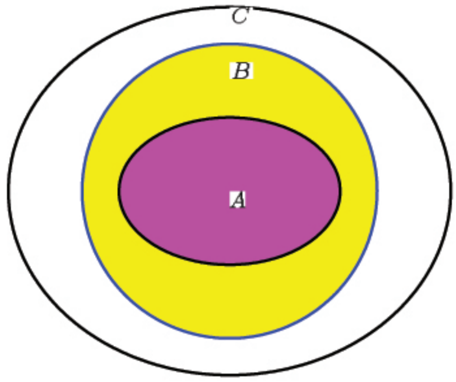


FIGURE 1.2 – Transitivité de l'inclusion : Si $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$

Exercice 13 :

L'objet de cet exercice est de mettre en évidence l'importante nuance entre **appartenance** *(un élément appartient à un ensemble)* et **inclusion** *(un sous-ensemble est inclus dans un ensemble)*
Soit $E = \{x; y; z\}$, compléter les relations suivantes à l'aide des symboles ensemblistes $\in$ ou $\subset$.

1. $x \cdots E$.
2. $t \cdots E$.
3. $\{z\} \cdots E$.
4. $\{x; y\} \cdots E$.
5. $\emptyset \cdots \{x; y\}$.

1.6.2 Complémentation

Soit E un ensemble, et $A \subset E$
On appelle complémentaire de A dans E, l'ensemble des éléments qui sont dans E et pas dans A. On le note

$$\overline{A} = \{x \in E \text{ tq } x \notin A\}$$

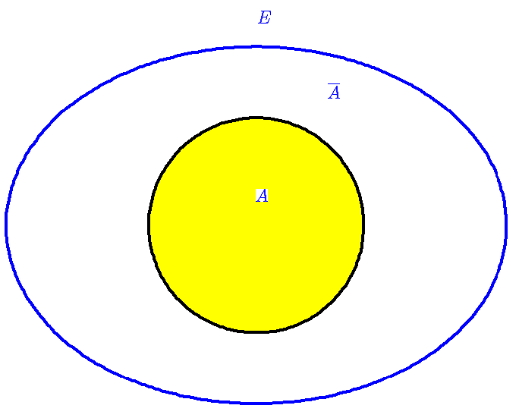


FIGURE 1.3 – Représentation graphique de la complémentation

Remarque 12 :

Lorsqu'il n'y a aucun risque de confusion sur l'ensemble E on notera le complémentaire de A dans E par $\overline{A}$.

Exemple 11 :

Soit $E = \mathbb{N}$ et A l'ensembles des entiers naturels pairs, alors $\overline{A}$ est l'ensemble des entiers naturels impairs.

1.6.3 Proposition

Soit A un sous ensemble de E ; alors on a : $\overline{\overline{A}} = A$.

1.6.4 Ensemble des parties d'un référentiel

Soit E un ensemble (ou référentiel)
On appelle ensemble des parties de E, l'ensemble noté $\mathcal{P}(E)$ dont les éléments sont tous les sous-ensembles de E.

Remarque 13 :

1. Comme $\emptyset \subset E$, nous avons $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$; de la même manière, $E \in \mathcal{P}(E)$
2. $A \subset E \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(E)$

Exemple 12 :

Si $E = \{x, y\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, E, \{x\}, \{y\}\}$

Exercice 14 :

1. On pose $E = \{x; y; z\}$. Compléter par le symbole ensembliste adéquat.

   (a) $\{x\} \cdots \mathcal{P}(E)$.
   (b) $\{\emptyset; \{x; y\}\} \cdots \mathcal{P}(E)$.
   (c) $\emptyset \cdots \mathcal{P}(E)$.
   (d) $\{\emptyset\} \cdots \mathcal{P}(E)$.

2. Si E= $\{x, y\}$, déterminer $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathrm{E}))$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathrm{E})))$, etc.

1.6.5 Réunion de deux ensembles

Soient $A = \{x \in E \text{ tq } p(x)\}$ et $B = \{x \in \mathrm{E} \text{ tq } q(x)\}$
On appelle réunion de A et de B, l'ensemble $A \cup B$ des éléments appartenant à A ou à B, c'est à dire :

$$(x \in A \cup B) \Longleftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B)$$

$$A \cup B = \{x \in E \text{ tq } p(x) \vee q(x)\}$$

Exemple 13 :

Soit $A = \{a; b; c; d\}$ et $B = \{c; d; e; f\}$, on a alors : $A \cup B = \{a; b; c; d; e; f\}$.

Remarque 14 :

Par convention le "**ou**" sera inclusif.

Exemple 14 :

Soit A l'ensemble des nombres naturels pairs et B l'ensemble des nombres naturels impairs, on a alors $A \cup B = \mathbb{N}$.

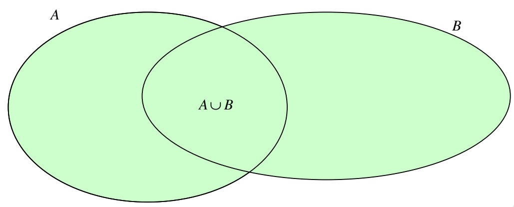


FIGURE 1.4 – Représentation graphique *(en vert)* de la réunion de deux ensembles

1.6.6 Intersection de deux ensembles

Soient $A = \{x \in E \text{ tq } p(x)\}$ et $B = \{x \in \mathrm{E} \text{ tq } q(x)\}$
On appelle <u>intersection</u> de A et de B l'ensemble $A \cap B$ des éléments appartenant à A et à B, c'est à dire :

$$(x \in A \cap B) \Longleftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B)$$

$$A \cap B = \{x \in E \text{ tq } p(x) \wedge q(x)\}$$

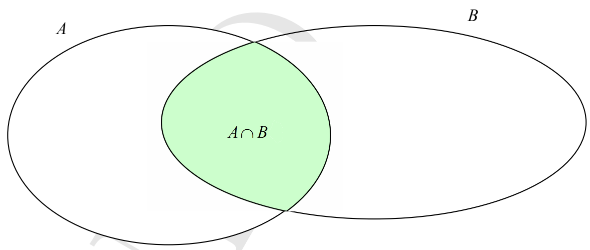


FIGURE 1.5 – Représentation graphique *(en vert)* de l'intersection de deux ensembles

Exemple 15 :

1. Soit $A = \{a; b; c; d; e; f; g; h; i\}$ et $B = \{a; e; i; o; u; y\}$, on a alors : $A \cap B = \{e; i\}$.
2. Soit A l'ensemble des nombres naturels pairs et B l'ensemble des nombres naturels impairs, on a alors $A \cap B = \emptyset$.

1.6.7 Définition

Soit A et B deux ensembles tels que $A \cap B = \emptyset$, on dit alors que A et B sont <u>deux ensembles disjoints</u>. En probabilités on parlera plutôt <u>d'événements incompatibles.</u>

Remarque 15 :

1. On peut considérer la réunion et l'intersection comme des opérations dans $\mathcal{P}(E)$*(opérations binaires)*
2. De même que la complémentation (qui à $A \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$, fait correspondre $\overline{A}$ peut être considérée comme une opération dans $\mathcal{P}(E)$*(opération unaire)*

3. $\mathcal{P}(E)$, muni de ces opérations est une algèbre de BOOLE
4. Le **"ou"** de la réunion étant inclusif, nous avons $A \cap B \subset A \cup B$

Exercice 15 :

Soit E et A deux ensembles tels que $A \subseteq E$, compléter : $A \cap \overline{A} = \cdots$ et $A \cup \overline{A} = \cdots$.

1.6.8 La différence entre deux ensembles

Soient A et B deux ensembles.
On appelle différence de A par rapport à B l'ensemble des éléments appartenant à A et n'appartenant pas à B
On note $A \setminus B$, cet ensemble.
Nous avons : $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

Remarque 16 :

Il faut lire $A \setminus B$ par « A privé de B » ou « A moins B »

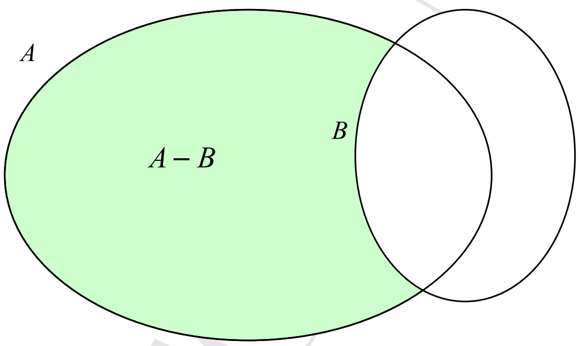


FIGURE 1.6 – Représentation graphique *(en vert)* de la différence entre deux ensembles

Exercice 16 :

On pose $E = \{a; b; c; d; e; f; g\}$, $A = \{a; b; c; d; e\}$ et $B = \{c; d; e; f; g\}$. Ecrire en extension les ensembles suivants :

1. $A \cap B$.
2. $A \cup B$.
3. $A \setminus B$.
4. $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

1.6.9 Définition du produit cartésien

Soit X et Y 2 ensembles.
L'ensemble produit $Z = X \times Y = \{(x, y)$ où $x \in X$ et $y \in Y\}$ est le produit cartésien de X et de Y

Remarque 17 :

1. Le produit cartésien se note donc $X \times Y$, et se lit « X **croix** Y »
2. Pour un ensemble X, le produit cartésien $X \times X$, se note X^2, et plus généralement, $\underbrace{X \times X \times \cdots X \times X}_{n \text{ fois}}$ se note X^n
3. Un produit cartésien est un ensemble de couples (x, y) où $x \in X$ et $y \in Y$.
4. Soient $E = \{0; 1\}$ et $F = \{a; b; c\}$. On a alors : $E \times F = \{(0; a); (0; b); (0; c); (1; a); (1; b); (1; c)\}$.

5. D'autre part, $(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow x = u$ et $y = v$ donc, en prenant la négation, $(x, y) \neq (u, v) \Leftrightarrow x \neq u$ ou $y \neq v$. Par exemple, dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, $(1, 2) \neq (1, \sqrt{\pi})$
6. Dans la notion de produit cartésien on fera particulièrement attention au fait que l'ordre est important. En effet dans $\mathbb{R}^2$ on a $(1; 2) \neq (2; 1)$
7. Un produit cartésien est vide dès que l'un des ensembles est vide
8. Tout sous-ensemble $G \subset X \times Y$ est appelé **graphe**
9. $X \times X = X^2 = \{(x, y)$ où $x \in X$ et $y \in X\}$; classiquement nous travaillerons avec $\mathbb{R}^2$
10. En géométrie, le plan est représenté par : $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y)$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}\}$.
11. Les éléments de $X \times Y \times Z$ sont les triplets (x, y, z) où, $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$
12. De même, $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ où $x_i \in \mathbb{R}\}$ On dit que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un $n-$uplet
13. Le menu d'un restaurant est un exemple de produit cartésien :

$$\begin{aligned} \text{Entrées} = &\ \{\text{Carottes rapées, plat du pêcheur, tomates, charcuterie}\} \\ \text{Plat Principal} = &\ \{\text{Entrecôte, saumon, côte de porc panée}\} \\ \text{Légumes} = &\ \{\text{riz, épinard, pommes frites}\} \\ \text{Dessert} = &\ \{\text{Fromage, glaces, fruit, brême crulée}\} \end{aligned}$$

1.7 Calculs ensemblistes

1.7.1 Associativité

Quels que soient les ensembles A, B et C, nous avons :

$$\boxed{A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C}$$

$$\boxed{A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C}$$

Exercice 17 :

Démontrer graphiquement les deux relations de distributivité.

1.7.2 Distributivité

La réunion est distributive par rapport à l'intersection et l'intersection est distributive par rapport à la réunion, c'est à dire que quels que soient les ensembles A, B et C, nous avons :

$$\boxed{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$$

$$\boxed{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$$

1.7.3 Propriétés

Pour tout ensemble A,

$$A \cup A = A \quad A \cap A = A \quad A \cup \emptyset = A \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

Remarque 18 :

1. on note : $A_1 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ et $A_1 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$
2. On peut généraliser distributivité et associativité à n ensembles $A_1, \ldots, A_n$;

Remarque 19 :

Il n'y a aucune difficulté à faire le lien avec la logique :

1. **Réunion et intersection**
   (a) Au **"et"** correspond **l'intersection**
   (b) Au **"ou"** correspond **la réunion**

   Nous avons donc :

$$(x \in A \cup B) \iff (x \in A)\,\text{ou}\,(x \in B) \;\text{ et }\; (x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A)\,\text{et}\,(x \in B)$$

2. **Lien avec la distributivité**

$$(x \in A \cap (B \cup C)) \Leftrightarrow (x \in A)\,\text{et}\,(x \in B \text{ ou } x \in C) \Leftrightarrow ((x \in A) \text{ et } (x \in B))\,\text{ou}\,((x \in A) \text{ et } (x \in C))$$

1.7.4 Lois de Morgan

Soient A et B deux ensembles. On appelle lois de Morgan les relations suivantes :

$$\boxed{\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}}$$

Exercice 18 :

Démontrer graphiquement les deux relations de Morgan.

Exercice 19 :

Soit E un ensemble et A, B et C trois sous ensembles de E. Simplifier les expressions suivantes :

1. $\overline{A \cap \overline{B}}$.
2. $\overline{A \cup \overline{B}}$.
3. $(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$.
4. $(A \cup \overline{B}) \cap (A \cup B)$.
5. $(A \cap (B \cup C)) \cup (A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}))$.

1.7.5 Notions de partitions

Soient A un ensemble et $A_1; A_2; \dots; A_n$ une famille de sous-ensembles de A, c'est à dire pour $1 \leq i \leq n$ on a : $A_i \subseteq A$. La famille $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ forme une partition de A si :

1. Pour $1 \leq i \leq n$ on a : $A_i \neq \emptyset$.
2. Pour $1 \leq i < j \leq n$ on a : $A_i \cap A_j = \emptyset$
3. $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = A$

Exercice 20 :

1. $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$ forment-ils une partition de $\mathbb{R}$?
2. $\mathbb{R}^{+\star}$ et $\mathbb{R}^{-\star}$ forment-ils une partition de $\mathbb{R}$?
3. $\mathbb{R}^{+\star}$; $\mathbb{R}^{-\star}$ et $\{0\}$ forment-ils une partition de $\mathbb{R}$?

Exercice 21 :

Soient A un ensemble et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une partition de A. Soient $B \subseteq A$, la famille $B_i = A_i \cap B$ est-elle une partition de B ?

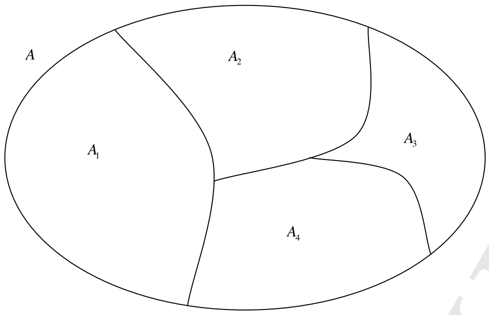


FIGURE 1.7 – Représentation graphique d'une partition

1.8 Exercices élémentaires sur les ensembles

1.8.1 Exercices élémentaires

Exercice 22 :

1. On considère l'ensemble A défini par : $A = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } 2x^2 - 3x + 1 = 0\right\}$. Définir A en compréhension
2. On considère l'ensemble A défini par : $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 2x^2 - 3x + 1 = 0\right\}$. Définir B en compréhension

Exercice 23 :

A est l'ensemble suivant, défini en compréhension :

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \text{ tels que } x = 2 + 3k \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}$$

B est l'ensemble suivant, défini en compréhension :

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \text{ tels que } x = 2 + 6k \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}$$

Montrer que nous avons $B \subset A$, mais que nous n'avons pas $A \subset B$

Exercice 24 :

On considère un ensemble E appelé référentiel, et A et B, 2 sous-ensembles de E ; on note $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E ; simplifier les expressions suivantes :

$$(A \cup B) \cap \left(\overline{A} \cup B\right) \cap \left(A \cup \overline{B}\right) \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)$$
$$(A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) \cup \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$$

Exercice 25 :

On considère un ensemble E, et A et B, 2 sous-ensembles de E ; on note $A - B = A \cap \overline{B}$.
Montrer que :

1. $A - B = (A \cup B) - B$
2. $(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$

Exercice 26 :

Soit E l'ensemble des cartes d'un jeu de 32 cartes. On considère alors les ensembles suivants :

— $Ro = \{$les cartes de couleurs rouges$\}$.
— $F = \{$les cartes représentant une figure$\}$.
— $V = \{$les valets$\}$.
— $D = \{$les dames$\}$.

1. A l'aide des ensembles ci-dessus décrire l'ensemble des cartes rouges de valeurs.
2. A l'aide des ensembles ci-dessus décrire l'ensemble des cartes noires.
3. A l'aide des ensembles ci-dessus décrire l'ensemble des dames noires.
4. Que représente l'ensemble $\overline{F \cup Ro}$?
5. Que représente l'ensemble $Ro \cap (\overline{\overline{F} \cup V \cup D})$.

Exercice 27 :

Soit $B = \{t; u; v\}$, écrire $\mathcal{P}(B)$.

1.8.2 Exercices moins simples

Exercice 28 :

Soit E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E. On suppose de plus que $A \cup B = A \cap B$. Démontrer que $A = B$.

Exercice 29 :

Soit E un ensemble, A, B et C trois sous-ensembles de E. On suppose de plus que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Démontrer que $B = C$.

Exercice 30 :

On considère un ensemble E, et A et B, 2 sous-ensembles de E ; on note

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) \,.$$

que l'on appelle <u>différence symétrique</u> *(à lier avec le "ou" exclusif)*

1. Montrer que, pour toute partie A et B de E :
$$A \Delta B = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$$
$$\left(A \Delta \overline{B}\right) \cup (A \Delta B) = \mathrm{E}$$
2. Evaluez $\overline{(A \, \Delta \, B)}$
3. Montrer que, pour toute partie A, B et C de E, nous avons : $(A \Delta B) \, \Delta C = A \Delta \, (B \Delta C)$

Exercice 31 :

Déterminer la réunion $A \cup B$, l'intersection $A \cap B$ et la différence symétrique $A \Delta B$, dans les cas suivants :

1. A est l'ensemble des cercles et B est l'ensemble des ellipses
2. A est l'ensemble des rectangles et B est l'ensemble des losanges
3. $A = \{x \in \mathbb{N}$ tels que x soit impair$\}$ et $B = \{x \in \mathbb{N}$ tels que x soit multiple de $3\}$

1.9 Les quantificateurs

1.9.1 Définition

Soit E un ensemble, et $A \subset E$
On appelle propriété caractéristique de A (ou relation collectivisante) toute propriété permettant de décider, pour tout $x \in E$, entre les deux propositions :

$$\begin{cases} x \in A \\ x \notin A \Leftrightarrow x \in \overline{A} \end{cases}$$

Remarque 20 :

1. Si P est une propriété caractéristique de A, alors, (non$P$) -noté $\neg P$- est caractéristique de $\overline{A}$.
   On dit que P est définie sur E, et qu'elle a 2 valeurs : Vrai ou faux
2. On peut donc écrire : $A = \{x \in E \text{ tel que } P(x)\}$, et $\overline{A} = \{x \in E \text{ tel que } \neg P(x)\}$
3. A peut être défini par 2 propriétés caractéristiques, mais énoncées différemment ; on dit que ces propriétés sont équivalentes sur E

   Exemple :

$$T = \{\text{triangles ayant 2 côtés de même longueur}\}$$

$$T = \{\text{triangles ayant 2 angles égaux}\}$$

1.9.2 Définition de quantificateurs

Soit E un référentiel, et P une propriété définissant $A \subset E$

1. Si $A \neq \emptyset$, il existe donc $x \in E$ tel que $P(x)$, que l'on écrit :

$$(\exists x \in E) \ (P(x))$$

2. Si $A = \emptyset$, il n'y a donc aucun $x \in E$ tel que $P(x)$, que l'on écrit :

$$\neg [(\exists x \in E) \ (P(x))]$$

3. Si $A = E$, alors, pour tout $x \in E$ on a $P(x)$, que l'on écrit :

$$(\forall x \in E) \ (P(x))$$

Les symboles $\forall$ et $\exists$ sont appelés QUANTIFICATEURS
- $\forall$ est un quantificateur universel (« pour tout », ou « quel que soit »)
- $\exists$ est un quantificateur existentiel (« il existe au moins un »)

Remarque 21 :

1. $\forall$ et $\exists$ ne sont pas des abréviations, mais **des symboles** soumis à des règles strictes de logique
2. On peut aussi distinguer **égalité** et **identité**
   (a) **Identité :** $(\forall x \in \mathbb{R}) \ \left((x+1)^2 = x^2 + 2x + 1\right)$
   (b) **Egalité** : $(\exists x \in \mathbb{R}) \ (2x + 1 = 0)$
3. $(\forall x \in E \ P(x)) \iff (A = E)$, et donc $\overline{A} = \emptyset$; la négation de $\overline{A} = \emptyset$ est $\overline{A} \neq \emptyset$, et donc, $(\exists x \in E)$ (non $P(x)$), et donc,

$$\text{non} [(\forall x \in E) \ (P(x))] \Leftrightarrow (\exists x \in E) (\text{non} P(x))$$

$$(\forall x \in E) \ (P(x)) \Leftrightarrow \text{non} [(\exists x \in E) (\text{non} P(x))]$$

4. $(\forall x \in E \text{ non}P(x)) \Leftrightarrow \left(\overline{A} = E\right)$, et donc $A = \emptyset$; la négation de $A = \emptyset$ est $A \neq \emptyset$, et donc, $(\exists x \in E)(P(x))$, et donc,
$$\text{non}\left[(\forall x \in E)(\text{non}P(x))\right] \Leftrightarrow (\exists x \in E)(P(x))$$
5. Soient P et Q 2 propriétés définies sur E, et $A = \{x \in E \; P(x)\}$ et $B = \{x \in E \; Q(x)\}$, alors, l'implication $(\forall x \in E)(P(x) \Rightarrow Q(x))$, se traduit par $A \subset B$, et $A = B$ se traduit par $(\forall x \in E)(P(x) \Leftrightarrow Q(x))$
6. On a donc, $A \cap B = \{x \in E \; P(x) \text{ et } Q(x)\}$ et $A \cup B = \{x \in E \; P(x) \text{ ou } Q(x)\}$

1.9.3 Tableau de correspondance entre propriétés définies sur E et parties de E

$x \in A$	$P(x)$
$x \in B$	$Q(x)$
$A \subset B$	$(\forall x \in E)(P(x) \Rightarrow Q(x))$
$A = B$	$(\forall x \in E)(P(x) \Leftrightarrow Q(x))$
$x \in \overline{A}$	$\text{non}P(x)$
$\overline{\overline{A}} = A$	$(\forall x \in E)(\text{non}(\text{non}(P(x))) \Leftrightarrow P(x))$
$x \in A \cap B$	$(\forall x \in E)(P(x)\,\text{et}Q(x))$
$x \in A \cup B$	$(\forall x \in E)(P(x)\,\text{ou}Q(x))$
$A \cap B = \emptyset$	$(\forall x \in E)(P(x)\,\text{et}Q(x))$ incompatibles
$A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$ $(\overline{A} = B)$	$(\forall x \in E)(P(x) \Leftrightarrow \text{non}Q(x))$

1.9.4 Exercices sur les quantificateurs

Exercice 32 :

Ecrire la négation des propositions suivantes :

1. $\forall x : p(x) \Rightarrow q(x)$
2. $\forall x : p(x) \Leftrightarrow q(x)$
3. $(\exists x) : (p(x) \wedge q(x))$
4. $(\forall x)(\forall y) : (p(x,y) \wedge q(x,y) \Rightarrow r(x,y))$
5. $(\exists x)(\forall y) : (p(x,y) \Rightarrow (q(x,y) \vee r(x,y)))$

Exercice 33 :

Quelle est la valeur de vérité de la proposition suivante ; prouver votre affirmation : $\forall x \in \mathbb{Z} : x \neq x^2$

Exercice 34 :

On considère la proposition Q suivante :
$$(\forall n \in \mathbb{N})\left(3^{2n} - 2^n = \left(3^2 - 2\right)^n\right)$$

1. Nier la proposition Q
2. Quelle est la valeur de vérité de la proposition Q ?

Exercice 35 :

Ecrire la négation des propositions suivantes :

1. $(\forall x)(\exists y) : (p(x,y) \Rightarrow q(x,y))$
2. $(\forall x)(\exists y : p(x,y) \Rightarrow q(x))$
3. $((\forall x)(\exists y) : p(x,y)) \Rightarrow ((\forall z) : r(z))$

Exercice 36 :

Ecrire les négations des expressions suivantes :

1. $(\exists a \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geqslant n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon)$
2. $(\exists M > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(|u_n| \leqslant M)$

Exercice 37 :

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; on note $C(x,y)$ la propriété suivante : $y^2 + xy - x - 1 = 0$
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Expliciter la négation dans les affirmations fausses

1. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(C(x,y))$
2. $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})(C(x,y))$
3. $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(C(x,y))$
4. $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(C(x,y))$

Exercice 38 :

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
On note $D(x,y)$ la propriété suivante : $-3y^2 - 6xy \geqslant 1$ Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Expliciter la négation dans les affirmations fausses

1. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(D(x,y))$
2. $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})(\neg D(x,y))$
3. $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(D(x,y))$
4. $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(D(x,y))$
5. $(\exists y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})(\neg D(x,y))$
6. $(\exists y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})(D(x,y))$

1.10 Relations binaires

1.10.1 Définition

On appelle relation binaire dans un ensemble E, une relation $\mathcal{R}e$ entre éléments de E
Cette relation est caractérisée par son graphe

$$\Gamma = \{(x,y) \in E \times E \text{ tel que } x \,\mathrm{Re}\, y\}$$

Exemple 16 :

1. $E = \mathbb{Z}$ et $x \,\mathrm{Re}\, y \Leftrightarrow y = x^2$ On a : $2 \,\mathrm{Re}\, 4$ $6 \,\mathrm{Re}\, 36$, mais on n'a pas : $6 \,\mathrm{Re}\, 9$
2. $E = \mathbb{R}$ et $x \,\mathrm{Re}\, y \Leftrightarrow y - x = 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$; cette relation est appelée : relation de congruence modulo 2π
3. $E = \mathbb{N}$ et $x \,\mathrm{Re}\, y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ tel que $y = kx$. C'est la relation de division

1.10.2 Définition : propriétés des relations

Soit E un ensemble
Une relation binaire Re dans E est dite

1. réflexive si $(\forall x \in E)(x \,\mathrm{Re}\, x)$
2. symétrique si $(\forall x \in E)$ et $(\forall y \in E)$, nous avons l'implication $(x \,\mathrm{Re}\, y \Rightarrow y \,\mathrm{Re}\, x)$
3. antisymétrique si $(\forall x \in E)$ et $(\forall y \in E)$ nous avons l'implication suivante : $(x \,\mathrm{Re}\, y$ et $y \,\mathrm{Re}\, x \Rightarrow x = y)$
4. transitive si $(\forall x \in E)(\forall y \in E)(\forall z \in E)$, nous avons l'implication suivante : $(x \,\mathrm{Re}\, y$ et $y \,\mathrm{Re}\, z \Rightarrow x \,\mathrm{Re}\, z)$

Exemple 17 :

Voici une relation binaire dans un ensemble $E = \{a, b, c, d\}$, définie par son graphe

$$\Gamma = \{(a,a)\ (a,c)\ (b,c)\ (c,a)\ (c,d)\ (d,c)\ \}$$

1. **Cette relation n'est pas réflexive** : on n'a pas b Re b
2. **Cette relation n'est pas symétrique**, car si nous avons b Re c, nous n'avons pas c Re b
3. **Cette relation n'est pas transitive**, car si nous avons a Re c et c Re d, nous n'avons pas a Re d

Remarque 22 :

Il existe d'autres qualités aux relations, en fait plus ou moins intéressantes comme l'irreflexivité

> Une relation Re sur un ensemble E est **irréflexive**, si, pour tout $x \in E$, nous n'avons pas $x \operatorname{Re} x$

Exercice 39 :

Dans les exemples présentés dans 1.10.1, quelles sont les relations réflexives, symétriques, antisymétriques et transitives ?

1.10.3 Définition de relation d'équivalence

Soit E un ensemble, et Re une relation binaire sur E
Une relation est dite d'équivalence, si elle est (cf.1.10.2)

1. réflexive
2. symétrique
3. transitive

Remarque 23 :

1. On écrit $x \equiv y\, [\mathrm{mod}\, \mathrm{Re}]$ qui se lit :

   x **congru** à y **modulo** Re

   (On doit cette notation et ce vocabulaire à K.F. GAUSS)
2. On doit donc avoir

   Réflexivité $x \equiv x\, (\mathrm{mod}\, \mathrm{Re})$

   Symétrie Si $x \equiv y\, (\mathrm{mod}\, \mathrm{Re})$ alors $y \equiv x\, (\mathrm{mod}\, \mathrm{Re})$

   Transitivité Si $x \equiv y\, (\mathrm{mod}\, \mathrm{Re})$ et $y \equiv z\, (\mathrm{mod}\, \mathrm{Re})$, alors $x \equiv z\, (\mathrm{mod}\, \mathrm{Re})$

Exemple 18 :

1. L'égalité est une relation d'équivalence
2. Dans $\mathbb{Z}$, soit $n \in \mathbb{Z}$ fixé, et $x \equiv y \iff y - x = kn$ où $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que c'est une relation d'équivalence. On écrit $x \equiv y\, [n]$. C'est la relation de congruence modulo n
3. Dans $\mathbb{R}$, $x \equiv y \iff y - x = 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que c'est une relation d'équivalence. On écrit $x \equiv y\, [2\pi]$. C'est la relation définissant la mesure des angles.
4. En géométrie, le parallélisme est une relation d'équivalence
5. Dans $\mathbb{R}$, la relation $x \operatorname{Re} y \iff \sin x = \sin y$ est-elle d'équivalence ?

1.10.4 Définition

Soit E un ensemble, et Re (ou $\equiv$) une relation d'équivalence sur E.
Pour $x \in E$, on appelle classe d'équivalence de x, l'ensemble

$$\dot{x} = \{y \in E \text{ tel que } y \operatorname{Re} x\}$$

Remarque 24 :

1. $\dot{x}$ est l'ensemble des éléments de E qui sont en relation avec x ; on dit aussi que x est un représentant de la classe de x
2. L'ensemble des classes d'équivalence est noté : E/Re ou $E/\equiv$

Exercice 40 :

1. Montrer que si $y \operatorname{Re} x$ alors, $\dot{x} = \dot{y}$
2. Montrer que $(\forall x \in E)\,(\forall y \in E)$ on a soit $\dot{x} = \dot{y}$ soit $\dot{x} \cap \dot{y} = \emptyset$

1.10.5 Définition de relation d'ordre

Soit E un ensemble, et Re une relation binaire sur E
Re est une relation d'ordre, si elle est (c.f.1.10.2)

1. Réflexive,
2. Antisymétrique,
3. Transitive

Remarque 25 :

On doit donc avoir

Réflexivité Pour tout $x \in E$, $x \operatorname{Re} x$

Antisymétrie Pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, si $x \operatorname{Re} y$ et $y \operatorname{Re} x$ alors $y = x$

Transitivité Pour tout $x \in E$, tout $y \in E$ et tout $z \in E$, si $x \operatorname{Re} y$ et $y \operatorname{Re} z$ alors $x \operatorname{Re} z$

Exemple 19 :

1. Dans $\mathbb{R}$, la relation « $\leqslant$ »définie par : $x \leqslant y \iff y - x \in \mathbb{R}^+$ est une relation d'ordre, que l'on peut étendre à $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$
2. Dans $\mathbb{N}^*$, la relation définie par $x/y \iff$ il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $y = kx$ est une relation d'ordre ; on a donc $2/4$, mais pas $4/2$, pas plus que $2/11$
3. Si E est un ensemble, alors, la relation d'inclusion dans $\mathcal{P}(E)$ est une relation d'ordre

Remarque 26 :

Il y a des relations qui ne permettent pas de comparer des éléments entre eux : Par exemple, la relation « divise » dans $\mathbb{N}$, et la relation d'inclusion dans $\mathcal{P}(E)$

1.10.6 Définition

Soit Re relation d'ordre sur un ensemble E ; Re est dite relation d'ordre total , si tous les éléments de E sont comparables, c'est à dire :

$$\forall (x, y) \in E \times E \quad x \operatorname{Re} y \text{ OU } y \operatorname{Re} x$$

Exemple 20 :

1. Les relations « divise » dans $\mathbb{N}$ et « $\subset$ » dans $\mathcal{P}(E)$ sont des relations d'ordre partielles.
2. On admet que la relation la relation « $\leqslant$ »est une relation d'ordre total dans $\mathbb{R}$.

1.10.7 Définition de majorant et de minorant

Soit $(E, \mathcal{R}e)$ un ensemble ordonné, et $A \subset E$ une partie de E

1. $a \in E$ est un majorant de A, si et seulement si
$$(\forall x \in A)\,(x \,\mathcal{R}e\, a)$$
Une partie $A \subset E$ est dite majorée, si elle admet un majorant.
2. $b \in E$ est un minorant de A, si et seulement si $(\forall x \in A)\,(b \,\mathcal{R}e\, x)$.
Une partie $A \subset E$ est dite minorée, si elle admet un minorant
3. Une partie $A \subset E$ est dite bornée, si elle est à la fois majorée et minorée

Exemple 21 :

1. Dans $(\mathcal{P}(E), \subset)$, $A \cap B$ est un minorant de $\{A, B\}$ et $A \cup B$ est un majorant de $\{A, B\}$.
2. Mieux ! ! toute partie $G \supset A \cup B$ est un majorant de $\{A, B\}$ et toute partie $F \subset (A \cap B)$ est un minorant de $\{A, B\}$
3. Dans $(\mathbb{N}^*, /)$, on s'intéresse à $A = \{3, 4, 5\}$, alors, 60 est un majorant de A, de même que 120, 180, 240,....etc. 60 est même le plus petit des majorants.
1 est le seul minorant de A
4. Si $A = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } -3 \leqslant x < 3\}$, 3 est un majorant de A, et c'est le plus petit des majorants ; -3 est un minorant, et on a $-3 \in A$ alors que $3 \notin A$

1.10.8 Définition d'élément maximum, d'élément minimum

Soit $(E, \mathcal{R}e)$ un ensemble ordonné, et $A \subset E$ une partie de E

1. $M \in A$ est appelé élément maximum ou plus grand élément de A, si et seulement si
$$(\forall x \in A)\,(x \,\mathcal{R}e\, M)$$
2. $m \in A$ est appelé élément minimum ou plus petit élémentde A, si et seulement si
$$(\forall x \in A)\,(m \,\mathcal{R}e\, x)$$

Remarque 27 :

1. L'élément maximum ou l'élément minimum peuvent ne pas exister.
Etudier l'existence de l'élément maximum ou de l'élément minimum dans $(\mathbb{N}^*, /)$, où $A = \{3, 4, 5\}$, puis $A = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } -3 \leqslant x < 3\}$
2. Si l'élément maximum ou l'élément minimum existe, il est unique.

1.10.9 Définition de la borne supérieure, de la borne inférieure

Soit $(E, \mathcal{R}e)$ est un ensemble ordonné

1. Soit $A \subset E$ une partie majorée de E. On appelle borne supérieure de A, le plus petit des majorants de A, et on le note : $\sup A$
2. Soit $A \subset E$ une partie minorée de E. On appelle borne inférieure de A, le plus grand des minorants de A, et on le note : $\inf A$

Exemple 22 :

1. Dans $(\mathcal{P}(E), \subset)$, $A \cap B$ est la borne inférieure de $\{A, B\}$ et $A \cup B$ est la borne supérieure de $\{A, B\}$
2. Dans $(\mathbb{N}^*, /)$, on s'intéresse à $A = \{3, 4, 5\}$, alors, 60 est la borne supérieure de A, et 1 en est la borne inférieure

Exercice 41 :

1. Etudier les bornes supérieures, bornes inférieures, plus grands éléments, plus petits éléments de l'ensemble $A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$
2. Même question pour $A = \left\{\frac{n^2-1}{n^2+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$

1.11 Exercices sur les relations binaires

1.11.1 Exercices élémentaires

Exercice 42 :

On considère une relation Re sur un ensemble E ; déterminer celles qui sont réflexives, symétriques et transitives.

1. E est l'ensemble des habitants de Vannes, et Re est la relation "$x \,\mathrm{Re}\, y$" signifiant que x et $y$ont la même mère.
2. E est l'ensemble des habitants de Vannes, et Re est la relation "$x \,\mathrm{Re}\, y$" signifiant que x et $y$ont un grand-père en commun.
3. E est l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ et "$x \,\mathrm{Re}\, y$" signifiant que $x^2 = y^2$
4. E est l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ et "$x \,\mathrm{Re}\, y$" signifiant que $x - y$ est pair
5. $E = \{1, 2, 3\}$ et le graphe de la relation Re est $\Gamma = \{(1,1)\,;(1,2)\,;(2,1)\,;(2,2)\}$

Exercice 43 :

$\mathbb{Z}^*$ est l'ensemble des entiers relatifs non nuls.
Dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, on considère la relation $\mathcal{S}$ définie par :

$$(m,n)\,\mathcal{S}\,(m',n') \iff mn' = m'n$$

1. Avons nous $(1,2)\,\mathcal{S}\,(3,4)$? $(5,7)\,\mathcal{S}\,(10,14)$?
2. La relation $\mathcal{S}$ est-elle réflexive ? Irréflexive ?
3. La relation $\mathcal{S}$ est-elle symétrique ? Antisymétrique ?
4. La relation $\mathcal{S}$ est-elle transitive ?
5. La relation $\mathcal{S}$ est-elle une relation d'équivalence ? Une relation d'ordre ?

Exercice 44 :

Vérifier que Re est une relation d'équivalence sur E, et déterminer les classes d'équivalence associées.

1. E est l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ et "$x \,\mathrm{Re}\, y$" signifiant que il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = 7k$.
2. E est l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, et Re est une relation définie par :
$$(n_1, n_2)\,\mathrm{Re}\,(m_1, m_2) \Leftrightarrow n_1 + m_2 = n_2 + m_1$$
3. E est l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, et Re est une relation définie par :
$$(n_1, n_2)\,\mathrm{Re}\,(m_1, m_2) \Leftrightarrow n_1 m_2 = n_2 m_1$$

Exercice 45 :

Dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, on considère la relation Re suivante :

$$(\forall x \in \mathbb{Z})\,(\forall y \in \mathbb{Z})\,[(x \,\mathrm{Re}\, y) \Leftrightarrow (\exists u \in \mathbb{Z})\,(\exists v \in \mathbb{Z})\,(xu + yv = 1)]$$

1. Montrer que nous avons $2 \,\mathrm{Re}\, 3$, $3 \,\mathrm{Re}\, 4$; avons nous $2 \,\mathrm{Re}\, 4$?
2. La relation Re est-elle réflexive ? irréflexive ?
3. La relation Re est-elle symétrique ? transitive ?

Exercice 46 :

Dans l'ensmble $\mathbb{N}_{10}$ des entiers compris entre 1 et 10, nous considérons les deux relations binaires : $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ définies par :
- $x\mathcal{R}y$ si et seulement si x et y ont un diviseur premier en commun
- $x\mathcal{S}y$ si et seulement si $x\mathcal{R}y$ et $x \leqslant y$

1. Représenter les deux relations par un diagramme cartésien ; que dire des deux graphes ?
2. Donner les propriétés de chacune des relations : réflexivité, irréflexivité, symétrie, antisymétrie, transitivité

Exercice 47 :

1. Dans l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$, on considère la relation $\mathcal{R}$ suivante définie par :

$$x\mathcal{R}y \iff \text{ il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x - y = 13k$$

   (a) Avons nous $5\mathcal{R}21$, $5\mathcal{R}31$?

   (b) Trouver trois entiers $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$ $p \in \mathbb{Z}$, 2 à 2 différents et tous différents de -2 tels que $-2\mathcal{R}m$, $-2\mathcal{R}n$ et $p\mathcal{R}-2$

   (c) Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence

2. Dans l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$, on considère la relation $\mathcal{S}$ suivante définie par :

$$x\mathcal{S}y \iff x\mathcal{R}y \text{ et } x \leqslant y$$

   (a) Cette relation est-elle réflexive ? Irréflexive ?

   (b) Cette relation est-elle symétrique ? Antisymétrique ?

   (c) Cette relation est-elle transitive ?

   (d) Quelle est la nature de la relation $\mathcal{S}$?

1.11.2 Vocabulaire de la relation d'ordre

Exercice 48 :

1. On considère la relation d'inclusion $\subset$ qui est une relation d'ordre sur les parties de $\mathbb{R}$.
   Soient $A = [1; 10]$ et $B = [3; 14]$ deux intervalles de $\mathbb{R}$

   (a) Donner, au sens de la relation d'inclusion, le plus grand et le plus petit élément de l'ensemble $\{A, B\}$

   (b) Donner la borne supérieure et la borne inférieure de $\{A, B\}$

2. On considère l'ensemble $X = \left\{x_n = \dfrac{1}{n} + (-1)^n \text{ où } n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Cet ensemble a-t-il un plus grand élément ? Un plus petit élément ? Une borne supérieure ? Une borne inférieure ?

Exercice 49 :

Ordre lexicographique
On définit la relation Re suivante dans $\mathbb{R}^2$: $(a, b) \operatorname{Re} (c, d)$ si $a \leqslant c$ ou $(a = c$ et $b \leqslant d)$

1. Monter que Re est une relation d'ordre ; cet ordre est-il total ?
2. Cet ordre est-il compatible avec l'addition ? Avec le produit par un scalaire ?
3. Dessiner l'ensemble suivant : $X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } (0,0) \operatorname{Re} (x, y) \operatorname{Re} (1, 1)\right\}$

Exercice 50 :

Ordre produit
On considère le produit cartésien $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \text{ où } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$
On considère, dans cet ensemble, la relation Re suivante :

$$(x, y) \text{ Re } (x_1, y_1) \Leftrightarrow x \leqslant x_1 \text{ et } y \leqslant y_1$$

1. Démontrer que la relationRe est une relation d'ordre; cet ordre est-il total ?
2. Dessiner l'ensemble E, défini par

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ où } (0, 0) \operatorname{Re}(x, y) \text{ et } (x, y) \operatorname{Re}(1, 1)\right\}$$

3. L'ensemble E admet-il, pour Re, un plus grand élément ? Un plus petit élément ?
4. Dessiner l'ensemble des majorants de E; dessiner l'ensemble des minorants de E

Exercice 51 :

Relation de division
Dans l'ensemble des entiers naturels non nuls $\mathbb{N}^*$, on considère la relation de division définie par :

$$x/y \text{ si et seulement si il existe } k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que : } y = kx$$

1. Montrer que la relation de division est une relation d'ordre; cet ordre est-il total ?
2. Soit $X = \{3, 5, 4, 10, 15, 20, 60\}$; on munit X de la relation d'ordre induite par la division. Cet ensemble a-t-il un plus grand élément ? Un plus petit élément ? Une borne supérieure ? Une borne inférieure ?

Exercice 52 :

Ordre dans l'espace de fonctions
$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions numériques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Dans l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définies sur $\mathbb{R}$ en entier, on définit une relation $\mathcal{R}$ par :

$$(\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))\,(\forall g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))\,(f \mathcal{R} g) \Longleftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})\,(f(x) \leqslant g(x))$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre
2. Cette relation d'ordre est-elle totale ? ?

Exercice 53 :

1. Déterminer, dans $\mathbb{Z}$, l'ensemble des nombres x tels que $x^2 - 3x < 28$
2. Cet ensemble admet-il un plus grand élément ? Un plus petit élément ? Une borne supérieure ? Une borne inférieure ?

Exercice 54 :

Relation de bon ordre
Un ensemble E est un ensemble <u>bien ordonné</u> si une relation d'ordre est définie sur E, et que toute partie non vide de E admet un plus petit élément *(ou un élément minimum)*

1. Montrer qu'un ensemble bien ordonné est un ensemble totalement ordonné.
2. Montrer que dans un ensemble bien ordonné E, il est possible de définir une fonction **"successeur"** d'un élément en donnant une définition aussi précise que possible.

1.12 Notion de fonction

1.12.1 Définition

Soient E et F 2 ensembles

1. Un graphe $G \subset E \times F$ est dit fonctionnel s'il vérifie la relation suivante :
   Pour tout $x \in E$, l'ensemble $G_x = \{y \in F \text{ tel que } (x, y) \in G\}$ est soit vide, soit réduit à un seul élément.
   Ce qui peut encore s'exprimer : $\text{Card } G_x \in \{0, 1\}$
2. On appelle fonction de E dans F toute correspondance (ou relation) dont le graphe est fonctionnel
3. On appelle application de E dans F toute correspondance (ou relation) dont le graphe est fonctionnel, et dont le domaine de définition est E.

Remarque 28 :

Autrement dit

1. f est une **fonction** de E dans F, si, à chaque élément $x \in E$, f fait correspondre à x au plus un élément $y \in F$ *(c'est à dire 0 ou 1)*
2. f est une **application** de E dans F, si, quel que soit l'élément $x \in E$, f fait correspondre à x un unique élément $y \in F$ *(c'est à dire exactement 1)*

Remarque 29 :

1. E est **l'ensemble de départ**, et F est **l'ensemble d'arrivée**
2. $f(x)$ est la valeur de la fonction f en x, ou encore, l'image de x par f
3. Le graphe de f est l'ensemble $\Gamma_f = \{(x, f(x))\}$ où $x \in E$
4. On écrit :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} f : E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$
5. Quand donc 2 fonctions sont-elles égales ?
   Deux fonctions sont égales si elles ont même ensemble de départ, **et** même ensemble d'arrivée, **et si**, pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$
6. On note souvent l'ensemble des fonctions de E dans F : F^E
7. Il ne faut surtout pas confondre la fonction f qui est un être mathématique, et l'image $f(x)$ qui est un élément de l'ensemble d'arrivée F.
8. De manière théorique, on peut définir une fonction f comme un triplet $f = (E, F, G)$, où $G \subset E \times F$ est un graphe fonctionnel.
   Donc, 2 fonctions $f = (E, F, G)$ et $g = (E', F', G')$ sont égales si et seulement si $E = E'$, $F = F'$ et $G = G'$

Exemple 23 :

Exemples de fonctions

1. Toutes les fonctions numériques d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$
2. Toutes les transformations géométriques affines.
3. L'application identique :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} \text{Id}_E : E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \text{Id}_E(x) = x \end{array} \right.$$
4. Les fonctions à plusieurs variables :
   (a) $\left\{ \begin{array}{rcl} f : E \times F & \longrightarrow & G \\ (x, y) & \longmapsto & f[(x, y)] \end{array} \right.$

(b) Exemple de fonction numérique à 2 variables :

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & f[(x,y)] = (x+y, x-y) \end{cases}$$

(c) Exemple de fonction numérique à n variables à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & f[(x_1, \ldots, x_n)] = x_1 + \ldots + x_n \end{cases}$$

5. L' application première projections :

$$\begin{cases} pr_1 : E \times F & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & pr_1[(x,y)] = x \end{cases}$$

6. L'application seconde projection

$$\begin{cases} pr_2 : E \times F & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & pr_2[(x,y)] = y \end{cases}$$

7. Une notion voisine de celle de fonction est la notion de **famille indexée** par un ensemble I : $(x_i)_{i \in I}$

(a) C'est en fait une fonction

$$\begin{cases} f : I & \longrightarrow & F \\ i & \longmapsto & f(i) = x_i \end{cases}$$

Et $(x_i)_{i \in I}$ désignant la famille, est en fait le graphe de la fonction f

(b) En particulier si $I = \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} f : \mathbb{N} & \longrightarrow & F \\ n & \longmapsto & f(n) = x_n \end{cases}$$

f devient alors, et désigne une **suite** d'éléments de F, F désignant n'importe quel ensemble.

(c) L'ensemble des suites numériques devient alors $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, pour les suites numériques réelles et $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ pour les suites numériques complexes.

(d) Il y a aussi le cas où I est un ensemble fini : $I = \{1 \ldots n\}$, et nous avons :

$$\begin{cases} f : I & \longrightarrow & F \\ i & \longmapsto & f(i) = x_i \end{cases}$$

Le graphe de f est alors $G = \{(n, x_n) \text{ où } n \in I\}$; c'est une suite finie, et l'ensemble de toutes les fonctions de $I = \{1 \ldots n\}$ dans F est donc F^n *(C'est exactement le produit cartésien)*

8. Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles, alors nous avons : $\bigcap\limits_{i \in I} A_i = \{x \text{ tel que } \forall i \in I x \in A_i\}$ et $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = \{x \text{ tel que } \exists i \in I \text{ tel que } x \in A_i\}$

Exercice 55 :

Exercice sur la fonction caractéristique d'un ensemble

Soit E un ensemble, et $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E. On considère $A \subset E$. On appelle fonction caractéristique de A, une application 1_A, définie par :

$$\begin{cases} 1_A : E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & 1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{cases}$$

Pour $A \subset E$ et $B \subset E$, montrer que $1_{A \cap B} = 1_A \times 1_B$ et que $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_A \times 1_B$

1.12.2 Images directes et images réciproques

Soient E et F 2 ensembles, et $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Soit $A \subset E$. On appelle image directe de A par f l'ensemble
$$f(A) = \{y \in F \text{ tel que } \exists x \in A \text{ tel que } y = f(x)\}$$
2. Soit $B \subset F$. On appelle image réciproque de B par f l'ensemble
$$f^{-1}(B) = \{x \in E \text{ tel que } f(x) \in B\}$$

Remarque 30 :

1. Si A est vide, alors $f(A)$ est vide
2. Par contre, si B est non vide, $f^{-1}(B)$ peut être vide.

   Exemples :

   (a) Si $E = F = \mathbb{R}$, et $f(x) = \sin x$ et si $B = [+2, +\infty[$, alors $f^{-1}(B) = \emptyset$

   (b) Toujours si $E = F = \mathbb{R}$, et $f(x) = \sin x$:
$$f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$$
   $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$ est un ensemble infini, néanmoins dénombrable.

1.12.3 Définition

1. Soient E et F 2 ensembles, et $f : E \longrightarrow F$ une application. Soit $A \subset E$. On dit que f est constante sur A si $f(A)$ se réduit à un seul élément, c'est à dire si
$$(\forall x \in E)(\forall y \in E)(((x \in A) \text{ et } (y \in A)) \Longrightarrow f(x) = f(y))$$
   f est dite constante si f est dite constante sur E en entier.
2. Soient E un ensemble, et $f : E \longrightarrow E$ une application.

   (a) Soit $A \subset E$; On dit que A est stable par f si $f(A) \subset A$ c'est à dire si :
$$(\forall x \in E)((x \in A) \Longrightarrow f(x) \in A)$$
   (b) Si $x \in E$ est tel que $f(x) = x$, on dit que x est un point fixe de f

1.12.4 Application surjective

Soient E et F 2 ensembles, et $f : E \longrightarrow F$ une application.
On dit que f est surjective ou encore que f est une surjection, si et seulement si $f(E) = F$
On dit que f est une application de E sur F

Remarque 31 :

1. $f : E \longrightarrow F$ est surjective, si et seulement si **tous les éléments de l'ensemble d'arrivée ont au moins un antécédent**
2. $f : E \longrightarrow F$ est donc surjective, si et seulement si $(\forall y \in F)\left(f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset\right)$
3. **Définition formalisée de surjection :**

   $f : E \longrightarrow F$ est surjective, si et seulement si $(\forall y \in F)(\exists x \in E)(y = f(x))$

1.12.5 Application injective

Soient E et F 2 ensembles, et $f : E \longrightarrow F$ une application.
On dit que f est injective ou encore que f est une injection, si et seulement si $(\forall y \in F)$, si $f^{-1}(\{y\})$ n'est pas vide, alors $f^{-1}(\{y\})$ n'a qu'un seul élément.
On dit que f est une application de Edans F

Remarque 32 :

1. **Définition formalisée d'injection :**
   $f : E \longrightarrow F$ est donc injective, si et seulement si
   $$(\forall x \in E)\,(\forall x' \in E)\,(f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x')$$
2. **En utilisant la contrapposée**, de la définition formalisée :
   $f : E \longrightarrow F$ est injective, si et seulement si
   $$(\forall x \in E)\,(\forall x' \in E)\,(x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x'))$$
3. Autre façon de voir les choses :
   $f : E \longrightarrow F$ est injective, si et seulement si les éléments de l'ensemble d'arrivée ont au plus un antécédent

Exercice 56 :

Quelle est la nature *(au sens injection ou surjection)* de ces différentes fonctions ?

1. $\left\{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$
4. $\left\{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$

1.12.6 Définition d'une bijection

Soient E et F 2 ensembles, et $f : E \longrightarrow F$ une application.
On dit que f est bijective ou encore que f est une bijection, si et seulement si f est à la fois injective et surjective.

Remarque 33 :

1. Revenons sur la définition de f bijective,
   — f est surjective, donc $(\forall y \in F)$, $f^{-1}(\{y\})$ est non vide.
   — f injective, alors, pour tout $y \in F$, $f^{-1}(\{y\})$ a 0 ou 1 élément
   En synthèse, f est bijective, si et seulement si $f^{-1}(\{y\})$ est réduit à un seul élément.
2. **Exemple d'application bijective :**
   $$\left\{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$$

1.12.7 Conséquence de la définition de bijection

Soient E et F 2 ensembles, et $f : E \longrightarrow F$ une bijection.
Alors, $(\forall y \in F)$, l'équation $y = f(x)$ n'a qu'une seule solution dans E

Démonstration

La démonstration est évidente et résulte directement de la définition

Remarque 34 :

Existence d'une application réciproque

1. Pour $y \in F$, appelons $g(y)$ la solution de l'équation $y = f(x)$, *(cette solution existe, car f est surjective, et est unique, car f est injective ; voir le résultat 1.12.7)* on peut alors définir une application $g : F \longrightarrow E$, telle que, si $y \in F$, $g(y)$ est la solution de l'équation $y = f(x)$
2. On aurait donc $y = f(g(y))$; g est l'application réciproque de f, souvent notée f^{-1} ; f^{-1} est aussi une bijection, et nous avons $f^{-1} : F \longrightarrow E$

   $g(y) = x \Longleftrightarrow y = f(x)$ ou bien $f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow y = f(x)$

1.12.8 Application composée

Soient E, F et G 3 ensembles. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ 2 applications.
On peut alors définir $h : E \longrightarrow G$ telle que, $(\forall x \in E)\,(h(x) = g(f(x)))$
On note alors :$h = g \circ f$

Remarque 35 :

En commentaire, on peut penser à une application

$$\begin{cases} \Phi : F^E \times G^F & \longrightarrow & G^E \\ (f, g) & \longmapsto & g \circ f \end{cases}$$

Exercice 57 :

1. Soit $f \in F^E$ et $g \in E^F$; A quels ensembles appartiennent $f \circ g$ et $g \circ f$?
2. Si $E = F = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = x^2$; calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.
3. Décomposer sous la forme $f \circ g$, l'application $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \ln(2 + \sin x)$

1.12.9 Associativité de la composition des applications

La composition des applications est associative
C'est à dire que si $f \in F^E$ et $g \in G^F$ et $h \in H^G$, alors,

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) = h \circ g \circ f$$

1.12.10 Conservation de certaines propriétés par la composition

Soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$

1. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective
2. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective
3. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Démonstration

1. Supposons $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ injectives

   Montrons que $g \circ f : E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ est injective.
   Soient donc $x \in E$ et $y \in E$ tels que $g \circ f(x) = g \circ f(y)$; nous avons :

$$g \circ f(x) = g \circ f(y) \Longleftrightarrow g(f(x)) = g(f(y))$$

   — g est injective, donc $g(f(x)) = g(f(y)) \Longrightarrow f(x) = f(y)$

— f est injective, donc $f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$
Donc $g \circ f(x) = g \circ f(y) \Longrightarrow x = y$; $g \circ f$ est injective

2. Supposons $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ surjectives

   Montrons que $g \circ f : E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ est surjective.
   Soit donc $z \in G$. Existe-t-il $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = z$?
   — g est surjective, il existe donc $y \in F$ tel que $g(y) = z$
   — De même, f est surjective, il existe donc $x \in E$ tel que $f(x) = y$
   Nous avons donc
   $$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$$
   Donc, pour tout $z \in G$, il existe $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = z$. $g \circ f$ est donc surjective.

3. Supposons $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ bijectives

   Montrons que $g \circ f : E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ est bijective.
   Des 2 résultats précédents, nous tirons :
   — g et f étant bijectives, sont surjectives, donc $g \circ f$ est surjective.
   — g et f étant bijectives, sont injectives, donc $g \circ f$ est injective.
   Nous avons donc $g \circ f$ surjective et injective, donc bijective

1.13 Exercices sur les fonctions et les applications

1.13.1 Image directe, image réciproque

Exercice 58 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$; on appelle $A = [-4; +2]$, et $B = [1; 3]$ Donner $f(A)$; $f(B)$; $f(A \cap B)$; $f^{-1}(A)$; $f^{-1}(B)$

Exercice 59 :

L'objet de cet exercice (réellement un peu théorique), est de faire manipuler les notions de fonctions, et les notions d'inclusion d'ensembles ;
Soient E et F, deux ensembles, et f une application de E dans F

1. Soient $A \subset E$ et $B \subset E$; montrer que : $A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B)$ et $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $x \in \mathbb{R}$ fait correspondre $f(x) = x^2$; on appelle $A = [-4; 2]$ et $B = [1; 3]$; évaluer $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$
3. Soient $C \subset F$ et $D \subset F$; montrer que : $C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$

Exercice 60 :

On appelle **fonction caractéristique** d'un ensemble $A \subset E$, l'application $1_A : E \longrightarrow \{0, 1\}$, telle que $1_A(x) = 1$ si $x \in A$, et $1_A(x) = 0$ si $x \notin A$.
Soient $A \subset E$ et $B \subset E$; Déterminer la fonction caractéristique de $\overline{A}$, $A \cup B$,$A \cap B$, $A \Delta B$, connaissant 1_A et 1_B

1.13.2 Exercices divers

Exercice 61 :

1. Soit $\left\{ \begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} \end{array} \right.$
   (a) f est-elle une application ?
   (b) Quelle condition devons donner à l'ensemble de départ pour que f soit une application ?

2. Résoudre l'équation, pour $x \neq +1$, $\dfrac{x+1}{x-1} = +1$
3. Soit $\begin{cases} f : \mathbb{R} - \{+1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} \end{cases}$
   (a) Cette application est-elle surjective ?
   (b) Cette application est-elle injective ?
4. Soit $\begin{cases} f : \mathbb{R} - \{+1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \{+1\} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} \end{cases}$
   (a) Cette application est-elle injective ? surjective ?
   (b) Calculez $f \circ f$; que pouvez vous en déduire ?

Exercice 62 :

Soient E et F, deux ensembles, et f une application de E dans F

1. Démontrez que, pour tout ensemble $A \subset E$, que $A \subset f^{-1}(f(A))$
2. Démontrez que, si f est injective, pour tout ensemble $A \subset E$, nous avons $A = f^{-1}(f(A))$
3. Soit $f(x) = \sin x$ et $A = \left\{\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$ Rechercher $f(A)$, puis $f^{-1}(f(A))$, et vérifier que si f n'est pas injective, on ne peut avoir que l'inclusion.

Exercice 63 :

1. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \dfrac{z-i}{iz-1}$ cette fonction est-elle injective ?surjective ? Comment modifier les ensembles de départ et d'arrivée pour que f soit bijective ?
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x + 1$; cette application est-elle injective ? Surjective ? Au cas où elle n'est pas injective ou surjective, comment modifier les ensembles de départ et d'arrivée pour qu'elle le soit ?
   Si elle est bijective, déterminer son application réciproque.

Exercice 64 :

On considère la fonction $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = n + (-1)^n$

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}$
2. Résoudre les équations suivantes, dans lesquelles l'inconnue est $n \in \mathbb{Z}$
   (a) $f(n) = 125$
   (b) $f(n) = 532$
3. Calculez $f(f(n))$ et en déduire f^{-1}

Exercice 65 :

On considère les 2 applications f et g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) = 2n$ et
$\begin{cases} g(n) = \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ g(n) = 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

1. Etudier l'injectivité et la surjectivité de f et g
2. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$

Exercice 66 :

Soient g une application de F dans G, et f une application de E dans F.

1. Nous avons montré que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective. Montrez que la réciproque est fausse.*(Vous chercherez un exemple où g est injective, f non injective et $g \circ f$ injective)*
2. De même, nous avons montré que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective. Montrez que la réciproque est fausse.*(Vous chercherez un exemple où $g \circ f$ est surjective, f surjective, g non surjective)*
3. Montrez que si $g \circ f$ est injective et f surjective alors g est injective
4. Montrez que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

1.14 Corrigé de quelques exercices

1.14.1 Logique élémentaire

Exercice 1 :

Ecrire les tables de vérité de

1. $(p \vee q) \wedge (\overline{p \wedge q})$

   Rien de plus facile !!

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$(p \vee q) \wedge (\overline{p \wedge q})$
1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	1	0

2. $(\bar{p} \vee q) \wedge (p \wedge \bar{q})$

   Il est intéressant de remarquer, en utilisant les lois de Morgan, que $\bar{p} \vee q = \overline{p \wedge \overline{q}}$ et que, nous avons donc :

$$(\bar{p} \vee q) \wedge (p \wedge \bar{q}) = (\overline{p \wedge \overline{q}}) \wedge (p \wedge \bar{q})$$

   qui est du type $a \wedge \bar{a}$ qui est toujours faux

3. $\overline{p \wedge (q \vee r)}$

   Pour faire la table de vérité, en utilisant les lois de Morgan, il suffit de vérifier que :

$$\overline{p \wedge (q \vee r)} = \overline{p} \vee \overline{(q \vee r)} = \overline{p} \vee (\overline{q} \wedge \overline{r})$$

   La table de vérité en découle toute seule

4. $(p \vee q) \Rightarrow (\bar{p} \wedge q)$

   Nous allons, utiliser le fait que $A \Longrightarrow B$ est logiquement équivalent à $\neg A \vee B$. Donc :

$$\begin{aligned}
(p \vee q) \Rightarrow (\bar{p} \wedge q) &\longleftrightarrow \neg((p \vee q)) \vee (\bar{p} \wedge q) \\
&\longleftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee (\bar{p} \wedge q) \ \text{ loi de Morgan} \\
&\longleftrightarrow \overline{p} \wedge (q \vee \overline{q}) \ \text{Distributivité du} \wedge \text{ par rapport au } \vee \\
&\longleftrightarrow \overline{p} \wedge (1) \\
&\longleftrightarrow \overline{p}
\end{aligned}$$

   La table de vérité de $(p \vee q) \Rightarrow (\bar{p} \wedge q)$ est donc celle de $\overline{p}$

5. $(\bar{p} \wedge q) \Rightarrow (p \vee \bar{q})$

   Nous allons réutiliser le fait que $A \Longrightarrow B$ est logiquement équivalent à $\neg A \vee B$. Donc :

$$(\bar{p} \wedge q) \Rightarrow (p \vee \bar{q}) \longleftrightarrow \neg(\bar{p} \wedge q) \vee (p \vee \bar{q}) \longleftrightarrow (p \vee \bar{q}) \vee (p \vee \bar{q}) \longleftrightarrow (p \vee \bar{q})$$

   La table de vérité de $(\bar{p} \wedge q) \Rightarrow (p \vee \bar{q})$ est donc celle de $p \vee \bar{q}$

p	q	$\bar{q}$	$p \vee \bar{q}$
1	1	0	1
1	0	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1

6. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r)$

   On va modifier $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r)$ de telle sorte à n'avoir que des $\vee$, $\wedge$ et $\neg$

   Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r) &\longleftrightarrow \neg(p \Rightarrow q) \vee (p \vee r) \\
&\longleftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee (p \vee r) \\
&\longleftrightarrow (p \wedge \bar{q}) \vee (p \vee r) \ \text{ (Loi de Morgan)}
\end{aligned}$$

D'où la table de vérité :

p	q	r	$\overline{q}$	$p\wedge\overline{q}$	$p\vee r$	$(p\wedge\overline{q})\vee(p\vee r)$
1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	0	0	0

Retour à l'énoncé de l'exercice

Exercice 2 :

Les propositions suivantes sont-elles des tautologies ?

Une proposition est une tautologie si elle est toujours vraie, c'est à dire si sa table de vérité ne contient que des 1.

1. $p\vee\overline{(p\wedge q)}$

   Rien de plus simple !!

$$\begin{aligned} p\vee\overline{(p\wedge q)} &\longleftrightarrow p\vee(\overline{p}\wedge\overline{q}) \text{ Loi de Morgan}\\ &\longleftrightarrow (p\vee\overline{p})\vee\overline{q} \text{ Associativité du OU}\\ &\longleftrightarrow 1\vee\overline{q}\\ &\longleftrightarrow 1 \end{aligned}$$

   C'est donc bien une tautologie

2. $(p\Rightarrow q)\vee(p\wedge q)$

   Nous avons, comme tout à l'heure :

$$\begin{aligned} (p\Rightarrow q)\vee(p\wedge q) &\longleftrightarrow (\neg p\vee q)\vee(p\wedge q)\\ &\longleftrightarrow ((\neg p\vee q)\vee p)\wedge((\neg p\vee q)\vee q) \text{ Distributivité du OU par rapport au ET}\\ &\longleftrightarrow (\neg p\vee q\vee p)\wedge(\neg p\vee q\vee q)\\ &\longleftrightarrow (1\vee q)\wedge(\neg p\vee q)\\ &\longleftrightarrow (1\vee q)\wedge(\neg p\vee q)\\ &\longleftrightarrow 1\wedge(\neg p\vee q)\\ &\longleftrightarrow \neg p\vee q \end{aligned}$$

   Donc, $(p\Rightarrow q)\vee(p\wedge q)$ n'est pas une tautologie ; sa table de vérité est celle de $\neg p\vee q$

3. $[p\wedge(p\Rightarrow q)]\Rightarrow q$ (c'est le modus ponens)

   Comme précédemment, nous allons utiliser le calcul propositionnel et procéder par équivalence logique.

$$\begin{aligned} [p\wedge(p\Rightarrow q)]\Rightarrow q &\longleftrightarrow [p\wedge(\overline{p}\vee q)]\Rightarrow q\\ &\longleftrightarrow [(p\wedge\overline{p})\vee(p\wedge q)]\Rightarrow q \text{ (Distributivité du ET par rapport au OU}\\ &\longleftrightarrow [0\vee(p\wedge q)]\Rightarrow q\\ &\longleftrightarrow (p\wedge q)\Rightarrow q\\ &\longleftrightarrow \neg(p\wedge q)\vee q\\ &\longleftrightarrow (\overline{p}\vee\overline{q})\vee q \text{ (Loi de Morgan}\\ &\longleftrightarrow \overline{p}\vee(\overline{q}\vee q) \text{ (Associativité du OU}\\ &\longleftrightarrow \overline{p}\vee 1\\ &\longleftrightarrow 1 \end{aligned}$$

   $[p\wedge(p\Rightarrow q)]\Rightarrow q$ est bien une tautologie

Retour à l'énoncé de l'exercice

Exercice 3 :

Soient f et g 2 formes propositionnelles. On dit que g est une conséquence de f si $f \Rightarrow g$ est une tautologie Montrer que $p \Rightarrow r$ est une conséquence de $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$

Exercice 4 :

Montrer que les propositions suivantes sont logiquement équivalentes :

1. $p \Rightarrow q$ et $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ *(loi de contrapposition cf.[**?**]*
2. p et $p \vee (p \wedge q)$
3. $(p \vee q) \Rightarrow r$ et $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

Exercice 5 :

x et y étant des nombres réels, réels, résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (x-1)(y-2)=0 \\ (x-2)(y-3)=0 \end{array} \right.$$

Exercice 6 :

1. Déterminer la contrapposée des énoncés suivants :
   (a) Si Arthur est poète, alors, il est pauvre
   (b) Si le carré d'un entier est impair, alors, cet entier est impair
   (c) Si je mange des graisses et si je ne fais pas de sport, alors j'aurai une maladie coronarienne
2. Trouver les négations des propositions précédentes *(évidemment, sans utiliser "il est faut que...." ou autre astuce du même genre !)*

Exercice 7 :

1. On définit le connecteur logique dit de SHEFFER et noté $\uparrow$ par $p \uparrow q = \text{Nand}\,(p,q)$ est logiquement équivalent à $\overline{p \wedge q}$
   (a) Ecrire la table de vérité de la fonction Nand
   (b) Exprimer $\overline{p}$ en fonction de Nand
   (c) Exprimer **"et"** en fonction de Nand
   (d) Exprimer **"ou"** en fonction de Nand
   (e) Exprimer $\Rightarrow$ en fonction de Nand
2. On définit le connecteur logique dit de PIERCE et noté $\downarrow$ par $p \downarrow q = \text{Nor}\,(p,q)$ est logiquement équivalent à $\overline{p \vee q}$
   (a) Ecrire la table de vérité de la fonction Nand
   (b) Exprimer $\overline{p}$ en fonction de Nor
   (c) Exprimer **"et"** en fonction de Nor
   (d) Exprimer **"ou"** en fonction de Nor
   (e) Exprimer $\Rightarrow$ en fonction de Nor
3. On considère le connecteur logique $\otimes$ défini par $p \otimes q \equiv p \wedge \overline{q}$
   (a) Donner la table de vérité de $p \otimes q$ et de $q \otimes p$; avons nous équivalence entre les deux propositions ?
   (b) Montrer que nous avons l'identité suivante : $p \otimes (q \vee r) = (p \otimes q) \wedge (p \otimes r)$
   (c) Montrer que $(p \otimes q) \wedge (r \otimes s) = (p \wedge r) \otimes (q \vee s)$
4. On considère le connecteur logique $\oplus$ défini par $p \oplus q = (p \vee q) \otimes (p \wedge q)$
   (a) Les propositions $p \oplus q$ et $q \oplus p$ sont-elles équivalentes ?
   (b) Montrer que $p \oplus q = (p \otimes q) \vee (q \otimes p)$
   (c) Montrer que $(p \oplus \overline{q}) \vee (p \oplus q)$est une tautologie

Chapitre 2

Entiers naturels, Récurrence

Dans ce chapitre, il n'est pas question de faire une construction de $\mathbb{N}$, ni de démontrer les principales propriétés de $\mathbb{N}$, de l'addition, de la multiplication et de la relation d'ordre dans $\mathbb{N}$

2.1 L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels

Ce paragraphe met en place, de manière principalement axiômatique, les propriétés naturelles de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$. Donc, peu de démonstrations, quelques exercices

2.1.1 Axiôme 1

Nous admettons qu'il existe un ensemble noté $\mathbb{N}$ appelé Ensemble des entiers naturels. Cet ensemble a les propriétés suivantes :

1. Il existe une addition notée $+$ telle que :
   (a) L'addition est associative, c'est à dire :
   $$(\forall x \in \mathbb{N})\,(\forall y \in \mathbb{N})\,(\forall z \in \mathbb{N})\,(x + (y + z) = (x + y) + z = x + y + z)$$
   (b) L'addition est commutative, c'est à dire :
   $$(\forall x \in \mathbb{N})\,(\forall y \in \mathbb{N})\,(x + y = y + x)$$
   (c) L'addition possède un élément neutre « zéro » noté 0, c'est à dire :
   $$(\forall x \in \mathbb{N})\,(x + 0 = 0 + x = x)$$
   On note $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$
   (d) Tout élément $x \in \mathbb{N}$ est régulier pour l'addition, c'est à dire :
   $$(\forall x \in \mathbb{N})\,(\forall y \in \mathbb{N})\,(\forall z \in \mathbb{N})\,(x + y = x + z \Longrightarrow y = z)$$
2. Il existe une multiplication notée $\times$ (ou le plus souvent omise) telle que :
   (a) La multiplication est associative, c'est à dire :
   $$(\forall x \in \mathbb{N})\,(\forall y \in \mathbb{N})\,(\forall z \in \mathbb{N})\,(x\,(yz) = (xy)\,z = xyz)$$
   (b) La multiplication est commutative, c'est à dire :
   $$(\forall x \in \mathbb{N})\,(\forall y \in \mathbb{N})\,(xy = yx)$$
   (c) La multiplication possède un élément neutre « un » noté 1, c'est à dire :
   $$(\forall x \in \mathbb{N})\,(x \times 1 = 1 \times x = x)$$
   (d) Tout élément $x \in \mathbb{N}^*$ est régulier pour la multiplication, c'est à dire :
   $$(\forall x \in \mathbb{N}^*)\,(\forall y \in \mathbb{N}^*)\,(\forall z \in \mathbb{N}^*)\,(xy = xz \Longrightarrow y = z)$$
3. La multiplication est distributive par rapport à l'addition, c'est à dire :
   $$(\forall x \in \mathbb{N})\,(\forall y \in \mathbb{N})\,(\forall z \in \mathbb{N})\,(x\,(y + z) = xy + xz)$$
   Et, du fait de la commutativité de la multiplication :
   $$(\forall x \in \mathbb{N})\,(\forall y \in \mathbb{N})\,(\forall z \in \mathbb{N})\,((y + z)\,x = xy + xz)$$

Exercice 1 :

1. Etant donnés 2 entiers $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$, s'il existe $x \in \mathbb{N}$ tel que $a + x = b$, démontrez que cet élément x est unique. On le notera alors $x = b - a$, et nous avons : $a + (b - a) = b$
2. Si $x = b - a$ existe, montrer que pour tout $c \in \mathbb{N}$, $cb - ca$ existe et que l'on a :
   $$c\,(b - a) = cb - ca$$
3. Démontrez que pour tout $x \in \mathbb{N}$, nous avons $0 \times x = 0$. En déduire que 0 n'est pas régulier pour la multiplication et que, par conséquent, $0 \neq 1$

Remarque 1 :

On donne, dans cette remarque, une définition plus générale :

Définition

Soit E un ensemble dans lequel nous avons défini une opération notée $\star$

1. La loi $\star$ est dite de composition interne si et seulement si :
$$(\forall x \in E)\,(\forall y \in E)\,(x \star y \in E)$$
2. La loi $\star$ est dite de associative si et seulement si :
$$(\forall x \in E)\,(\forall y \in E)\,(\forall z \in E)\,(x \star (y \star z) = (x \star y) \star z = x \star y \star z)$$
3. La loi $\star$ est dite de commutative si et seulement si :
$$(\forall x \in E)\,(\forall y \in E)\,(x \star y = y \star x)$$
4. La loi $\star$ admet un élément neutre e si et seulement si :
$$(\forall x \in E)\,(x \star e = e \star x = x)$$
5. $x \in E$ est dit régulier pour la loi $\star$ si et seulement si :
$$(\forall a \in E)\,(\forall b \in E)\,((a \star x = b \star x) \Longrightarrow (a = b))$$
6. $x \in E$ est dit admettre un symétrique pour la loi $\star$ si et seulement si il existe $x_1 \in E$ tel que $x \star x_1 = e$ où e est l'élément neutre (s'il existe)
7. Si E est muni d'une seconde loi notée $\top$, la loi $\top$ est dite de distributive par rapport à la loi $\star$ si et seulement si :
$$(\forall x \in E)\,(\forall y \in E)\,(\forall z \in E)\,(x \top (y \star z) = x \top y \star x \top z)$$

Exercice 2 :

Dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, on considère une loi de composition notée $\star$ telle que :
$$(\forall a \in \mathbb{N})\,(\forall b \in \mathbb{N})\,(a \star b = a + b + a \times b)$$
Où $+$ et $\times$ désignent l'addition et la multiplication usuelles dans $\mathbb{N}$

1. Montrer que cette loi est interne dans $\mathbb{N}$, commutative et associative. Admet-elle un élément neutre ?
2. On définit $a^{(n)}$ pour $n \geqslant 1$ par $a^{(1)} = a$ et $a^{(n)} = a^{(n-1)} \star a$
Exprimer $a^{(2)}$,$a^{(3)}$ et $a^{(4)}$ en fonction de a.
3. Donner l'expression générale de $a^{(n)}$ en fonction de a et n

2.1.2 Axiôme 2 : $\mathbb{N}$ ensemble totalement ordonné

1. Ordre naturel
   (a) La relation $\leqslant$ définie par :
   $$(a \leqslant b) \Longleftrightarrow ((\exists x \in \mathbb{N})\,(b = a + x))$$
   est une relation d'ordre total. Elle est appelée relation d'ordre naturel sur $\mathbb{N}$
   (b) La relation ($a \leqslant b$ et $a \neq b$) se note $a < b$. De plus $a \geqslant b$ signifie $b \leqslant a$ et $a > b$ signifie $b < a$
2. La relation d'ordre notée $\leqslant$ est compatible avec l'addition, c'est à dire :
   $$(\forall x \in \mathbb{N})\,(\forall y \in \mathbb{N})\,(\forall z \in \mathbb{N})\,((x \leqslant y) \Longrightarrow (x + z \leqslant y + z))$$
3. Pour la relation d'ordre naturel sur $\mathbb{N}$, nous avons, de plus, les propriétés suivantes :
   (a) Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément
   (b) Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément
   (c) $\mathbb{N}$ n'admet pas de plus grand élément

Remarque 2 :

0 est le plus petit élément de $\mathbb{N}$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{N}$, nous avons $x = 0 + x$, car 0 est élément neutre. Donc, par définition de $\leqslant$, nous avons, pour tout $x \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant x$

Exercice 3 :

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{N}$, tout $y \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{N}$:
   $$(x < y) \Longrightarrow (x + z < y + z)$$
2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{N}$, tout $y \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{N}$:
   $$(x < y) \Longleftrightarrow (x + z < y + z) \qquad \text{et} \qquad (x \leqslant y) \Longleftrightarrow (x + z \leqslant y + z)$$
3. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, nous avons $0 < x$ *(Nous avons, en particulier* $0 < 1$*)*
4. Démontrez que pour tout $c \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{N}$ et tout $y \in \mathbb{N}$, nous avons :
   $$(x < y) \Longleftrightarrow (cx < cy) \qquad \text{et} \qquad (x \leqslant y) \Longleftrightarrow (cx \leqslant cy)$$
5. Démontrez que pour tout $x \in \mathbb{N}$ et tout $y \in \mathbb{N}$, nous avons :
   $$(xy = 0) \Longleftrightarrow (x = 0 \text{ OU } y = 0)$$

2.1.3 Définition d'intervalles dans $\mathbb{N}$

Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$, tels que $a \leqslant b$. On appelle intervalle de $\mathbb{N}$, l'un quelconque des sous-ensembles suivants :
$$\begin{array}{rl}
[[a;b]] & = \{x \in \mathbb{N} / a \leqslant x \leqslant b\} \\
]]a;b[[& = \{x \in \mathbb{N} / a < x < b\} \\
[[a;b[[& = \{x \in \mathbb{N} / a \leqslant x < b\} \\
]]a;b]] & = \{x \in \mathbb{N} / a < x \leqslant b\} \\
[[a;+\infty[[& = \{x \in \mathbb{N} / a \leqslant x\} \\
]]a;+\infty[[& = \{x \in \mathbb{N} / a < x\}
\end{array}$$

Remarque 3 :

La notation $[[a;b]]$ est uniquement utulisée dans l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$ pour la différencier de la notion d'intervalle réel.

2.1.4 Lemme

L'intervalle $]]0;1[[$ est vide

Démonstration

Supposons $]]0;1[[$ non vide. D'après 2.1.2, $]]0;1[[$ admet un plus petit élément que l'on appelle α. Par définition de l'intervalle $]]0;1[[$, nous avons $0 < \alpha < 1$.
Par compatibilité de la multiplication avec un naturel strictement positif, nous avons $0 < \alpha \Longrightarrow 0 < \alpha^2$ et $\alpha < 1 \Longrightarrow \alpha^2 < \alpha$
Donc, α^2 est un élément de $]]0;1[[$ tel que $\alpha^2 < \alpha$, ce quui contredit le fait que α soit le plus petit élément de $]]0;1[[$.
Donc, l'intervalle $]]0;1[[$ est vide

Remarque 4 :

1. Il résulte du lemme 2.1.4 que, pour tout $x \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$(0 < x) \Longleftrightarrow (1 \leqslant x)$$

2. Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons l'intervalle $]]n;n+1[[$ qui est vide

   En effet, supposons le contraire, et soit $\alpha \in]]n;n+1[[$; alors $n < \alpha < n+1$ et donc $0 < \alpha - n < 1$, ce qui est impossible. Donc $]]n;n+1[[$ est vide
3. On dit que $n+1 = \sigma(n)$ est le successeur de n
4. De même, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n-1$ est le prédécesseur de n.

2.1.5 Théorème

Tout intervalle non vide de $\mathbb{N}$ est de la forme :
- $[[a;b]]$ s'il est majoré
- $[[a;+\infty[[$ s'il n'est pas majoré

2.2 Le raisonnement par récurrence

2.2.1 Théorème

Toute partie $X \subset \mathbb{N}$ telle que :
1. $0 \in X$
2. $(\forall x \in X)\,(x+1 \in X)$

est identique à $\mathbb{N}$

Démonstration

Soit $Y = \mathbb{N} \setminus X$. Nous allons montrer que $Y = \emptyset$
Supposons le contraire, c'est à dire $Y \neq \emptyset$; alors, d'après 2.1.2, Y admet un plus petit élément $p \in Y$. Comme $0 \in X$, nous avons $p \neq 0$, c'est à dire $p > 0 \Longleftrightarrow p \geqslant 1$. p admet donc un prédécesseur $p - 1 = p'$. Nous avons $p' \notin Y$, donc $p' \in X$, et donc, d'après les propriétés de X, $p' + 1 \in X$. or $p' + 1 = p$ et donc $p \in X$; il y a donc contradiction.
L'hypothèse $Y \neq \emptyset$ est donc fausse et $Y = \emptyset$

2.2.2 Théorème : le raisonnement par récurrence

Soit $\mathcal{P}$ une propriété définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$.
Si nous avons :

1. $\mathcal{P}(0)$ vraie
2. La proposition :$(\forall n \in \mathbb{N})(\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1))$ vraie

Alors, $(\forall n \in \mathbb{N})(\mathcal{P}(n))$ est vraie

Démonstration

Soit $X = \{n \in \mathbb{N} \text{ tels que } \mathcal{P}(n) \text{ soit vraie}\}$. Nous devons montrer que $X = \mathbb{N}$, et pour ce faire, nous allons montrer que X vérifie les conditions de 2.2.1

— Tout d'abord, $0 \in X$

— D'autre part, d'après la définition de la propriété, si $n \in X$, alors $n+1 \in X$

Nous en déduisons donc, d'après 2.2.1 que $X = \mathbb{N}$

2.2.3 Théorème

Soit $\mathcal{P}$ une propriété définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$.
Si nous avons :

1. Supposons qu'elle soit vraie pour un entier $p \in \mathbb{N}$ c'est à dire que $\mathcal{P}(p)$ est vraie
2. Supposons que la proposition :$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geqslant p)(\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1))$ soit vraie

Alors, $(\forall n \in \mathbb{N})(n \geqslant p)(\mathcal{P}(n))$ est vraie

Démonstration

Soit $X_p = \{n \in \mathbb{N} \text{ tels que } \mathcal{P}(n+p) \text{ soit vraie}\}$. Nous devons montrer que $X_p = \mathbb{N}$, et pour ce faire, nous allons montrer que X vérifie le théorème 2.2.1.

— Tout d'abord, $0 \in X$

— D'autre part, d'après la définition de la propriété, si $n \in X$, alors $n+1 \in X$

Nous en déduisons donc, d'après 2.2.1 que $X_p = \mathbb{N}$, et donc, pour tout $n \geqslant p$, $(\mathcal{P}(n))$ est vraie

Exemple 1 :

Nous allons donner, ici, quelques exemples du raisonnement par récurrence.

1. **On considère l'application f suivante :**

$$\begin{cases} f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (x, y) & \longmapsto & f[(x,y)] = \dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y \end{cases}$$

Il faut montrer que f est surjective.

Soit $A = f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. Si f est surjective, alors $A = \mathbb{N}$. pour montrer que $A = \mathbb{N}$, nous allons utiliser les axiômes de récurrence.

(a) Tout d'abord, $0 \in A$, parce que $f[(0,0)] = \dfrac{(0+0)(0+0+1)}{2} + 0 = 0$

(b) Supposons $n \in A$, et démontrons que $n+1 \in A$
Si $n \in A$, il existe alors $(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $f[(x,y)] = n$

— Si $x \geqslant 1$, alors $f[(x-1, y+1)] = \dfrac{(x-1+y+1)(x-1+y+1+1)}{2} + y + 1 = \dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y + 1 = n + 1$

— Si $x = 0$, nous avons alors $f[(0, y)] = n$, c'est à dire $\dfrac{y(y+1)}{2} + y = n$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} f[(y+1,0)] & & \dfrac{(y+1)(y+2)}{2} \\ & = & \dfrac{y(y+1)}{2} + \dfrac{(y+1)2}{2} \\ & = & \dfrac{y(y+1)}{2} + y + 1 \\ & = & \left(\dfrac{y(y+1)}{2} + y\right) + 1 \\ & = & n+1 \end{array}$$

Donc, $n + 1 \in A$

Donc, $A = \mathbb{N}$, et f est surjective

2. **Montrer que, pour $n \geqslant 24$, il existe $a \in \mathbb{N}$, et $b \in \mathbb{N}$, tels que $n = 5a + 7b$**
   — Si $n = 24$, nous avons : $24 = 5 \times 2 + 7 \times 2$. La propriété est donc vraie pour $n_0 = 24$
   — Supposons que, pour $n \geqslant 24$, il existe $a \in \mathbb{N}$, et $b \in \mathbb{N}$, tels que $n = 5a + 7b$
   Alors, en remarquant que $1 = 15 - 14$, nous avons :

   $$n + 1 = 5a + 7b + 15 - 14 = 5(a+3) + 7(b-2)$$

   Nous venons donc de montrer que pour $n \geqslant 24$, il existe $a \in \mathbb{N}$, et $b \in \mathbb{N}$, tels que $n = 5a+7b$

3. **Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} \notin \mathbb{N}$**

   Pour simplifier les notations, nous écrivons : $U_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$

   Nous pouvons remarquer que $U_2 = \dfrac{3}{2}$, que $U_3 = U_2 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{11}{6}$. Ces différents calculs laissent penser que U_n est le quotient d'un nombre impair par un nombre pair.
   Nous allons montrer que, pour tout n entier tel que $n \geqslant 2$,U_n est le quotient d'un nombre impair sur un nombre pair, c'est à dire que $U_n = \dfrac{2p+1}{2q}$ où p et q sont des entiers supérieurs ou égaux à 1.

   (a) **Nous l'avons vérifié pour $n = 2$, et même $n = 3$**

   (b) **Supposons que jusqu'au rang n, $U_n = \dfrac{2p+1}{2q}$**

   (c) **Démontrons que nous avons le même résultat à l'ordre $n + 1$**
   — <u>Si n est pair</u>, c'est à dire $n = 2m$, alors :

   $$\begin{array}{rcl} U_{n+1} & = & U_n + \dfrac{1}{2m+1} \\ & = & \dfrac{2p+1}{2q} + \dfrac{1}{2m+1} \text{ (Hypothèse de récurrence)} \\ & = & \dfrac{(2m+1)(2p+1)+2q}{2q(2m+1)} \\ & = & \dfrac{2p(2m+1)+(2m+1)+2q}{2q(2m+1)} \\ & = & \dfrac{2(p(2m+1)+m+q)+1}{2q(2m+1)} \end{array}$$

   L'écriture de U_{n+1} est bien du type $U_{n+1} = \dfrac{2p'+1}{2q'}$

— Si n est impair, c'est à dire $n = 2m-1$, alors :

$$\begin{aligned}
U_{n+1} = & \; 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2m-1}+\frac{1}{2m} \\
= & \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m}\right)+\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2m-1}\right) \\
& \text{(On a regroupé les termes de rang pair et ceux de rang impair} \\
= & \; \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)+\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2m-1}\right) \\
= & \; \frac{1}{2}\times\frac{2p+1}{2q}+\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2m-1}\right) \text{ (Hypothèse de récurrence)}
\end{aligned}$$

Or, $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2m-1}$ est une somme de fractions dont le dénominateur est impair. Le résultat est donc une fraction de dénominateur impair. Nous pouvons donc écrire :

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2m-1}=\frac{p'}{2q'+1}$$

Nous avons donc, et tous calculs faits :

$$U_{n+1}=\frac{2p+1}{4q}+\frac{p'}{2q'+1}=\frac{2\left(p\left(2q'+1+2p'q+p\right)+1\right)}{4q\left(2q'+1\right)}$$

qui est donc le rapport d'un nombre impair sur un nombre pair.

En conclusion, on peut donc dire que $U_n \notin \mathbb{N}$

Remarque 5 :

Suivent, ici, des remarques très importantes.

1. **Le raisonnement par récurrence comporte 2 étapes**
   (a) Vérifier que la formule est vraie pour le premier indice n_0
   (b) Démontrer que la propriété est héréditaire, c'est à dire, démontrer que si la propriété P est vraie au rang n, elle l'est aussi au rang $n+1$; en fait, on démontre que l'implication $\mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$ est vraie
   On peut alors conclure que la propriété est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.
2. **Exemples de raisonnements par récurence**
   (a) On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_0 = 3$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = 3U_n - 6$. Donner les valeurs de U_n pour tout $n \in \mathbb{N}$
      i. Premièrement, dans cet exercice, nous ne connaissons pas la valeur demandée, mais des calculs successifs tendent à montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 3$
      ii. Nous appellerons donc $P(n)$, la propriété dépendant de $n \in \mathbb{N}$: $P(n) :\ U_n = 3$
      iii. **Première étape du raisonnement par récurrence, la vérification :**
      Vérifions donc que $P(n)$ est vraie pour le premier terme, c'est à dire vérifions que $P(0)$ est vraie ; or, $U_0 = 3$ et donc $P(0)$ est vraie ;
      iv. **Supposons maintenant que $P(n)$ est vraie**
      C'est à dire supposons que $U_n = 3$
      v. **Démontrons que $P(n+1)$ est vraie**
      Nous avons supposé $U_n = 3$, et donc, $U_{n+1} = 3U_n - 6 = 3 \times 3 - 6 = 3$
      vi. Nous venons donc de montrer que l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie
      vii. On peut donc conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, et donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 3$
   (b) On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} v_0 = -2 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 3 \end{cases}$
   Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n < 6$

i. Cette fois ci, dans cet exercice, nous connaissons la propriété à démontrer
ii. Nous appellerons donc $\mathcal{Q}(n)$, la propriété dépendant de $n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{Q}(n)$: $v_n < 6$
iii. **Première étape du raisonnement par récurrence, la vérification :**
Vérifions donc que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour le premier terme, c'est à dire vérifions que $\mathcal{Q}(0)$ est vraie ; or, $v_0 = -2 < 6$ et donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie ;
iv. **Supposons maintenant que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie**
C'est à dire supposons que $v_n < 6$
v. **Démontrons que $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie**
Nous avons supposé $v_n < 6$, et donc, $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 3 < \frac{1}{2} \times 6 + 3 = 6$; donc,$\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie
vi. Nous venons donc de montrer que l'implication $\mathcal{Q}(n) \Longrightarrow \mathcal{Q}(n+1)$ est vraie
vii. On peut donc conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie, et donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n < 6$

3. **Important** Une démonstration par récurrence exige la connaissance préalable de l'énoncé.
4. **Important** Une démonstration par récurrence ne s'impose pas toujours, par exemple :

Soit $A_n = \sum_{k=1}^{n} 2k - 1$ *; montrer que, pour* $n \geqslant 1$, $A_n = n^2$, *par récurence, et par une autre méthode.*

(a) **Première méthode : par récurrence :**

— On vérifie pour $n = 1$: $A_1 = \sum_{k=1}^{1} 2k - 1 = 1 = 1^2$. La propriété est vraie au rang 1

— Supposons $A_n = \sum_{k=1}^{n} 2k - 1 = n^2$

— Démontrons que $A_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} 2k - 1 = (n+1)^2$

Nous avons :

$$A_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) + (2(n+1) - 1)$$

Or, par hypothèse de récurrence *(la supposition)*

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} 2k - 1 = n^2$$

Donc :

$$\begin{aligned} A_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = & \sum_{k=1}^{n} (2k-1) + 2(n+1) - 1 \\ = & \; n^2 + (2(n+1) - 1) \\ = & \; n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \end{aligned}$$

On vient donc de montrer l'implication :

$$(P(n_0) \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N})(P(n) \Rightarrow P(n+1))) \Rightarrow ((\forall n \in \mathbb{N})(n \geqslant n_0) \Rightarrow P(n))$$

et on peut donc en déduire que :

$$(P(1) \text{ et } (n \geq 1)(P(n) \Rightarrow P(n+1))))$$

C'est à dire :

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq 1) \Rightarrow A_n = \sum_{k=1}^{n} 2k - 1 = n^2$$

(b) **Une autre méthode que la récurrence :**

$$A_n = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k) - \sum_{k=1}^{n}(1) = 2\sum_{k=1}^{n}(k) - n$$

Or, ce que tout le monde doit savoir (!!), c'est que

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Donc,

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} 2k-1 = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n(n+1) - n = n^2$$

5. **Troisième remarque importante**
Il est très important de vérifier que la propriété est vraie pour le premier terme : tous les "pas" du raisonnement par récurrence sont essentiels
Exemple :

Posons $S_n = 0+1+2+3+\cdots+(n-1)+n$. On appelle $P(n)$: $S_n = \frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$. Montrer que nous avons $P(n) \Rightarrow P(n+1)$; avons-nous $P(0)$?

Supposons donc $P(n)$: $S_n = \frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$; alors,

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= 0+1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n+1)\\
&= S_n + (n+1)\\
&= \frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 + (n+1)\\
&= \frac{1}{2}\left(n^2+n+\frac{1}{4}+2n+2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(n^2+3n+\frac{9}{4}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(n+\frac{3}{2}\right)^2\\
&= \frac{1}{2}\left(n+1+\frac{1}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Nous avons donc bien $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Par contre, nous n'avons pas $P(0)$; l'affirmation $S_n = \frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ est donc fausse.

2.2.4 Exercices sur le raisonnement par récurrence

Exercice 4 :

Montrer que, pour $a > 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$; la récurrence est-elle nécessaire ?

Exercice 5 :

Ces questions tournent autour des puissances de 2

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2^n > n$
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 5 \Longrightarrow 2^n > n^2$
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{n-1} \leqslant n!$

Exercice 6 :

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\left\{\begin{array}{l} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \sqrt{2v_n + 35} \end{array}\right.$
Montrer que cette suite est positive et majorée par 7 ; en déduire qu'elle est croissante.

Exercice 7 :

Soit $P(n)$ la propriété suivante :
$P(n)$: $10^n + 1$ est divisible par 9
Montrer que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$; la propriété est-elle vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 8 :

Montrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$
La récurrence était-elle nécessaire ? *(penser à décomposer* $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$

Exercice 9 :

Etablir que$n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k!) = (n+1)! - 1$

Exercice 10 :

1. Démontrer par récurrence que

   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

2. En déduire

   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (7k+1)^2$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

Exercice 11 :

Montrer que, pour $n \geqslant 0$, $n(2n+1)(7n+1)$ est un multiple de 6

2.3 Ensembles finis, cardinal d'un ensemble

Dans cette partie, on note $\mathbb{N}_n$ l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et n, c'est à dire

$$\mathbb{N}_n = \{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } 1 \leqslant k \leqslant n\} = [[1; n]]$$

2.3.1 Relation d'équipotence

Soient E et F 2 ensembles. On dit que E et F sont équipotents si et seulement si il existe une bijection $f : E \longrightarrow F$
La relation d'équipotence est une relation d'équivalence

Démonstration

* **Elle est réflexive**
  En effet, un ensemble E est équipotent à lui même. Il suffit de considérer la bijection $f = \mathrm{Id}_E$
* **Elle est symétrique**
  En effet, soient E et F deux ensembles équipotents ; il existe alors une bijection $f : E \longrightarrow F$. La bijection réciproque $f^{-1} : F \longrightarrow E$ montre que F et E sont équipotents
* **Elle est transitive**
  En effet, soient E, F 2 ensembles équipotents, F et G 2 autres ensembles équipotents.
  — Il existe une bijection $f : E \longrightarrow F$ et il existe une bijection $g : F \longrightarrow G$
  — La composée des deux bijections $g \circ f : E \longrightarrow G$ est aussi une bijection
  Donc, E et G sont équipotents.

2.3.2 Définition d'ensemble fini

Un ensemble E est dit fini :
— S'il est vide
— S'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que E soit équipotent à $\mathbb{N}_n$
L'entier n est appelé cardinal de E et est noté $n = \mathrm{Card}\ E$
La définition est complétée en posant $\mathrm{Card}\ \emptyset = 0$
Un ensemble qui n'est pas fini est donc dit infini

Remarque 6 :

1. Le cardinal d'un ensemble est donc **le nombre de ses éléments**
2. Il y a une autre notation pour le cardinal : $\sharp E = \mathrm{Card}\ E$
3. Soit E un ensemble fini de cardinal$n$ et $\varphi : \mathbb{N}_n \longrightarrow E$. L'élément $\varphi(k)$ de E porte le numéro k ; on utilise souvent la notation indicielle $x_k \in E$*(notion de suite finie)*, c'est à dire que si $n = \mathrm{Card}\ E = \sharp(E)$, alors $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
4. Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sont des exemples d'ensembles infinis

Exemple 2 :

Soit $A = \{1; 3; 7; 14; 23\}$, on a alors $\mathrm{Card}\ (A) = 5$.

2.3.3 Proposition admise

1. Soit E un ensemble fini et $F \subset E$ une partie de E. Alors, F est un ensemble fini
2. Soit A et B deux ensembles finis disjoints, on a alors :

$$\boxed{\mathrm{Card}\ (A \cup B) = \mathrm{Card}\ (A) + \mathrm{Card}\ (B)}$$

Remarque 7 :

On dit : « Un sous-ensemble d'un ensemble fini est fini »

Exercice 12 :

1. Soit E un ensemble fini et A un ensemble quelconque. Montrer que $A \cap E$ est fini.
2. Soient A et B deux ensembles tels $A \subseteq B$, démontrer que nous avons : $\mathrm{Card}\ (B \setminus A) = \mathrm{Card}\ (B) - \mathrm{Card}\ (A)$.
3. Déduire de la question précédente que si $A \subseteq B$, alors $\mathrm{Card}\ A \leqslant \mathrm{Card}\ B$
4. Soit A et B deux ensembles finis donner montrer que : $\mathrm{Card}\ (A \setminus B) = \mathrm{Card}\ (A) - \mathrm{Card}\ (A \cap B)$

2.3.4 Propriété

Soit A et B deux ensembles finis, on a alors :

$$\boxed{\text{Card }(A \cup B) = \text{Card }(A) + \text{Card }(B) - \text{Card }(A \cap B)}$$

Démonstration

Pour bien comprendre cette démonstration, il ne faut surtout pas hésiter à faire des schémas

1. Nous avons : $E \cup F = (E - (E \cap F)) \cup (F - (E \cap F)) \cup (E \cap F)$, et ces différents ensembles ont une interection vide , donc,

$$\text{card }(E \cup F) = \text{card }((E - (E \cap F))) + \text{card }((F - (E \cap F))) + \text{card }((E \cap F))$$

2. Or, $E = (E \cap F) \cup (E - (E \cap F))$, donc, card $E =$ card $((E \cap F)) +$ card $((E - (E \cap F)))$, d'où card $E -$ card $((E \cap F)) =$ card $((E - (E \cap F)))$
3. De même, card $F -$ card $((E \cap F)) =$ card $((F - (E \cap F)))$;

d'où, en remplaçant, on obtient le résultat.

Exercice 13 :

Les questions de cet exercices sont totalement indépendantes *(et même, pour certaines, se répètent !!)*

1. Généraliser le résultat précédent aux cas de trois ensembles, puis au cas de quatre ensembles.
2. Une station de radio diffuse les mêmes publicités à 15h00 et à 16h00. D'après un sondage, on sait qu'il y a 21 400 auditeurs à 15h00 et 24 800 à 16h00. Combien de personnes différentes ont entendu ces publicités ?
3. Le marché d'une certaine presse est composée de trois titres A, B et C. Nous savons que :
   — 30% de la population lit la revue A.
   — 40% de la population lit la revue B.
   — 5% de la population lit les trois revues.
   — 15% de la population lit les revues A et B, mais ne lit pas la revue C.
   Quel pourcentage de la population ne lit que la revue C ?
   (a) Si l'on suppose que les personnes qui ont écouté la radio à 15h00 ne l'écoutent plus à 16h00
   (b) Si on suppose que 4600 auditeurs écoutent à 15h00 et à 16h00

2.4 Applications entre ensembles finis

2.4.1 Applications entre ensembles finis

Soient E et F, 2 ensembles finis non vides, de même cardinal n, et f, une application de E dans F
Alors, f est injective, si et seulement si f est surjective.

Démonstration

1. **Soit $f : E \longrightarrow F$ une application injective**
   Alors, si $x_i \neq x_j$,et puisque f est injective, nous avons $f(x_i) \neq f(x_j)$ et donc tous les $f(x_i) \dots f(x_i) \dots f(x_n)$ sont tous différents et Card $f(E) = n$, et donc $f(E) = F$ et f est surjective.
2. **Soit $f : E \longrightarrow F$ une application surjective**
   On note, pour simplifier $F = \{y_1, \dots, y_n\}$ et $E_i = \{x \in E \text{ tq } f(x) = y_i\} = f^{-1}(\{y_i\})$.
   (a) Alors Card $E_i \geqslant 1$; en effet, f étant surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y_i$, et donc $x \in E_i$
   (b) Soient $i \neq j$, c'est à dire $y_i \neq y_j$ et $x \in E_i \cap E_j$; Alors $f(x) = y_i$ et $f(x) = y_j$, ce qui est impossible, car $y_i \neq y_j$; donc $E_i \cap E_j = \emptyset$

(c) Nous avons $\bigcup_{i=1}^{n} E_i \subset E$, et donc $\sum_{i=1}^{n} \text{Card } E_i \leqslant n$; comme, pour chaque i, Card $E_i \geqslant 1$, nous avons aussi $\sum_{i=1}^{n} \text{Card } E_i \geqslant n$, c'est à dire $\sum_{i=1}^{n} \text{Card } E_i = n$, et donc, comme nous sommes dans un ensemble fini, $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E$

(d) Montrons que pour tout $i = 1, \dots, n$, Card $E_i = 1$; supposons le contraire, et que donc, il existe i_0 tel que Card $E_{i_0} > 1$, c'est à dire Card $E_{i_0} \geqslant 2$; alors, $\sum_{i=1}^{n} \text{Card } E_i > n$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $\sum_{i=1}^{n} \text{Card } E_i \leqslant n$
Donc, pour tout $i = 1 \dots n$, Card $E_i = 1$; donc, f est injective.

2.4.2 Propriété

Soient E et F deux ensembles finis tels que Card $E = n$ et Card $F = p$, alors :

$$\text{Card } E \times F = \text{Card } E \times \text{Card } F = np$$

Démonstration

On considère l'application « Première projection » Pr :

$$\begin{cases} E \times F & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & Pr\left[(x, y)\right] = x \end{cases}$$

1. Nous considérons la relation $\mathcal{R}$ définie sur $E \times F$ par :

$$(x, y)\, \mathcal{R}\, (x_1, y_1) \Longleftrightarrow Pr\left[(x, y)\right] = Pr\left[(x_1, y_1)\right]$$

$\mathcal{R}$ est de manière évidente une relation d'équivalence.

2. Pour $x \in E$, on appelle $E_x = \{(a, b) \in E \times F \text{ tel que } Pr\left[(a, b)\right] = x\}$
E_x est une classe d'équivalence pour $\mathcal{R}$. Donc, $x \neq x' \Longrightarrow E_x \cap E_{x'} = \emptyset$ et $\bigcup_{x \in E} E_x = E \times F$
Tous les couples de E_x sont de la forme (x, b) où $b \in F$, et donc Card E_x = Card F

3. Nous en déduisons donc que $\sum_{x \in E} \text{Card } E_x = \text{Card } (E \times F)$, c'est à dire $\sum_{x \in E} \text{Card } F = \text{Card } (E \times F)$, et donc Card $E \times$ Card F = Card $(E \times F)$

2.4.3 Nombre d'applications entre ensembles finis

Soient E et F, 2 ensembles finis non vides. $\mathcal{F}(E, F)$ est l'ensemble des applications de E dans F ; on note souvent $\mathcal{F}(E, F) = F^E$ Alors, Card $\mathcal{F}(E, F) = (\text{Card } F)^{\text{Card } E}$
Plus simplement, si Card $F = p$, et si Card $E = n$, alors,

$$\boxed{\text{Card } \mathcal{F}(E, F) = \text{Card } F^E = (p)^n}$$

Démonstration

Soient $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble fini de cardinal n et $F = \{y_1, \dots, y_p\}$ un ensemble fini de cardinal p
Pour $f \in F^E$, f est entièrement déterminée par la donnée de $f(x_1), \dots, f(x_n)$.

On considère une application ψ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \psi : F^E & \longrightarrow & F^n \\ f & \longmapsto & (f(x_1), \ldots, f(x_n)) \end{array} \right.$$

Nous allons montrer que ψ est bijective

1. **ψ est surjective**
   En effet, soit $(y_1, \ldots, y_n) \in F^n$; la correspondance f telle que, pour tout $i = 1 \ldots n$ fait correspondre à x_i y_i, c'est à dire telle que $f(x_i) = y_i$; c'est une application de E dand F, et il existe donc $f \in F^E$, telle que $\psi(f) = (y_1, \ldots, y_n)$
2. **ψ est injective**
   Soient $f \in F^E$ et $g \in F^E$ tels que $\psi(f) = \psi(g)$; alors, pour tout $i = 1, \ldots, n$, $f(x_i) = g(x_i)$, ce qui montre bien que $f = g$

ψ est donc bijective, et Card $F^E =$ Card $F^n = p^n$

Exemple 3 :

On prend $E = \{a, b\}$, et $F = \{x, y, z\}$; le nombre d'applications de E dans F est donc de 9 ; on peut en donner des exemples :
$\begin{pmatrix} a \to x \\ b \to y \\ \hfill z \end{pmatrix}$ ou bien $\begin{pmatrix} a \to x \\ b \to z \\ \hfill y \end{pmatrix}$ ou bien $\begin{pmatrix} a \to y \\ b \to x \\ \hfill z \end{pmatrix}$ ou bien $\begin{pmatrix} a \to y \\ b \to z \\ \hfill x \end{pmatrix}$ ou bien $\begin{pmatrix} a \to z \\ b \to x \\ \hfill y \end{pmatrix}$ ou bien $\begin{pmatrix} a \to z \\ b \to y \\ \hfill x \end{pmatrix}$ ce sont des injections, et il manque : $(a \to x)$ et $(b \to x)$, y et z n'ayant pas d'antécédent etc. . . .
On arrive ainsi à 9 applications

Exercice 14 :

Dans un département donné, le service d'immatriculation de la préfecture attribue à chaque véhicule automobile un numéro minéralogique comprenant au plus 4 chiffres et 3 lettres ; combien y-a-til de numéros possibles, en supposant qu'il n'y a aucun numéro ou assemblage de lettres réservés ?

Exercice 15 :

Soit E un ensemble à n éléments, et A une partie de E. On appelle fonction caractéristique de A, une application notée 1_A de E dans l'ensemble $\{0, 1\}$ ainsi définie :

$$1_A(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{array} \right.$$

1. Montrer que $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A \cap B}$
2. Montrer que $1_{A \cap B} = 1_A \times 1_B$
3. Définir les applications $1_\emptyset$ et 1_E
4. Soit $f : E \to \{0, 1\}$; démontrer qu'il existe $A \subset E$ tel que $f = 1_A$
5. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E ; montrer que $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{F} = \{0, 1\}^E$ l'ensemble des applications de E dans $\{0, 1\}$ sont équipotents.
6. En déduire que, lorsque E est fini et de cardinal n, Card $\mathcal{P}(E) = 2^n$

2.4.4 Théorème

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est fini et

$$\boxed{\text{Card } \mathcal{P}(E) = 2^n}$$

Démonstration

La démonstration est donnée dans l'exercice précédent.

2.4.5 Nombre d'injections de E dans F, où E et F sont finis

E et F sont deux ensembles finis ; on sait que $\text{Card } E = p$ et $\text{Card } F = n$ avec $p \leqslant n$; on note A_n^p le nombre d'injections de E dans F. Alors,

$$\boxed{\text{A}_n^p = \begin{cases} 0 \text{ si } p > n \\ \dfrac{n!}{(n-p)!} \text{ si } p \leqslant n \end{cases}}$$

Démonstration

On appelle $\mathcal{I}$ l'ensemble des injections de E dans F

1. **On montre que $\mathcal{I}$ est un ensemble fini**
   L'ensemble F^E des applications de E dans F est un ensemble fini de cardina n^p ; comme $\mathcal{I} \subset F^E$, $\mathcal{I}$ est donc fini ; nous avons le résultat
2. **Si il existe f injection de E dans F, alors** $\text{Card } E \leqslant \text{Card } F$
   Soit f une injection de E dans F ; alors, f est une bijection de E sur $f(E)$, et $f(E) \subset F$, donc $\text{Card } f(E) \leqslant \text{Card } F$; comme $\text{Card } E = \text{Card } f(E)$, nous avons bien $\text{Card } E \leqslant \text{Card } F$
   Ainsi, si $\text{Card } E > \text{Card } F$, il n'y a pas d'injection possible.
3. **Supposons maintenant** $\text{Card } E \leqslant \text{Card } F$
   Soit $p = \text{Card } E$, et $n = \text{Card } F$; on a donc $p \leqslant n$; appelons $E = \{x_1, \ldots, x_p\}$. Construisons une injection de E dans F.

$$\begin{cases} f(x_1) \in F \\ f(x_2) \in F - \{f(x_1)\} \\ f(x_3) \in F - \{f(x_1), f(x_2)\} \\ \vdots \\ f(x_p) \in F - \{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{p-1})\} \end{cases}$$

Le choix de $f(x_1)$ se fait de n façons, celui de $f(x_2)$ de $n-1$ façons, et celui de $f(x_p)$ de $n-(p-1)$ façons.
Il y a donc $n(n-1)\ldots(n-(p-1)) = \text{A}_n^p$ choix possibles.

Remarque 8 :

1. Dans les problèmes d'ordre, il y a toujours une injection ; par exemple, le nombre d'arrivées du tiercé dans l'ordre *(cf. remarque infra)*
2. Dans l'exemple 2.4.3 ci-dessus : $E = \{a, b\}$, et $F = \{x, y, z\}$, le nombre d'injections est 6 et $6 = \text{A}_3^2 = \dfrac{3!}{(3-2)!}$

2.4.6 Nombre de bijections de E dans E

E est un ensemble fini de cardinal n ; il y a $n!$ bijections de E dans E

Démonstration

Une bijection est une injection particulière ; c'est une injection d'un ensemble à n éléments dans un autre ensemble à n éléments ; il y a donc $\text{A}_n^n = \dfrac{n!}{(n-n)!} = n!$ bijections de E dans E

Exercice 16 :

On considère une cordée formée de 6 alpinistes x, y, z, t, u, v, indiscernables les uns des autres. Une cordée est une file où on distingue un ordre de marche.

1. Combien y-a-t-il de cordées possibles sachant que les 6 alpinistes sont tous aussi capables les uns que les autres d'être premier de cordée ?
2. Même question, sachant que, seul x est capable d'être premier de cordée
3. Même question sachant que x et y et eux seuls sont capables d'être premier de cordée
4. Combien y-a-t-il de cordées possibles, sachant que, seul x peut être premier de cordée, y et z étant les seuls à pouvoir être dernier de cordée.

2.4.7 Définition d'arrangement

Soit E un ensemble.
On appelle arrangement, sans répétition d'ordre p dans E, toute injection de $\mathbb{N}_p = \{k \in \mathbb{N} \text{ tq } 1 \leqslant k \leqslant p\}$ dans E

Remarque 9 :

1. Le nombre d'arrangements d'ordre p dans E est donc A_n^p
2. Dans la notion d'arrangement, il y a **une notion d'ordre**
   Exemple du tiercé : Sur 21 partants, combien y-a-t-il d'arrivées possibles dans l'ordre ?
   Il faut remarquer que, par exemple, l'arrivée $\{21, 19, 18, \}$ est totalement différente de l'arrivée $\{21, 18, 19.\}$
   Donc, si $E = \{1, 2, 3\}$, et F est l'ensemble des chevaux, on s'intéresse au nombre d'injections de E dans F ; il y a donc $\mathrm{A}_{21}^3 = \dfrac{21!}{18!} = 7980$ arrivées possibles dans l'ordre.
3. Soit E un ensemble à n éléments $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Un arrangement d'ordre p de E peut être considéré comme un p-uplet de E^p $(x_1, \ldots, x_p)$ où les composantes (ou coordonnées) sont toutes différentes les unes des autres $(i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j)$.
   Si $\mathcal{A}_p(E)$ est l'ensemble des arrangements d'ordre p de E, alors $\operatorname{Card} \mathcal{A}_p(E) = \mathrm{A}_n^p$

Exemple 4 :

Un cours de probabilités est suivi par 10 personnes : 5 gars et 5 filles. Lors d'un contrôle, les étudiants sont classés par leurs notes, et il est exclu que 2 étudiants aient les mêmes notes.

1. **Combien y-a-t-il de classements possibles ?**
2. **Si les garçons sont classés uniquement entre eux et les filles entre elles, combient de classements globaux pouvons nous avoir ?**

Corrigé

1. Chaque classement correspond à une permutation particulière, il y a donc $10! = 3628800$ classements possibles
2. Dans chaque groupe graçon ou fille, il y a $5! = 120$ classements possibles, c'est à dire $5! \times 5! = (120)^2 = 14400$ classements possibles

Exercice 17 :

Un enfant forme des nombres avec 7 jetons numérotés de 1 à 7. Combien peut-il former de nombres :

1. De 3 chiffres
2. De 7 chiffres
3. Ne comprenant que des chiffres impairs
4. De 7 chiffres, dont le chiffre des unités est supérieur à 5
5. Inférieur à 2000
6. De 7 chiffres, où les chiffre 3,4 et 5 sont consécutifs, dans cet ordre, dans un ordre quelconque.

Exercice 18 :

On appelle "mot" toute permutation de lettres données. Avec les lettres du mot **"BUNGALOW"**, combien peut-on former de mots :

1. De 8 lettres
2. De 8 lettres commençant par deux consonnes
3. De 8 lettres commençant par deux voyelles
4. De 8 lettres commençant et finissant par une voyelle
5. De 8 lettres commençant par une consonne et terminant par une voyelle

2.4.8 Définition

On appelle combinaison sans répétition d'ordre p de E, toute partie de E à p éléments

Exemple 5 :

1. $E = \{a, b, c, d, e\}$ est un ensemble à 5 éléments ; $\{a, b, c\}$ et $\{b, c, d\}$ sont des combinaisons sans répétitions d'ordre 3 de E ; il faut remarquer que $\{a, b, c\}$ et $\{b, c, a\}$ est la même combinaison.
2. Les combinaisons sans répétition sont des éléments de $\mathcal{P}(E)$

Exercice 19 :

Pour $E = \{a, b, c, d, e\}$, donner les combinaisons sans répétition d'ordre 2 de E

2.4.9 Théorème

Soit E un ensemble fini de cardinal n ; on appelle $\mathcal{P}_p(E)$ l'ensemble des parties de E à p éléments.
Autrement dit, $\mathcal{P}_p(E)$ est l'ensemble des combinaisons sans répétition de E.
Alors, le cardinal de $\mathcal{P}_p(E)$ est

$$\boxed{\mathrm{C}_n^p = \binom{n}{p} = \begin{cases} 0 \text{ si } p > n \\ \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!} \text{ si } p \leqslant n \end{cases}}$$

Démonstration

1. **Si** $p > n$

   Il n'existe alors pas de parties à p éléments pris parmi les n, donc $\mathrm{C}_n^p = \binom{n}{p} = 0$

2. **Si** $p \leqslant n$

   (a) Etudions des cas particuliers

   i. Si $p = 0$, alors, même si E est non vide, $\mathcal{P}_p(E) = \{\emptyset\}$, et donc $\mathrm{C}_n^0 = \binom{n}{0} = 1$

   ii. Si $p = n$, alors $\mathcal{P}_n(E) = \{E\}$, et donc $\mathrm{C}_n^n = \binom{n}{1} = 1 = \dfrac{n!}{n!\,(n-n)!}$

   (b) Supposons $0 < p < n$
   On appelle $\mathcal{A}_p(E)$ l'ensemble des arrangements sans répétition de E(cf 2.4.7) ; on sait déjà que Card $\mathcal{A}_p(E) = \mathrm{A}_n^p$
   Soit une application ϕ définie par :

$$\begin{cases} \phi : \mathcal{A}_p(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}_p(E) \\ (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & \{x_1, \ldots, x_p\} \end{cases}$$

Pour $Y = \{x_1, \ldots, x_p\}$ un élément de $\mathcal{P}_p(E)$. Les antécédent de Y par ϕ sont les arrangements de $\mathcal{A}_p(E)$ qui contiennent les éléments $\{x_1, \ldots, x_p\}$, donc Card $\phi^{-1}(Y) = p!$

On peut alors écrire $\mathcal{P}_p(E) = \{Y_1, \ldots, Y_N\}$ où $N = \mathrm{C}_n^p = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \text{Card } \mathcal{P}_p(E)$, et si X_j est l'ensemble des antécédents de Y_j, nous avons $\mathcal{A}_p(E) = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_N$, et comme, si $i \neq j$, alors $X_i \cap X_j = \emptyset$.

Alors, Card $\mathcal{A}_p(E) = \text{Card } X_1 + \text{Card } X_2 + \ldots + \text{Card } X_N$, c'est à dire $\mathrm{A}_n^p = N \times p!$, et donc $N = \dfrac{\mathrm{A}_n^p}{p!}$, ce que nous voulions.

Remarque 10 :

Dans la notion de combinaison, **il n'y a pas de notion d'ordre.**

Exemple du tiercé : Sur 21 partants, combien y-a-t-il d'arrivées possibles dans le désordre ?

Il faut remarquer qu'ici, l'arrivée $\{21, 19, 18, \}$ est la même que l'arrivée $\{21, 18, 19.\}$

Donc, une arrivée dans le désordre, est un sous-ensemble de 3 chevaux pris parmi 24 ; il y a donc $\mathrm{C}_{21}^3 = \dfrac{21!}{3!18!} = 1330$ arrivées possibles dans le désordre.

Exercice 20 :

Dans une urne, on a 10 boules numérotées de 1 à 10 indiscernables au toucher. Quel est le nombre de résultats possibles dans chacune des expériences suivantes :

1. On tire "au hasard" 4 boules, successivement, sans les remettre dans l'urne, en tenant compte de l'ordre de sortie
2. On tire "simultanément" 4 boules
3. On tire successivement, 4 boules, en les remettant à chaque fois dans l'urne, en tenant compte de l'ordre de sortie
4. On tire succesivement 4 boules, en les remettant dans l'urne à chaque fois, sans tenir compte de l'ordre de sortie.

Exercice 21 :

Le poste de police de Kercado compte 12 agents. L'organisation de ce poste est :

— D'avoir 5 agents en patrouille dans le quartier
— D'avoir 3 agents assurant l'accueil au poste de police
— D'avoir 4 agents au poste, mais en réserve.

A combien de répartition de ces agents en 3 groupes, pouvons nous procéder ?

2.4.10 Coefficient binômial

On appelle coefficient binômial, le nombre :

$$\boxed{\mathrm{C}_n^p = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \begin{cases} 0 \text{ si } p > n \\ \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!} \text{ si } p \leqslant n \end{cases}}$$

2.4.11 Propriétés des coefficients binômiaux

1. Triangle de Pascal : $\mathrm{C}_{n+1}^{p+1} = \mathrm{C}_n^{p+1} + \mathrm{C}_n^p$
2. $\mathrm{C}_n^p = \mathrm{C}_n^{n-p}$
3. $\mathrm{C}_{n+1}^{p+1} = \dfrac{n+1}{p+1} \times \mathrm{C}_n^p$
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k = 2^n$

Démonstration

On ne démontre que le résultat 4 ; les autres sont faciles à faire.
Soit E un ensemble fini de cardinal n. $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E. $P(E)$ est aussi la réunion des parties à $0, 1, 2, 3, \ldots, n$ éléments.
On appelle $\mathcal{P}_i(E)$ l'ensemble des parties de E à i éléments
Donc,

$$\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}_0(E) \cup \mathcal{P}_1(E) \cup \cdots \cup \mathcal{P}_n(E)$$

De plus, si $i \neq j$, alors $\mathcal{P}_i(E) \cap \mathcal{P}_j(E) = \emptyset$, donc,

$$\mathcal{P}(E) = \mathrm{card}\mathcal{P}_0(E) + \mathrm{card}\mathcal{P}_1(E) + \cdots + \mathrm{card}\mathcal{P}_n(E) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k$$

Comme, $\mathrm{card}\mathcal{P}(E) = 2^n$, nous avons le résultat.

2.4.12 Binôme de Newton

Dans un anneau commutatif $(\mathcal{A}, +, \times)$, pour $a \in \mathcal{A}$ et $b \in \mathcal{A}$

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^{n-k} b^k}$$

Remarque 11 :

1. Cette propriété vraie dans tout anneau commutatif, l'est, en particulier, dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$
2. Cette formule n'est valable **que dans un anneau commutatif** ; en effet, dans un anneau non commutatif, $ab \neq ba$, et nous avons : $(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2$, car $ab + ba \neq 2ab$
3. C'est ce qui se passe dans le calcul matriciel où la multiplication n'est pas commutative. Par contre, si les matrices A et B commutent, nous avons l'égalité 2.4.12

Démonstration

La démonstration de la formule du binôme va se faire **par récurrence sur** n

1. Tout d'abord, elle est vraie pour $n = 1$, car

$$(a+b) = \mathrm{C}_1^0 a + \mathrm{C}_1^1 b = \sum_{k=0}^{1} \mathrm{C}_1^k a^k b^{1-k}$$

2. Supposons la propriété $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$ vraie à l'ordre n

3. Démontrons la à l'ordre $n+1$

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n(a+b)\\ &= (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k+1}\end{aligned}$$

   (a) Le terme en a^{n+1} est unique, et c'est celui qui est donné par $a \times \left(\mathrm{C}_n^n a^{n+1} b^{n-n}\right) = a \times (\mathrm{C}_n^n a^n)$ que l'on retrouve dans le premier membre, lorsque $k = n$; or,

$$a^{n+1} = a \times \left(\mathrm{C}_n^n a^{n+1}\right) = \mathrm{C}_{n+1}^{n+1} a^{n+1}$$

   (b) De la même manière, le terme en b^{n+1} est unique, et c'est celui qui est donné par $b \times \left(\mathrm{C}_n^0 a^0 b^{n-0}\right) = b \times \left(\mathrm{C}_n^0 b^{n+1}\right)$ que l'on retrouve dans le second membre, lorsque $k = 0$; or,

$$b^{n+1} = b \times \left(\mathrm{C}_n^0 b^n\right) = \mathrm{C}_{n+1}^0 b^{n+1}$$

   (c) Étudions maintenant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{C}_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k+1}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{C}_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k+1} &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k+1}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{C}_n^{k-1} + \mathrm{C}_n^k\right) a^k b^{n+1-k}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_{n+1}^k a^k b^{n+1-k}\end{aligned}$$

   car nous avons l'identité $\mathrm{C}_n^{k-1} + \mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_{n+1}^k$ *(triangle de Pascal)*

   En résumé, $(a+b)^{n+1} = \mathrm{C}_{n+1}^{n+1} a^{n+1} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_{n+1}^k a^k b^{n+1-k} + \mathrm{C}_{n+1}^0 b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^k a^k b^{n+1-k}$

Exercice 22 :

1. Mettre sous forme de polynôme $(1+X)^n$
2. Retrouver le résultat $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k = 2^n$
3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{C}_n^k, \sum_{k=0}^{n} (2)^k \mathrm{C}_n^k$
4. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} \mathrm{C}_n^k \,;\, \sum_{k=1}^{n} kx^k \mathrm{C}_n^k$
5. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)\, \mathrm{C}_n^k = (n+2)\, 2^{n-1}$
6. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)^2\, \mathrm{C}_n^k$
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et p tel que $0 < p < n$; résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 - x\mathrm{C}_n^p + \mathrm{C}_{n-1}^{p-1}\mathrm{C}_{n-1}^p = 0$

Exercice 23 :

1. Montrer la relation suivante : $\sum_{k=0}^{p} C_{n'}^{k} C_{n}^{p-k} = C_{n+n'}^{k}$

2. En déduire que $\sum_{k=0}^{n} \left(C_{n}^{k}\right)^2 = C_{2n}^{n}$

Exercice 24 :

1. Développer, par la formule du binôme de Newton, les expressions suivantes :

   (a) $(x+1)^{2n}$ (b) $(x-1)^{2n}$ (c) $\left(x^2-1\right)^{2n}$

2. En déduire que la somme :

$$1 - \left(C_{2n}^{1}\right)^2 + \left(C_{2n}^{2}\right)^2 - \left(C_{2n}^{3}\right)^2 + \cdots + (-1)^p \left(C_{2n}^{p}\right)^2 + \cdots + \left(C_{2n}^{2n}\right)^2 = \sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \left(C_{2n}^{p}\right)^2$$

   est égale à $(-1)^n \dfrac{(n+1)(n+2)\cdots 2n}{n!}$

Exercice 25 :

Trouver $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\binom{x}{y} = \binom{x}{y+1} \text{ et } 4\binom{x}{y} - 5\binom{x}{y-1} = 0$$

2.5 La division et la numération dans $\mathbb{N}$

2.5.1 Propriété d'Archimède

Pour tout $a \in \mathbb{N}$, pour tout $b \in \mathbb{N}^*$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a < kb$

Démonstration

Soit donc $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.
Nous avons $(a+1)\,b = ab + b$ et, comme $b \geqslant 1$, $ab + b > ab \geqslant a$
Il existe donc au moins un $k \in \mathbb{N}$ tel que $a < kb$

2.5.2 Théorème : la division euclidienne dans $\mathbb{N}$

Pour tout $a \in \mathbb{N}$ et tout $b \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique couple d'entiers naturels $(q, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que :

$$\boxed{a = bq + r \text{ ET } 0 \leqslant r < b}$$

Démonstration

Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$

1. Il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $bq \leqslant a < b\,(q+1)$

   Soit $b\mathbb{N} = \{m \in \mathbb{N}$ tels que il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $m = bp\}$. En fait $b\mathbb{N}$ est l'ensemble des multiples entiers positifs de b. Nous appelons A l'ensemble des multiples positifs de b qui sont inférieurs à a. Nous avons donc :

$$A = b\mathbb{N} \cap [|0, a|]$$

   A est un ensemble majoré, non vide, et admet donc un unique plus grand élément n_0

- Nous avons donc $n_0 \leqslant a$
- Et n_0 est un multiple de b ; il existe donc un unique élément $q \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 = bq$

Nous avons donc $bq \leqslant a < b\,(q+1)$

2. Il existe donc un unique $r \in \mathbb{N}$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$
   De l'inégalité prouvée ci-dessus, $bq \leqslant a < b\,(q+1)$, nous tirons $0 \leqslant a - bq < b$. En posant $r = a - bq$, nous avons bien $a = bq + r$
   L'unicité résulte de l'unicité du plus grand élément.

Remarque 12 :

1. En fait $b\mathbb{N}$ est un ensemble qui est en bijection avec $\mathbb{N}$ et qui ne possède pas de plus grand élément
2. **Vocabulaire**
   — a est le dividende
   — b est le diviseur
   — q est le quotient
   — r est le reste
3. Si $r = 0$, alors $a = bq$ et on dit que a est divisible par b ou que b est un diviseur de a
4. La division par zéro n'a aucun sens

Exemple 6 :

Trouver **tous les couples** $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que $x + 4y = 35$

L'équation $x + 4y = 35$ d'inconnues x et y peut être vue comme la division euclidienne de 35 par 4. Et alors, on obtient comme premier couple solution $(3, 8)$.
Seulement, y-a-t-il unicité des solutions. En fait non ; nous avons plusieurs solutions :

— $(x, y) = (35, 0)$
— $(x, y) = (31, 1)$
— $(x, y) = (27, 2)$
— $(x, y) = (23, 3)$
— $(x, y) = (19, 4)$
— $(x, y) = (15, 5)$
— $(x, y) = (11, 6)$
— $(x, y) = (7, 7)$
— $(x, y) = (3, 8)$

Il n'y a donc qu'un seul couple (x, y) tel que le reste x soit tel que $0 \leqslant x < 4$

2.5.3 Quelques exercices sur la division

Exercice 26 :

Une division euclidienne a pour dividende 557 et pour reste 85. Déterminer les valeurs acceptables pour le reste et le quotient

Exercice 27 :

On augmente le dividende d'une division eucvlidienne de 52 et le diviseur de 4. On constate alors que le quotient et le reste ne changent pas. Calculer le quotient.

Exercice 28 :

1. Trouver tous les nombres entiers compris entre 1000 et 2000 qui, divisés par 127 donnent un quotient égal au reste
2. Trouver tous les entiers qui, divisés par 12, donnent un quotient égal au reste

Exercice 29 :

Soient q et r deux entiers qui sont respectivement quotient et reste de la division euclidienne de a par b. Quand on augmente b de 1, le quotient ne change pas ; comparez alors q et r. Etudiez la réciproque.

Exercice 30 :

Déterminer le plus grand nombre entier que l'on peut ajouter au dividende d'une division euclidienne sans en modifier le quotient

2.5.4 Numération suivant une base b

Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$; on suppose $b > 1$

Définition

On appelle décomposition de a dans le système de numération à base b, une expression de la forme :

$$a = \alpha_n b^n + \alpha_{n-1} b^{n-1} + \cdots + \alpha_1 b + \alpha_0 = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k b^k$$

Où, pour tout $i = 0, \ldots, n$, nous avons $\alpha_i \in \mathbb{N} \cap [0, b-1]$ et $\alpha_n \neq 0$

On écrit souvent : $a = \overline{(\alpha_n \alpha_{n-1} \cdots \alpha_1 \alpha_0)}_b$

Théorème

Cette décomposition existe et est unique

Démonstration

Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$ tel que $b > 1$

1. Si $a = 0$, alors $0 = 0 \times b + 0$ et $0 = \overline{(0)}_b$
2. Supposons, maintenant $a > 0$

   De la division euclidienne de a par b, il existe un unique couple (q_0, r_0) tel que

$$a = bq_0 + r_0 \text{ avec } 0 \leqslant r_0 < b$$

   (a) Si $a < b$, alors $q_0 = 0$ et $r_0 = a$, et a s'écrit dans la base b :$a = \overline{(a)}_b$

   (b) Si $a \geqslant b$, alors $q_0 \neq 0$ et $a = bq_0 + r_0$ avec $0 \leqslant r_0 \leqslant b - 1$

   Et on fait la division de q_0 par b : $q_0 = bq_1 + r_1$ avec $0 \leqslant r_1 < b$

   - ▷ Si $q_0 < b$, alors $q_1 = 0$ et $r_1 = q_0$. Nous avons alors $a = r_1 b + r_0$, et alors, pour reprendre les termes de l'énoncé, $\alpha_0 = r_0$ et $\alpha_1 = r_1$; on peut donc écrire $a = \overline{(\alpha_1 \alpha_0)}_b$
   - ▷ Si $q_0 \geqslant b$, alors q_1 est non nul et recommence en divisant q_1 par b

   (c) Nous avons alors : $q_1 = q_2 b + r_2$

   - ▷ Si $q_1 < b$, alors $q_2 = 0$ et $q_1 = r_2$, d'où $q_0 = r_2 b + r_1$, et alors :

$$a = b\,(r_2 b + r_1) + r_0 = r_2 b^2 + r_1 b + r_0$$

     Nous avons donc $\alpha_0 = r_0$, $\alpha_1 = r_1$ et $\alpha_2 = r_2$ et donc : $a = \overline{(\alpha_2 \alpha_1 \alpha_0)}_b$
   - ▷ Si $q_1 \geqslant b$, alors q_2 est non nul et on divise q_2 par b
   - ▷ ....Et on continue ainsi de suite

   (d) **Question :** quand est-ce que cela va-t-il s'arrêter ?

   Au rang k, nous avons : $q_{k-1} = bq_k + r_k$ où $0 \leqslant r_k < b$.

   Nous mettons donc ainsi en évidence une suite : $\{q_0, q_1, q_2, \cdots, q_k, \cdots\}$

   - ▷ **Démontrons que cette suite** $\{q_0, q_1, q_2, \cdots, q_k, \cdots\}$ **est décroissante**, c'est à dire que nous avons $q_k < q_{k-1}$

     Nous avons $1 < b$ et donc

$$q_k < bq_k \leqslant bq_k + r_k = q_{k-1}$$

     Donc $q_k < q_{k-1}$
   - ▷ Comme la suite $\{q_0, q_1, q_2, \cdots, q_k, \cdots\}$ est une suite d'entiers décroissante, il existe donc un indice n tel que $q_n < b \leqslant q_{n-1}$... Et on arrête la division.

(e) **Récapitulons**

$$\begin{array}{rcl} a = bq_0 + r_0 & \Longleftrightarrow & a = bq_0 + r_0 \\ q_0 = bq_1 + r_1 & \Longleftrightarrow & q_0 b = q_1 b^2 + r_1 b \\ q_1 = bq_2 + r_2 & \Longleftrightarrow & q_1 b^2 = q_2 b^3 + r_2 b^2 \\ q_2 = bq_3 + r_3 & \Longleftrightarrow & q_2 b^3 = q_3 b^4 + r_3 b^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{k-1} = bq_k + r_k & \Longleftrightarrow & q_{k-1} b^k = q_k b^{k+1} + r_k b^k \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{n-1} = bq_n + r_n & \Longleftrightarrow & q_{n-1} b^n = q_n b^{n+1} + r_n b^n \end{array}$$

....Tout en rappelant que nous avons $q_n < b$.
En additionnant membres à membres, nous obtenons :

$$\begin{aligned} a + q_0 b + q_1 b^2 + \cdots + q_{n-2} b^{n-1} + q_{n-1} b^n = & \left(q_0 b + q_1 b^2 + \cdots + q_{n-2} b^{n-1} + q_{n-1} b^n\right) \\ & + \left(r_0 + r_1 b + \cdots + r_{n-1} b^{n-1} + r_n b^n + q_n b^{n+1}\right) \end{aligned}$$

Et donc :$a = r_0 + r_1 b + \cdots + r_{n-1} b^{n-1} + r_n b^n + q_n b^{n+1}$, de telle sorte que :

$$\alpha_0 = r_0,\ \alpha_1 = r_1 \ \cdots \ \alpha_n = r_n \ \alpha_{n+1} = q_n$$

Et donc, $a = \overline{(q_n r_n r_{n-1} \cdots r_1 r_0)_b}$
L'unicité du développement étant obtenue par l'unicité des restes r_i dans les divisions successives

Exemple 7 :

Ecrire dans la base « huit » le nombre écrit dans la base « dix » 2282

On utilise la méthode exposée dans la démonstration

$$\begin{array}{rl} 2282 = & (285) \times 8 + 2 \\ 285 = & (35) \times 8 + 5 \\ 35 = & (4) \times 8 + 3 \end{array}$$

Donc $2282 = 4 \times 8^3 + 3 \times 8^2 + 5 \times 8 + 2$ et nous avons $\overline{(2282)_{10}} = \overline{(4352)_8}$

Remarque 13 :

1. Pour écrire un nombre a dans une base b, il faut adopter une convention. La convention adoptée est d'utiliser les chiffres arabes représentant chacun l'un des entiers de l'ensemble $[0, b-1] \cap \mathbb{N}$.
2. Dans la base b, on écrit $a = \overline{(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \cdots, \alpha_0)_b}$, ce qui signifie que

$$a = \alpha_0 + \alpha_1 b + \cdots + \alpha_n b^n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k b^k$$

3. Dans l'exemple de la base « huit » les chiffres utilisés sont $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
4. Si la base est supérieure à 10, on utilise des lettres. Dans la base 16 *(la base hexadécimale des informaticiens)* on utilise des lettres. En base 16, nous avons donc comme chiffres :

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$$

5. Bien entendu, dans la vie courante *(et les mathématiques courantes !!)*, on omet de préciser la base *(qui est la base « 10 »)* et on utilise les chiffres de 0 à 9.

Exemple 8 :

En base b, le nombre b est représenté par $\overline{(10)_b}$ et le nombre b^2 est représenté par $\overline{(100)_b}$

2.5.5 Exercices sur la numération

Exercice 31 :

Ecrire en base 10, les nombres entiers suivants :

1. $\overline{(10101011100)}_2$
2. $\overline{(125023712)}_8$
3. $\overline{(AE1259D)}_{16}$

Exercice 32 :

Convertir dans les bases, 2,3,8 et 16, les nombres 33, et 256 tous deux écrits en base 10

Exercice 33 :

1. Convertir en **binaire** les nombres suivants :
   (a) $\overline{(145)}_8$
   (b) $\overline{(47306)}_8$
   (c) $\overline{(300257102)}_8$
   (d) $\overline{(145)}_{16}$
   (e) $\overline{(AE65B72)}_{16}$
2. Convertir en octal les nombres suivants :
   (a) $\overline{(111111)}_2$
   (b) $\overline{(100101010001)}_2$
   (c) $\overline{(111111)}_2$
   (d) $\overline{(1100110011)}_2$
   (e) $\overline{(A)}_{16}$
3. Convertir en hexadécimal les nombres suivants :
   (a) $\overline{(1001011101)}_2$
   (b) $\overline{(11110000111100011100111)}_2$

Exercice 34 :

Effectuer les opérations suivantes

1. $\overline{(11011)}_2 + \overline{(1111)}_2$
2. $\overline{(11011111)}_2 + \overline{(111001)}_2$
3. $\overline{(11011111)}_2 \times \overline{(111001)}_2$
4. $\overline{(4A21)}_{16} + \overline{(20FB)}_{16}$

Exercice 35 :

On pose $x = \overline{(10\ldots01)}_2$ *(n zéros entourés de deux 1)*. Comment s'écrit le carré de $x$en base 2 ? $\overline{(1111000001)}_2$ est-il un carré ? Si oui, quelle est sa racine carrée ?

Exercice 36 :

L'expression d'un entier naturel n au moyen d'une base de numération b est $n = \overline{(1254)}_b$
On sait, de plus, que l'expression de l'entier $2n$, avec la même base b est $2n = \overline{(2541)}_b$

1. Déterminer les valeurs de b et n exprimées en base 10
2. Déterminer les expressions, en base b des entiers $3n$ et $4n$

Exercice 37 :

Les 2 questions de cet exercice sont totalement indépendantes

1. Trouver la base b du système de numération pour laquelle nous avons :
$$\overline{(35)}_b + \overline{(13)}_b = \overline{(51)}_b$$
2. Quels sont les nombres de 3 chiffres tels que $\overline{(xyz)}_7 = \overline{(zyx)}_{11}$

Exercice 38 :

On considère le système de numération dont la base est x

1. Montrer que les nombres $2\,(x-1)$ et $(x-1)^2$ s'écrivent, dans la base x avec les mêmes chiffres, mais disposés dans un ordre opposé.
2. On considère les nombres a et b différents de x et de 1, mais tels que $a+b=x+1$.
   Montrer que les nombres $a\,(x-1)$ et $b\,(x-1)$ s'écrivent, dans la base x avec les mêmes chiffres, mais disposés dans un ordre opposé.
3. Vérifier ces résultats pour x égal à « quatre » et $a=3$ et $b=1$

Exercice 39 :

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^4+3x^2+4=\left(x^2+2\right)^2-x^2$
2. Ecrire le polynôme $P\,(x)=x^4+3x^2+4$ sous la forme d'un produit de 2 polynômes du second degré.
3. Déduire de ce qui précède que, si la base de numération est au moins égale à « cind » le nombre $\overline{(10304)_x}$ est divisible par $\overline{(112)_x}$
4. La base étant « sept », exprimer le quotient de la division de $\overline{(10304)_7}$ par $\overline{(112)_7}$

Exercice 40 :

1. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :
$$(b-1)\left(b^n+b^{n-1}+\cdots+b^2+b+1\right)=b^{n+1}-1$$
2. En déduire que $b^n \leqslant \sum_{k=0}^{n} \alpha_k b^k < b^{n+1}$

2.6 Quelques exercices corrigés

2.6.1 Construction de $\mathbb{N}$

Exercice 1 :

1. *Etant donnés 2 entiers $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$, s'il existe $x \in \mathbb{N}$ tel que $a + x = b$, démontrez que cet élément x est unique. On le notera alors $x = b - a$, et nous avons : $a + (b - a) = b$*

   Supposons que cet x tel que $a + x = b$ ne soit pas unique, et soit donc $y \in \mathbb{N}$, un second élément tel que nous ayons aussi $a + y = b$. Alors, $b = a + x = a + y$, et de la régularité de l'addition, nous avons $x = y$

2. *Si $x = b - a$ existe, montrer que pour tout $c \in \mathbb{N}$, $cb - ca$ existe et que l'on a : $c(b - a) = cb - ca$*

   Soit $c \in \mathbb{N}$.
   Par hypothèse, nous avons $a + (b - a) = b$, et donc $c[a + (b - a)] = cb$.
   Par distributivité, $c[a + (b - a)] = ca + c(b - a)$, et donc, $ca + c(b - a) = cb$. Il existe donc $y \in \mathbb{N}$ tel que $ca + y = cb$, et ce y est $y = cb - ca$ et nous avons aussi $y = c(b - a)$.
   Donc, $c(b - a) = cb - ca$

3. *Démontrez que pour tout $x \in \mathbb{N}$, nous avons $0 \times x = 0$. En déduire que 0 n'est pas régulier pour la multiplication et que, par conséquent, $0 \neq 1$*

   - ▷ Soit $x \in \mathbb{N}$
     De l'égalité $x + 0 = x$, on en déduit, d'après la question précédente, que $0 = x - x$ Donc : $0 \times x = (x - x) \times x = x \times x - x \times x = 0$
   - ▷ Bien sûr que 0 n'est pas régulier pour la multiplication, puisque même si $x \neq y$, nous avons $0 \times x = 0 \times y = 0$
   - ▷ Si on suppose $0 = 1$, alors, pour tout $x \in \mathbb{N}^*$ $x = 1 \times x = 0 \times x = 0$. Contradiction.
     Donc, $0 \neq 1$

2.6.2 Le raisonnement par récurrence

Exercice 3 :

Montrer que, pour $a > 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$

On appelle $P(n)$, cette propriété dépendant de n :

$$P(n): \quad (1 + a)^n \geqslant 1 + na$$

— **Vérifions pour le premier terme $n = 0$**
  Nous avons bien, pour $n = 0$, $(1 + a)^0 = 1 \geqslant 1 + 0a = 1$
— **Supposons $P(n)$ vraie**
— **Démontrons maintenant que $P(n + 1)$ est vraie**
  Nous avons, par hypothèse de récurrence, $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$, et $(1 + a)^{n+1} = (1 + a)(1 + a)^n$ donc :

$$(1 + a)^{n+1} \geqslant (1 + a) \times (1 + na) = 1 + na + a + na^2 = 1 + (n + 1)a + na^2 \geqslant 1 + (n + 1)a$$

  Donc, $P(n + 1)$ est vraie

Ainsi, pour $a > 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons$(1 + a)^n \geqslant 1 + na$
Il y a un autre moyen pour démontrer le résultat en utilisant le binôme de Newton :

$$(1 + a)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k = 1 + na + \sum_{k=2}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k \geqslant 1 + na$$

Exercice 4 :

1. *Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2^n > n$*

   On appelle $P(n)$, cette propriété dépendant de n :

$$P(n): \quad (1 + a)^n \geqslant 1 + na$$

— **Vérifions pour le premier terme** $n=1$
Nous avons bien, pour $n=1$, $2^1=2>1$
— **Supposons** $P(n)$ **vraie**
— **Démontrons maintenant que** $P(n+1)$ **est vraie**
Nous avons, par hypothèse de récurrence, $2^n>n$, et $2^{n+1}=2\times 2^n$ donc :

$$2^{n+1}>2n=n+n\geqslant n+1$$

Donc, $P(n+1)$ est vraie
Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, nous avons $2^n>n$
On peut remarquer que cette propriété est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$, puisque $2^0=1>0$

2. *Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 5\Longrightarrow 2^n>n^2$*

Pour quoi $n\geqslant 5$?...Parce que, sans doute, pour les entiers $0,1,2,3,4$, l'inégalité est fausse!..On vérifie ?
— Si $n=0$, $2^0=1$ et $0^2=0$
— Si $n=1$, $2^1=2$ et $1^2=1$
— Si $n=2$, $2^2=4$ et $2^2=4$
— Si $n=3$, $2^3=8$ et $3^2=9$
— Si $n=4$, $2^4=16$ et $4^2=16$
Donc, pour ces 5 premières valeurs, l'inégalité stricte $2^n>n^2$ est prise en défaut.
Pour $n\geqslant 5$, on appelle $P(n)$, cette propriété dépendant de n :

$$P(n):\quad 2^n>n^2$$

— **Vérifions pour le premier terme** $n=5$
Nous avons bien, pour $n=5$, $2^5=32>25=5^2$
— **Supposons** $P(n)$ **vraie**
— **Démontrons maintenant que** $P(n+1)$ **est vraie**
Nous avons, par hypothèse de récurrence, $2^n>n^2$, et $2^{n+1}=2\times 2^n$ donc : $2^{n+1}>2n^2$
Il faudrait donc montrer que $2n^2\geqslant (n+1)^2$.
Or, $2n^2-(n+1)^2=n^2-2n-1$; comme, pour tout $n\geqslant 5$, nous avons $n^2-2n-1>0$
Donc, $P(n+1)$ est vraie
Ainsi, pour tout $n\geqslant 5$, nous avons $2^n>n^2$

3. *Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $2^{n-1}\leqslant n!$*

Pour $n\in\mathbb{N}$, on appelle $P(n)$, cette propriété dépendant de n :

$$P(n):\quad 2^{n-1}\leqslant n!$$

— **Vérifions pour le premier terme** $n=0$
Nous avons $2^{0-1}=\dfrac{1}{2}$ et $0!=1$, et nous avons $\dfrac{1}{2}\leqslant 1$, et donc $2^{0-1}\leqslant 0!$
— **Supposons** $P(n)$ **vraie**
— **Démontrons maintenant que** $P(n+1)$ **est vraie**
Nous avons, par hypothèse de récurrence, $2^{n-1}\leqslant n!$, et $2^n=2\times 2^{n-1}$ donc : $2^n\leqslant 2\times n!$
D'autre part, comme $n\geqslant 1$, nous avons $n+1\geqslant 2$ et donc $2\times n!\leqslant (n+1)\,n!=(n+1)!$.
C'est à dire $2^n\leqslant (n+1)!$.
Donc, $P(n+1)$ est vraie
Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $2^{n-1}\leqslant n!$

Exercice 6 :

Soit $P(n)$ la propriété suivante : $P(n)$: 10^n+1 est divisible par 9. Montrer que $P(n)\Rightarrow P(n+1)$; la propriété est-elle vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$?

Supposons donc $P(n)$ **et démontrons que** $P(n+1)$ **est vraie**
Il faut donc démontrer que $10^{n+1}+1$ est divisible par 9, sachant que 10^n+1 est divisible par 9.

$$10^{n+1}+1=10^n\times 10+1=10^n\times(9+1)+1=9\times 10^n+10^n+1=9\times 10^n+9u=9\times(10^n+u)$$

Nous démontrons ainsi que $10^{n+1}+1$ est divisible par 9.
Nous avons donc $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ vrai.
C'est la propriété d'hérédité du raisonnement par récurrence qui est vérifiée, mais, pas les premiers termes. En effet :

— Pour $n=0$, $10^0+1=2$ qui n'est pas divisible par 9
— De même, pour $n=1$, $10^1+1=11$ qui n'est pas plus divisible par 9

On n'a pas vérifié pour le premier terme. On ne peut pas conclure que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 7 :

Montrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ *que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$

▷ **Nous vérifions tout d'abord pour** $n=1$

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$$

C'est donc vrai pour $n=1$

▷ **Supposons maintenant que c'est vrai jusque l'ordre** n

▷ **Et démontrons que c'est vrai à l'ordre** $n+1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+2} \text{ Après avoir réduit au même dénominateur}
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$

La récurrence n'était pas nécessaire

En effet, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, de telle sorte que :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \\
&= \left(1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\right) - \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Exercice 8 :

Etablir que, pour $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,(k!) = (n+1)! - 1$

Voilà une question qui ne pose aucune difficulté, juste la manipulation aisée des factorielles

▷ **Vérifions que c'est vrai pour $n = 1$**

$$\sum_{k=1}^{1} k\,(k!) = 1 \times 1! = 1 \times 1 = 1 = (1+1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1$$

C'est donc vrai pour $n = 1$

▷ **Supposons maintenant que c'est crai jusqu'au rang n**

▷ **Démontrons que c'est vrai au rang $n+1$**

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k\,(k!) &= \sum_{k=1}^{n} k\,(k!) + (n+1)\,(n+1)! \\
&= (n+1)! - 1 + (n+1)\,(n+1)! \text{ (hypothèse de récurrence)} \\
&= (n+1)!\,(1+n+1) - 1 \\
&= (n+1)!\,(n+2) - 1 \\
&= (n+2)! - 1
\end{aligned}$$

Ce que nous voulions

Donc, pour tout $n \geqslant 1$, $\sum\limits_{k=1}^{n} k\,(k!) = (n+1)! - 1$

Exercice 9 :

Démontrer par récurrence que

1. $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$

2. $\sum\limits_{k=0}^{n} k^3 = \left(\dfrac{n\,(n+1)}{2}\right)^2$

1. **Démonstration du premier point**

   ▷ **Verifions pour le premier terme $n = 0$**

$$\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0^2 = 0 = \frac{0\,(0+1)\,(2 \times 0 + 1)}{6}$$

   C'est donc vrai pour $n = 0$

   ▷ **Supposons que c'est vrai jusqu'au rang n**

   ▷ **Démontrons que c'est vrai au rang $n+1$**

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \text{ (Hypothèse de récurrence)} \\
&= (n+1)\left[\frac{n\,(2n+1) + 6\,(n+1)}{6}\right]
\end{aligned}$$

   Or, $n\,(2n+1) + 6\,(n+1) = 2n^2 + 7n + 6 = (2n+3)\,(n+2)$
   Donc :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = (n+1)\left[\frac{(2n+3)\,(n+2)}{6}\right] = \frac{(n+1)\,((n+1)+1)\,(2\,(n+1)+1)}{6}$$

   Ce que nous voulions

   Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$

2. **Démonstration du second point**

▷ **Verifions pour le premier terme** $n = 0$

$$\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0^3 = 0 = \left(\frac{0\,(0+1)}{2}\right)^2$$

▷ **Supposons que c'est vrai jusqu'au rang** n

▷ **Démontrons que c'est vrai au rang** $n+1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\
&= \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \quad \text{(Hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{n^2\,(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= (n+1)^2 \left(\frac{n^2 + 4\,(n+1)}{4}\right) \\
&= (n+1)^2 \left(\frac{n^2 + 4n + 4}{4}\right) \\
&= (n+1)^2 \left(\frac{(n+2)^2}{4}\right)
\end{aligned}$$

Nous avons donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2\,(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)\,(n+2)}{2}\right)^2 = \left(\frac{(n+1)\,((n+1)+1)}{2}\right)^2$

Ce que nous voulions

Nous devons donc faire remarquer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$

En déduire

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (7k+1)^2$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,(k+1) = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{3}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,(k+1)\,(k+2) = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{4}$

Ces questions n'ont rien à voir avec la récurrence; elles ont plutôt à voir avec l'utilisation des résultats vus juste avant, et l'utilisation du signe somme ($\sum$). *Ces exercices sont finalement, très calculatoires. Nous aurons à utiliser le résultat :* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$ *démontré dans la partie exposé*

1. **Démonstration du premier point** Tout d'abord, nous développons $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (7k+1)^2$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (7k+1)^2 &= \sum_{k=0}^{n} \left(49k^2 + 14k + 1\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} 49k^2 + \sum_{k=0}^{n} 14k + \sum_{k=0}^{n} 1 \\
&= 49 \sum_{k=0}^{n} k^2 + 14 \sum_{k=0}^{n} k + n + 1 \\
&= 49 \times \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} + 14 \times \frac{n\,(n+1)}{2} + n + 1 \\
&= \frac{49n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} + (n+1)\,(7n+1) \\
&= \left(\frac{n+1}{6}\right) (14n+1)\,(7n+6)
\end{aligned}$$

Donc, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(7k+1)^2=\left(\frac{n+1}{6}\right)(14n+1)(7n+6)$

2. **Démonstration du second point** De la même manière, nous développons $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$, ce qui ne pose aucune difficultés.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k(k+1) &= \sum_{k=1}^{n}\left(k^2+k\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}\end{aligned}$$

Donc, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

3. **Démonstration du troisième point** Premièrement, nous allons développer $k(k+1)(k+2)$. Tous calculs faits :

$$k(k+1)(k+2)=k^3+3k^2+2k$$

Et donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2) &= \sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k\\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+\frac{3n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{2n(n+1)}{2}\\ &= \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}+2n+1+2\right)\\ &= \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{n^2+5n+6}{2}\right)\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}\end{aligned}$$

Nous avons donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

Exercice 10 :

Montrer que, pour $n\geqslant 0$, $n(2n+1)(7n+1)$ est un multiple de 6

Dire que $n(2n+1)(7n+1)$ est un multiple de 6, c'est dire qu'il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $n(2n+1)(7n+1)=6k$

- ▷ C'est évidemment vrai pour $n=0$
- ▷ **Supposons que** $n(2n+1)(7n+1)=6k$
- ▷ **Démontrons la propriété à l'ordre** $n+1$

  La démonstration est essentiellement calculatoire

$$\begin{aligned}(n+1)(2(n+1)+1)(7(n+1)+1) &= n((2n+1)+2)((7n+1)+7)+(2n+3)(7n+8)\\ &= n(2n+1)(7n+1)+28n^2+23n+14n^2+37n+24\\ &= n(2n+1)(7n+1)+42n^2+60n+24\\ &= 6k+6\left(7n^2+10n+4\right)\ \text{(Hypothèse de récurrence)}\end{aligned}$$

Donc, $(n+1)(2(n+1)+1)(7(n+1)+1)=6\left(k+\left(7n^2+10n+4\right)\right)$
Et nous avons démontré la propriété à l'ordre $n+1$

Donc, pour $n\geqslant 0$, $n(2n+1)(7n+1)$ est un multiple de 6

2.6.3 La division dans $\mathbb{N}$

Exercice 11 :

Une division euclidienne a pour dividende 557 et pour reste 85. Déterminer les valeurs acceptables pour le reste et le quotient

D'après la définition de la division euclidienne, nous avons $557 = bq + 85$, c'est à dire $bq = 472$, avec comme contrainte forte, $b > 85$

Il faut donc connaître les diviseurs de 472. Or, $472 = 2^3 \times 59$. Les diviseurs de 472 sont donc :

$$\{1, 2, 4, 8, 59, 118, 236, 472\}$$

Avec la contrainte $b > 85$, b ne peut donc prendre comme valeurs que 118, 236, 472 Ainsi,

— Si $b = 472$, alors $q = 1$
— Si $b = 236$, alors $q = 2$
— Si $b = 118$, alors $q = 4$

Donc, 3 couples conviennent.

Exercice 12 :

On augmente le dividende d'une division euclidienne de 52 et le diviseur de 4. On constate alors que le quotient et le reste ne changent pas. Calculer le quotient.

Soit a le dividende, b le diviseur, q le quotient et r le reste. Nous avons $a = bq + r$.
D'après l'énoncé, nous avons aussi : $a + 52 = (b + 4)\,q + r$. Ce qui fait :

$$\begin{aligned} a + 52 = &\ (b+4)\,q + r \\ = &\ bq + 4q + r \\ = &\ a + 4q \text{ car } a = bq + r \end{aligned}$$

D'où $a + 52 = a + 4q \iff 52 = 4q \iff q = 13$
Nous avons donc $q = 13$

Exercice 13 :

1. *Trouver tous les nombres entiers compris entre 1000 et 2000 qui, divisés par 127 donnent un quotient égal au reste*

   Par définition de la division euclidienne, nous avons $a = 127q + r$, c'est à dire, ici, comme $q = r$, nous avons $a = q \times 128$.

   a apparaît donc comme étant un multiple de 128. Nous choisissons donc les multiples de 127 compris entre 1000 et 2000

   — $a = 1024$ avec $q = 8$
   — $a = 1152$ avec $q = 9$
   — $a = 1280$ avec $q = 10$
   — $a = 1408$ avec $q = 11$
   — $a = 1536$ avec $q = 12$
   — $a = 1664$ avec $q = 13$
   — $a = 1792$ avec $q = 14$
   — $a = 1920$ avec $q = 15$

2. *Trouver tous les entiers qui, divisés par 12, donnent un quotient égal au reste*

   Comme tout à l'heure, nous avons $a = 12q + r$; et comme $q = r$, ceci devient $a = 12q + q \iff a = q \times 13$.

   a apparaît donc comme les multiples nons nuls de 13

   C'est très facilement généralisable à tous les entiers $n \in \mathbb{N}^*$.
   Quels sont les entiers qui, divisés par $n \in \mathbb{N}^*$, donnent un quotient égal au reste ?

   On reprend alors la démonstration pour $n = 12$! !
   Nous avons $a = nq + r$; et comme $q = r$, ceci devient $a = nq + q \iff a = q \times (n + 1)$.
   a apparaît donc comme les multiples nons nuls de $n + 1$

Exercice 14 :

Soient q et r deux entiers qui sont respectivement quotient et reste de la division euclidienne de a par b. Quand on augmente b de 1, le quotient ne change pas ; comparez alors q et r

Nous avons, par hypothèses, par définition de la division euclidienne, $a = bq + r$ et $a = (b+1)\,q + r'$ avec $0 \leqslant r < b$ et $0 \leqslant r' < b+1$

Nous en déduisons donc que $bq + r = (b+1)\,q + r' \Longleftrightarrow r = q + r' \Longleftrightarrow r' = r - q$. Nous en concluons que $q \leqslant r$

Par exemple, nous avons $81 = 23 \times 3 + 12$ et $81 = (23+1)\,3 + 9 \Longleftrightarrow 81 = 24 \times 3 + 9$

Réciproquement, si $q \leqslant r$, alors quand on augmente b de 1, le quotient ne change pas

En effet, supposons $q \leqslant r$ et $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$

Alors, il existe $t \geqslant 0$ tel que $q + t = r$ et donc :

$$a = bq + r \Longleftrightarrow a = bq + q + t \Longleftrightarrow a = (b+1)\,q + t$$

Ce que nous voulions

Exercice 15 :

Déterminer le plus grand nombre entier que l'on peut ajouter au dividende d'une division euclidienne sans en modifier le quotient

Nous avons donc $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$.

Si nous vons ajouter un nombre u au dividende, sans en changer le quotient, nous obtenons $a+u = bq+r'$ avec $0 \leqslant r' < b$, ce qui nous donne :

$$bq + r = bq + r' - u \Longrightarrow u = r' - r$$

La plus grande valeur pouvant être prise par r' est $b-1$; ainsi, la plus grande valeur pouvant être prise par u est $u = b - 1 - r$

Exemple :

$81 = 23 \times 3 + 12$; on a ici, $a = 81$, $b = 23$ et $r = 12$; la plus grande valeur u est donc $u = (23-1) - 12 = 10$.

Nous avons, effectivement ; $81 + 10 = 23 \times 3 + 22 \Longleftrightarrow 81 = 23 \times 3 + 22$

Chapitre 3

Groupes, anneaux, corps

Introduction

L'objet de ce chapitre est de donner une base mathématique rigoureuse.
Tout d'abord, ce chapitre commence par la théorie des groupes, des anneaux et, très peu, des corps.
Auparavant, 2 textes importants, introduisant et expliquant, à mon sens, les raisons de ces théories, réellement unificatrices.

— Le premier texte est dû à **EVARISTE GALOIS** qui « groupe », les opérations, pour donner une valeur trés générale à des résultats établis pour certaines opérations.
— Le second est de **NICOLAS BOURBAKI** qui développe des arguments en faveur de la théorie axiomatique.

La dernière partie de ce chapitre traite des congruences. C'est une application pure et simple de la théorie des groupes et des anneaux. La forme actuelle de cette théorie est due à GAUSS.Il l'a faite connaitre dans son livre publié en latin :**"DISQUITIONNAE ARITHMETICAE"** *(recherches arithmétiques)*

Repères

- E.GALOIS (1811-1832)
  GAUSS (1777-1855
- NICOLAS BOURBAKI : pseudonyme collectif d'un groupe de mathématiciens créé en 1930
- GAUSS (1777-1855)

Galois : grouper les opérations

■ *Évariste Galois en prison à Sainte-Pélagie, et rendu encore plus amer par l'absence de reconnaissance de la valeur de ses travaux, fournit une explicanon epis épistémologique remarquable pour situer la nouveauté de ses recherches. Cette attitude est étonnante pour un garçon de vingt ans; elle est très différente de celle de Fourier. Il constate le désordre dans l'exposé mathématique et l'absence de methode uniforme faute de vue synthétique. Il ouvre ainsi le chemin de la classification des grandes structures mathématiques, par opposition à une simple description des objets.*

De toutes les connaissances humaines, on sait que l'analyse pure est la plus immatérielle, la plus éminemment logique, la seule qui n'emprunte rien aux manifestations des sens. Beaucoup en concluent qu'elle est, dans son ensemble, la plus méthodique et la mieux coordonnée. Mais c'est erreur. Prenez un livre d'algèbre, soit didactique, soit d'invention, et vous n'y verrez qu'un amas confus de propositions dont la régularité contraste bizarrement avec le désordre du tout. Il semble que les idées coûtent déjà trop à l'auteur pour qu'il se donne la peine de les lier et que son esprit épuisé par les conceptions qui sont la base de son ouvrage, ne puisse enfanter une même pensée qui préside à leur ensemble.

Que si vous rencontrez une méthode, une liaison, une coordination, tout cela est faux et artificiel. Ce sont des divisions sans fondements, des rapprochements arbitraires, un arrangement tout de convention. Ce défaut, pire que l'absence de toute méthode, arrive surtout dans les ouvrages didactiques, la plupart composés par des hommes qui n'ont pas l'intelligence de la science qu'ils professent.

Tout cela étonnera fort les gens du monde, qui en général ont pris le mot mathématique pour synonyme de régulier.

Toutefois on sera encore étonné si l'on réfléchit qu'ici comme ailleurs, la science est l'œuvre de l'esprit humain, qui est destiné plutôt à étudier qu'à connaître, à chercher qu'à trouver la vérité. En effet, on conçoit qu'un esprit qui aurait puissance pour percevoir d'un seul coup l'ensemble des vérités mathématiques non pas à nous connues, mais toutes les vérités possibles, pourrait aussi les déduire régulièrement et comme machinalement de quelques principes combinés par une méthode uniforme ; alors plus d'obstacles. Plus de ces difficultés que le savant trouve dans ses explorations, et qui souvent sont imaginaires. Mais aussi plus de rôle au savant. Il n'en est pas ainsi : si la tâche du savant est plus pénible et partant plus belle, la marche de la science aussi est moins régulière. La science progresse par une série de combinaisons, où le hasard ne joue pas le moindre rôle, sa vie est brute et ressemble à celle des minéraux qui croissent par juxtaposition. Cela s'applique non seulement à la science telle qu'elle résulte des travaux d'une série de savants, mais aussi aux recherches particulières de chacun d'eux. En vain les analystes voudraient-ils se le dissimuler : ils ne déduisent pas, ils combinent, ils composent : toute immatérielle qu'elle est, l'analyse n'est pas plus en notre pouvoir que d'autres ; il faut l'épier, la sonder, la solliciter. Quand ils arrivent à la vérité, c'est en heurtant de ce côté et d'autre qu'ils y sont tombés.

Les ouvrages didactiques doivent partager avec les ouvrages d'inventeurs ce défaut d'une marche sûre toutes les fois que le sujet qu'ils traitent n'est pas entièrement soumis à nos lumières. Ils ne pourraient donc prendre une forme méthodique que sur un bien petit nombre de matières. Pour la leur donner, il faudrait une profonde intelligence de l'analyse, et l'inutilité de l'entrepnse dégoute ceux qui pourraient en supporter la difficulté.

■ *Galois expose donc, en ce qui concerne « l'analyse pure », la nécessité d'une nouvelle méthode pour progresser.*

Les longs calculs algébriques ont d'abord été peu nécessaires au progrès des mathématiques, les théorèmes fort simples gagnaient à peine à être traduits dans la langue de l'analyse. Ce n'est guère que depuis Euler que cette langue plus brève est devenue indispensable à la nouvelle extension que ce grand géomètre a donné à la science. Depuis Euler les calculs sont devenus de plus en plus nécessaires, mais de plus en plus difficiles à mesure qu'ils s'appliquaient à des objets de science plus avancés. Dès le commencement de ce siècle, l'algorithme avait atteint un degré de complication tel que tout progrès était devenu impossible par ce moyen, sans l'élégance que les géomètres modernes ont su imprimer à leurs recherches, et au moyen de laquelle l'esprit saisit promptement et d'un seul coup un grand nombre d'opérations.

II est évident que l'élégance si vantée et à si juste titre, n'a pas d'autre but.

Du fait bien constaté que les efforts des géomètres les plus avancés ont pour objet l'élégance, on peut donc conclure avec certitude qu'il devient de plus en plus nécessaire d'embrasser plusieurs opérations à la fois, parce que l'esprit n'a plus le temps de s'arrêter aux détails.

Or je crois que les simplifications produites par l'élégance des calculs (simplifications intellectuelles s'entend ; de matérielles il n'yen a pas) ont leurs limites ; je crois que le moment arrivera où les transformations algébriques prévues par les spéculations des analystes ne trouveront plus ni le temps ni la place de se produire ; à tel point qu'il faudra se contenter de les avoir prévues. Je ne veux pas dire qu'il n'y a plus rien de nouveau pour l'analyse sans ce secours : mais je crois qu'un jour sans cela tout serait épuisé.

Sauter à pieds joints sur ces calculs ; grouper les opérations, les classer suivant leurs difficultés et non suivant leurs formes ; telle est, suivant moi, la mission des géomètres futurs ; telle est la voie où je suis entré dans cet ouvrage.

Discussions sur les progrès de l'analyse pure, 1831

L'architecture des mathématiques

NICOLAS BOURBAKI : *la méthode axiomatique*

■ *Nous terminons ces généralités en donnant le point de vue d'un praticien des mathématiques. C'est la méthode axiomatique qui est privilégiée. Le texte qui suit est tiré d'un article de Nicolas Bourbaki.*

> Donner, à l'heure actuelle, une idée d'ensemble de la science mathématique, est une entreprise qui semble au premier abord offrir des difficultés presque insurmontables, en raison de l'étendue et de la variété du sujet. Comme dans toutes les autres sciences, le nombre des mathématiciens et des travaux consacrés aux mathématiques s'est considérablement accru depuis la fin du XIX-ème siècle. Les mémoires de mathématiques pures publiés dans le monde, au cours d'une année normale, couvrent plusieurs milliers de pages. Tout n'y estt sans doute pas d'une égale valeur, mais après décantation de l'inévitable déchet, il n'en reste pas moins que chaque année la science mathématique s'enrichit d'une foule de résultats nouveaux, se diversifie et se ramifie constamment en théories sans cesse modifiées, refondues, confrontées, combinées les unes aux autres. Pas un mathématicien, même en y consacrant toute son activité ne serait aujourd'hui, en mesure de suivre ce développement dans tous ses détails. Nombre d'entre eux se cantonnent dans un coin des mathèrnatiques d'où, ils ne cherchent pas à sortir, et, non seulement ignorent à peu près completement tout ce qui ne touche pas à leur sujet, mais encore seraient hors d'état de comprendre le langage et la terminologie employés par leurs confrères qui se réclament d'une spécialité éloignée de la leur. [...]
>
> On peut se demander si cette prolifération exubérante est le développement d'un organisme vigoureusement charpenté, acquérant chaque jour plus de cohésion et d'unité des accroissements qu'il reçoit, ou si au contraire elle n'est que le signe extérieur d'une tendance à un émiettement de plus en plus poussé, dû à la nature même des mathématiques, et si ces dernières ne sont pas en train de devenir une tour de Babel de disciplines autonomes, isolées les unes des autres, tant dans leurs buts que dans leurs méthodes, et jusque dans leur langage. En un mot, y a-t-i1 aujourd'hui une mathématique ou des mathématiques ?
>
> Bien que plus actuelle que jamais, il ne faudrait pas croire que cette question soit nouvelle ; elle s'est posée presque dès les premiers pas de la science mathématique. C'est qu'en effet, même en négligeant les mathématiques appliquées, il subsiste, entre la géométrie et l'arithmétique (du moins sous leur aspect élémentaire) une évidente dualité d'origine, celle-ci étant initialement science du discret, celle-là de l'étendue continue, deux aspects qui s'opposent radicalement depuis la découverte des irrationnelles. [...]
>
> Aujourd'hui, nous croyons que l'évolution interne de la science mathématique a, malgré les apparences, resserré plus que jamais l'unité de ses diverses parties, et y a créé une sorte de noyau central plus cohérent qu'il n'a jamais été. L'essentiel de cette évolution a consisté en une systématisation des relations existant entre les diverses théories mathématiques, et se résume en une tendance qui est généralement connue sous le nom de « **méthode axiomatique** ». [...]
>
> De même que la méthode expérimentale part de la croyance a priori en la permanence des lois naturelles, la méthode axiomatique trouve son point d'appui dans la conviction que, si les mathématiques ne sont pas un enchaînement de syllogismes se déroulant au hasard, elles ne sont pas davantage une collection d'artifices plus ou moins « astucieux », faits de rapprochements fortuits où triomphe la pure habileté technique. Là où l'observateur superficiel ne voit que deux ou plusieurs théories en apparence très distinctes, se prêtant, par l'entremise d'un mathématicien de génie, un « secours inattendu », la méthode axiomatique enseigne à rechercher les raisons profondes de cette découverte, à trouver les idées communes enfouies sous l'appareil extérieur des détails propres à chacune des théories considérées, à dégager ces idées et à les mettre en lumière .

■ *Bourbaki illustre son propos par l'exemple de la théorie des groupes et poursuit :*

> On peut maintenant faire comprendre ce qu'il faut entendre, d'une façon générale, par une structure mathématique. Le trait commun des diverses notions désignées sous ce nom générique, est qu'elles s'appliquent à des ensembles d'éléments dont la nature n'est pas spécifiée ; pour définir une structure, on se donne une ou plusieurs relations, où interviennent ces éléments ; on postule ensuite que la ou les relations données satisfont à certaines conditions (qu'on énumère) et qui sont les axiomes de la structure envisagée. Faire

la théorie axiomatique d'une structure donnée, c'est déduire les consequences logiques des axiomes de la structure, en s'interdisant toute autre hypothèse sur les éléments considérés (en particulier, toute hypothèse sur leur ≪ nature ≫ propre). [...]

Nous pensons en avoir assez dit pour permettre au lecteur de se faire une idée assez précise de la méthode axiomatique. Son trait le plus saillant, d'après ce qui précède, est de réaliser une économie de pensée considérable. Les ≪ structures ≫ sont des outils pour le mathématicien ; une fois qu'il a discerné, entre les éléments qu'il étudie, des relations satisfaisant aux axiômes une structure d'un type connu, il dispose aussitôt de tout l'arsenal des théorèmes généraux relatifs aux structures de ce type. [...]

Rien n'est plus éloigné de la méthode axiomatique qu'une conception statique de la science, et nous ne voudrions pas laisser croire au lecteur que nous avons prétendu retracer un état définitif de celle-ci. Les structures ne sont immuables ni dans leur nombre ni dans leur essence ; il est très possible que le développement ultérieur des mathématiques augmente le nombre des structures fondamentales, en r6vélant la fécondité de nouveaux axiomes, ou de nouvelles combinaisons d'axiomes, et on peut d'avance, escompter des progrès décisifs de ces inventions de structures, si l'on en juge d'après ceux qu'ont apportés les structures actuellement connues ; d'autre part ces dernières ne sont en aucune manière des édifices achevés, et il serait très surprenant que tout le suc de leurs principes fût d'ores et déjà épuisé.

Ainsi, avec ces indispensables correctifs, peut-on mieux prendre conscience de la vie interne de la mathématique, de ce qui fait à la fois son unité et sa diversité ; telle une grande cité, dont les faubourgs ne cessent de progresser, de façon quelque peu chaotique, sur le terrain environnant, tandis que le centre se reconstruit périodiquement, chaque fois suivant un plan plus clair et une ordonnance plus majestueuse ; jetant à bas les vieux quartiers et leurs dédales de ruelles, pour lancer vers la périphérie des avenues toujours plus directes, plus larges et plus commodes. [...]

Dans la conception axiomatique, la mathématique apparaît en somme comme un réservoir de formes abstraites - les structures mathématiques ; et il se trouve - sans qu'on sache bien pourquoi - que certains aspects de la réalité expérimentale viennent se mouler en certaines de ces formes, comme par une sorte de préadaptation. II n'est pas niable, bien entendu, que la plupart de ces formes avaient à l'origine un contenu intuitif bien déterminé ; mais c'est précisément en les vidant volontairement de ce contenu qu'on a su leur donner toute l'efficacité qu'elles portaient en puissance, et qu'on les a rendues susceptibles de recevoir des interprétations nouvelles, et de remplir pleinement leur rôle élaborateur.

C'est seulement avec ce sens du mot ≪ forme ≫ qu'on peut dire que la méthode axiomatique est un ≪ formalisme ≫ ; l'unité qu'elle confère à la mathématique, ce n'est pas l'armature de la logique formelle, unité de squelette sans vie ; c'est la sève nourricière d'un organisme en plein développement, le souple et fécond instrument de recherches auquel ont consciemment travaillé. depuis Gauss, tous les grands penseurs des mathématiques, tous ceux qui, suivant la formule de Lejeune-Dirichlet, ont toujours tendu à ≪ **substituer les idées au calcul** ≫.

L'Architecture des mathématiques, 1948.

3.1 Structure de groupes

3.1.1 Définition

Soit G un ensemble muni d'une loi $\star$. $(G, \star)$ est un groupe si et seulement si :

1. La loi $\star$ est interne, c'est à dire :
$$(\forall x \in G)\,(\forall y \in G)\,(x \star y \in G)$$
2. La loi $\star$ est associative, c'est à dire :
$$(\forall x \in G)\,(\forall y \in G)\,(\forall z \in G)\,((x \star y) \star z = x \star (y \star z) = x \star y \star z)$$
3. La loi $\star$ admet un élément neutre e, c'est à dire :
$$(\exists e \in G)\,(\forall x \in G)\,(x \star e = e \star x = x)$$
4. Tout élément $x \in G$, admet, pour la loi $\star$ un symétrique x', c'est à dire :
$$(\forall x \in G)\,(\exists x' \in G)\,(x \star x' = x' \star x = e)$$

Si, de plus, la loi $\star$ est commutative, c'est à dire si :
$$(\forall x \in G)\,(\forall y \in G)\,(x \star y = y \star x)$$
Le groupe $(G, \star)$ est dit groupe commutatif ou groupe abélien

Remarque 1 :

1. Les notions de loi de composition interne, d'associativité, d'éléments neutres et de symétriques ont été rencontrées en étudiant les entiers naturels
2. Si l'ensemble G est fini et de cardinal n, on dit que n est **l'ordre** du groupe

Exemple 1 :

Exemples de groupes

1. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{C}, +)$ sont des groupes commutatifs pour l'addition
2. $(\mathbb{Q}^*, \times)$, $(\mathbb{R}^*, \times)$ et $(\mathbb{C}^*, \times)$ sont des groupes commutatifs pour la multiplication
3. Est ce que $\mathbb{Z}^*$ est un groupe pour la multiplication ?

Exercice 1 :

1. Montrer que $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| = 1\}$ est un groupe pour la multiplication.
2. Soit E un ensemble et $\mathcal{B}(E)$ l'ensemble des bijections de E. Montrer que $(\mathcal{B}(E), \circ)$ est un groupe. En étudier la commutativité

3.1.2 Théorème : propriété fondamentale d'un groupe

Soit $(G, \star)$ un groupe. Alors :
Pour tout $a \in G$ les applications :
$$\left\{\begin{array}{rcl} \gamma_a : G & \longrightarrow & G \\ x : & \longmapsto & \gamma_a(x) = a \star x \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \delta_a : G & \longrightarrow & G \\ x : & \longmapsto & \delta_a(x) = x \star a \end{array}\right.$$
Sont bijectives

Démonstration

Au vu de la similarité de γ_a et δ_a, nous ne démontrons le théorème que pour une seule application δ_a, par exemple !!
Soit donc $a \in G$; nous notons e l'élément neutre de G

1. Démontrons que δ_a est injective
   Soient $x \in G$ et $y \in G$ tels que $\delta_a(x) = \delta_a(y)$; alors, $x \star a = y \star a$.
   Comme $a \in G$, a admet pour la loi $\star$ un inverse a^{-1}. Composons à droite par a^{-1}
   $$x \star a = y \star a \Longrightarrow (x \star a) \star a^{-1} = (y \star a) \star a^{-1}$$
   De l'associativité de la loi $\star$, nous avons :
   $$(x \star a) \star a^{-1} = (y \star a) \star a^{-1} \Longrightarrow x \star \left(a \star a^{-1}\right) = y \star \left(a \star a^{-1}\right) \Longrightarrow x \star e = y \star e \Longrightarrow x = y$$
   Nous avons donc l'implication $\delta_a(x) = \delta_a(y) \Longrightarrow x = y$, ce qui montre que δ_a est injective
2. Démontrons que δ_a est surjective
   Soit $y \in G$; existe-t-il $x \in G$ tel que $\delta_a(x) = y$.
   S'il existe, alors : $x \star a = y$; en composant à droite par a^{-1}, nous avons :
   $$x \star a = y \Longrightarrow (x \star a) \star a^{-1} = y \star a^{-1}$$
   De l'associativité, nous avons :
   $$(x \star a) \star a^{-1} = y \star a^{-1} \Longleftrightarrow x \star \left(a \star a^{-1}\right) = y \star a^{-1} \Longleftrightarrow x = y \star a^{-1}$$
   Ainsi, pour tout $y \in G$, il existe $x = y \star a^{-1}$ tel que $\delta_a(x) = y$
   δ_a est donc surjective

δ_a étant injective et surjective, est donc bijective

Remarque 2 :

1. Le théorème 3.1.2 peut aussi s'énoncer différemment :
   Pour tout $a \in G$ et tout $b \in G$, les équation $a \star x = b$ et $x \star a = b$ ont une unique solution
2. Le théorème 3.1.2 permet de dire que dans un groupe, tout élément est régulier , c'est à dire que :
   $$a \star b = a \star c \Longrightarrow b = c \text{ et } b \star a = c \star a \Longrightarrow b = c$$
3. Si G est un groupe fini, dans la table de multiplication du groupe, les éléments ne doivent apparaître qu'une seule fois

Exercice 2 :

Un ensemble E est muni d'une loi $\star$ interne et associative ; on suppose que, pour tout $a \in G$, γ_a et δ_a sont surjectives. Montrer que $(E, \star)$ est un groupe

3.1.3 Définition de sous-groupe

Soit $(G, \star)$ un groupe. On appelle sous-groupe, toute partie $H \subset G$ telle que :
- ▷ H est non vide
- ▷ H est stable pour la loi $\star$, c'est à dire : $(\forall x \in H)\,(\forall y \in H)\,(x \star y \in H)$
- ▷ $(H, \star)$ est un groupe

Remarque 3 :

1. Les sous-groupes de $(G, \star)$ ont tous le même élément neutre e
2. Les sous-groupes triviaux de $(G, \star)$ sont $(G, \star)$ lui même et $(\{e\}, \star)$

Exemple 2 :

Des exemples de sous-groupes

1. $(\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$
2. $(\mathbb{Q}^*, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, les ensembles $n\mathbb{Z}$,des multiples entiers de n, muni de l'addition sont des sous groupes de $(\mathbb{Z}, +)$

3.1.4 Caratérisation d'un sous-groupe

Soit $(G, \star)$ un groupe. Alors $H \subset G$ est un sous-groupe de $(G, \star)$ si et seulement si :

1. H est non vide
2. Pour tout $x \in H$ et tout $y \in H$, $x \star y^{-1} \in H$

Démonstration

1. On suppose $(H, \star)$ sous-groupe de $(G, \star)$
   - ▷ Alors, comme $e \in H$, $H \neq \emptyset$
   - ▷ D'autre part, si $y \in H$, comme H est un groupe, $y^{-1} \in H$ et pour $x \in H$, comme $\star$ est une loi de composition interne, $x \star y^{-1} \in H$
2. Réciproquement, on suppose $H \neq \emptyset$ et que pour tout $x \in H$ et tout $y \in H$, $x \star y^{-1} \in H$
   Montrons que $(H, \star)$ est un groupe.
   - ▷ Tout d'abord, la loi $\star$ étant associative dans $(G, \star)$, elle l'est, aussi, à fortiori dans H
   - ▷ D'autre part, comm e$H \neq \emptyset$, il existe $x \in H$; comme $H \subset G$, $x \in G$ et x^{-1} existe, et nous avons même $x^{-1} \in G$
     De la propriété $x \star y^{-1} \in H$ vraie pour tout $x \in H$ et tout $y \in H$, en faisant $y = x$, nous avons $x \star x^{-1} \in H$, c'est à dire $e \in H$
   - ▷ Soit $y \in H$; comme $e \in H$, alors $e \star y^{-1} \in H$ i.e. $y^{-1} \in H$, c'est à dire que tout élément $y \in H$ a son inverse dans H
   - ▷ Soit $x \in H$ et $y \in H$; nous allons montrer que $x \star y \in H$ et que donc la loi $\star$ est interne dans H
     Nous venons de montrer que si $y \in H$, alors $y^{-1} \in H$ et donc, d'après la propriété de H, $x \star \left(y^{-1}\right)^{-1} \in H$. Comme $\left(y^{-1}\right)^{-1} = y$, nous avons $x \star y \in H$

   Donc, $(H, \star)$ est un groupe, et comme $H \subset G$, $(H, \star)$ est un sous-groupe de $(G, \star)$

Exemple 3 :

Montrons maintenant que pour $n \in \mathbb{N}^*$, les ensembles $n\mathbb{Z}$,des multiples entiers de n, muni de l'addition sont des sous groupes de $(\mathbb{Z}, +)$

Rappelons la définition de $n\mathbb{Z}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$n\mathbb{Z} = \{T \in \mathbb{Z} \text{ tels que il existe } u \in \mathbb{Z} \text{ tel que } T = un\}$$

Par exemple : $7\mathbb{Z} = \{T \in \mathbb{Z} \text{ tels que il existe } u \in \mathbb{Z} \text{ tel que } T = 7u\}$

$(n\mathbb{Z}, +)$ est un sous groupe de $(\mathbb{Z}, +)$

- ▷ $n\mathbb{Z} \neq \emptyset$ puisque $0 = 0 \times n \in n\mathbb{Z}$
- ▷ Soient $z_1 \in n\mathbb{Z}$ et $z_2 \in n\mathbb{Z}$; avons nous $z_1 - z_2 \in n\mathbb{Z}$
  Comme $z_1 \in n\mathbb{Z}$, alors, il existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ tel que $z_1 = k_1 \times n$
  De même, comme $z_2 \in n\mathbb{Z}$, alors, il existe $k_2 \in \mathbb{Z}$ tel que $z_2 = k_2 \times n$
  Donc : $z_1 - z_2 = k_1 n - k_2 n = (k_1 - k_2) \times n$. Comme $k_1 - k_2 \in \mathbb{Z}$, nous avons $z_1 - z_2 \in n\mathbb{Z}$

Et donc, $n\mathbb{Z}$, muni de l'addition est un sous groupe de $(\mathbb{Z}, +)$

On peut démontrer que les seuls sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $n\mathbb{Z}$ où $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 3 :

Soit E un ensemble quelconque et $a \in E$ un élément de E. Nous savons que $(\mathcal{B}(E), \circ)$ est un groupe. Nous appelons $\mathcal{A}$ l'ensemble des bijections de $\mathcal{B}(E)$ laissant a fixe *(c'est à dire $f \in \mathcal{A} \Longleftrightarrow f(a) = a$).* Démontrer que $(\mathcal{A}, \circ)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{B}(E), \circ)$

Exercice 4 :

Soit $(G, \star)$ un groupe. On appelle centre de G l'ensemble $Z(G)$ des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G, c'est à dire :

$$Z(G) = \{c \in G \text{ tels que } (\forall x \in G)(x \star c = c \star x)\}$$

Démontrer que $(Z(G), \star)$ est un sous-groupe de $(G, \star)$

3.1.5 Théorème

Soit $(G, \star)$ un groupe,$(H_1, \star)$ et $(H_2, \star)$ 2 sous-groupes de$G$
Alors $H_1 \cap H_2$ est un sous-groupe de G

Démonstration

1. Premièrement, $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$
   En effet, $e \in H_1$ et $e \in H_2$ et donc $e \in H_1 \cap H_2$
2. Soient $x \in H_1 \cap H_2$ et $y \in H_1 \cap H_2$. Montrons que $x \star y^{-1} \in H_1 \cap H_2$
   - ▷ Comme $x \in H_1$ et $y \in H_1$, nous avons $x \star y^{-1} \in H_1$
   - ▷ Et comme $x \in H_2$ et $y \in H_2$, nous avons $x \star y^{-1} \in H_2$

   Et nous concluons donc que $x \star y^{-1} \in H_1 \cap H_2$

Donc, $H_1 \cap H_2$ est un sous-groupe de G

Remarque 4 :

Le théorème est toujours vrai pour n sous groupes $H_1, \ldots, H_n$ de G : nous avons $\bigcap_{i=1}^{n} H_i$ qui est un sous-groupe de G

Exemple 4 :

Dans $(\mathbb{Z}, +)$, groupe additif, définissons $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}$

$2\mathbb{Z}$ et $3\mathbb{Z}$ sont des sous-groupes de $\mathbb{Z}$ et donc $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}$ est aussi un sous-groupe de $\mathbb{Z}$
Si $m \in 2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}$, alors m est un multiple de 2 et de 3, donc de 6, et donc $m \in 6\mathbb{Z}$; réciproquement, il est clair que si $m \in 6\mathbb{Z}$, m est aussi un multiple de 2 et m est un multiple de 3, et donc $m \in 2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}$; en conclusion, $6\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}$

3.1.6 Sous-groupes engendrés : définition

1. Soit $(G, \star)$ un groupe et $A \subset G$, un sous-ensemble de G. On appelle $\Gamma(A)$ le plus petit sous-groupe de G contenant A
   On dit que $\Gamma(A)$ est le sous-groupe de G engendré par A
2. On appelle Groupe cyclique un groupe G de cardinal fini engendré par un seul élément a : $G = \Gamma(\{a\})$

Remarque 5 :

1. Si A est un sous-groupe de G, alors $\Gamma(A) = A$
2. En utilisant la notation multiplicative, tout groupe cyclique est du type $G = \Gamma(\{a\}) = \{a^n \text{ où } n \in \mathbb{Z}\}$

   En reprécisant les choses :
   - $a^0 = e$ où e est le neutre de G
   - Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a^n = \underbrace{a \star a \star a \star \cdots \star a}_{n \text{ fois}}$
   - Toujours pour $n \in \mathbb{N}$, $a^{-n} = \underbrace{a^{-1} \star a^{-1} \star a^{-1} \star \cdots \star a^{-1}}_{n \text{ fois}}$

Exemple 5 :

Exemples de groupes cycliques

1. L'ensemble $\{2^n \text{ avec } n \in \mathbb{Z}\}$, muni de la multiplication n'est pas un groupe cyclique puisque c'est un ensemble infini.

   Plus généralement, pour tout $b \in \mathbb{Z}$, l'ensemble $\{b^n \text{ avec } n \in \mathbb{Z}\}$, muni de la multiplication est un groupe cyclique
2. $\mathcal{U}_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$, l'ensemble des racines n-*ièmes* de 1, muni de la multiplication est un groupe cyclique fini de générateur $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$

3.1.7 Définition d'homomorphisme de groupe

Soient $(G, \star)$ et $(G_1, \top)$ 2 groupes
l'application $f : G \longrightarrow G_1$ est un homomorphisme de groupe si et seulement si

$$(\forall x \in G)\,(\forall y \in G)\,(f(x \star y) = f(x) \top f(y))$$

Exemple 6 :

Nous livrons, ici, les exemples les plus classiques d'homomorphismes de groupe :

1. La fonction logarithme :ln : $(\mathbb{R}^{*+}, \times) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$ est un premier exemple d'homomorphisme
2. La fonction exponentielle, réciproque de la fonction logarithme est aussi un homomorphisme : $\exp : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}^{*+}, \times)$
3. L'exponentielle complexe :
$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi : (\mathbb{R}, +) & \longrightarrow & (\mathbb{C}, \times) \\ x & \longmapsto & \varphi(x) = e^{ix} \end{array}\right.$$
4. La conjugaison dans $\mathbb{C}$ est un homomorphisme de groupe additif :
$$\left\{\begin{array}{rcl} f : (\mathbb{C}, +) & \longrightarrow & (\mathbb{C}, +) \\ z & \longmapsto & f(z) = \overline{z} \end{array}\right.$$
5. La conjugaison dans $\mathbb{C}$ est aussi un homomorphisme de groupe multiplicatif :
$$\left\{\begin{array}{rcl} f : (\mathbb{C}, \times) & \longrightarrow & (\mathbb{C}, \times) \\ z & \longmapsto & f(z) = \overline{z} \end{array}\right.$$

3.1.8 Vocabulaire

1. Si $f : (G, \star) \longrightarrow (G, \star)$ est un homomorphisme de groupe, on dit que f est un endomorphisme
2. Si $f : (G, \star) \longrightarrow (G_1, \top)$ est un homomorphisme de groupe bijectif, on dit que f est un isomorphisme
3. Si $f : (G, \star) \longrightarrow (G, \star)$ est un homomorphisme de groupe bijectif, on dit que f est un automorphisme

Exemple 7 :

Les fonctions logarithme :ln : $(\mathbb{R}^{*+}, \times) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$ et exponentielle : exp : $(\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}^{*+}, \times)$ sont des exemples d'isomorphismes de groupe

Exercice 5 :

Soit $(G, \star)$ un groupe de neutre e et $a \in G$; on considère les applications f_a définies par :

$$\begin{cases} f_a : G & \longrightarrow & G \\ \quad x & \longmapsto & f_a(x) = a \star x \star a^{-1} \end{cases}$$

Montrer que f_a est un automorphisme

3.1.9 Théorème

La composée de 2 homomorphismes de groupes est un homomorphisme de groupe.
Autrement dit :
Soient $(G, \star)$, $(G_1, \top)$, $(G_2, \perp)$ 3 groupes.
Soient $f : G \longrightarrow G_1$ et $g : G_1 \longrightarrow G_2$ 2 homomorphismes de groupes, alors $g \circ f$ est aussi un homomorphisme de groupe

Démonstration

Soient $f : G \longrightarrow G_1$ et $g : G_1 \longrightarrow G_2$ 2 homomorphismes de groupes, $x \in G$ et $y \in G$.
Il faut donc montrer que $g \circ f(x \star y) = g \circ f(x) \perp g \circ f(y)$

$$\begin{aligned} g \circ f(x \star y) = & \ g[f(x \star y)] \\ = & \ g[f(x) \top f(y)] \text{ car } f \text{ est un homomorphisme} \\ = & \ g[f(x)] \perp g[f(y)] \text{ car } g \text{ est un homomorphisme} \\ = & \ g \circ f(x) \perp g \circ f(y) \end{aligned}$$

Ce que nous voulions, $g \circ f$ est donc un homomorphisme de groupe

3.1.10 Théorème

Soient $(G, \star)$ et $(G_1, \top)$ 2 groupes.
$f : (G, \star) \longrightarrow (G_1, \top)$ un homomorphisme de groupe.
On appelle e de neutre de G et e' celui de G_1. Alors :

1. Nous avons $f(e) = e'$
2. Pour tout $x \in G$, nous avons $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$
3. $f(G)$ est un sous-groupe de G_1 appelé image de f et noté $\text{Im} f$
4. Plus généralement, si $H \subset G$ est un sous groupe de G, alors $f(H)$ est un sous-groupe de G_1
5. Si $X \subset G_1$ est un sous-groupe de G_1, alors $f^{-1}(X)$ est un sous-groupe de G
6. On note $\ker f = \{x \in G \text{ tel que } f(x) = e'\}$, alors $\ker f$ est un sous-groupe de G appelé noyau de f

Démonstration

1. Démontrons que $f(e) = e'$
   Soit $x \in G$. Alors, $f(x) = f(x \star e) = f(x) \top f(e)$. Or, $f(x) = f(x) \top e'$ et donc $f(x) \top f(e) = f(x) \top e'$.
   Par régularité des groupes, on en déduit que $f(e) = e'$
2. Démontrons que $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$
   Soit $x \in G$. Alors, $f(e) = f(x \star x^{-1}) = f(x) \top f(x^{-1}) = e'$. De $f(x) \top f(x^{-1}) = e'$ on déduit que $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$

3. Démontrons que $f(G)$ est un sous-groupe de G_1
   - ▷ Premièrement, $f(G) \neq \emptyset$ puisque $e' = f(e) \in f(G)$
   - ▷ Soient $y_1 \in f(G)$ et $y_2 \in f(G)$; il faut montrer que $y_1 \top (y_2)^{-1} \in f(G)$
     Il existe $x_1 \in G$ tel que $f(x_1) = y_1$ et $x_2 \in G$ tel que $f(x_2) = y_2$
     Donc $y_1 \top (y_2)^{-1} = f(x_1) \top (f(x_2))^{-1} = f(x_1) \top f\left(x_2^{-1}\right) = f\left(x_1 \star x_2^{-1}\right)$
     Comme $x_1 \in G$ et $x_2 \in G$, alors $x_1 \star x_2^{-1} \in G$, et de $y_1 \top (y_2)^{-1} = f\left(x_1 \star x_2^{-1}\right)$, nous en déduisons que $y_1 \top (y_2)^{-1} \in f(G)$

   Donc, $f(G)$ est un sous-groupe de G_1
4. Si $H \subset G$ est un sous groupe de G, alors $f(H)$ est un sous-groupe de G_1
   La démonstration de cette affirmation est très semblable à celle qui est ci-dessus, et je la laisse faire par le lecteur en exercice
5. Démontrons que si $X \subset G_1$ est un sous-groupe de G_1, alors $f^{-1}(X)$ est un sous-groupe de G Qu'est ce que $f^{-1}(X)$?
   Nous avons $f^{-1}(X) = \{x \in G \text{ tels que } f(x) \in X\}$
   - ▷ Premièrement, $f^{-1}(X) \neq \emptyset$ puisque $f(e) = e'$ et $e' \in X$; donc $e \in f^{-1}(X)$
   - ▷ Soient $x_1 \in f^{-1}(X)$ et $x_2 \in f^{-1}(X)$; il faut montrer que $x_1 \star (x_2)^{-1} \in f^{-1}(X)$
     Comme $x_1 \in f^{-1}(X)$ et $x_2 \in f^{-1}(X)$, alors $f(x_1) \in X$ et $f(x_2) \in X$, et X étant un sous-groupe de G_1, alors $f(x_1) \top (f(x_2))^{-1} \in X$
     Or, $f(x_1) \top (f(x_2))^{-1} = f(x_1) \top \left(f\left((x_2)^{-1}\right)\right)$
     f étant un homomorphisme, nous avons $f(x_1) \top \left(f\left((x_2)^{-1}\right)\right) = f\left(x_1 \star (x_2)^{-1}\right)$ et donc $f\left(x_1 \star (x_2)^{-1}\right) \in X$ et donc $x_1 \star (x_2)^{-1} \in f^{-1}(X)$

   Donc, $f^{-1}(X)$ est un sous-groupe de G
6. $\ker f$ est un sous-groupe de G
   Il suffit de remarquer que $\ker f = f^{-1}(\{e'\})$ et que et donc que $\ker f$ est un cas particulier du point ci-dessus

Remarque 6 :

On peut résumer l'égalité $f\left(x^{-1}\right) = (f(x))^{-1}$ par : « *L'image de l'inverse est l'inverse de l'image* »

Exemple 8 :

1. On retrouve, à l'aide de ce théorème, les propriétés de la fonction logarithme :
   - ▷ L'image du neutre de $(\mathbb{R}^{*+}, \times)$ qui est 1 est le neutre de $(\mathbb{R}, +)$ qui est 0 : $\ln 1 = 0$
   - ▷ L'image de l'inverse est l'inverse de l'image et donc, pour tout $x > 0$, nous avons $\ln \dfrac{1}{x} = -\ln x$
2. Nous retrouvons les mêmes propriétés pour la fonction exponentielle.

3.1.11 Théorème

Soient $(G, \star)$ et $(G_1, \top)$ 2 groupes e est le neutre d eG et e_1, celui de G_1 et $f : (G, \star) \longrightarrow (G_1, \top)$ un homomorphisme de groupe.Alors f est injective si et seulement si $\ker f = \{e\}$

Démonstration

1. Supposons f injective
   Et bien sûr, le seul antécédent de e_1 par f est e, et donc $\ker f = \{e\}$
2. Supposons $\ker f = \{e\}$
   Démontrons que f est injective.
   Soient $x \in G$ et $y \in G$ tels que $f(x) = f(y)$ Alors,
   $$f(x) = f(y) \Longleftrightarrow f(x) \top (f(y))^{-1} = e_1 \Longleftrightarrow f\left(x \star y^{-1}\right) = e_1 \Longleftrightarrow x \star y^{-1} \in \ker f$$
   Comme $\ker f = \{e\}$, $x \star y^{-1} = e$, c'est à dire $x = y$ et donc f est injective

Exemple 9 :

Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, définie par :

$$\begin{cases} \varphi : (\mathbb{R}, +) & \longrightarrow & (\mathbb{C}, \times) \\ x & \longmapsto & \varphi(x) = e^{ix} \end{cases}$$

φ n'est pas injective ; en effet, $\ker \varphi = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } e^{ix} = 1\right\} = \{2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}$. Le noyau de φ n'est pas réduit au seul élément neutre de $(\mathbb{R}, +)$ et n'est donc pas injective

3.1.12 Théorème

Soient $(G, \star)$ et $(G_1, \top)$ 2 groupes et $f : (G, \star) \longrightarrow (G_1, \top)$ un isomorphisme de groupe.Alors $f^{-1} : (G_1, \top) \longrightarrow (G, \star)$ est aussi un isomorphisme de groupes
On dit que les 2 groupes $(G, \star)$ et $(G_1, \top)$ sont isomorphes

Démonstration

Soient $y_1 \in G_1$ et $y_2 \in G_1$. Il faut donc montrer que $f^{-1}(y_1 \top y_2) = f^{-1}(y_1) \star f^{-1}(y_2)$
Il existe $x_1 \in G$, unique, tel que $f(x_1) = y_1 \Longleftrightarrow x_1 = f^{-1}(y_1)$, tout comme il existe $x_2 \in G$, unique, tel que $f(x_2) = y_2 \Longleftrightarrow x_2 = f^{-1}(y_2)$ Donc :

$$f^{-1}(y_1 \top y_2) = f^{-1}(f(x_1) \top f(x_2)) = f^{-1}(f(x_1 \star x_2)) = x_1 \star x_2 = f^{-1}(y_1) \star f^{-1}(y_2)$$

Nous venons de démontrer que $f^{-1}(y_1 \top y_2) = f^{-1}(y_1) \star f^{-1}(y_2)$
$f^{-1} : (G_1, \top) \longrightarrow (G, \star)$ est donc un homomorphisme de groupe, bijectif, et est donc un isomorphisme

Remarque 7 :

La notion d'isomorphisme est forte ; elle sous-entend que les deux groupes ont même structure, et que, quelque part, moralement, ce sont les mêmes.

3.2 Structure d'anneau

3.2.1 Définition d'anneau

On appelle anneau, un ensemble A muni de 2 lois :

1. Une première loi $\star$ faisant de $(A, \star)$ un groupe commutatif
2. Une seconde loi $\top$, interne, distributive à gauche et à droite par rapport à la loi $\star$, c'est à dire :

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)(\forall z \in A)\,(x \top (y \star z) = (x \top y) \star (x \top z))$$

et

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)(\forall z \in A)\,((x \star y) \top z = (x \top z) \star (y \top z))$$

On dit alors que $(A, \star, \top)$ est un anneau

1. Si la loi $\top$ est commutative, l'anneau $(A, \star, \top)$ est dit commutatif
2. Si la loi $\top$ admet un élément neutre, l'anneau $(A, \star, \top)$ est dit unitaire ; le neutre est noté 1
3. Si, pour $a \in A$ où $(A, \star, \top)$ est un anneau unitaire, il existe $a' \in A$ tel que $aa' = 1$, l'élément a est dit inversible

Remarque 8 :

Pour simplifier, nous noterons additivement $+$ la première loi $\star$ et multiplicativement $\times$ la seconde loi $\top$, de telle sorte que l'anneau $(A, \star, \top)$ devient $(A, +, \times)$

Exemple 10 :

1. $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif et unitaire ; les seuls éléments inversibles de $(\mathbb{Z}, +, \times)$ sont 1 et -1
2. Les ensembles de polynômes $(\mathbb{R}[X], +, \times)$ et $(\mathbb{C}[X], +, \times)$ sont des anneaux unitaires
3. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est l'ensemble des fonctions numériques réelles. On y définit :
   L'addition $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
   La multiplication $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$
   Muni de ces opérations, $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \times\right)$ est un anneau commutatif et unitaire
4. Et si nous considérons $\circ$ l'opérateur de composition des applications, alors $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \circ\right)$ est un anneau unitaire non commutatif

3.2.2 Règles de calcul

Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Alors, pour tout $a \in A$, $b \in A$ et $c \in A$:

1. $a(b-c) = ab - ac$
2. $(c-b)a = ca - ba$
3. $a \times 0 = 0 \times a = 0$
4. $a \times (-c) = -ac$
5. $(-b)a = -ba$
6. $(-a)(-b) = ab$

Démonstration

1. Soient $a \in A$, $b \in A$ et $c \in A$, alors :
$$a(b-c) + ac = a[(b-c)+c] = a(b) = ab$$
De $a(b-c) + ac = ab$, on déduit que $a(b-c) = ab - ac$
2. Soient $a \in A$, $b \in A$ et $c \in A$, alors :
$$(c-b)a + ba = [(c-b)+b]a = (c)a = ca$$
De $(c-b)a + ba = ca$, on déduit que $(c-b)a = ca - ba$
3. Pour démontrer que $a \times 0 = 0 \times a = 0$, nous faisons $b = c$ dans les identités $a(b-c) = ab - ac$ et $(c-b)a = ca - cb$
4. Pour démontrer que $a \times (-c) = -ac$, nous faisons $b = 0$ dans l'identité $a(b-c) = ab - ac$
5. Pour démontrer que $(-b)a = -ba$, nous faisons $c = 0$ dans l'identité $(c-b)a = ca - ba$
6. Soient $a \in A$, $b \in A$, alors nous avons :
$$(-a)(-b) + a(-b) = (-a)(-b) - ab$$
Or, $(-a)(-b) + a(-b) = (-a+a)(-b) = (0)(-b) = 0$
Donc : $(-a)(-b) + a(-b) = (-a)(-b) - ab = 0 \Longrightarrow (-a)(-b) = ab$

Remarque 9 :

Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Pour $n \in \mathbb{Z}$ et $a \in A$, on peut définie a^n et na :

1. Si $n > 0$, $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$ et $na = \underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{n \text{ fois}}$
2. Si $n < 0$, $a^{-n} = \left(a^{-1}\right)^{-n}$ et $na = (-n)(-a)$

3.2.3 Définition

Soit $(A, +, \times)$ un anneau.

1. On dit que $a \in A$ et $b \in A$, sont de véritables diviseurs de 0 si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ et $ab = 0$
2. Un anneau sans diviseur de 0 est dit intègre
3. $a \in A$ est dit nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = 0$

Exemple 11 :

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des anneaux intègres

Exercice 6 :

Nous considérons $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dans lequel nous avons défini 2 opérations :

L'addition en donnant : $(a, b) + (cd) = (a + c, b + d)$

La multiplication en donnant : $(a, b) \times (cd) = (ac, bd)$

1. Montrer que $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau
2. Cet anneau est-il intègre ? Existe-t-il des éléments nilpotents ?

Remarque 10 :

1. Si $a \in A$ est un véritable diviseur de zéro, alors a n'est pas régulier pour la multiplication, puisque si $ab = 0$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$, nous avons :
$$a \times 0 = a \times b = 0 \text{ mais } b \neq 0$$
2. Si $a \in A$ est inversible, alors a n'est pas un diviseur de zéro. En effet :
$$ab = 0 \Longrightarrow a^{-1} \times ab = 0 \Longrightarrow b = 0$$
3. Dans un anneau intègre, nous avons la règle de simplification :
$$ab = ac \text{ et } a \neq 0 \Longrightarrow b = c$$
En effet, $ab = ac$ et $a \neq 0 \Longleftrightarrow a\,(b - c) = 0 \Longrightarrow b - c = 0 \Longleftrightarrow b = c$

3.2.4 Proposition

Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Soient $x \in A$ et $y \in A$, deux éléments qui commutent, c'est à dire que $xy = yx$; alors :
$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Démonstration

Nous ne faisons pas la démonstration ; elle se fait par récurrence sur n, et nous la retrouvons dans le chapitre qui présente le raisonnement par récurrence.
Nous insistons sur l'importance que x **et** y **commutent**. En effet, si x et y ne commutent pas, nous avons, par exemple :
$$(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + xy + yx + y^2$$

3.2.5 Définition et théorème

Soit $(A, +, \times)$ un anneau.

1. Un sous-ensemble $B \subset A$, non vide, est un sous-anneau de A si $(B, +, \times)$ un lui même un anneau
2. $B \subset A$ est un sous anneau de A si et seulement si :
   - B est non vide
   - Pour tout $x \in B$ et tout $y \in B$, $x - y \in B$ et $xy \in B$

Démonstration

1. Supposons que B soit un sous-anneau
   Alors, $(B, +)$ étant un groupe, $0 \in B$ et donc $B \neq \emptyset$; de plus, pour tout $x \in B$ et tout $y \in B$, $x + (-y) = x - y \in B$
   Comme B est un sous anneau, ma multiplication est une loi interne, et donc pour tout $x \in B$ et tout $y \in B$, $xy \in B$
2. Réciproquement, supposons B non vide et que $(\forall x \in B)$ et $(\forall y \in B)$, $x - y \in B$ et $xy \in B$
   - Que B soit non vide et que, $(\forall x \in B)$ et $(\forall y \in B)$, $x - y \in B$, montre que $(B, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$
   - Que, $(\forall x \in B)$ et $(\forall y \in B)$, $xy \in B$ montre que la multiplication est interne à B
   - La multiplication étant distributive dans A, elle l'est forcément dans B

   Donc, $(B, +, \times)$ est un anneau

Remarque 11 :

1. Si $(A, +, \times)$ est un anneau commutatif et intègre, il en est de même de tout sous-anneau.
2. Pour montrer qu'un ensemble A est un anneau, il est possible de démontrer que c'est un sous-anneau d'un anneau « plus gros », contenant A
3. Les sous-anneaux de $(\mathbb{Z}, +, \times)$ sont tous du type $(n\mathbb{Z}, +, \times)$ où $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 7 :

$\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \times\right)$ est l'anneau commutatif et unitaire des fonctions numériques d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, on appelle

$$A(x_0) = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \text{ telles que } f(x_0) = 0\right\}$$

Il faut montrer que $(A(x_0), +, \times)$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

3.2.6 Définition d'idéal

Soit $(A, +, \times)$ un anneau

1. On appelle idéal à gauche de A, tout sous groupe $(I, +)$ de $(A, +)$ tel que :
$$(\forall a \in A)(\forall i \in I)(a \times i \in I)$$
2. On appelle idéal à droite de A, tout sous groupe $(I, +)$ de $(A, +)$ tel que :
$$(\forall a \in A)(\forall i \in I)(i \times a \in I)$$
3. Un idéal bilatère est un idéal à droite et à gauche

Exemple 12 :

1. Si $(A, +, \times)$ est un anneau commutatif, il n'y a alors que des idéaux bilatères
2. Les idéaux de $(\mathbb{Z}, +, \times)$ sont de la forme $n\mathbb{Z}$
3. Si $(A, +, \times)$ est un anneau commutatif, alors pour tout $y_0 \in A$, l'ensemble
$$y_0 \times A = \{x \in A \text{ tels qu'il existe } a \in A \text{ tel que } x = a \times y_0\}$$
   est un idéal de A
4. L'ensemble $A(x_0) = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \text{ telles que } f(x_0) = 0\right\}$ est un idéal de $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \times\right)$

3.2.7 Proposition

Soit $(A, +, \times)$ un anneau
Si I et J sont 2 idéaux à gauche de A, alors $I \cap J$ est un idéal à gauche de A

Démonstration

Soient $(A, +, \times)$ un anneau et I et J 2 idéaux à gauche de A.

- Tout d'abord, $(I, +)$ et $(J, +)$ sont 2 sous-groupes de $(A, +)$ et donc $(I \cap J, +)$ est aussi un sous-groupe de $(A, +)$
- Soient $a \in A$ et $x \in I \cap J$
  - Comme $x \in I$, et que I est un idéal à gauche, alors $a \times x \in I$
  - De même, comme $x \in J$, et que J est un idéal à gauche, alors $a \times x \in J$

  Et donc, $a \times x \in I \cap J$

En conclusion, $I \cap J$ est un idéal à gauche de A

Remarque 12 :

Nous avons le même résultat pour les idéaux à droite et les idéaux bilatères.

3.2.8 Définition

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif

1. On appelle idéal principal, tout idéal de la forme $a \times A = A \times a$; on note souvent ce type d'idéal $a \times A = A \times a = (a)$
2. Un anneau est dit principal si tout idéal de A est principal

Exemple 13 :

Exemple d'anneau principal : $\mathbb{Z}$

3.2.9 Définition d'homomorphisme d'anneaux

Soient $(A, +, \times)$ et $(A_1, +, \times)$ 2 anneaux. Soit $f : A \longrightarrow A_1$ une aplication.
f est un homomorphisme d'anneaux si et seulement si, pour tout $x \in A$ et tout $y \in A$:

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(x \times y) = f(x) \times f(y) \end{cases}$$

Remarque 13 :

Le fait que, pour tout $x \in A$ et tout $y \in A$, nous ayions $f(x+y) = f(x) + f(y)$, fait de f un homomorphisme du groupe $(A, +)$ dans le groupe $(A_1, +)$

Exemple 14 :

Exemple d'homomorphisme d'anneaux :

$$\begin{cases} f : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \quad z & \longmapsto & f(z) = \overline{z} \end{cases}$$

3.2.10 Théorème

1. La composée de 2 homomorphismes d'anneaux est un homomorphisme d'anneaux
2. Soit $f : A \longrightarrow A_1$ un homomorphisme d'anneaux ; alors :
   (a) $f(0) = 0$
   (b) Pour tout $x \in A$, $f(-x) = -f(x)$
   (c) $f(A)$ est un sous-anneau de A_1
   (d) $\ker f = \{x \in A \text{ tel que } f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$ est un idéal bilatère de A

Démonstration

1. On démontre que la composée de 2 homomorphismes d'anneaux est un homomorphisme d'anneaux
   Soient $(A, +, \times)$, $(A_1, +, \times)$ et $(A_2, +, \times)$ 3 anneaux.
   Soient $f : A \longrightarrow A_1$ et $g : A_1 \longrightarrow A_2$ 2 homomorphismes d'anneaux.
   g et f étant des homomorphismes de groupes, $g \circ f$ est aussi un homomorphisme de groupe et donc $g \circ f(x + y) = g \circ f(x) + g \circ f(y)$
   Regardons maintenant la multiplication ; pour tout $x \in A$ et $y \in A$, nous avons :
   $$g \circ f(x \times y) = g[f(x \times y)] = g[f(x) \times f(y)] = g[f(x)] \times g[f(y)] = g \circ f(x) \times g \circ f(y)$$
   $g \circ f$ est bien un homomorphisme d'anneaux
2. Soit $f : A \longrightarrow A_1$ un homomorphisme d'anneaux
   (a) Les propriétés $f(0) = 0$ et $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in A$ sont des propriétés de l'homomorphisme d egroupe
   (b) **Montrons que $f(A)$ est un sous-anneau de A_1**
   - ▷ Par les propriétés d'homomorphisme de groupe, nous savons déjà que $(f(A), +)$ est un sous-groupe de $(A_1, +)$
   - ▷ Soient $y_1 \in f(A)$ et $y_2 \in f(A)$
     Il existe alors $x_1 \in A$ et $x_2 \in A$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$
     A étant un anneau, $x_1 \times x_2 \in A$ et donc $f(x_1 \times x_2) \in f(A)$. f étant un homomorphisme d'anneaux, $f(x_1 \times x_2) = f(x_1) \times f(x_2) = y_1 \times y_2$ et donc, $y_1 \times y_2 \in f(A)$

   $f(A)$ est donc un sous-anneau de A_1
   (c) **Montrons que $\ker f$ est un idéal bilatère de A**
   - ▷ Comme f est un homomorphisme de groupe additif, $\ker f$ est un sous-groupoe de A
   - ▷ Soit $a \in A$ et $k \in \ker f$; il faut montrer que $a \times k \in \ker f$ et $k \times a \in \ker f$
     Nous avons $f(a \times k) = f(a) \times f(k) = f(a) \times 0 = 0$ et donc $a \times k \in \ker f$
     Nous démontrerions de même que $k \times a \in \ker f$

   $\ker f$ est donc un idéal bilatère de A

3.2.11 Théorème

1. On appelle isomorphisme d'anneaux tout homomorphisme d'anneaux bijectif
2. Soient $(A, +, \times)$ et $(A_1, +, \times)$ 2 anneaux et $f : A \longrightarrow A_1$ un isomorphisme d'anneaux ; alors $f^{-1}A_1 :\longrightarrow A$ est aussi un isomorphisme d'anneaux

Démonstration

1. f est déjà un isomorphisme de groupe et $f^{-1}A_1 :\longrightarrow A$ est aussi un isomorphisme de groupe
2. Soient $y_1 \in A_1$ et $y_2 \in A_1$; il faut montrer que $f^{-1}(y_1 \times y_2) = f^{-1}(y_1) \times f^{-1}(y_2)$
   Il existe donc $x_1 \in A$ et $x_2 \in A$ uniques tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$; donc :
   $$f^{-1}(y_1 \times y_2) = f^{-1}[f(x_1) \times f(x_2)] = f^{-1}[f(x_1 \times x_2)] = x_1 \times x_2 = f^{-1}(y_1) \times f^{-1}(y_2)$$
   Ce que nous voulions

$f^{-1}A_1 :\longrightarrow A$ est donc un isomorphisme d'anneaux

3.3 Structure de corps

3.3.1 Définition de corps

Un ensemble $\mathbb{K}$, muni d'une addition et d'une multiplication est un corps si :

1. $(\mathbb{K}, +, \times)$ a une structure d'anneau
2. $(\mathbb{K}^*, \times)$ est un groupe de neutre 1 où nous avons noté 0 le neutre pour l'addition et $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$

On dit que $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un corps

Remarque 14 :

1. Si la seconde loi $\times$ est commutative, on dit que le corps $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un corps commutatif
2. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des corps commutatifs
3. Un corps $(\mathbb{K}, +, \times)$ n'a pas de diviseurs de 0
   En effet, soient $a \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}$ tels que $a \times b = 0$
   — Si $a = 0$, c'est fini
   — Supposons $a \neq 0$; composons alors à gauche par a^{-1}
   $$a \times b = 0 \Longleftrightarrow a^{-1} \times (a \times b) = a^{-1} \times (0) = 0 \Longleftrightarrow b = 0$$
   Ainsi, $a \times b = 0 \Longrightarrow a = 0$ ou $b = 0$

Exercice 8 :

On appelle $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) = \left\{x + y\sqrt{2} \text{ avec } x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q}\right\}$. Montrer que $\left(\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right), +, \times\right)$ est un corps

3.3.2 Définition de sous-corps

Soient $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps et $\mathbb{L} \subset \mathbb{K}$

1. $\mathbb{L}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}$ si et seulement si $(\mathbb{L}, +, \times)$ est un corps
2. Si $\mathbb{L}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}$, on dit que $\mathbb{K}$ est <u>une extension</u> de $\mathbb{L}$

Exemple 15 :

1. $\mathbb{Q}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$, et $\mathbb{R}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$
2. $\mathbb{Q}$ est un sous-corps de $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$, et $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$
3. $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ est une extension de $\mathbb{Q}$, tout comme $\mathbb{C}$ est une extension de $\mathbb{R}$

3.3.3 Théorème

Soient $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps et $\mathbb{L} \subset \mathbb{K}$ non vide
Pour que $\mathbb{L} \subset \mathbb{K}$ soit un sous-corps de $\mathbb{K}$, il faut et il suffit que :

1. $(\forall a \in \mathbb{L})\,(\forall b \in \mathbb{L})\,(a - b \in \mathbb{L} \text{ et } ab \in \mathbb{L})$
2. $(\forall a \in \mathbb{L})\,\left(a^{-1} \in \mathbb{L}\right)$

<u>**Démonstration**</u>

La démonstration est simple et laissée au lecteur

3.3.4 Théorème

Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps

1. Les seuls idéaux de $\mathbb{K}$ sont $\{0\}$ et $\mathbb{K}$
2. Réciproquement, si $(A, +, \times)$ est un anneau unitaire tel que les seuls idéaux soient $\{0\}$ et A, alors $(A, +, \times)$ est un corps

Démonstration

1. Soit $\mathbb{K}$ un corps et I un idéal de $\mathbb{K}$
   Supposons I non trivial ; il existe alors $b \in I$ tel que $b \neq 0$; alors, comme I est un idéal, $b^{-1} \times b \in I$, c'est à dire que $1 \in I$.
   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{K}$, $x \times 1 \in I$, c'est à dire que $x \in I$, et donc $I = \mathbb{K}$
2. Réciproquement, soit $(A, +, \times)$ un anneau unitaire tel que les seuls idéaux soient $\{0\}$ et A
   Il faut montrer que $(A, +, \times)$ est un corps.
   Soit $a \in A$ tel que $a \neq 0$; il suffit de montrer que a est inversible.
   L'ensemble $a \times A$ est un idéal de A et donc $a \times A = A$. A étant unitaire, il existe a' tel que $a \times a' = 1$, c'est à dire que $a' = a^{-1}$; a est donc inversible.

3.3.5 Définition d'homomorphisme de corps

Soient $(\mathbb{K}, +, \times)$ et $(\mathbb{K}_1, +, \times)$ 2 corps. Soit $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}_1$ une aplication.
f est un homomorphisme de corps si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{K}$ et tout $y \in \mathbb{K}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(x \times y) = f(x) \times f(y) \end{array} \right.$$

3.4 Exercices complémentaires

3.4.1 Structure de groupe

Exercice 9 :

On définit sur $\mathbb{Q}^*$ une loi de composition interne par $a \bullet b = \dfrac{ab}{2}$. Montrer $(\mathbb{Q}^*, \bullet)$ est un groupe abélien.

Exercice 10 :

Soit $a \in \mathbb{R}$ On définit, sur $\mathbb{R}$ la loi $\star$ définie par :

$$x \star y = x + y + a$$

Démontrer que $(\mathbb{R}, \star)$ est un groupe commutatif

Exercice 11 :

Dans $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, on définit la loi $\star$ par :

$$(a, b) \star (c, d) = (ac, ad + b)$$

Vérifier que $(\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}, \star)$ est un groupe

Exercice 12 :

Dans $\mathbb{R}^2$, on définit la loi $\star$ par :

$$(a, b) \star (c, d) = \left(a + c, be^c + de^{-a}\right)$$

Vérifier que $\left(\mathbb{R}^2, \star\right)$ est un groupe

Exercice 13 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$
Dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, on définit la loi $\star$ par :

$$(a, b) \star (c, d) = (ac, ad + bc^n)$$

Vérifier que $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \star)$ est un groupe

Exercice 14 :

Soit $(G, \star)$ un groupe de neutre e tel que, pour tout $x \in G$, $x \star x = e$. Démontrer que $(G, \star)$ est commutatif

Exercice 15 :

Soit $a \in \mathbb{N}$ fixé.On considère :

$$H_a = \left\{ q \in \mathbb{Q} \text{ tels que } q = \frac{1 + am}{1 + an} \text{ où } m \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Il faut montrer que H_a est un sous-groupe de $(\mathbb{Q}^*, \times)$

Exercice 16 :

Soit $(G, \star)$ un groupe et $H \subset G$, un sous-groupe de $(G, \star)$. On considère, dans G, la relation $\mathcal{R}$ suivante :

$$(\forall x \in G)\,(\forall y \in G)\,\big((x\mathcal{R}y) \iff \big(y^{-1} \star x \in H\big)\big)$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence
2. Montrer que les classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$ sont du type $x \star H$, où $x \in G$ et où :

$$x \star H = \{g \in G \text{ tels que } g = x \star h \text{ où } h \in H\}$$

3. Quelle est la classe d'équivalence de l'élément neutre e ?
4. On suppose que G est un groupe d'ordre fini n *(c'est à dire* Card $G = n$*)*.Montrer que l'ordre d'un sous-groupe de G divise l'ordre du groupe G *(C'est le théorème de Lagrange)*

Exercice 17 :

Soit $(G, \star)$ un groupe non forcément commutatif de neutre e.

1. On définit, dans G la relation $\mathcal{R}$ définie par :

$$(\forall x \in G)\,(\forall y \in G)\,\big((x\mathcal{R}y) \iff \big(\exists a \in G \text{ tel que } y = a \star x \star a^{-1}\big)\big)$$

   Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Si $x\mathcal{R}y$ on dit que x et y sont conjugués
2. Soit $a \in G$ et $H \subset G$ un sous-groupe de G. Montrer que l'ensemble $a \star H \star a^{-1}$ est un sous-groupe de G
3. Un sous-groupe $H \subset G$ est dit distingué si, pour tout $a \in G$, $H = a \star H \star a^{-1}$
   (a) Montrer que le centre de G,$Z(G)$ est un sous-groupe distingué de G
   (b) Montrer que l'intersection de 2 sous-groupes distingués est distinguée
   (c) Démontrer que $H \subset G$ est un sous groupe distingué si et seulement si, pour tout $x \in G$, $x \star H = H \star x$

Exercice 18 :

Soit $(G, \star)$ un groupe de neutre e, H_1 et H_2, 2 sous-groupes de $(G, \star)$.
On dit que H_1 et H_2 sont somme directe de G si et seulement si $H_1 \cap H_2 = \{e\}$ et, pour tout $x \in G$, il existe $x_1 \in H_1$ et $x_2 \in H_2$ tels que $x = x_1 \star x_2$
Démontrer que, dans ce cas, la décomposition $x = x_1 \star x_2$ est unique

Exercice 19 :

Soient G et G' 2 groupes, $f : G \longrightarrow G'$ et $g : G \longrightarrow G'$ 2 homomorphismes de groupes.
Soit H l'ensemble suivant :

$$H = \{x \in G \text{ tels que } f(x) = g(x)\}$$

Démontrer que H est un sous-groupe de G

Exercice 20 :

Soit $(G,\star)$ un groupe de neutre e et on considère l'application Φ définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl}(G,\star) & \longrightarrow & (G,\star)\\ x & \longmapsto & \Phi(x)=x^{-1}\end{array}\right.$$

Montrer que si Φ est un homomorphisme de groupe, alors $(G,\star)$ est un groupe commutatif

Exercice 21 :

1. Soient $(G,\star)$ et $(G_1,\top)$ 2 groupes et $f:(G,\star)\longrightarrow(G_1,\top)$ un homomorphisme de groupe. Démontrer que $\ker f$ est un sous-groupe distingué de G
2. On définit, dans $(G,\star)$ une relation $\mathcal{R}$ définie par :

$$(\forall x\in G)\,(\forall y\in G)\,((x\mathcal{R}y)\Longleftrightarrow(f(x)=f(y)))$$

   (a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence
   (b) Donner une autre définition de la condition $f(x)=f(y)$

Exercice 22 :

Soit $(G,\star)$ un groupe non commutatif et $Z(G)$ le centre de G. On appelle $\mathrm{Int}(G)$ l'ensemble des automorphismes intérieurs de G :

$$\mathrm{Int}(G)=\left\{f_a \text{ où } a\in G \text{ et } \left[\begin{array}{rcl}f_a:G & \longrightarrow & G\\ x & \longmapsto & f_a(x)=a\star x\star a^{-1}\end{array}\right.\right\}$$

1. Montrer que $(\mathrm{Int}(G),\circ)$, où $\circ$ est la composition des applications, est un groupe
2. On considère l'application φ définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\varphi:G & \longrightarrow & \mathrm{Int}(G)\\ a & \longmapsto & \varphi(a)=f_a\end{array}\right.$$

   Montrer que φ est un homomorphisme de groupe.
3. Donner $\ker\varphi$. Quand donc φ est un isomorphisme ?

Exercice 23 :

Démontrer qu'un sous groupe $H\subset G$ d'un groupe $(G,\star)$ est distingué si et seulement si il est stable par tous les automorphismes intérieurs de G

Exercice 24 :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $\omega=e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et φ, une application définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\varphi:(\mathbb{Z},+) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*,\times)\\ k & \longmapsto & \varphi(k)=\omega^k\end{array}\right.$$

1. Montrer que φ est un homomorphisme de groupe
2. Rechercher $\ker\varphi$ et $\mathrm{Im}\varphi$

3.4.2 Structure d'anneaux et de corps

Exercice 25 :

Soit $r=\sqrt[3]{2}$ et $K=\left\{x\in\mathbb{R} \text{ tel que } x=a+br+cr^2 \text{ avec } (a,b,c)\in\mathbb{Z}^3\right\}$. Montrer que $(K,+,\times)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R},+,\times)$

Exercice 26 :

On considère $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \oplus, \otimes)$ où l'addition $\oplus$ est une addition définie par :

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$

Et la multiplication $\otimes$ par :

$$(a, b) \otimes (c, d) = (ac, bd)$$

Montrer que $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \oplus, \otimes)$ est un anneau commutatif unitaire. Est-il intègre ?

Exercice 27 :

Soit $(A, +, \times)$ un anneau, non forcément commutatif, non forcément unitaire. Soit :

$$\mathcal{C} = \{c \in A \text{ tels que } (\forall x \in A)\,(x \times c = c \times x)\}$$

Il faut montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-anneau de $(A, +, \times)$

Exercice 28 :

Anneaux de Boole
Soit $(A, +, \times)$ un anneau tel que, pour tout $x \in A$, $x^2 = x$

1. Démontrer que, pour tout $x \in A$, $2x = x + x = 0$ et que $(A, +, \times)$ est un anneau commutatif
2. Démontrer que, pour tout $x \in A$ et tout $y \in A$, $xy\,(x + y) = 0$

Exercice 29 :

1. Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. Soit $x \in A$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$ *(x est nilpotent)*. Montrer que si x et y sont nilpotents, alors xy et $x + y$ sont nilpotents
2. On suppose que $(A, +, \times)$ est un anneau commutatif et unitaire. Soit $x \in A$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$. Montrer que $1 - x$ est inversible
3. Soit $(A, +, \times)$ un anneau non forcément commutatif. Soient $u \in A$ et $v \in A$ tels que uv soit nilpotent, c'est à dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(uv)^n = 0$. Il faut montrer que vu est nilpotent

Exercice 30 :

Soit $(A, +, \times)$ un anneau unitaire d'unité 1 et $\mathcal{U}$ l'ensemble des éléments inversibles de A. Il faut montrer que $\mathcal{U}, \times$ est un groupe.

Exercice 31 :

On considère $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2} \text{ avec } a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}\right\}$

1. Montrer que $\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right], +, \times\right)$ est un anneau
2. Pour $x = a + b\sqrt{2}$, on note $C\,(x) = a - b\sqrt{2}$; montrer que, pour tout x et tout y de $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, on a $C\,(xy) = C\,(x)\,C\,(y)$
3. Pour $x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, on note $N\,(x) = xC\,(x) = a^2 - 2b^2$. Montrer que, pour tout x et tout y de $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, on a $N\,(xy) = N\,(x)\,N\,(y)$
4. En déduire que les éléments inversibles de $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ sont ceux qui s'écrivent $a + b\sqrt{2}$ avec $a^2 - 2b^2 = \pm 1$.

3.5 Exercices corrigés

3.5.1 Structure de groupe

Exercice 1 :

1. *Montrer que $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| = 1\}$ est un groupe pour la multiplication.*

   Voilà qui n'est pas si difficile !!
   - ▷ On montre que si $z \in \mathcal{U}$ et $z' \in \mathcal{U}$, alors $zz' \in \mathcal{U}$
     En effet, nous avons $|zz'| = |z| \times |z'|$, et si $z \in \mathcal{U}$ et $z' \in \mathcal{U}$ alors $|z| = |z'| = 1$ et donc $|zz'| = 1$, et donc, $zz' \in \mathcal{U}$
   - ▷ D'autre part, 1, le neutre pour la multiplication est élément de $\mathcal{U}$
   - ▷ Si $z \in \mathcal{U}$, alors $|z|^2 = z\overline{z} = 1$, et donc $z^{-1} = \overline{z}$ et comme $\overline{z} \in \mathcal{U}$, $z^{-1} \in \mathcal{U}$; ainsi, tout $z \in \mathcal{U}$ admet un symétrique $z^{-1} \in \mathcal{U}$
   - ▷ Pour conclure, la multiplication est aussi commutative dans $\mathcal{U}$

   $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| = 1\}$ est donc un groupe commutatif pour la multiplication

2. *Soit E un ensemble et $\mathcal{B}(E)$ l'ensemble des bijections de E. Montrer que $(\mathcal{B}(E), \circ)$ est un groupe. En étudier la commutativité*
   - ▷ La composition de deux bijections étant une bijection, la loi $\circ$ est bien une loi de composition interne de $\mathcal{B}(E)$
   - ▷ D'autre part, la loi $\circ$ étant, de manière générale, associative ; elle l'est donc, en particulier dans $\mathcal{B}(E)$
   - ▷ L'élément neutre pour $\circ$ est l'application identique de E, notée Id_E
   - ▷ Comme tout $f \in \mathcal{B}(E)$ est bijective, il existe donc $f^{-1} \in \mathcal{B}(E)$ telle que $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$. f^{-1} est donc le symétrique de f dans $\mathcal{B}(E)$

   $(\mathcal{B}(E), \circ)$ est donc un groupe.

   Par contre, $(\mathcal{B}(E), \circ)$ n'est pas un groupe commutatif.

   Prenons, par exexemple $E = \{A; B; C\}$ et soient $f \in \mathcal{B}(E)$ et $g \in \mathcal{B}(E)$ telles que :

   $$f : \begin{pmatrix} A & B & C \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ A & C & B \end{pmatrix} \qquad g : \begin{pmatrix} A & B & C \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ C & A & B \end{pmatrix}$$

   Alors :

   $$f \circ g : \begin{pmatrix} A & B & C \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ B & A & C \end{pmatrix} \qquad g \circ f : \begin{pmatrix} A & B & C \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ C & B & A \end{pmatrix}$$

   On voit bient que $f \circ g \neq g \circ f$; il suffit de voir que $f \circ g(A) = f(g(A)) = f(C) = B$, alors que $g \circ f(A) = g(f(A)) = g(A) = C$; on a donc $f \circ g(A) \neq g \circ f(A)$
   On peut remarquer que $f \circ f = \mathrm{Id}_E$ et donc $f = f^{-1}$.
   D'où $(g \circ f) \circ (f \circ g) = g \circ (f \circ f) \circ g = g \circ \mathrm{Id}_E \circ g = g \circ g$. Nous avons :

   $$g \circ g = g^2 : \begin{pmatrix} A & B & C \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ B & C & A \end{pmatrix}$$

   Démontrer que $g^3 = \mathrm{Id}_E$ et que donc, $g^2 = g^{-1}$

Exercice 2 :

Un ensemble E est muni d'une loi $\star$ interne et associative ; on suppose que, pour tout $a \in G$, γ_a et δ_a sont surjectives (Voir 3.1.2). Montrer que $(E, \star)$ est un groupe

1. <u>Existence d'un élément neutre</u>

   Soit $a \in E$

   γ_a et δ_a étant surjectives :

- ▷ Il existe $e \in E$ tel que $\delta_a(e) = a \iff a = e \star a$
- ▷ Il existe $f \in E$ tel que $\gamma_a(f) = a \iff a = a \star f$

Quelque part, ici, e et f jouent un rôle d'élément neutre, mais, c'est un neutre qui, à priori, dépend de a ; ce n'est pas ce que nous cherchons. Ce que nous voudrions démontrer, c'est qu'il existe un élément e tel que, pour tout $x \in E$, $x \star e = e \star x = x$

Soit donc $x \in E$

Il existe $\alpha \in E$ tel que $\delta_a(\alpha) = a \star \alpha = x$; de même, il existe $\beta \in E$ tel que $\gamma_a(\beta) = \beta \star a = x$

Alors :

$$\left\{\begin{aligned} e \star x = &\ e \star (a \star \alpha) \\ = &\ (e \star a) \star \alpha \\ = &\ a \star \alpha = x \end{aligned}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{aligned} x \star f = &\ (\beta \star a) \star f \\ = &\ \beta \star (a \star f) \\ = &\ \beta \star a = x \end{aligned}\right.$$

Ainsi, pour tout $x \in E$, nous avons $e \star x = x$ et $x \star f = x$. En particulier :

- ▷ Si $x = f$, alors $e \star f = f$
- ▷ Si $x = e$, alors $e \star f = e$

Et donc : $f = e \star f = e$ Et donc, pour tout $x \in E$, $x \star e = e \star x = x$, et e est bien l'élément neutre de $(E, \star)$

2. Existence d'un élément symétrique pour tout $x \in E$

   Soit $x \in E$

   Il faut montrer qu'il existe $x_1 \in E$ tel que $x \star x_1 = x_1 \star x = e$ où e est l'élément neutre pour $\star$

   Comme γ_x et δ_x sont surjectives, il existe $u \in E$ et $v \in E$ tels que :

$$\delta_x(u) = e \iff u \star x = e \text{ et } \gamma_x(v) = e \iff x \star v = e$$

   Nous avons alors :

$$\begin{aligned} v = e \star v = &\ (u \star x) \star v \\ = &\ u \star (x \star v) \\ = &\ u \star e \\ = &\ u \end{aligned}$$

   Ainsi, pour tout $x \in E$, il existe $u \in E$ tel que $x \star u = u \star x = e$, c'est à dire que pour tout $x \in E$, il existe un symétrique.

Exercice 3 :

Soit E un ensemble quelconque et $a \in E$ un élément de E. Nous savons que $(\mathcal{B}(E), \circ)$ est un groupe. Nous appelons $\mathcal{A}$ l'ensemble des bijections de $\mathcal{B}(E)$ laissant a fixe (c'est à dire $f \in \mathcal{A} \iff f(a) = a$)*.*
Démontrer que $(\mathcal{A}, \circ)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{B}(E), \circ)$

Pour le démontrer, nous allons utiliser la caractérisation des sous-groupes vue dans le théorème 3.1.4

1. Tout d'abord, $\mathcal{A} \neq \emptyset$

   En effet, l'application identique Id_E est un élément de $\mathcal{A}$

2. D'autre part, si $f \in \mathcal{A}$, alors $f^{-1} \in \mathcal{A}$

   En effet, si $f \in \mathcal{A}$, f est une bijection et $f(a) = a$ et sa bijection réciproque f^{-1} vérifie :

$$f(a) = a \iff f^{-1} \circ f(a) = f^{-1}(a) \iff f^{-1}(a) = a$$

   Et donc $f^{-1} \in \mathcal{A}$

3. Soient $f \in \mathcal{A}$ et $g \in \mathcal{A}$, alors $f \circ g^{-1} \in \mathcal{A}$

   Nous avons $f \circ g^{-1}(a) = f\left[g^{-1}(a)\right] = f(a) = a$

   Donc $f \circ g^{-1} \in \mathcal{A}$

Ainsi, $(\mathcal{A}, \circ)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{B}(E), \circ)$

Exercice 4 :

Soit $(G,\star)$ un groupe. On appelle <u>centre de G</u> l'ensemble $Z(G)$ des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G, c'est à dire : $Z(G) = \{c \in G \text{ tels que } (\forall x \in G)(x \star c = c \star x)\}$ Démontrer que $(Z(G),\star)$ est un sous-groupe de $(G,\star)$

Une nouvelle fois, nous allons utiliser le théorème 3.1.4

1. <u>Nous avons $Z(G) \neq \emptyset$</u>
   En effet, l'élément neutre e est tel que, pour tout $x \in G$, $e \star x = x \star e$; donc $e \in Z(G)$
2. <u>Si $y \in Z(G)$, alors $y^{-1} \in Z(G)$</u>
   En effet, soit $y \in Z(G)$ et $u \in G$ quelconque ; alors $y \star u = u \star y$. En composant à droite par y^{-1}, nous obtenons :
   $$y \star u = u \star y \Longleftrightarrow (y \star u) \star y^{-1} = (u \star y) \star y^{-1} \Longleftrightarrow (y \star u) \star y^{-1} = u \star \left(y \star y^{-1}\right) \Longleftrightarrow (y \star u) \star y^{-1} = u$$
   En composant maintenant à gauche par y^{-1}, nous obtenons :
   $$(y \star u) \star y^{-1} = u \Longleftrightarrow y^{-1} \star (y \star u) \star y^{-1} = y^{-1} \star u \Longleftrightarrow \left(y^{-1} \star y\right) \star u \star y^{-1} = y^{-1} \star u \Longleftrightarrow u \star y^{-1} = y^{-1} \star u$$
   Et donc $y^{-1} \in Z(G)$
3. <u>Si $x \in Z(G)$ et $y \in Z(G)$, alors $x \star y^{-1} \in Z(G)$</u>
   Soient donc $x \in Z(G)$, $y \in Z(G)$ et $u \in G$, quelconque. Alors :
   $$\left(x \star y^{-1}\right) \star u = x \star \left(y^{-1} \star u\right) = x \star \left(u \star y^{-1}\right) = (x \star u) \star y^{-1} = (u \star x) \star y^{-1} = u \star \left(x \star y^{-1}\right)$$
   Et donc $x \star y^{-1} \in Z(G)$

$(Z(G),\star)$ est donc un sous-groupe de $(G,\star)$

Exercice 5 :

Soit $(G,\star)$ un groupe de neutre e et $a \in G$; on considère les applications f_a définies par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_a : G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & f_a(x) = a \star x \star a^{-1} \end{array}\right.$$

Montrer que f_a est un automorphisme

1. <u>Nous allons montrer que f_a est un homomorphisme de groupe *(un endomorphisme donc)*</u>
   Soient $x \in G$ et $y \in G$. Alors :
   $$\begin{aligned} f_a(x \star y) &= a \star (x \star y) \star a^{-1} \\ &= (a \star x) \star \left(y \star a^{-1}\right) \\ &= (a \star x) \star e \star \left(y \star a^{-1}\right) \\ &= (a \star x) \star \left(a^{-1} \star a\right) \star \left(y \star a^{-1}\right) \\ &= \left(a \star x \star a^{-1}\right) \star \left(a \star y \star a^{-1}\right) \\ &= f_a(x) \times f_a(y) \end{aligned}$$
   Nous avons donc, pour tout $x \in G$ et tout $y \in G$ $f_a(x \star y) = f_a(x) \times f_a(y)$
   f_a est bien un endomorphisme de $(G,\star)$
2. <u>IL faut maintenant montrer que f_a est bijectif</u>
   (a) **Montrons que f_a est injective**
   Soient $x \in G$ et $y \in G$ tels que $f_a(x) = f_a(y)$; alors :
   $$f_a(x) = f_a(y) \Longleftrightarrow a \star x \star a^{-1} = a \star y \star a^{-1}$$
   En composant à gauche par a^{-1}, nous avons :
   $$a \star x \star a^{-1} = a \star y \star a^{-1} \Longleftrightarrow a^{-1} \star a \star x \star a^{-1} = a^{-1} \star a \star y \star a^{-1} \Longleftrightarrow x \star a^{-1} = y \star a^{-1}$$
   En composant à droite par a, nous obtenons :
   $$x \star a^{-1} = y \star a^{-1} \Longleftrightarrow x \star a^{-1} \star a = y \star a^{-1} \star a \Longleftrightarrow x = y$$
   f_a est donc injective

(b) **Montrons que f_a est surjective**
Soit $y \in G$; existe-t-il $x \in G$ tel que $f_a(x) = y$?
Si cet $x \in G$ existe, alors $y = a \star x \star a^{-1}$, en composant à droite par a et à gauche par a^{-1}, on trouve $x = a^{-1} \star y \star a$
Nous avons alors $f_a(x) = a \star \left(a^{-1} \star y \star a\right) \star a^{-1} = y$, et donc f_a est surjective.

f_a est donc bijective

f_a est donc un automorphisme

Correction des exercices complémentaires sur les groupes

Exercice 9 :

On définit sur $\mathbb{Q}^*$ une loi de composition interne par $a \bullet b = \dfrac{ab}{2}$. Montrer $(\mathbb{Q}^*, \bullet)$ est un groupe abélien.

Ce n'est faire injure à personne que de dire que cet exercice est élémentaire et simplement calculatoire

→ La loi $\bullet$ est clairement de composition interne

→ La loi $\bullet$ est tout aussi clairement commutative

→ Elle est associative.
Soient $a \in \mathbb{Q}^*$, $b \in \mathbb{Q}^*$ et $c \in \mathbb{Q}^*$. Alors :
- $\star$ $a \bullet (b \bullet c) = a \bullet \left(\dfrac{cb}{2}\right) = \dfrac{a\frac{bc}{2}}{2} = \dfrac{abc}{4}$
- $\star$ $(a \bullet b) \bullet c = \left(\dfrac{ab}{2}\right) \bullet c = \dfrac{\frac{ab}{2}c}{2} = \dfrac{abc}{4}$

La loi $\bullet$ est bien associative

→ Elle admet un élément neutre.
Il faut donc trouver $e \in \mathbb{Q}^*$ tel que $a \bullet e = e \bullet a = a$, c'est à dire trouver $e \in \mathbb{Q}^*$ tel que $\dfrac{ae}{2} = a \iff ae = 2a \iff e = 2$
2 est donc l'élément neutre pour $\bullet$

→ Chaque élément $a \in \mathbb{Q}^*$ admet un symétrique pour $\bullet$
Soit $a \in \mathbb{Q}^*$; il faut donc trouver $x \in \mathbb{Q}^*$ tel que $a \bullet x = x \bullet a = 2$; or :
$a \bullet x = \dfrac{ax}{2} = 2 \iff ax = 4 \iff x = \dfrac{4}{a}$
Le symétrique de $a \in \mathbb{Q}^*$ est donc $\dfrac{4}{a}$

Ainsi $(\mathbb{Q}^*, \bullet)$ est un groupe abélien.

Exercice 10 :

Soit $a \in \mathbb{R}$ On définit, sur $\mathbb{R}$ la loi $\star$ définie par : $x \star y = x + y + a$ Démontrer que $(\mathbb{R}, \star)$ est un groupe commutatif

La loi $\star$ est de manière évidente interne et commutative.

▷ Montrons qu'elle est associative
Soient $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}$
- $x \star (y \star z) = x \star (y + z + a) = x + (y + z + a) + a = x + y + z + 2a$
- $(x \star y) \star z = (x + y + a) \star z = (x + y + a) + z + a = x + y + z + 2a$

Nous avons donc : $x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$; la loi $\star$ est bien associative.

▷ Montrons que la loi $\star$ admet un élément neutre
Si cet élément neutre existe, appelons le e, alors $x \star e = x$, c'est à dire :

$$x \star e = x + e + a = x \Longrightarrow e = -a$$

Donc, si lélément neutre existe, il est égal à $-a$; et réciproquement, nous avons $x \star (-a) = x + (-a) + a = x$

▷ Existe-t-il un symétrique pour la loi $\star$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Si ce symétrique existe, appelons le x_1, alors $x \star x_1 = -a$, et nous avons donc :

$$x \star x_1 = -a \Longleftrightarrow x + x_1 + a = -a \Longleftrightarrow x_1 = -x - 2a$$

Réciproquement, il est clair que $x \star (-x-2a) = -a$ et donc que tour réel x, admet pour la loi $\star$, un symétrique

$(\mathbb{R}, \star)$ est donc un groupe commutatif

Exercice 11 :

Dans $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, on définit la loi $\star$ par : $(a,b) \star (c,d) = (ac, ad+b)$ Vérifier que $(\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}, \star)$ est un groupe

1. C'est clairement une loi interne
   Nous avons $(ac, ad+b) \in \mathbb{R}^2$ et comme $a > 0$ et $c > 0$, nous avons $ac > 0$ et donc $(ac, ad+b) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$
2. La loi $\star$ n'est pas commutative
   En effet :
   - $(1,2) \star (3,4) = (3, 4+2) = (3,6)$
   - $(3,4) \star (1,2) = (3, 6+4) = (3,10)$

   Nous avons $(1,2) \star (3,4) \neq (3,4) \star (1,2)$ et la loi $\star$ n'est donc pas commutative
3. Montrons que la loi est associative Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, $(c,d) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ et $(e,f) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$
   - Premièrement :
   $$\begin{aligned} (a,b) \star ((c,d) \star (e,f)) = & \ (a,b) \star ((ce, cf+d)) \\ = & \ (ace, a(cf+d)+b) \\ = & \ (ace, acf + ad + b) \end{aligned}$$
   - En second lieu :
   $$\begin{aligned} ((a,b) \star (c,d)) \star (e,f) = & \ (ac, ad+b) \star (e,f) \\ = & \ (ace, ac \times f + ad + b) \\ = & \ (ace, acf + ad + b) \end{aligned}$$

   Nous avons donc bien $(a,b) \star ((c,d) \star (e,f)) = ((a,b) \star (c,d)) \star (e,f)$ et mla loi $\star$ est associative.
4. Existence d'un élément neutre
   S'il existe un élément neutre noté (e,f), nous devons avoir, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$:
   $$(a,b) \star (e,f) = (a,b)$$
   Or, $(a,b) \star (e,f) = (ae, af+b)$ et
   $$(a,b) \star (e,f) = (a,b) \Longleftrightarrow (ae, af+b) = (a,b)$$
   D'où nous avons le système déquations, vrai pour tout $a > 0$ et tout $b \in \mathbb{R}$:
   $$\left\{ \begin{array}{rl} ae = & a \\ af + b = & b \end{array} \right. \Longleftrightarrow e = 1 \text{ et } f = 0$$
   D'où, le couple $(1,0)$ est le neutre pour $\star$
5. Existence d'un symétrique
   Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$; si (a,b) admet un symétrique pour la loi $\star$, alors, ce symétrique $(c,d) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ est tel que :
   $$(a,b) \star (c,d) = (1,0)$$
   Nous avons alors :
   $$(ac = 1 \text{ et } ad + b = 0) \Longleftrightarrow \left(c = \frac{1}{a} \text{ et } d = \frac{-b}{a} \right)$$
   Ainsi, le symétrique de $(a,b) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ pour la loi $\star$ est donné par : $\left(\frac{1}{a}, \frac{-b}{a} \right)$

$(\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}, \star)$ est donc un groupe non commutatif

Exercice 12 :

Dans $\mathbb{R}^2$, on définit la loi $\star$ par : $(a,b)\star(c,d)=(a+c,be^c+de^{-a})$ Vérifier que $\left(\mathbb{R}^2,\star\right)$ est un groupe

C'est clairement une loi de composition interne

1. Ce n'est pas une loi commutative
   En effet :
   - $(1,0)\star(0,1)=\left(1,e^{-1}\right)$
   - $(0,1)\star(1,0)=(1,e)$

   Nous avons $(1,0)\star(0,1)\neq(0,1)\star(1,0)$ et la loi $_star$ n'est pas commutative.
2. Elle est associative
   Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $(c,d)\in\mathbb{R}^2$ et $(g,h)\in\mathbb{R}^2$
   - Premièrement :
   $$\begin{aligned}(a,b)\star((c,d)\star(g,h)) &= (a,b)\star((c+g,de^g+he^{-c}))\\ &= \left(a+c+g,be^{c+g}+\left(de^g+he^{-c}\right)e^{-a}\right)\\ &= \left(a+c+g,be^{c+g}+de^{g-a}+he^{-c-a}\right)\end{aligned}$$
   - En second lieu :
   $$\begin{aligned}((a,b)\star(c,d))\star(g,h) &= \left(a+c,be^c+de^{-a}\right)\star(g,h)\\ &= \left(a+c+g,\left(be^c+de^{-a}\right)e^g+he^{-(a+c)}\right)\\ &= \left(a+c+g,be^{c+g}+de^{-a+g}+he^{-a-c}\right)\end{aligned}$$

   Nous avons donc bien $(a,b)\star((c,d)\star(g,h))=((a,b)\star(c,d))\star(g,h)$ et mla loi $\star$ est associative.
3. La loi $\star$ admet un élément neutre
   S'il existe un élément neutre noté (c,d), nous devons avoir, pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$:
   $$(a,b)\star(c,d)=(a,b)$$
   Ce qui se traduit par :
   $$(a,b)\star(c,d)=(a,b)\Longleftrightarrow\left(a+c,be^c+de^{-a}\right)=(a,b)$$
   Nous obtenons donc le système :
   $$\left\{\begin{aligned}a+c &= a\\ be^c+de^{-a} &= b\end{aligned}\right.\Longrightarrow c=0\text{ et }b+de^{-a}=b\Longrightarrow c=0\text{ et }d=0$$
   D'où, le couple $(0,0)$ est le neutre pour $\star$
4. Existence d'un symétrique
   Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$; si (a,b) admet un symétrique pour la loi $\star$, alors, ce symétrique $(c,d)\in\mathbb{R}^2$ est tel que :
   $$(a,b)\star(c,d)=(0,0)$$
   Nous avons alors :
   $$\left(a+c=0\text{ et }be^c+de^{-a}=0\right)\Longleftrightarrow(c=-a\text{ et }d=-b)$$
   Ainsi, le symétrique de $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ pour la loi $\star$ est donné par : $(-a,-b)$

$\left(\mathbb{R}^2,\star\right)$ est donc un groupe non commutatif

Exercice 13 :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Dans $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$, on définit la loi $\star$ par : $(a,b)\star(c,d)=(ac,ad+bc^n)$ Vérifier que $(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},\star)$ est un groupe

1. C'est une loi de composition interne
   Si $a\neq0$ et $c\neq0$, alors $ac\neq0$ et donc, nous avons bien $(ac,ac+bc^n)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$

2. Elle n'est pas commutative si $n \geqslant 2$
   Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, $(c,d) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$; alors :
   - $(a,b) \star (c,d) = (ac, ad + bc^n)$
   - $(c,d) \star (a,b) = (ac, bc + da^n)$

   Bien entendu, à priori, nous avons $(a,b) \star (c,d) \neq (c,d) \star (a,b)$
   - ▷ Si $n = 1$, alors $(ac, ad + bc^n) = (ac, ad + bc)$ et $(ac, bc + da^n) = (ac, bc + da)$ et nous avons $(a,b) \star (c,d) = (c,d) \star (a,b)$
     La loi $\star$ est commutative pour $n = 1$
   - ▷ Si $n \geqslant 2$, prenons un cas particulier :
     - $(2,0) \star (3,1) = (6, 2 + 0 \times 3^n) = (6,2)$
     - $(3,1) \star (2,0) = (6, 0 + 1 \times 2^n) = (6, 2^n)$

     Sauf si $n = 1$, nous avons toujours $2^n \neq 2$

   Ainsi, si $n \geqslant 2$, la loi $\star$ n'est pas commutative
3. La loi $\star$ admet un élément neutre
   S'il existe un élément neutre noté (c,d), nous devons avoir, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$:
   $$(a,b) \star (c,d) = (a,b)$$
   Ce qui se traduit par :
   $$(a,b) \star (c,d) = (a,b) \Longleftrightarrow (ac, ad + bc^n) = (a,b)$$
   Nous obtenons donc le système :
   $$\begin{cases} ac = & a \\ ad + bc^n = & b \end{cases} \Longrightarrow c = 1 \text{ et } ad + b = b \Longrightarrow c = 1 \text{ et } d = 0$$
   D'où, le couple $(1,0)$ est le neutre pour $\star$
4. Existence d'un symétrique
   Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$; si (a,b) admet un symétrique pour la loi $\star$, alors, ce symétrique $(c,d) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ est tel que :
   $$(a,b) \star (c,d) = (1,0)$$
   Nous avons alors :
   $$(ac = 1 \text{ et } ad + bc^n = 0) \Longleftrightarrow \left(c = \frac{1}{a} \text{ et } d = \frac{-b}{a^{n+1}}\right)$$
   Ainsi, le symétrique de $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ pour la loi $\star$ est donné par : $\left(\frac{1}{a}, \frac{-b}{a^{n+1}}\right)$

Ainsi, $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \star)$ est un groupe *(commutatif si et seulement si $n = 1$)*

Exercice 14 :

Soit $(G,\star)$ un groupe de neutre e tel que, pour tout $x \in G$, $x \star x = e$. Démontrer que $(G,\star)$ est commutatif

Nous devons donc montrer que, pour tout $x \in G$ et tout $y \in G$, $x \star y = y \star x$
De l'égalité $x \star x = e$, on peut déduire que tout $x \in G$ est son propre inverse.
Soient donc $x \in G$ et $y \in G$; alors, $(x \star y) \star (x \star y) = e$.
Composons à droite par y ; alors :
$$(x \star y) \star (x \star y) = e \Longleftrightarrow (x \star y) \star (x \star y) \star y = e \star y \Longleftrightarrow x \star (y \star x) \star y \star y = y \Longleftrightarrow x \star (y \star x) = y$$
Composons à gauche par x ; alors :
$$(x \star y) \star (x \star y) = e \Longleftrightarrow x \star (y \star x) = y \Longleftrightarrow x \star x \star (y \star x) = x \star y \Longleftrightarrow e \star (y \star x) = x \star y$$
Nous avons donc $y \star x = x \star y$. $(G,\star)$ est bien commutatif

Exercice 15 :

Soit $a \in \mathbb{N}$ fixé.On considère : $H_a = \left\{q \in \mathbb{Q} \text{ tels que } q = \dfrac{1+am}{1+an} \text{ où } m \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{Z}\right\}$ Il faut montrer que H_a est un sous-groupe de $(\mathbb{Q}^*, \times)$

1. Une première remarque si $a = 0$
   Alors, $H_0 = \{1\}$ et H_0 est un sous groupe trivial de $(\mathbb{Q}^*, \times)$
2. Supposons maintenant $a \in \mathbb{N}^*$
   (a) Dans tous les cas, $H_a \neq \emptyset$ puisque $1 = \dfrac{1+0\times a}{1+0\times a} \in H_a$ *(Nous avons fait $m = n = 0$, mais nous aurions pu très bien ne faire que $m = n$)*
   (b) Soit $q_1 \in H_a$ et $q_2 \in H_a$.
   Alors $q_1 = \dfrac{1+am_1}{1+an_1}$ où $m_1 \in \mathbb{Z}$ et $n_1 \in \mathbb{Z}$; de même, $q_2 = \dfrac{1+am_2}{1+an_2}$ où $m_2 \in \mathbb{Z}$ et $n_2 \in \mathbb{Z}$

   $$q_1 \times (q_2)^{-1} = \frac{1+am_1}{1+an_1} \times \frac{1+an_2}{1+am_2} = \frac{(1+am_1)(1+an_2)}{(1+an_1)(1+am_2)} = \frac{1+a(n_2+m_1+am_1n_2)}{1+a(n_1+m_2+am_2n_1)} = \frac{1+aM}{1+aN}$$

   où $M = n_2 + m_1 + am_1n_2$ et $N = n_1 + m_2 + am_2n_1$; nous avons $M \in \mathbb{Z}$ et $N \in \mathbb{Z}$ et donc $q_1 \times (q_2)^{-1} \in H_a$

   H_a est bien un sous-groupe de $(\mathbb{Q}^*, \times)$

Exercice 16 :

Soit $(G, \star)$ un groupe et $H \subset G$, un sous-groupe de $(G, \star)$. On considère, dans G, la relation $\mathcal{R}$ suivante :

$$(\forall x \in G)(\forall y \in G)\left((x\mathcal{R}y) \iff \left(y^{-1} \star x \in H\right)\right)$$

1. *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence*
   ▷ Elle est réflexive
   Soit $x \in G$. Alors, $x^{-1} \star x = e \in H$ et donc, nous avons $x\mathcal{R}x$
   ▷ Elle est symétrique
   Soient $x \in G$ et $y \in G$ tels que $x\mathcal{R}y$; alors $y^{-1} \star x \in H$. H étant un sous groupe, l'inverse de $y^{-1} \star x$ est aussi dans H. Or,$\left(y^{-1} \star x\right)^{-1} = x^{-1} \star y$.
   Donc $x^{-1} \star y \in H$ et nous avons $y\mathcal{R}x$
   ▷ Elle est transitive
   Soient $x \in G$, $y \in G$ et $z \in G$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Alors $y^{-1} \star x \in H$ et $z^{-1} \star y \in H$.
   La loi $\star$ étant interne à H, nous avons donc : $\left(z^{-1} \star y\right) \star \left(y^{-1} \star x\right) \in H$. de l'associativité, nous avons :
   $$\left(z^{-1} \star y\right) \star \left(y^{-1} \star x\right) = z^{-1} \star \left(y \star y^{-1}\right) \star x = z^{-1} \star x$$
   Et donc $z^{-1} \star x \in H$ et donc $x\mathcal{R}z$

   $\mathcal{R}$ est donc bien une relation d'équivalence
2. *Montrer que les classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$ sont du type $x \star H$, où $x \in G$ et où :*
   $$x \star H = \{g \in G \text{ tels que } g = x \star h \text{ où } h \in H\}$$

   Nous appelons $\dot{x}$ la classe de x modulo $\mathcal{R}$; il faut donc montrer que $\dot{x} = x \star H$
   ▷ Soit $y \in \dot{x}$; alors $y\mathcal{R}x$ et donc $x^{-1}y \in H$, c'est à dire qu'il existe $h \in H$ tel que $x^{-1}y = h \iff y = x \star h$; et donc $y \in x \star H$
   Nous en déduisons que $\dot{x} \subset x \star H$
   ▷ Soit maintenant $y \in x \star H$; il existe donc $h \in H$ tel que $y = x \star h$ et donc $x^{-1} \star y = h$, c'est à dire $x^{-1} \star y \in H$; nous avons donc $y\mathcal{R}x$, c'est à dire $y \in \dot{x}$
   Nous en déduisons que $x \star H \subset \dot{x}$

Nous avons donc $x \star H = \dot{x}$; les classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$ sont donc du type $x \star H$, où $x \in G$.

3. *Quelle est la classe d'équivalence de l'élément neutre e ?*

   Clairement, $H = \dot{e}$

4. *On suppose que G est un groupe d'ordre fini n (c'est à dire $\text{Card } G = n$).Montrer que l'ordre d'un sous-groupe de G divise l'ordre du groupe G*

   Soit $H \subset G$ un sous-groupe de G de cardinal p. Alors, $p \leqslant n$

   Si nous considérons $\delta_x : H \longrightarrow x \star H$ *(cf 3.1.2)*, δ_x est une bijection de H sur $x \star H$ et donc $\text{Card } x \star H = \text{Card } H = p$

   D'autre part, les classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$ forment une partition de G et elles sont en nombre fini k. Comme toutes les classes d'équivalence ont le même nombre d'éléments, nous avons $n = k \times p$ et donc p divise n

   D'où le résultat

Exercice 17 :

Soit $(G, \star)$ un groupe non forcément commutatif de neutre e.

1. *On définit, dans G la relation $\mathcal{R}$ définie par : $(\forall x \in G)\ (\forall y \in G)\ \big((x\mathcal{R}y) \iff \big(\exists a \in G \text{ tel que } y = a \star x \star a^{-1}\big)\big)$ Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*

   ▷ Elle est réflexive

   Soit $x \in G$. Il existe $a = e$ tel que $x = e \star x \star e$; comme e est son propre inverse, nous avons $x\mathcal{R}x$

   ▷ Elle est symétrique

   Soient $x \in G$ et $y \in G$ tels que $x\mathcal{R}y$

   Il existe donc $a \in G$ tel que $y = a \star x \star a^{-1}$

   En composant à droite par a, nous avons $y \star a = \big(a \star x \star a^{-1}\big) \star a = (a \star x) \star \big(a^{-1} \star a\big) = a \star x$

   En composant, maintenant, à gauche, par a^{-1}, nous avons $a^{-1} \star y \star a = a^{-1} \star (a \star x) = \big(a^{-1} \star a\big) \star x = x$

   Il existe donc $u = a^{-1}$ tel que $x = u \star y \star u^{-1}$ et donc $y\mathcal{R}x$

   ▷ Elle est transitive

   Soient $x \in G$, $y \in G$ et $z \in G$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$

   Il existe donc $a \in G$ tel que $y = a \star x \star a^{-1}$ et il existe $u \in G$ tel que $z = u \star y \star u^{-1}$

   Alors $z = u \star y \star u^{-1} = u \star \big(a \star x \star a^{-1}\big) \star u^{-1} = (u \star a) \star x \star \big(a^{-1} \star u^{-1}\big)$

   Or, $(u \star a)^{-1} = a^{-1} \star u^{-1}$.

   Ainsi, il existe $W \in G$, $W = u \star a$ tel que $z = W \star x \star W^{-1}$ et donc, nous avons $x\mathcal{R}z$

   La relation est bien transitive

   $\mathcal{R}$ est donc une relation d'équivalence.

2. *Soit $a \in G$ et $H \subset G$ un sous-groupe de G. Montrer que l'ensemble $a \star H \star a^{-1}$ est un sous-groupe de G*

   Rappelons ce qu'est $a \star H \star a^{-1}$:

   $$a \star H \star a^{-1} = \big\{g \in G \text{ tel qu'il existe } h \in H \text{ tel que } g = a \star h \star a^{-1}\big\}$$

   ▷ Tout d'abord $a \star H \star a^{-1}$ n'est pas vide

   En effet, $e \in a \star H \star a^{-1}$ car $e = a \star e \star a^{-1}$ et comme $e \in H$, nous avons $e \in a \star H \star a^{-1}$

   ▷ Montrons que si $x \in a \star H \star a^{-1}$ et $y \in a \star H \star a^{-1}$, alors $x \star y^{-1} \in a \star H \star a^{-1}$

   Soient donc $x \in a \star H \star a^{-1}$ et $y \in a \star H \star a^{-1}$

   Alors il existe $h_1 \in H$ tel que $x = a \star h_1 \star a^{-1}$ et $h_2 \in H$ tel que $y = a \star h_2 \star a^{-1}$.

   Nous avons $y^{-1} = a \star h_2^{-1} \star a^{-1}$ et donc

   $$x \star y^{-1} = \big(a \star h_1 \star a^{-1}\big) \star \big(a \star h_2^{-1} \star a^{-1}\big) = (a \star h_1) \star \big(a^{-1} \star a\big) \star \big(h_2^{-1} \star a^{-1}\big) = a \star \big(h_1 \star h_2^{-1}\big) \star a^{-1}$$

   Comme H est un sous-groupe, $h_1 \star h_2^{-1} \in H$, et en posant $U = h_1 \star h_2^{-1}$, nous avons $x \star y^{-1} = a \star U \star a^{-1}$ et donc $x \star y^{-1} \in a \star H \star a^{-1}$

$a \star H \star a^{-1}$ est donc un sous-groupe de G

3. *Un sous-groupe $H \subset G$ est dit distingué si, pour tout $a \in G$, $H = a \star H \star a^{-1}$*

   (a) *Montrer que le centre de G,$Z(G)$ est un sous-groupe distingué de G*

   Il faut donc démontrer que, pour tout $a \in G$, $Z(G) = a \star Z(G) \star a^{-1}$

   Soit donc $a \in G$

   — Nous avons $Z(G) \subset a \star Z(G) \star a^{-1}$

   En effet, soir $z \in Z(G)$; alors $a \star z \star a^{-1} \in a \star Z(G) \star a^{-1}$. Or, comme $z \in Z(G)$, nous avons :

$$(a \star z) \star a^{-1} = (z \star a) \star a^{-1} = z \star \left(a \star a^{-1}\right) = z$$

   Donc $z \in a \star Z(G) \star a^{-1}$ et donc $Z(G) \subset a \star Z(G) \star a^{-1}$

   — Nous avons $a \star Z(G) \star a^{-1} \subset Z(G)$

   Soit $u \in a \star Z(G) \star a^{-1}$ il existe $z \in Z(G)$ tel qie $h = a \star z \star a^{-1}$; comme $z \in Z(G)$, nous avons $h = z$ et $h \in Z(G)$

   Et donc, pour tout $a \in G$, nous avons $Z(G) = a \star Z(G) \star a^{-1}$ et $Z(G)$ est un sous-groupe distingué de G

   (b) *Montrer que l'intersection de 2 sous-groupes distingués est distinguée*

   Soient H_1 et H_2 2 sous-groupes distingués de $(G, \star)$ et posons $X = H_1 \cap H_2$

   Tout d'abord, X est un sous-groupe de $(G, \star)$ comme intersection de sous-groupes. Montrons que pour tout $a \in G$, $X = a \star X \star a^{-1}$

   ▷ Soit $x \in X$
   - Alors $x \in H_1$ et, H_1 étant distingué, il existe $h_1 \in H_1$ tel que $x = a \star h_1 \star a^{-1}$
   - De même, $x \in H_2$ et, H_2 étant distingué, il existe aussi $h_2 \in H_2$ tel que $x = a \star h_2 \star a^{-1}$

   Alors, nous avons $x = a \star h_1 \star a^{-1} = a \star h_2 \star a^{-1}$ et donc, d'après les propriétés de groupe, $h_1 = h_2 = h$, ce qui veut dire que $h \in H_1 \cap H_2$ autrement dit $h \in X$ et $x \in a \star X \star a^{-1}$

   En conclusion, $X \subset a \star X \star a^{-1}$

   ▷ Soit, maintenant, $x \in a \star X \star a^{-1}$

   Alors, il existe $y \in X$ tel que $x = a \star y \star a^{-1}$
   - Comme $y \in X$, alors $y \in H_1$, et H_1 étant distingué en G, $a \star y \star a^{-1} \in H_1$
   - De même, comme $y \in X$, alors $y \in H_2$, et H_2 étant distingué en G, $a \star y \star a^{-1} \in H_2$

   Donc $x \in H_1 \cap H_2$, c'est à dire $x \in X$ et $a \star X \star a^{-1} \subset X$

   Ainsi, $X = a \star X \star a^{-1}$ et $X = H_1 \cap H_2$ est distingué en G

   (c) *Démontrer que $H \subset G$ est un sous groupe distingué si et seulement si, pour tout $x \in G$, $x \star H = H \star x$*

   i. Supposons que H est un sous-groupe distingué, alors pour tout $x \in G$, nous avons $x \star H \star x^{-1} = H$

   Montrons que $x \star H = H \star x$

   Soit $y \in x \star H$; alors, il existe $h \in H$ tel que $y = x \star h$; en composant à gauche par x^{-1}, nous avons $y \star x^{-1} = x \star h \star x^{-1}$.

   Nous avons $x \star h \star x^{-1} \in x \star H \star x^{-1}$, et H étant distingué, $x \star h \star x^{-1} \in H \iff y \star x^{-1} \in H$.

   Il existe donc $h_1 \in H$ tel que $y \star x^{-1} = h_1$, c'est à dire tel que $y = h_1 \star x$; et donc $y \in H \star x$.

   Nous avons donc $x \star H \subset H \star x$; nous démontrerions de la même manière que $H \star x \subset x \star H$

   Et donc $x \star H = H \star x$

   ii. Supposons que $x \star H = H \star x$

   Montrons que H est distingué, c'est à dire que $x \star H \star x^{-1} = H$

   ▷ Montrons que $H \subset x \star H \star x^{-1}$

   Soit $y \in H$ et considérons $y \star x$

   $y \star x \in H \star x$, et comme $x \star H = H \star x$, il existe $h_1 \in H$ tel que $y \star x = x \star h_1$. En composant à droite par x^{-1}, nous obtenons $y = x \star h_1 \star x^{-1}$ et donc $y \in x \star H \star x^{-1}$

   Nous concluons que $H \subset x \star H \star x^{-1}$

▷ Montrons, maintenant que $x \star H \star x^{-1} \subset H$
Soit donc $y \in x \star H \star x^{-1}$
Il existe donc $h \in H$ tel que $y = x \star h \star x^{-1}$, c'est à dire, en composant à droite par x, que nous avons $y \star x = x \star h$ et donc $y \star x \in x \star H$
Comme $x \star H = H \star x$, il existe $h_1 \in H$ tel que $y \star x = h_1 \star x$; en composant une nouvelle fois à droite par x^{-1}, nous obtenons $y = h_1$ et donc $y \in H$
Et donc $x \star H \star x^{-1} \subset H$

En conclusion, $x \star H \star x^{-1} = H$ et H est distingué.

Exercice 18 :

Soit $(G, \star)$ un groupe de neutre e, H_1 et H_2, 2 sous-groupes de $(G, \star)$. On dit que H_1 et H_2 sont somme directe de G si et seulement si $H_1 \cap H_2 = \{e\}$ et, pour tout $x \in G$, il existe $x_1 \in H_1$ et $x_2 \in H_2$ tels que $x = x_1 \star x_2$ Démontrer que, dans ce cas, la décomposition $x = x_1 \star x_2$ est unique

Soient donc H_1 et H_2 deux sous-groupes de G qui sont somme directe de G
Soit $x \in G$ et supposons qu'il y ait 2 décompositions de x, c'est à dire :

$$x = x_1 \star x_2 = y_1 \star y_2 \text{ où } x_1 \in H_1 \ , \ x_2 \in H_2 \text{ et } y_1 \in H_1 \ , \ y_2 \in H_2$$

Alors, en composant à droite par l'inverse de x_2, nous avons :

$$x_1 \star x_2 = y_1 \star y_2 \iff x_1 \star x_2 \star (x_2)^{-1} = y_1 \star y_2 \star (x_2)^{-1} \iff x_1 = y_1 \star y_2 \star (x_2)^{-1}$$

Composons maintenant à gauche par l'inverse de y_1 ; nous avons :

$$x_1 = y_1 \star y_2 \star (x_2)^{-1} \iff (y_1)^{-1} \star x_1 = (y_1)^{-1} \star y_1 \star y_2 \star (x_2)^{-1} \iff (y_1)^{-1} \star x_1 = y_2 \star (x_2)^{-1}$$

Appelons $z = (y_1)^{-1} \star x_1 = y_2 \star (x_2)^{-1}$
H_1 étant un sous-groupe, nous avons $(y_1)^{-1} \star x_1 \in H_1$; de même, H_2 étant un sous-groupe, nous avons $y_2 \star (x_2)^{-1} \in H_2$, c'est à dire $z \in H_1$ et $z \in H_2$; en d'autres termes : $z \in H_1 \cap H_2$.
Comme $H_1 \cap H_2 = \{e\}$, $z = e$ et donc :

$$(y_1)^{-1} \star x_1 = e \iff y_1 = x_1 \text{ et } y_2 \star (x_2)^{-1} = e \iff y_2 = x_2$$

Il y a donc unicité de la décomposition

Exercice 19 :

Soit $(G, \star)$ un groupe de neutre e et on considère l'application Φ définie par :

$$\begin{cases} (G, \star) & \longrightarrow & (G, \star) \\ x & \longmapsto & \Phi(x) = x^{-1} \end{cases}$$

Montrer que si Φ est un homomorphisme de groupe, alors $(G, \star)$ est un groupe commutatif

Nous supposons donc que Φ est un homomorphisme de groupe *(c'est même un endomorphisme)*
Il faut donc montrer que, pour tout $x \in G$ et tout $y \in G$, $x \star y = y \star x$
Comme Φ est un homomorphisme, nous avons $\Phi\left(x^{-1} \star y^{-1}\right) = \Phi\left(x^{-1}\right) \star \Phi\left(y^{-1}\right) = x \star y$
Comme $x^{-1} \star y^{-1} = (y \star x)^{-1}$, nous avons :

$$\Phi\left(x^{-1} \star y^{-1}\right) = \Phi\left((y \star x)^{-1}\right) = y \star x$$

Et nous avons donc $x \star y = y \star x$ et $(G, \star)$ est bien un groupe commutatif

Exercice 20 :

1. *Soient $(G,\star)$ et $(G_1,\top)$ 2 groupes et $f:(G,\star)\longrightarrow(G_1,\top)$ un homomorphisme de groupe. Démontrer que $\ker f$ est un sous-groupe distingué de G*

   Il faut donc montrer que, pour tout $x\in G$, $\ker f = x\star\ker f\star x^{-1}$
   - ▷ Soit $z\in\ker f$; alors, $f(z)=e$ et $x^{-1}\star z\star x\in\ker f$. En effet :

   $$f\left(x^{-1}\star z\star x\right)=f\left(x^{-1}\right)\star f(z)\star f(x)=(f(x))^{-1}\star e\star f(x)=e$$

     Il existe donc $k\in\ker f$ tel que $x^{-1}\star z\star x=k$, et donc $z=x\star k\star x^{-1}$ et donc $z\in x\star\ker f\star x^{-1}$
     Vous avons donc $\ker f\subset x\star\ker f\star x^{-1}$
   - ▷ Réciproquement soit $z\in x\star\ker f\star x^{-1}$
     Il existe donc $k\in\ker f$ tel que $z=x\star k\star x^{-1}$; on démontre facilement que $f(z)=e$ et donc que $z\in\ker f$
     Nous avons donc $x\star\ker f\star x^{-1}\subset\ker f$

   Et donc pour tout $x\in G$, $\ker f = x\star\ker f\star x^{-1}$

2. *On définit, dans $(G,\star)$ une relation $\mathcal{R}$ définie par :*

   $$(\forall x\in G)\,(\forall y\in G)\,((x\mathcal{R}y)\Longleftrightarrow(f(x)=f(y)))$$

   Donner une autre définition de la condition $f(x)=f(y)$
   - ▷ Il est parfaitement évident que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence
   - ▷ La relation $f(x)=f(y)$ peut effectivement *être définie autrement* :

   $$f(x)=f(y)\Longleftrightarrow f(x)\star(f(y))^{-1}=e_1\Longleftrightarrow f\left(x\star y^{-1}\right)=e_1\Longleftrightarrow x\star y^{-1}\in\ker f$$

   Effectivement, nous avons $\left((x\mathcal{R}y)\Longleftrightarrow\left(x\star y^{-1}\in\ker f\right)\right)$

Exercice 21 :

Soit $(G,\star)$ un groupe non commutatif et $Z(G)$ le centre de G. On appelle $\mathrm{Int}(G)$ l'ensemble des automorphismes intérieurs de G :

$$\mathrm{Int}(G)=\left\{f_a \text{ où } a\in G \text{ et } \left[\begin{array}{rcl} f_a:G & \longrightarrow & G\\ x & \longmapsto & f_a(x)=a\star x\star a^{-1}\end{array}\right.\right\}$$

1. *Pour commencer, un automorphisme intérieur est un automorphisme de groupe*
   - ▷ Pour tout $a\in G$, f_a est un homomorphisme de groupe
     En effet, soient $x\in G$, $y\in G$ et un automorphisme intérieur f_a. Alors :

   $$\begin{aligned} f_a(x\star y) &= a\star(x\star y)\star a^{-1}\\ &= (a\star x)\star\left(y\star a^{-1}\right)\\ &= (a\star x)\star e\star\left(y\star a^{-1}\right)\\ &= (a\star x)\star\left(a^{-1}\star a\right)\star(y\star)\\ &= \left(a\star x\star a^{-1}\right)\star(a\star y\star)\\ &= f_a(x)\star f_a(y)\end{aligned}$$

   - ▷ Pour tout $a\in G$, f_a est injective
     Soit $z\in\ker f_a$; alors, $f_a(z)=e$, c'est à dire $a\star z\star a^{-1}=e$
     En composant à droite par a, nous obtenons : $a\star z\star a^{-1}=e\Longleftrightarrow a\star z=a$
     Puis, en composant à gauche par a^{-1}, nous obtenons $a\star z=a\Longleftrightarrow z=e$
     Donc, $\ker f_a=\{e\}$ et f_a est injective.
   - ▷ Pour tout $a\in G$, f_a est surjective
     Soit $y\in G$; existe-t-il $x\in G$ tel que $f_a(x)=y$?
     S'il existe, x vérifie l'équation $a\star x\star a^{-1}=y$, et on trouve, facilement, $x=a^{-1}\star y\star a$
     f_a est donc surjective

   f_a est donc bien un automorphisme de groupe ; c'est donc une bijection et $f_a^{-1}=f_{a^{-1}}$

2. *Montrer que* $(\text{Int}\,(G)\,,\circ)$*, où* $\circ$ *est la composition des applications, est un groupe*

   - Pour commencer, on peut dire que $\text{Int}\,(G) \neq \emptyset$ puisque $\text{Id}_G \in \text{Int}\,(G)$ puisque $\text{Id}_G = f_e$ où e est le neutre de G
   - Ensuite la composition des applications étant associative, elle le sera, en particulier pour les automorphismes intérieurs
   - Le plus intéressant c'est la question de la composition interne.
     Soit donc $x \in G$, $a \in G$ et $b \in G$:

$$\begin{aligned} f_a \circ f_b\,(x) &= f_a\,[f_b\,(x)] \\ &= f_a\left[b \star x \star b^{-1}\right] \\ &= a \star \left(b \star x \star b^{-1}\right) \star a^{-1} \\ &= (a \star b) \star x \star \left(b^{-1} \star a^{-1}\right) \\ &= (a \star b) \star x \star (a \star b)^{-1} \\ &= f_{a\star b}\,(x) \end{aligned}$$

     Nous avons donc $f_a \circ f_b = f_{a\star b}$ et la loi $\circ$ est bien de composition interne
   - Le neutre pour $\circ$ est bien $\text{Id}_G = f_e$ et l'inverse de f_a, pour $_circ$ est $f_{a^{-1}}$ qui est bien un élément de $\text{Int}\,(G)$

   $(\text{Int}\,(G)\,,\circ)$, est bien un groupe pour la composition des applications.

3. *On considère l'application* φ *définie par :*

$$\begin{cases} \varphi : G & \longrightarrow & \text{Int}\,(G) \\ \quad a & \longmapsto & \varphi\,(a) = f_a \end{cases}$$

   Montrer que φ *est un homomorphisme de groupe.*

   On utilise les questions précédentes :

$$\varphi\,(a \star b) = f_{a\star b} = f_a \circ f_b = \varphi\,(a) \circ \varphi\,(b)$$

   φ est bien un homomorphisme de groupes

4. *Donner* $\ker\varphi$*. Quand donc* φ *est un isomorphisme ?*

   - Nous avons $\ker\varphi = \{x \in G \text{ tels que } f_x = \text{Id}_G\}$
     Donc, si $x \in \ker\varphi$, pour tout $z \in G$, $f_x\,(z) = z \Longleftrightarrow x \star z \star x^{-1} = z$
     Nous avons donc, pour tout $z \in G$, $x \star z = z \star x$, ce qui veut dire que x commute avec tous les éléments de G et donc $x \in Z\,(G)$ et donc $\ker f \subset Z\,(G)$
     Réciproquement,
     Si $x \in Z\,(G)$, alors, pour tout $z \in G$:

$$f_x\,(z) = x \star z \star x^{-1} = x \star \left(x^{-1} \star z\right) = \left(x \star x^{-1}\right) \star z = z$$

     Et donc $f_x = \text{Id}_G$ et $x \in \ker\varphi$ d'où $Z\,(G) \subset \ker\varphi$
     Nous en concluons donc que $\ker f = Z\,(G)$
   - φ est un isomorphisme si $\ker\varphi = \{e\}$, c'est à dire que le centre de G, $Z\,(G)$ est réduit au seul élément neutre

Exercice 22 :

Démontrer qu'un sous groupe $H \subset G$ *d'un groupe* $(G, \star)$ *est distingué si et seulement si il est stable par tous les automorphismes intérieurs de* G

1. Supposons que $H \subset G$ est un sous-groupe distingué

   Ce veut donc dire que, pour tout $a \in G$, $a \star H \star a^{-1} = H$ ou, ce qui est équivalent, $a \star H = H \star a$.
   Démontrons que, pour tout $a \in G$, $f_a\,(H) \subset H$; nous aurons ainsi montré que H est stable par tous les automorphismes intérieurs de G
   Soit $y \in f_a\,(H)$; il existe donc $h \in H$ tel que $y = f_a\,(h) = a \star h \star a^{-1}$
   H étant distingué, $a \star h \star a^{-1} \in H$ et donc $y \in H$. D'où $f_a\,(H) \subset H$

2. Supposons que H est stable par tous les automorphismes intérieurs de G

   Montrons que H est un sous-groupe distingué.
   - ▷ Soit $y \in H$ et $a \in G$. Alors, $f_{a^{-1}}(y) \in H$, c'est à dire $a^{-1} \star y \star a \in H$
     Il existe donc $h \in H$ tel que $a^{-1} \star y \star a = h \Longleftrightarrow y = a \star h \star a^{-1}$ et $y \in a \star H \star a^{-1}$ et donc, $H \subset a \star H \star a^{-1}$
   - ▷ Soit $y \in a \star H \star a^{-1}$; il faut montrer que $y \in H$
     Il existe $h \in H$ tel que $y = a \star h \star a^{-1} = f_a(h)$. Comme $f_a(h) \in H$, nous avons alors $a \star H \star a^{-1} \subset H$

   Donc $a \star H \star a^{-1} = H$ et H est distingué en G

Exercice 23 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et φ, une application définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \varphi : (\mathbb{Z}, +) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*, \times) \\ k & \longmapsto & \varphi(k) = \omega^k \end{array} \right.$$

1. *Montrer que φ est un homomorphisme de groupe*

   C'est très facile ; il suffit d'utiliser les propriétés des puissances dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes :
   $$\varphi(k + k_1) = \omega^{k+k_1} = \omega^k \times \omega^{k_1} = \varphi(k) \times \varphi(k_1)$$
   φ est donc bien un homomorphisme de groupe
2. *Rechercher $\ker \varphi$ et $\mathrm{Im}\varphi$*
   - ▷ $\ker \varphi = \{k \in \mathbb{Z}$ tels que $\varphi(k) = 1\} = \left\{k \in \mathbb{Z} \text{ tels que } e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 1\right\}$
     Nous avons alors $e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{2ip\pi}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et donc $\dfrac{2ik\pi}{n} = 2ip\pi \Longleftrightarrow k = pn$
     Donc k est un multiple de n et $\ker \varphi = n\mathbb{Z}$
   - ▷ Pour trouver $\mathrm{Im}\varphi$, il suffit de voir qui si $z \in \mathrm{Im}\varphi$, alors $|z| = 1$ et donc $\mathrm{Im}\varphi \subset \mathcal{U}$ où $\mathcal{U}$ est le cercle unité : $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| = 1\}$
     $\mathrm{Im}\varphi$ est, en fait $\mathcal{U}_n$ ensemble des racines *n-ièmes* de 1

3.5.2 Structure d'anneaux et de corps

Exercice 7 :

$\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \times\right)$ est l'anneau commutatif et unitaire des fonctions numériques d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, on appelle $A(x_0) = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \text{ telles que } f(x_0) = 0\right\}$. Il faut montrer que $(A(x_0), +, \times)$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

1. Tout d'abord, $A(x_0) \neq \emptyset$ puisque la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ en entier $\mathcal{O}$ est telle que $\mathcal{O}(x_0) = 0$, et $\mathcal{O}$ est bien un élément de $A(x_0)$
2. D'autre part, soient $f \in A(x_0)$ et $g \in A(x_0)$. Alors :
   $$(f - g)(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = 0 - 0 = 0$$
   Donc, $f - g \in A(x_0)$ et :
   $$(f \times g)(x_0) = f(x_0) \times g(x_0) = 0 \times 0 = 0$$
   Donc, $f \times g \in A(x_0)$

D'après le théorème 3.2.5, $(A(x_0), +, \times)$ est un sous-anneau de $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \times\right)$

Exercice 8 :

On appelle $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) = \left\{x + y\sqrt{2} \text{ avec } x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q}\right\}$. Montrer que $\left(\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right), +, \times\right)$ est un corps

Ce type d'ensemble *(ou de corps)* est très intéressant. On peut remarquer que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) \subset \mathbb{R}$

1. Tout d'abord, $z = x + y\sqrt{2}$ avec $x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{Q}$ est tel que $z = 0$ si et seulement si $x = 0$ et $y = 0$
   - ▷ Si $x = y = 0$, alors $z = x + y\sqrt{2} = 0$
   - ▷ Réciproquement, supposons $z = x + y\sqrt{2} = 0$ et $x \neq 0$; alors $y\sqrt{2} = -x$ donc $y \neq 0$ et $\sqrt{2} = \dfrac{-x}{y}$. Or, $\dfrac{-x}{y} \in \mathbb{Q}$ et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, ce qui est impossible. Donc $x = y = 0$
2. Ce qui permet d'écrire que $x + y\sqrt{2} = x_1 + y_1\sqrt{2}$ si et seulement si $x = x_1$ et $y = y_1$.
3. Montrons que $\left(\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right), +, \times\right)$ est un sous anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$
   - ▷ Tout d'abord, $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) \neq \emptyset$ puisque $0 = 0 + 0\sqrt{2} \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$
   - ▷ Soient $z_1 \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ et $z_2 \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$. Alors, $z = x + y\sqrt{2}$ et $z_1 = x_1 + y_1\sqrt{2}$

$$z - z_1 = x + y\sqrt{2} - \left(x_1 + y_1\sqrt{2}\right) = (x - x_1) + (y - y_1)\sqrt{2}$$

     Comme $x \in \mathbb{Q}$ et $x_1 \in \mathbb{Q}$, nous avons $x - x_1 \in \mathbb{Q}$; de même $y - y_1 \in \mathbb{Q}$, et nous en déduisons que $z - z_1 \in \mathbb{Q}$
   - ▷ De même, pour $z_1 \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ et $z_2 \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$, nous avons :

$$z_1 \times z_2 = \left(x + y\sqrt{2}\right) \times \left(x_1 + y_1\sqrt{2}\right) = xx_1 + xy_1\sqrt{2} + yx_1\sqrt{2} + 2yy_1 = (xx_1 + 2yy_1) + (xy_1 + yx_1)\sqrt{2}$$

     Or, comme $(x, x_1, y, y_1) \in \mathbb{Q}^4$, nous avons $xx_1 + 2yy_1 \in \mathbb{Q}$ et $xy_1 + yx_1 \in \mathbb{Q}$ et donc $zz_1 \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$

   $\left(\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right), +, \times\right)$ est donc un sous anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$
4. Montrons que $\left(\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)^*, \times\right)$ est un groupe
   - ▷ Tout d'abord, $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)^* \neq \emptyset$ puisque $1 = 1 + 0\sqrt{2} \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)^*$; le neutre pour la multiplication est donc un élément de $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)^*$
   - ▷ On a montré que la multiplication était interne dans $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)^*$
   - ▷ Montrons que si $z \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$, alors $z^{-1} \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$

     Soit $z = x + y\sqrt{2}$ avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Alors, $z^{-1} = \dfrac{1}{x + y\sqrt{2}} = \dfrac{x - y\sqrt{2}}{x^2 - 2y^2} = \dfrac{x}{x^2 - 2y^2} + \dfrac{-y}{x^2 - 2y^2}\sqrt{2}$

     Comme $x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{Q}$, nous avons $\dfrac{x}{x^2 - 2y^2} \in \mathbb{Q}$ et $\dfrac{-y}{x^2 - 2y^2} \in \mathbb{Q}$ et donc $z^{-1} \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$

$\left(\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right), +, \times\right)$ est donc un sous-corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$, donc un corps.

Correction des exercices complémentaires sur les anneaux et les corps

Exercice 23 :

Soit $r = \sqrt[3]{2}$ et $K = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x = a + br + cr^2 \text{ avec } (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3\right\}$. Montrer que $(K, +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$

1. Nous allons donc, d'abord, montrer que K est non vide. Il suffit de voir que $0 \in K$ puisque $0 = 0 + 0r + 0r^2$. De même, $1 \in K$ puisque $1 = 1 + 0r + 0r^2$
2. Soient $x = a + br + cr^2$ et $x_1 = a_1 + b_1r + c_1r^2$ 2 éléments de K. Alors :
   - $x - x_1 = \left(a + br + cr^2\right) - \left(a_1 + b_1r + c_1r^2\right) = (a - a_1) + (b - b_1)\,r + (c - c_1)\,r^2$. Comme $a \in \mathbb{Z}$ et $a_1 \in \mathbb{Z}$, nous avons $a - a_1 \in \mathbb{Z}$; de même $b - b_1 \in \mathbb{Z}$ et $c - c_1 \in \mathbb{Z}$ et donc $x - x_1 \in K$

- En passant au produit, nous avons :

  $xx_1 = \left(a+br+cr^2\right)\left(a_1+b_1r+c_1r^2\right) = aa_1+ab_1r+ac_1r^2+ba_1r+bb_1r^2+bc_1r^3+a_1cr^2+cb_1r^3+cc_1r^4$

  Or, $r^3 = 2$ et $r^4 = 2r$; donc :

$$\begin{array}{rl} xx_1 = & aa_1 + (ab_1+ba_1)\,r + (ac_1+bb_1+a_1c)\,r^2 + 2\,(bc_1+b_1c) + 2cc_1r \\ = & (aa_1 + 2\,(bc_1+b_1c)) + (ab_1+ba_1+2cc_1)\,r + (ac_1+bb_1+a_1c)\,r^2 \end{array}$$

  Or, $(aa_1 + 2\,(bc_1+b_1c)) \in \mathbb{Z}$, $(ab_1+ba_1+2cc_1) \in \mathbb{Z}$ et $(ac_1+bb_1+a_1c) \in \mathbb{Z}$
  Donc, $xx_1 \in K$

Donc, $(K,+,\times)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R},+,\times)$; c'est même un anneau unitaire puisque $1 \in K$

Exercice 24 :

On considère $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\oplus,\otimes)$ où l'addition $\oplus$ est une addition définie par : $(a,b)\oplus(c,d) = (a+c,b+d)$, et la multiplication $\otimes$ par : $(a,b)\otimes(c,d) = (ac,bd)$
Montrer que $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\oplus,\otimes)$ est un anneau commutatif unitaire. Est-il intègre ?

1. Tout d'abord, et très clairement, $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\oplus,)$ est un groupe commutatif.
   - On démontre facilement que la loi $\oplus$ est associative et commutative
   - Le neutre pour $\oplus$ est $(0,0)$
   - Chaque élément $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ admet $(-a,-b)$ comme symétrique pour $\oplus$.
2. Clairement, la loi $\otimes$ est associative et commutative
3. $\otimes$ admet comme neutre le couple $(1,1)$
4. Si $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ admet un inverse $(a',b')\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ pour la loi $\otimes$, alors, nous avons :

$$aa' = 1 \text{ et } bb' = 1$$

   Les seuls éléments inversibles pour $\otimes$ sont $(1,1)$ et $(-1,-1)$; ils sont même leur propre inverse.
5. Il faut maintenant montrter que $\otimes$ est distributive par rapport à $\oplus$
   Soient $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $(c,d)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ et $(e,f)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Alors !

$$\begin{array}{rl} (a,b)\otimes[(c,d)\oplus(e,f)] = & (a,b)\otimes[(c+e,d+f)] \\ = & (a\,(c+e)\,,b\,(d+f)) \\ = & (ac+ae,bd+bf) \\ = & (ac,bd)\oplus(ae,bf) \\ = & (a,b)\otimes(c,d)\oplus(a,b)\otimes(ae,bf) \end{array}$$

   Ce que nous voulions

$(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},\oplus,\otimes)$ est donc un anneau commutatif unitaire.
Ce n'est, par contre, pas un anneau intègre : nous avons $(2,0)\neq(0,0)$ et $(0,8)\neq(0,0)$, mais

$$(2,0)\otimes(0,8) = (0,0)$$

Exercice 25 :

Soit $(A,+,\times)$ un anneau, non forcément commutatif, non forcément unitaire. Soit :

$$\mathcal{C} = \{c\in A \text{ tels que } (\forall x\in A)\,(x\times c = c\times x)\}$$

Il faut montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-anneau de $(A,+,\times)$

1. Premièrement, $\mathcal{C}\neq\emptyset$ puisque $0\in\mathcal{C}$; en effet : pour tout $x\in A$, $0\times x = x\times 0 = 0$
2. Soit $c_1\in\mathcal{C}$ et $c_2\in\mathcal{C}$; il faut montrer que $c_1-c_2\in\mathcal{C}$
   Soit donc $x\in A$

$$x\times(c_1-c_2) = xc_1 - xc_2 = c_1x - c_2x = (c_1-c_2)\,x$$

   Donc c_1-c_2 commute avec tout $x\in A$ et donc $c_1-c_2\in\mathcal{C}$

3. Montrons maintenant que $c_1 \times c_2 \in \mathcal{C}$. Soit donc $x \in A$

$$x\,(c_1 c_2) = (x c_1)\,c_2 = (c_1 x)\,c_2 = c_1\,(x c_2) = c_1\,(c_2 x) = (c_1 c_2)\,x$$

   Et donc $c_1 \times c_2 \in \mathcal{C}$

Ainsi, $\mathcal{C}$ est un sous-anneau de $(A, +, \times)$

Exercice 26 :

Soit $(A, +, \times)$ un anneau tel que, pour tout $x \in A$, $x^2 = x$

1. *Démontrer que, pour tout $x \in A$, $2x = x + x = 0$*

   Par hypothèse, nous avons : $(x + x)^2 = x + x$, et donc $x^2 + x + x + x^2 = x + x \iff x + x + x + x = x + x$, et donc $x + x = 2x = 0$. Ceci sous entend que x est son propre symétrique pour l'addition *(c'est à dire : $x = -x$)* et que l'anneau est de caractéristique 2

2. *Démontrer que $(A, +, \times)$ est un anneau commutatif*

   Il faut montrer que, pour tout $x \in A$ et tout $y \in A$, nous avons $xy = yx$
   Par hypothèse : $(x + y)^2 = x + y$. Or :

   $$(x + y)^2 = x + y \iff (x + y)\,(x + y) = x^2 + xy + yx + y^2 = x + y \iff x + xy + yx + y = x + y \iff xy + yx = 0$$

   Donc, yx est l'opposé de xy pour l'addition, c'est à dire $yx = -xy = xy$.
   L'anneau est donc commutatif

3. *Démontrer que, pour tout $x \in A$ et tout $y \in A$, $xy\,(x + y) = 0$*

   Il suffit de développer, d'utiliser l'hypothèse et la commutativité de la multiplication :

   $$xy\,(x + y) = xyx + xy^2 = yxx + xy = yx + xy = 0$$

Exercice 27 :

1. *Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. Soit $x \in A$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$. Montrer que si x et y sont nilpotents, alors xy et $x + y$ sont nilpotents*
2. *On suppose que $(A, +, \times)$ est un anneau commutatif et unitaire. Soit $x \in A$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$. Montrer que $1 - x$ est inversible*
3. *Soit $(A, +, \times)$ un anneau non forcément commutatif. Soient $u \in A$ et $v \in A$ tels que uv soit nilpotent, c'est à dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(uv)^n = 0$. Il faut montrer que vu est nilpotent*

1. Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif.
   (a) <u>On montre que si x et y sont nilpotents, alors xy est nilpotent</u>
   Soient $x \in A$ et $y \in A$ tels que que $x^n = 0$ et $y^m = 0$
   - ▷ **Une première méthode** consiste à calculer $(xy)^{mn}$; en effet, nous avons :

     $$(xy)^{mn} = x^{mn} \times y^{mn} = (x^n)^m \times (y^m)^n = 0 \times 0 = 0$$

   - ▷ **Une seconde méthode**, puisque l'anneau A est commutatif, consiste à juste calculer $(xy)^n$. En effet :

     $$(xy)^n = x^n \times y^n = 0 \times (y^n) = 0 \times y^n = 0$$

   En fait, lorsque l'anneau est commutatif, il suffit que l'un des éléments x ou y soit nilpotent pour que le produit xy soit nilpotent

   (b) <u>On montre que si x et y sont nilpotents, alors $x + y$ est nilpotent</u>
   Soient $x \in A$ et $y \in A$ tels que que $x^n = 0$ et $y^m = 0$ Il suffit de calculer $(x + y)^{m+n}$; du fait de la commutativité de A, nous pouvons utiliser le binôme de Newton :

   $$(x + y)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^k y^{m+n-k}$$

▷ Pour $k \geqslant n$, $k = n + r$ où $r \geqslant 0$ et donc $x^k = x^{n+r} = x^n \times x^r = 0$ de telle sorte que

$$(x+y)^{m+n} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{m+n}{k} x^k y^{m+n-k}$$

▷ Si $k \leqslant n-1$, alors $n - k \geqslant +1$ et $y^{m+n-k} = y^m \times y^{n-k} = 0$ et donc

$$(x+y)^{m+n} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{m+n}{k} x^k y^{m+n-k} = 0$$

Ainsi, $x + y$ est nilpotent

2. Cette fois $(A, +, \times)$ est un anneau commutatif et unitaire.
   Soit $x \in A$ nilpotent. Montrer que $1 - x$ est inversible
   Soit $x \in A$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$. Nous avons $1 - x^n = 1$. Or :

$$1 = 1 - x^n = (1-x)\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1}\right)$$

   Ainsi, $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1}$ apparaît bien comme l'inverse de $1 - x$
3. Soit $(A, +, \times)$ un anneau non forcément commutatif. Soient $u \in A$ et $v \in A$ tels que uv soit nilpotent.
   Il faut montrer que vu est nilpotent
   Calculons $(vu)^{n+1}$:

$$(vu)^{n+1} = \underbrace{(vu)(vu)(vu)\cdots(vu)(vu)}_{n+1 \text{ fois}} = v\underbrace{(uv)(uv)\cdots(uv)}_{n \text{ fois}}v = v(uv)^n u = 0$$

Exercice 28 :

Soit $(A, +, \times)$ un anneau unitaire d'unité 1 et $\mathcal{U}$ l'ensemble des éléments inversibles de A. Il faut montrer que $\mathcal{U}, \times$ est un groupe.

1. Tout d'abord, $(A, +, \times)$ étant un anneau, la loi $\times$ est associative dans $\mathcal{U}$
2. Ensuite, $\mathcal{U} \neq \emptyset$ parce que $1 \in \mathcal{U}$
3. D'autre part, si $x \in \mathcal{U}$, x admet un symétrique pour $\times$, qui est x^{-1}, et donc $x^{-1} \in \mathcal{U}$
4. Il faut, maintenant, montrer que la loi $\times$ est interne dans $\mathcal{U}$.
   Soient $x \in \mathcal{U}$ et $y \in \mathcal{U}$. Alors :

$$(x \times y) \times \left(y^{-1} \times x^{-1}\right) = x \times \left(y \times y^{-1}\right) \times x^{-1} = x \times 1 \times x^{-1} = x \times x^{-1} = 1$$

   L'inverse de $x \times y$ est donc $y^{-1} \times x^{-1}$

Exercice 29 :

On considère $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2} \text{ avec } a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}\right\}$

1. *Montrer que $\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right], +, \times\right)$ est un anneau*

   Nous allons montrer que $\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right], +, \times\right)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$
   ▷ Tout d'abord, $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] \neq \emptyset$ puisque $1 = 1 + 0\sqrt{2} \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, tout comme $0 \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$
   ▷ Ensuite, soient $x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ et $y \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$. Alors :
   ⋄ $x = a + b\sqrt{2}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$
   ⋄ Et $y = a' + b'\sqrt{2}$ avec $a' \in \mathbb{Z}$ et $b' \in \mathbb{Z}$
   Donc $x - y = \left(a + b\sqrt{2}\right) - \left(a' + b'\sqrt{2}\right) = (a - a') + (b - b')\sqrt{2}$. Comme $a - a' \in \mathbb{Z}$ et $b - b' \in \mathbb{Z}$, nous avons $x - y \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$

- ▷ D'autre part, $xy = \left(a + b\sqrt{2}\right)\left(a' + b'\sqrt{2}\right) = (aa' + 2bb') + (ba' + ab')\sqrt{2}$. Comme $aa' + 2bb' \in \mathbb{Z}$ et $ba' + ab' \in \mathbb{Z}$, nous avons $xy \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$

Ainsi, $\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right], +, \times\right)$ est un anneau

2. *Pour $x = a + b\sqrt{2}$, on note $C(x) = a - b\sqrt{2}$; montrer que, pour tout x et tout y de $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, on a $C(xy) = C(x)C(y)$*

   Cette question se démontre en faisant les calculs

3. *Pour $x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, on note $N(x) = xC(x) = a^2 - 2b^2$. Montrer que, pour tout x et tout y de $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, on a $N(xy) = N(x)N(y)$*

   Il suffit de faire le calcul :

$$N(xy) = xyC(xy) = xyC(x)C(y) = xC(x)yC(y) = N(x)N(y)$$

4. *En déduire que les éléments inversibles de $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ sont ceux qui s'écrivent $a + b\sqrt{2}$ avec $a^2 - 2b^2 = \pm 1$.*

- ▷ Soit $x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, inversible et d'inverse x^{-1} ; alors $xx^{-1} = 1$ et $N\left(xx^{-1}\right) = N(1) = 1$.
  Comme $N\left(xx^{-1}\right) = N(x)N\left(x^{-1}\right)$, nous avons $N\left(x^{-1}\right) = \dfrac{1}{N(x)}$, ce qui sous entend que l'entier relatif $N(x)$ doit être inversible dans $\mathbb{Z}$. Or, les seuls éléments inversibles de $\mathbb{Z}$ sont 1 et -1.
  Donc, pour que $x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ soit inversible, il faut que $a^2 - 2b^2 = \pm 1$
- ▷ Réciproquement, si $a^2 - 2b^2 = \pm 1$, alors l'inverse de $a + b\sqrt{2}$ est donné par $\dfrac{1}{a + b\sqrt{2}}$; or :

$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{\left(a + b\sqrt{2}\right)\left(a - b\sqrt{2}\right)} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = \pm a - b\sqrt{2}$$

Ainsi, par exemple, l'inverse de $3 + 2\sqrt{2}$ est $3 - 2\sqrt{2}$

Chapitre 4

L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs

4.1 Une construction de l'ensemble $\mathbb{Z}$

4.1.1 Proposition

On définit sur $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relation $\mathcal{R}$ par :

$$\left(\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2\right) \left(\forall (n',p') \in \mathbb{N}^2\right) \left((n,p)\,\mathcal{R}\,(n',p') \Longleftrightarrow n+p' = n'+p\right)$$

La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}^2$.

Démonstration

1. De manière évidente, **cette relation est réflexive.**
   En effet, soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$; alors $n+p = n+p$ et donc $(n,p)\,\mathcal{R}\,(n,p)$
2. De même, **cette relation est symétrique**
   Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ et $(n',p') \in \mathbb{N}^2$ tels que $(n,p)\,\mathcal{R}\,(n',p')$ alors $n+p' = n'+p$ et $n'+p = n+p'$, c'est à dire $(n',p')\,\mathcal{R}\,(n,p)$
3. Et pour terminer, soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $(n',p') \in \mathbb{N}^2$ et $(n'',p'') \in \mathbb{N}^2$ tels que $(n,p)\,\mathcal{R}\,(n',p')$ et $(n',p')\,\mathcal{R}\,(n'',p'')$.
   Alors $n+p' = n'+p$ et $n'+p'' = n''+p'$ et donc, $n+p'+n'+p'' = n'+p+n''+p'$, c'est à dire, par régularité de l'addition dans $\mathbb{N}$ *(cf point 1-d de2.1.1)*, $n+p'' = n''+p$, c'est à dire $(n,p)\,\mathcal{R}\,(n'',p'')$
   La **relation est donc transitive**

La relation $\mathcal{R}$ est bien une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}^2$

Remarque 1 :

On peut remarquer que $(n,p)\,\mathcal{R}\,(n',p)$ veut dire que $n-p = n'-p'$....sauf que la soustraction n'est pas définie sur $\mathbb{N}$ *(Donc, patience !!)*

4.1.2 Définition

L'ensemble quotient $\mathbb{N}^2/\mathcal{R}$ est noté $\mathbb{Z}$ et ses éléments sont appelés les entiers relatifs.

Remarque 2 :

1. Rappelons que l'ensemble quotient est un ensemble de classes d'équivalence
2. Pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, nous notons $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}\left[(n,p)\right]$, la classe d'équivalence modulo $\mathcal{R}$ du couple (n,p), c'est à dire :
$$\mathcal{C}_{\mathcal{R}}\left[(n,p)\right] = \left\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \text{ tels que } (n,p)\,\mathcal{R}\,(a,b)\right\}$$

3. Ainsi :
   - ▷ La classe d'équivalence du couple d'entiers naturels $(1,4)$ définit l'entier relatif
   $$\mathcal{C}_{\mathcal{R}}\left[(1,4)\right] = \left\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \text{ tels que } (1,4)\,\mathcal{R}\,(a,b)\right\} = \{(k, k+3) \text{ avec } k \in \mathbb{N}\}$$
   - ▷ La classe d'équivalence du couple d'entiers naturels $(7,2)$ définit l'entier relatif
   $$\mathcal{C}_{\mathcal{R}}\left[(7,2)\right] = \left\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \text{ tels que } (7,2)\,\mathcal{R}\,(a,b)\right\} = \{(k+5, k) \text{ avec } k \in \mathbb{N}\}$$
   - ▷ La classe d'équivalence du couple d'entiers naturels $(0,0)$ définit l'entier relatif
   $$\mathcal{C}_{\mathcal{R}}\left[(0,0)\right] = \left\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \text{ tels que } (0,0)\,\mathcal{R}\,(a,b)\right\} = \{(k, k) \text{ avec } k \in \mathbb{N}\}$$

4.1.3 Définition et proposition

1. Définition de l'addition dans $\mathbb{N}^2$
   Pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ et tout $(c,d) \in \mathbb{N}^2$, nous avons :
   $$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$
   Cette addition est associative, commutative et possède un élément neutre : $(0,0)$
2. La relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est compatible avec l'addition de $\mathbb{N}^2$
   C'est à dire que pour $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, $(a_1,b_1) \in \mathbb{N}^2$, $(c,d) \in \mathbb{N}^2$ et $(c_1,d_1) \in \mathbb{N}^2$, si $(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d)$ et $(a_1,b_1)\,\mathcal{R}\,(c_1,d_1)$, alors :
   $$(a,b) + (a_1,b_1)\,\mathcal{R}\,(c,d) + (c_1,d_1) \Longleftrightarrow (a+a_1, b+b_1)\,\mathcal{R}\,(c+c_1, d+d_1)$$

Démonstration

1. La démonstration du premier point est simple et laissée aux lecteurs. Il suffit d'utiliser les propriétés de l'addition dans $\mathbb{N}$. A ce sujet, il faut bien voir que le signe d'addition dans $(a,b)+(c,d)$ est un signe d'addition dans $\mathbb{N}^2$, alors que le signe addition dans les composantes du couple $(a+c, b+d)$ sont des additions dans $\mathbb{N}$
2. Soient $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, $(a_1,b_1) \in \mathbb{N}^2$, $(c,d) \in \mathbb{N}^2$ et $(c_1,d_1) \in \mathbb{N}^2$, tels que $(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d)$ et $(a_1,b_1)\,\mathcal{R}\,(c_1,d_1)$, alors :
   - ▷ $(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d) \Longleftrightarrow a+d = b+c$
   - ▷ $(a_1,b_1)\,\mathcal{R}\,(c_1,d_1) \Longleftrightarrow a_1+d_1 = b_1+c_1$

   En additionnant, nous obtenons :
   $$(a+d) + (a_1+d_1) = (b+c) + (b_1+c_1) \Longleftrightarrow (a+a_1) + (d+d_1) = (b+b_1) + (c+c_1)$$
   C'est à dire $(a+a_1, b+b_1)\,\mathcal{R}\,(c+c_1, d+d_1)$

4.1.4 Addition dans $\mathbb{Z} = \mathbb{N}^2/\mathcal{R}$

1. Définition de l'addition dans $\mathbb{Z}$
   Soient $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ et $(c,d) \in \mathbb{N}^2$ de classe d'équivalence modulo $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}\left[(a,b)\right]$ et $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}\left[(c,d)\right]$.
   Nous définissons ainsi l'addition dans $\mathbb{Z}$ par :
   $$\mathcal{C}_{\mathcal{R}}\left[(a,b)\right] + \mathcal{C}_{\mathcal{R}}\left[(c,d)\right] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}\left[(a+c, b+d)\right]$$
2. Si nous fixons deux entiers relatifs n et p dans $\mathbb{Z}$, nous pouvons choisir n'importe quel représentant $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ de n
   C'est-à-dire que n'importe quel couple d'entiers naturels $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}\left[(a,b)\right]$ et n'importe quel représentant $(c,d) \in \mathbb{N}^2$ de p tel que $p = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}\left[(c,d)\right]$, la somme $(a+c, b+d)$ définira toujours la même classe d'équivalence $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}\left[(a+c, b+d)\right] = n+p$

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$, $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ et $(c,d) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(a,b)]$ et $p = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(c,d)]$.
Alors, par définition de l'addition dans $\mathbb{Z}$, $n+p = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(a,b)] + \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(c,d)] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(a+c,b+d)]$
Soit $(a_1,b_1) \in \mathbb{N}^2$ tel que $(a_1,b_1)\,\mathcal{R}\,(a,b)$, c'est à dire que $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(a,b)] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(a_1,b_1)] = n$
De même, soit $(c_1,d_1) \in \mathbb{N}^2$ tel que $(c_1,d_1)\,\mathcal{R}\,(c,d)$, c'est à dire que $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(c,d)] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(c_1,d_1)] = p$. Alors :

$$n+p = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(a,b)] + \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(c,d)] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(a+c,b+d)] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(a_1,b_1)] + \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(c_1,d_1)] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(a_1+c_1,b_1+d_1)]$$

Comme $(a_1,b_1)\,\mathcal{R}\,(a,b)$ et $(c_1,d_1)\,\mathcal{R}\,(c,d)$, alors, d'après 4.1.3, nous avons $(a_1+c_1,b_1+d_1)\,\mathcal{R}\,(a+c,b+d)$, c'est à dire $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(a_1+c_1,b_1+d_1)] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(a+c,b+d)] = n+p$.
La somme est donc indépendante du représentant choisi.

4.1.5 Proposition :$(\mathbb{Z},+)$ est un groupe commutatif.

L'addition définie dans $\mathbb{Z}$ en 4.1.4 est commutative, associative et admet la classe $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,0)]$ pour élément neutre.
De plus, tout entier relatif admet un élément symétrique pour l'addition *(qu'on appelle son opposé)*.
Autrement dit, $(\mathbb{Z},+)$ est un groupe commutatif.

Démonstration

1. Démontrons la commutativité
   Soient $n \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{Z}$, $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ et $(c,d) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(a,b)]$ et $p = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(c,d)]$.
   Alors :
   $$n+p = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(a,b)]+\mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(c,d)] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(a+c,b+d)] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(c+a,d+b)] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(c,d)]+\mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(a,b)] = p+n$$
   L'addition est donc commutative
2. Démontrons l'associativité
   Soient $n \in \mathbb{Z}$ $m \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{Z}$, $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, $(c,d) \in \mathbb{N}^2$ et $(e,f) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(a,b)]$, $m = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(c,d)]$ et $p = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(e,f)]$; alors :
   $$\begin{aligned} n+(m+p) &= \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(a,b)] + (\mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(c,d)] + \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(e,f)]) \\ &= \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(a,b)] + \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(c+e,d+f)] \\ &= \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(a+c+e,b+d+f)] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[((a+c)+e,(b+d)+f)] \\ &= (\mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(a+c,b+d)]) + \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(e,f)] \\ &= (\mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(a,b)] + \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(c,d)]) + \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(e,f)] \\ &= (n+m)+p \end{aligned}$$
   Nous avons donc $n+(m+p) = (n+m)+p$ et l'addition est bien associative sur Z
3. Recherche de l'élément neutre
   Nous n'allons pas chercher très loin!! Il est évident que $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,0)]$ est l'élément neutre pour l'addition
4. Recherche de l'élément symétrique
   Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ et $n = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(a,b)]$.
   Il est donc évident que $n_1 = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(b,a)]$ est tel que
   $$n+n_1 = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(a,b)] + \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(b,a)] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(a+b,a+b)] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,0)]$$
   Ainsi $n_1 = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(b,a)]$ est l'opposé de $n = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(a,b)]$

$(\mathbb{Z},+)$ est donc un groupe commutatif.

4.1.6 Écriture canonique des entiers relatifs

Tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ admet un unique représentant dont au moins l'un des termes est nul.

Démonstration

Soit $n = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(a,b)]$ un entier relatif.

- Si n admet un représentant de la forme $(m,0)$, cela signifie alors que $(a,b)\,\mathcal{R}\,(m,0)$ et donc $a+0 = m+b$. Cela suppose donc que $b \leqslant a$, et dans ce cas on a nécessairement $m = a-b$.
- Si, n admet un représentant de la forme $(0,m)$, cela signifie que alors que $(a,b)\,\mathcal{R}\,(0,m)$ et donc que $a+m = 0+b$. Cela suppose donc que $a \leqslant b$, et dans ce cas m vaut nécessairement $b-a$.

Finalement, comme $\leqslant$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{N}$, on a nécessairement $a \leqslant b$ ou $b \leqslant a$.
Si $b \leqslant a$, alors $n = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(a-b,0)]$, et si $a \leqslant b$, alors $n = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,b-a)]$

4.1.7 Notations

1. Pour tout $m \in \mathbb{N}$ la classe $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(m,0)]$ est notée $+m$, et la classe $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,m)]$ est notée $-m$.
2. Dans les deux cas, m est appelé la valeur absolue de l'entier relatif, et on écrit $m = |+m| = |-m|$

Remarque 3 :

1. Les notations $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(m,0)] = +m$ et $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,m)] = -m$ ne sont pas si innocentes que cela puisque, pour l'addition dans $\mathbb{Z}$,$\mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(m,0)]$ et $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,m)]$ sont symétriques.
2. Les notations précédentes donnent pour $m = 0$, $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(m,0)] = +0 = -0$. Et 0 est le seul entier naturel m tel que $+m = -m$.
   En effet, si m vérifie $+m = -m$, on a $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(m,0)] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,m)]$, c'est-à-dire $m+m = 0$. Mais alors $m = 0$. On convient alors de noter plus simplement 0 la classe de $(0,0)$, qui coïncide avec $+0$ et -0.
3. Nous sommes désormais en mesure de définir les notations classiques
$$\mathbb{Z}^+ = \{+m, m \in \mathbb{N}\} \quad \mathbb{Z}^- = \{-m, m \in \mathbb{N}\} \quad \mathbb{Z}^{+*} = \{+m, m \in \mathbb{N}^*\}, \quad \mathbb{Z}^{-*} = \{-m, m \in \mathbb{N}^*\}$$

4.1.8 Proposition

1. Nous avons $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^-$ et $\mathbb{Z}^+ \cap \mathbb{Z}^- = \{0\}$
2. Les ensembles $\mathbb{Z}^+$ et $\mathbb{Z}^-$ sont stables par l'addition.

Démonstration

1. Démonstration du premier point
   (a) Soit $m \in \mathbb{Z}$.
   $\to$ Alors, d'après 4.1.6, il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $m = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(a,0)]$ ou $m = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,a)]$
   $\to$ Donc $m \in \mathbb{Z}^+$ ou $m \in \mathbb{Z}^-$ et donc $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^-$. C'est à dire $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^-$
   $\to$ La démonstration de la réciproque $\mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- \subset \mathbb{Z}$ est évidente
   Donc $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^-$
   (b) Soit, maintenant $m \in \mathbb{Z}^+ \cap \mathbb{Z}^-$
   Toujours d'après 4.1.6, il existe $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$ tel que $m = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(a,0)]$ et $m = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,b)]$
   Nous avons alors $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(a,0)] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,b)]$, c'est à dire $(a,0)\,\mathcal{R}\,(0,b)$. Or :
$$(a,0)\,\mathcal{R}\,(0,b) \iff a+b = 0$$
   Comme $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$, nous avons $a+b = 0 \iff a = b = 0$ et donc $m = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,0)] = 0$
2. Démonstration du second point
   $\to$ Soient $m \in \mathbb{Z}^+$ et $p \in \mathbb{Z}^+$; nous allons monter que $m+p \in \mathbb{Z}^+$
   Il existe $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$ tels que $m = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(a,0)]$ et $p = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(b,0)]$.
   Alors :
$$m+p = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(a,0)] + \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(b,0)] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(a+b,0)]$$
   Ce qui démontre bien que $m+p \in \mathbb{Z}^+$
   $\to$ Nous démontrerions de la même manière que si $m \in \mathbb{Z}^-$ et $p \in \mathbb{Z}^-$ alors $m+p \in \mathbb{Z}^-$

4.1.9 Plongement de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$

L'application $\Phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \Phi : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z}^+ \\ n & \longmapsto & \Phi(n) = +n = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(n,0)] \end{array} \right.$$

est une bijection telle que, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $\Phi(m+n) = \Phi(m) + \Phi(n)$

Démonstration

1. L'application Φ est bien bijective
   → Elle est injective
   Supposons en effet que, pour $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, nous ayons $\Phi(m) = \Phi(n)$. Alors :
   $$\Phi(m) = \Phi(n) \Longleftrightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(m,0)] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(n,0)] \Longleftrightarrow (m,0)\,\mathcal{R}\,(n,0) \Longleftrightarrow m = n$$
   Φ est donc bien injective
   → L'application Φ est surjective
   Soit $m \in \mathbb{Z}^+$; il existe alors $a \in \mathbb{N}$ tel que $m = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(a,0)]$ et nous avons alors $\Phi(a) = m$
2. Soient $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :
   $$\Phi(m+n) = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(m+n,0)] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(n,0)] + \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(m,0)] = \Phi(m) + \Phi(n)$$
   Nous avons donc bien $\Phi(m+n) = \Phi(m) + \Phi(n)$

Remarque 4 :

1. La proposition 4.1.9 permet d'identifier $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Z}^+$
2. **Notation** : Finalement, nous écrirons, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $m = +m = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(m,0)] = |+m| = |-m|$

4.1.10 Définition

Pour $n \in \mathbb{Z}$, nous notons $-n$ l'opposé de n pour l'addition

Remarque 5 :

Cette notation est bien cohérente avec les notions précédemment introduites : si $n \in \mathbb{N}$, $-n$ est l'entier relatif opposé de $+n$, que l'on a identifié avec n lui-même.

4.1.11 Proposition

1. Pour $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$, il existe un unique élément d de $\mathbb{Z}$, tel que $p = n + d$. Cet élément est la somme de p et de l'opposé de n : $d = p + (-n)$.
2. Le nombre d défini ci-dessus est appelé la différence de p et n et est noté $p - n$.

Démonstration

→ Le nombre $d = p + (-n)$ convient puisque

$$n + (p + (-n)) = (n + (-n)) + p = 0 + p = p$$

→ C'est le seul possible car si d_1 vérifie $p = n + d_1$, nous avons $n + d_1 = n + d$ et donc $d_1 = d$ par régularité.

Remarque 6 :

1. Notez que le symbole « - » recouvre trois sens bien distincts :
   (a) Dans l'écriture -3, c'est le signe de l'entier relatif $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,3)]$
   (b) Dans l'écriture $-n$ (où $n \in \mathbb{Z}$) il sert à désigner l'opposé de n.
   (c) Dans l'écriture $p-n$,il désigne la différence de p et n.
2. La proposition 4.1.11 est en fait valable dans n'importe quel groupe commutatif dont la loi est notée additivement.

4.1.12 Proposition

Pour tout $(n,p) \in \mathbb{Z}^2$, nous avons $-(n+p) = (-n) + (-p)$ et $n - p = -(p-n)$.

Démonstration

Soit $(n,p) \in \mathbb{Z}^2$

1. Alors $(-n) + (-p)$ est l'opposé de $n+p$ puisque
$$(-n) + (-p) + n + p = (-n) + n + (-p) + p = ((-n) + n) + ((-p) + p) = 0 + 0 = 0$$
2. De même $n-p$ est l'opposé de $p-n$ puisque
$$(n-p) + (p-n) = n + (-p) + p + (-n) = (n + (-n)) + ((-p) + p) = 0 + 0 = 0$$

4.1.13 Définition d'une multiplication dans $\mathbb{N}^2$

1. Définition de la multiplication dans $\mathbb{N}^2$
   Pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ et tout $(c,d) \in \mathbb{N}^2$, nous avons :
$$(a,b) \times (c,d) = (ac+bd, ad+bc)$$
   Cette multiplication est associative, commutative, possède un élément neutre : $(1,0)$ et est distributive par rapport à l'addition
2. La relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est compatible avec la multiplication de $\mathbb{N}^2$
   C'est à dire que pour $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, $(a_1,b_1) \in \mathbb{N}^2$, $(c,d) \in \mathbb{N}^2$ et $(c_1,d_1) \in \mathbb{N}^2$, si $(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d)$ et $(a_1,b_1)\,\mathcal{R}\,(c_1,d_1)$, alors :
$$(a,b) \times (a_1,b_1)\,\mathcal{R}\,(c,d) \times (c_1,d_1) \iff (aa_1+bb_1, ab_1+a_1b)\,\mathcal{R}\,(cc_1+dd_1, cd_1+dc_1)$$

Démonstration

1. Nous laissons la démonstration du premier point aux soins du lecteur. C'est essentiellement calculatoire.
2. Nous allons faire la démonstration du second point en 2 temps.
   - Dans un premier temps, soient $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, $(c,d) \in \mathbb{N}^2$ tels que $(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d)$.
     Nous allons démontrer que pour tout couple $(a_1,b_1) \in \mathbb{N}^2$, alors $(a,b)\times(a_1,b_1)\,\mathcal{R}\,(c,d)\times(a_1,b_1)$.
     Nous avons $(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d) \iff a+d = b+c$ et
$$(a,b) \times (a_1,b_1) = (aa_1+bb_1, ab_1+a_1b) \text{ et } (c,d) \times (a_1,b_1) = (ca_1+db_1, cb_1+a_1d)$$
     Alors :
$$\begin{aligned}(aa_1+bb_1) + (cb_1+a_1d) = &\ a_1(a+d) + b_1(b+c)\\ = &\ a_1(b+c) + b_1(a+d) \text{ puisque } a+d = b+c\\ = &\ a_1b + a_1c + ab_1 + b_1d\\ = &\ (a_1c + +b_1d) + (ab_1 + a_1b)\end{aligned}$$
     Et nous avons donc bien $(a,b) \times (a_1,b_1)\,\mathcal{R}\,(c,d) \times (a_1,b_1)$

- Soient $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, $(a_1,b_1) \in \mathbb{N}^2$, $(c,d) \in \mathbb{N}^2$ et $(c_1,d_1) \in \mathbb{N}^2$ tels que $(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d)$ et $(a_1,b_1)\,\mathcal{R}\,(c_1,d_1)$. Alors, d'après le point précédent :

$$(a,b)\times(a_1,b_1)\,\mathcal{R}\,(c,d)\times(a_1,b_1) \text{ et } (a_1,b_1)\times(c,d)\,\mathcal{R}\,(c_1,d_1)\times(c,d)$$

Et donc, par transitivité, nous avons $(a,b)\times(a_1,b_1)\,\mathcal{R}\,(c,d)\times(c_1,d_1)$

4.1.14 Définition de la multiplication dans $\mathbb{Z}$ et premières propriétés

1. Pour $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ et $(c,d) \in \mathbb{N}^2$, nous définissons la multiplication dans $\mathbb{Z}$ par :

$$\mathcal{C}_{\mathcal{R}}\left[(a,b)\right]\times\mathcal{C}_{\mathcal{R}}\left[(c,d)\right] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}\left[(a,b)\times(c,d)\right]$$

2. Cette multiplication est commutative, associative, admet un élément neutre $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}\left[(1,0)\right]$ et est distributive par rapport à l'addition de $\mathbb{Z}$
3. Comme dans le cas de l'addition, la multiplication est indépendante du représentant choisi.

Démonstration

La démonstration doit beaucoup à 4.1.13 et 4.1.4 et est laissée au lecteur.

4.1.15 Proposition

1. Si $n \in \mathbb{Z}^+$ et $m \in \mathbb{Z}^-$ alors $m\times n \in \mathbb{Z}^-$
2. Si $n \in \mathbb{Z}^-$ et $m \in \mathbb{Z}^-$ alors $m\times n \in \mathbb{Z}^+$
3. Si $n \in \mathbb{Z}^+$ et $m \in \mathbb{Z}^+$ alors $m\times n \in \mathbb{Z}^+$

Démonstration

1. Si $n \in \mathbb{Z}^+$ et $m \in \mathbb{Z}^-$, alors $n = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}\left[(n,0)\right]$ et $m = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}\left[(0,m)\right]$. Alors :

$$m\times n = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}\left[(n,0)\right]\times\mathcal{C}_{\mathcal{R}}\left[(0,m)\right] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}\left[(n,0)\times(0,m)\right] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}\left[(0,mn)\right]$$

Et donc $m\times n \in \mathbb{Z}^-$
2. Si $n \in \mathbb{Z}^-$ et $m \in \mathbb{Z}^-$, alors $n = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}\left[(0,n)\right]$ et $m = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}\left[(0,m)\right]$. Alors :

$$m\times n = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}\left[(0,n)\right]\times\mathcal{C}_{\mathcal{R}}\left[(0,m)\right] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}\left[(0,n)\times(0,m)\right] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}\left[(mn,0)\right]$$

Et donc $m\times n \in \mathbb{Z}^+$
3. Si $n \in \mathbb{Z}^+$ et $m \in \mathbb{Z}^+$, alors $n = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}\left[(n,0)\right]$ et $m = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}\left[(m,0)\right]$. Alors :

$$m\times n = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}\left[(n,0)\right]\times\mathcal{C}_{\mathcal{R}}\left[(m,0)\right] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}\left[(n,0)\times(m,0)\right] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}\left[(mn,0)\right]$$

Et donc $m\times n \in \mathbb{Z}^+$

4.1.16 Théorème

1. $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau unitaire commutatif
2. Les nombres 1 et -1 sont les seuls éléments de $\mathbb{Z}^*$ inversibles *(admettant un symétrique pour la multiplication)*.
3. $\mathbb{Z}$ est un anneau intègre, c'est à dire que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $p \in \mathbb{Z}$:

$$np = 0 \Longrightarrow n = 0 \text{ ou } p = 0$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, tout $p \in \mathbb{Z}$ et tout $q \in \mathbb{Z}$:

$$n \times 0 = 0, \quad n(-p) = -(np) \text{ et } n \times (p - q) = np - nq$$

5. Tout élément non nul de $\mathbb{Z}$ est régulier pour la multiplication, c'est à dire :

$$(\forall n \in \mathbb{Z}^*), (\forall p \in \mathbb{Z}), (\forall q \in \mathbb{Z}), ((np = nq) \Longrightarrow (p = q))$$

Démonstration

La plupart des démonstrations de ce théorème utilisent les propriétés des entiers de l'ensemble $\mathbb{N}$ vues au chapitre 2

1. On montre que $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau unitaire
   - ▷ D'après 4.1.5, on sait que $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif
   - ▷ D'après 4.1.14, la multiplication est commutative, associative, admet un élément neutre $1 = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(1,0)]$ et est distributive par rapport à l'addition de $\mathbb{Z}$

   Donc $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau unitaire commutatif
2. On montre que 1 et -1 sont les seuls éléments inversibles de $\mathbb{Z}^*$

   Soit $n \in \mathbb{Z}^*$ que nous supposons inversible et $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, avec $a \neq b$, tel que $p = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(a,b)]$ soit l'inverse de n

   → Supposons $a > b$, alors $p = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(a,b)] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(a-b,0)]$; alors $p \in \mathbb{N}^*$ et $p = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(p,0)]$.
   - ▷ Supposons que $n \in \mathbb{Z}^{*+}$ et que $n = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(n,0)]$ Alors :

$$\begin{aligned} n \times p = 1 &\Longleftrightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(n,0)] \times \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(p,0)] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(1,0)] \\ &\Longleftrightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(np,0)] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(1,0)] \end{aligned}$$

     Ce qui signifie que $(np, 0)\,\mathcal{R}\,(1,0)$, c'est à dire $np = 1$ et donc $n = p = 1$

     Nous en concluons que si $n \in \mathbb{Z}^{*+}$ est inversible, alors $n = 1$ et son inverse p est telque $p = n = 1$
   - ▷ Supposons que $n \in \mathbb{Z}^{*-}$ et que $n = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,-n)]$ Alors :

$$\begin{aligned} n \times p = 1 &\Longleftrightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,-n)] \times \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(p,0)] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(1,0)] \\ &\Longleftrightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,(-n)\,p)] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(1,0)] \end{aligned}$$

     Ce qui signifie que $(0, (-n)\,p)\,\mathcal{R}\,(1,0)$, c'est à dire $0 = 1 + (-n)\,p$ et donc $(-n)\,p = -1$, ce qui est impossible puisque $-n \in \mathbb{Z}^{*+}$ et $p \in \mathbb{Z}^{*+}$

   → Supposons $a < b$, alors $p = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(a,b)] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,b-a)]$; alors $p \in \mathbb{Z}^-$ et $p = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,-p)]$.
   - ▷ Supposons que $n \in \mathbb{Z}^{*+}$ et que $n = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(n,0)]$ Alors :

$$\begin{aligned} n \times p = 1 &\Longleftrightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(n,0)] \times \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,-p)] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(1,0)] \\ &\Longleftrightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,(-p)\,n)] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(1,0)] \end{aligned}$$

     Ce qui signifie que $(0, (-p)\,n)\,\mathcal{R}\,(1,0)$, c'est à dire $0 = 1 + (-p)\,n$ et donc $(-p)\,n = -1$, ce qui est impossible puisque $n \in \mathbb{Z}^{*+}$ et $p \in \mathbb{Z}^{*-}$
   - ▷ Supposons que $n \in \mathbb{Z}^{*-}$ et que $n = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,-n)]$ Alors :

$$\begin{aligned} n \times p = 1 &\Longleftrightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,-n)] \times \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,-p)] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(1,0)] \\ &\Longleftrightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[((-n)\,(-p)\,,0)] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(1,0)] \end{aligned}$$

Ce qui signifie que $((-n)(-p), 0) \mathcal{R} (1,0)$, c'est à dire $(-n)(-p) = 1$ et donc $-n = 1 \Longleftrightarrow n = -1$ et $-p = 1 \Longleftrightarrow p = -1$

Nous en concluons que si $n \in \mathbb{Z}^{*-}$ est inversible, alors $n = -1$ et son inverse p est tel que $p = n = -1$

Ce que nous voulions

3. On démontre que $\mathbb{Z}$ est un anneau intègre

Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$ tels que $np = 0$

▷ Supposons $n \in \mathbb{Z}^+$ et $p \in \mathbb{Z}^+$, alors $n = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(n,0)]$ et $p = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(p,0)]$ et nous avons alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(n,0)] \times \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(p,0)] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,0)] &\Longleftrightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(n,0) \times (p,0)] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,0)] \\ &\Longleftrightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(np,0)] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,0)]\end{aligned}$$

Ce qui veut dire que $(np, 0) \mathcal{R} (0,0)$, autrement dit $np = 0$.

D'après les propriétés de $\mathbb{N}$, alors, $n = 0$ ou $p = 0$

▷ La démonstration est tout à fait semblable si nous supposons $n \in \mathbb{Z}^-$ et $p \in \mathbb{Z}^-$.

En effet, dans ce cas, $n = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,-n)]$ et $p = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,-p)]$ et nous avons alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,-n)] \times \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,-p)] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,0)] &\Longleftrightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,-n) \times (0,-p)] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,0)] \\ &\Longleftrightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[((-n)(-p), 0)] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,0)]\end{aligned}$$

Ce qui veut dire que $((-n)(-p), 0) \mathcal{R} (0,0)$, autrement dit $(-n)(-p) = 0$.

D'après les propriétés de $\mathbb{N}$, alors, $(-n) = 0$ ou $(-p) = 0$, ce qui est équivalent à $n = 0$ ou $p = 0$

▷ Supposons $n \in \mathbb{Z}^-$ et $p \in \mathbb{Z}^+$, alors $n = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,-n)]$ et $p = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(p,0)]$ et nous avons alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,-n)] \times \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(p,0)] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,0)] &\Longleftrightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,-n) \times (p,0)] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,0)] \\ &\Longleftrightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,(-n)p)] = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}[(0,0)]\end{aligned}$$

Ce qui veut dire que $(0, (-n)p) \mathcal{R} (0,0)$, autrement dit $(-n)p = 0$.

D'après les propriétés de $\mathbb{N}$, alors, $(-n) = 0$ ou $p = 0$, autrement dit $n = 0$ ou $p = 0$

$\mathbb{Z}$ est bien un anneau intègre

4. ▷ Montrons que $n \times 0 = 0$

Nous avons $n \times 0 = n \times (0+0)$.

Par la distributivité, nous obtenons

$$n \times 0 = n \times 0 + n \times 0 \Longleftrightarrow n \times 0 + 0 = n \times 0 + n \times 0$$

Par la régularité de l'addition, nous avons $n \times 0 = 0$

▷ Montrons que $n(-p) = -(np)$

Nous avons :

$$n \times p + n \times (-p) = n \times (p + (-p)) = n \times 0 = 0$$

Ainsi, $n \times (-p)$ apparaît comme l'opposé de $n \times p$ pour l'addition, et donc

$$n(-p) = -(np) = -np$$

▷ Montrons que $n \times (p - q) = np - nq$

Cette question ne pose pas de difficulté.

$$n \times (p-q) = n \times (p + (-q)) = n \times p + n \times (-q) = n \times p - (n \times q) = np - nq$$

▷ Montrons que tout élément non nul de $\mathbb{Z}$ est régulier pour la multiplication

Soient $n \in \mathbb{Z}^*$, $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}$ tels que $np = nq$. Alors :

$$np = nq \Longleftrightarrow np - nq = 0 \Longleftrightarrow n \times (p-q) = 0$$

Comme $n \neq 0$, alors $p - q = 0$, c'est à dire $p = q$.

Ce que nous voulions

Remarque 7 :

La multiplication dans $\mathbb{Z}$ prolonge celle de $\mathbb{N}$.

4.1.17 Relation d'ordre dans $\mathbb{Z}$

1. Dans $\mathbb{Z}$, nous définissons la relation suivante :

$$(\forall x \in \mathbb{Z})\,(\forall y \in \mathbb{Z})\,((x \leqslant y) \Longleftrightarrow ((\exists p \in \mathbb{N})\,(y = x + p)))$$

2. La relation « $\leqslant$ » est une relation d'ordre, compatible avec l'addition et la multiplication par un nombre positif

Démonstration

1. **La relation « $\leqslant$ » est une relation d'ordre**
   - ▷ La relation « $\leqslant$ » est réflexive
     En effet, soit $x \in \mathbb{Z}$; alors, $x = x + 0$ et donc $x \leqslant x$
   - ▷ La relation « $\leqslant$ » est antisymétrique
     Soient $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$ tels que $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$. Alors, il existe $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ tels que $y = x + p \Longleftrightarrow y - x = p$ et $x = y + q \Longleftrightarrow y - x = -q$
     Ce qui veut dire que $p = -q$. Comme $q \in \mathbb{N}$, alors $p \in \mathbb{Z}^-$ et donc de $p \in \mathbb{N}$ et de $p \in \mathbb{Z}^-$, nous en déduisons que $p = q = 0$ et que donc $x = y$
   - ▷ La relation « $\leqslant$ » est transitive
     Soient $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$ et $z \in \mathbb{Z}$ tels que $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$. Alors, il existe $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ tels que $y = x + p$ et $z = y + q$
     Alors, très simplement $z = y + q = (x + p) + q = x + (p + q)$ et donc $x \leqslant z$.
     La relation « $\leqslant$ » est donc transitive

   La relation « $\leqslant$ » est donc une relation d'ordre
2. **La relation « $\leqslant$ » est compatible avec l'addition et la multiplication par un nombre positif**
   - ▷ La relation « $\leqslant$ » est compatible avec l'addition
     Soient $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$ et $z \in \mathbb{Z}$ tels que $x \leqslant y$. Alors, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $y = x + p$
     Alors $y + z = x + p + z = (x + z) + p$ et donc $x + z \leqslant y + z$
     La relation « $\leqslant$ » est donc compatible avec l'addition
   - ▷ La relation « $\leqslant$ » est compatible avec la multiplication par un entier positif
     Soient $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$ et $z \in \mathbb{Z}^+$ tels que $x \leqslant y$. Alors, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $y = x + p$
     Alors $y \times z = (x + p) \times z = (x \times z) + p \times z$. Comme $p \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{N}$, alors $pz \in \mathbb{N}$ et donc $x \times z \leqslant y \times z$
     La relation « $\leqslant$ » est donc compatible avec la multiplication par un entier positif

Remarque 8 :

Lorsque, pour $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$ nous avons $x \leqslant y$, il existe alors $p \in \mathbb{N}$ tel que $y = x + p$. Cette égalité est donc équivalente à $y - x \in \mathbb{N} = \mathbb{Z}^+$

4.1.18 Proposition

La relation « $\leqslant$ » est une relation d'ordre total dans $\mathbb{Z}$

Démonstration

Nous avons, dans tous les cas $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \mathbb{Z}^+$ et $\mathbb{Z}^- \cap \mathbb{Z}^+ = \{0\}$
Soit donc $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$.
Alors $n - p \in \mathbb{Z}^+$ et, dans ce cas $p \leqslant n$
Ou bien $n - p \in \mathbb{Z}^- \Longleftrightarrow p - n \in \mathbb{Z}^+$ et, dans ce cas $n \leqslant p$
A chaque fois n et p sont comparables et la relation d'ordre est donc totale.

Remarque 9 :

1. On définit la relation **strictement inférieur** « $<$ » par :
$$(\forall x \in \mathbb{Z})\,(\forall y \in \mathbb{Z})\,((x < y) \iff ((x \leqslant y) \text{ et } (x \neq y)))$$
2. En utilisant la définition de la relation d'ordre « $\leqslant$ » vue en 4.1.17, notons les relation immédiates :
   - ▷ $(x \in \mathbb{N}) \iff (x \geqslant 0) \iff (-x \leqslant 0)$
   - ▷ $(x \in \mathbb{N}^*) \iff (x > 0) \iff (x \geqslant 1)$
   - ▷ $(x \in \mathbb{Z}^-) \iff (x \leqslant 0) \iff (-x \geqslant 0)$
3. Second type de relation : $x \leqslant y \iff -x \geqslant -y$
   En effet, $x \leqslant y \iff y - x \in \mathbb{N}$
   Or, $y - x = -x - (-y)$ et nous avons donc $-x - (-y) \in \mathbb{N}$, c'est à dire $-y \leqslant -x \iff -x \geqslant -y$
4. Remarquons aussi que $((x \leqslant y) \text{ et } (z \leqslant 0)) \Longrightarrow (xz \geqslant xy)$
   En effet, $x \leqslant y \iff y - x \in \mathbb{N}$ et donc, si $z \leqslant 0$, alors $z\,(y - x) \in \mathbb{Z}^- \iff z\,(x - y) \in \mathbb{N}$.
   Comme $z\,(x - y) = zx - zy$, nous avons $zx - zy \in \mathbb{N} \iff zx \geqslant zy$

4.1.19 Proposition

$\mathbb{Z}$ est archimédien
C'est à dire que pour tout $y \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{N}^*$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$

Démonstration

Soient $y \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{N}^*$.

- ▷ Si $y \in \mathbb{Z}^-$, alors, il n'y a pas de difficulté ; il suffit de prendre $n = 1$, et comme $y \leqslant 0$ et $x \geqslant 1$, nous avons bien $y < 1 \times x$
- ▷ Supposons, cette fois ci $y \in \mathbb{N}^*$, c'est à dire que y est un entier strictement positif, c'est à dire $y > 0$
  Alors, comme $x \geqslant 1$, nous avons $x\,(y + 1) \geqslant y + 1 > y$ et l'entier $n = y + 1$ convient.

4.1.20 Sous-ensembles de $\mathbb{Z}$

1. Tout sous ensemble non vide et minoré de $\mathbb{Z}$ admet un élément minimum unique
2. Tout sous ensemble non vide et majoré de $\mathbb{Z}$ admet un élément maximum unique

Démonstration

1. Soit $M \subset \mathbb{Z}$ non vide et minoré. Soit $a \in \mathbb{Z}$, ce minorant.
   Alors, pour tout $y \in M$, $a \leqslant y$. On considère l'ensemble M' défini par :
$$M' = \{x \in \mathbb{Z} \text{ tels que } x = y + a \text{ où } y \in M\}$$
   Alors puisque tout $x \in M'$ est tel que $x \geqslant 0$, nous avons $M' \subset \mathbb{N}$, et d'après l'axiôme 2.1.2 M' est un ensemble non vid ede $\mathbb{N}$ qui admet un plus petit élément unique appelé t.
   Par construction, il existe un nombre $y_0 \in M$ tel que $t = a + y_0$ et ce plus petit élément est de manière évidente le nombre $y_0 = t - a$, et cet élément y_0 est, lui aussi unique
2. Supposons, maintenant, $M \subset \mathbb{Z}$ non vide et majoré.
   Soit $b \in \mathbb{Z}$, ce majorant. Alors, pour tout $y \in M$, $b \geqslant y$
   Considère maintenant l'ensemble M_1 défini par :
$$M_1 = \{x \in \mathbb{Z} \text{ tels que } x = -y \text{ où } y \in M\}$$
   Alors cette fais ci, M_1 est une partie de $\mathbb{Z}$ non vide et minorée par $-b$.
   D'après la question précédente, M_1 admet un plus petit élément $z_1 \in M_1$, c'est à dire que pour tout $x \in M_1$, $z_1 \leqslant x \iff -x \geqslant -z_1$
   Comme $-x \in M$ et $-z_1 \in M$, M admet donc un plus grand élément unique

4.2 Congruences et division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Voici une très belle théorie, due en très grande partie à K.F. GAUSS.
Cette théorie propose une méthode d'étude des nombres, à partir des restes de la division euclidienne. Elle est apparue dans un livre publié en latin, au XIX ° siècle, sous le titre :≪ ***Disquitionnae arithmeticae*** *≫* ***(Recherches arithmétiques)****.En fait, la méthode est apparue pour résoudre un autre problème, appelé* ***Théorème de FERMAT****. Ce problème a été résolu en 1989.*

4.2.1 Notion de multiple

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$; on appelle multiple de n, un nombre $m \in \mathbb{Z}$ tel qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $m = kn$
2. L'ensemble des multiples de n est l'ensemble $n\mathbb{Z}$ où :
$$n\mathbb{Z} = \{m \in \mathbb{Z} \text{ tels qu'il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } m = n \times k\}$$

Remarque 10 :

1. Nous reviendrons sur cette notion en 5.1.1 en étudiant la divisibilité dans $\mathbb{Z}$
2. Exemples d'ensembles de multiples :
   - ▷ $0\mathbb{Z} = \{0\}$ et $1 \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$
   - ▷ $2\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres pairs (l'ensemble des multiples de 2)
   - ▷ Les nombres impairs sont donc $\mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}$; l'ensemble des nombres impairs, est aussi $2\mathbb{Z} + 1$, c'est à dire
$$2\mathbb{Z} + 1 = \{m \in \mathbb{Z} \text{ tels qu'il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } m = 2 \times k + 1\}$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$; alors, nous avons $(-n)\,\mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$. Il est donc inutile d'étudier les ensembles de multiples, dans $\mathbb{Z}$ d'entiers strictement négatifs.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$, on peut généraliser les ensembles $n\mathbb{Z} + p$ par :
$$n\mathbb{Z} + p = \{m \in \mathbb{Z} \text{ tels qu'il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } m = n \times k + p\}$$

4.2.2 Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble $n\mathbb{Z}$ des multiples de n est un anneau commutatif

Démonstration

1. Il est facile de démontrer que $(n\mathbb{Z}, +)$ est un sous groupe de $(\mathbb{Z}, +)$
   → D'une part, $n\mathbb{Z} \neq \emptyset$ puisque $0 \in n\mathbb{Z}$
   → D'autre part, pour tout $x \in n\mathbb{Z}$ et tout $y \in n\mathbb{Z}$, nous avons $x - y = kn - k'n = n\,(k - k') \in n\mathbb{Z}$
   Donc $(n\mathbb{Z}, +)$ est un sous groupe de $(\mathbb{Z}, +)$
2. De plus, pour tout $x \in n\mathbb{Z}$ et tout $y \in n\mathbb{Z}$, nous avons $x \times y = kn \times k'n = n\,(kk'n) \in n\mathbb{Z}$

Remarque 11 :

1. On remarquera de plus que, si $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in n\mathbb{Z}$, alors $xy \in n\mathbb{Z}$, puisque $xy = x\,(nk) = n\,(xk)$. $n\mathbb{Z}$ est donc aussi un idéal de $\mathbb{Z}$
2. $n\mathbb{Z}$ n'est pas un anneau unitaire puisque $1 \notin n\mathbb{Z}$

4.2.3 Définition de la relation de congruence

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$
   Dans $\mathbb{Z}$, on dit que ≪ x **est congru à** y **modulo** n ≫ et on écrit $x \equiv y\,[n]$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = kn \iff x - y \in n\mathbb{Z}$
2. La relation de congruence est une relation d'équivalence

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$

1. **La relation de congruence est évidemment réflexive**
   Soit $x \in \mathbb{Z}$
   Alors $x - x = 0 = 0 \times n$ et donc $x \equiv x\,[n]$
2. **La relation de congruence est symétrique**
   Soient $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$
   Supposons $x \equiv y\,[n]$.
   Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = k \times n$ et donc $y - x = (-k) \times n$, c'est à dire $y \equiv x\,[n]$
   Donc, si $x \equiv y\,[n]$, alors $y \equiv x\,[n]$
3. **La relation de congruence est transitive**
   Soient $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$ et $z \in \mathbb{Z}$
   Supposons $x \equiv y\,[n]$ et $y \equiv z\,[n]$.
   Alors, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = kn$ et $k_1 \in \mathbb{Z}$ tel que $y - z = k_1 n$. En additionnant, nous obtenons :
   $$(x-y)+(y-z) = kn + k_1 n \Longleftrightarrow x - z = (k+k_1)\,n \Longleftrightarrow x \equiv z\,[n]$$
   Ainsi, si $x \equiv y\,[n]$ et $y \equiv z\,[n]$, alors $x \equiv z\,[n]$

Exemple 1 :

1. $13 \equiv 8 \;\; [5]$ car, $13 - 8 = 1 \times 5$
2. $115 \equiv 11 \;\; [13]$ car, $115 - 11 = 104 = 8 \times 13$
3. $967 \equiv 16420 \;\; [17]$ car $967 - 16420 = -(909) \times 17$

Exercice 1 :

Montrer que $3 \times 2^{11} \equiv 2^{12}\left[2^8\right]$

4.2.4 Propriétés

La relation de congruence est compatible avec l'addition et la multiplication, c'est à dire que si $x \equiv y\,[n]$ et $z \equiv t\,[n]$, alors :
$$x + z \equiv y + t\,[n] \text{ et } xz \equiv yt\,[n]$$
D'autre part, si $x \equiv y\,[n]$, alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $x^p \equiv y^p\,[n]$

Démonstration

Soient $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{Z}$ et $t \in \mathbb{Z}$ tels que $x \equiv y\,[n]$ et $z \equiv t\,[n]$.
Nous avons alors $x - y = kn$ et $z - t = k_1 n$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $k_1 \in \mathbb{Z}$.

⇒ **Montrons que nous avons** $x + z \equiv y + t\,[n]$
En additionnant, nous obtenons :
$$(x-y)+(z-t) = (k+k_1)\,n \Longleftrightarrow (x+z)-(y+t) = (k+k_1)\,n$$
C'est à dire que nous avons $x + z \equiv y + t\,[n]$

⇒ **Montrons que nous avons** $xz \equiv yt\,[n]$
- ▷ Supposons $x \equiv y\,[n]$ et montrons que, pour tout $z \in \mathbb{Z}$, alors $xz \equiv yz\,[n]$
  Si $x \equiv y\,[n]$, alors $x - y = kn$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et, en multipliant par $z \in \mathbb{Z}$, nous obtenons :
  $$z\,(x-y) = zkn \Longleftrightarrow zx - zy = (zk)\,n \Longleftrightarrow xz \equiv yz\,[n]$$
- ▷ Supposons, maintenant $x \equiv y\,[n]$ et $z \equiv t\,[n]$. Alors $xz \equiv yz\,[n]$ et $zy \equiv ty\,[n]$, et donc, par transitivité, $xz \equiv yt\,[n]$

⇒ Si $x \equiv y\,[n]$, en itérant les résultats ci-dessus, nous avons $x \times x \equiv y \times y\,[n] \Longleftrightarrow x^2 \equiv y^2\,[n]$, et, en itérant, pour $p \in \mathbb{N}$, nous obtenons $x^p \equiv y^p\,[n]$

Remarque 12 :

1. **Classes d'équivalence dans la relation de congruence**
   ▷ La classe d'équivalence de $x \in \mathbb{Z}$, dans la relation de congruence modulo n, est l'ensemble des éléments de $\mathbb{Z}$ qui sont en relation avec x, ou congrus à x modulo n
   Soit donc $x \in \mathbb{Z}$, on cherche
   $$\dot{x} = \{y \in \mathbb{Z} \text{ tels que } x \equiv y\,[n]\} = \{y \in \mathbb{Z} \text{ tels que } y = x + kn \text{ où } k \in \mathbb{Z}\} = x + n\mathbb{Z}$$
   ▷ **Par exemple**, dans la relation de congruence modulo 4,
   $$\dot{3} = \{\dots, -5, -1, +3, +7, +11, \dots\} = 3 + 4\mathbb{Z}$$
2. On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'équivalence modulo n
3. Soient $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$.
   Nous nous posons la question de savoir s'il est possible de faire des opérations sur les classes d'équivalence, un peu comme dans $\mathbb{Z}$
   Il faudrait pouvoir définir :$\dot{x} + \dot{y}$ et $\dot{x} \times \dot{y}$; c'est ce qui est fait dans la proposition suivante. Il y a cependant de nombreux problèmes que l'on peut se poser, en particulier celui de savoir si le résultat des opérations dépend des représentants choisis.

4.2.5 Structure d'anneau de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

1. <u>Définition de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$</u>
   Pour $\dot{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\dot{y} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
   ▷ **On définit l'addition par :** $\dot{x} + \dot{y} = \overbrace{x+y}^{\cdot}$
   ▷ **On définit la multiplication par :** $\dot{x} \times \dot{y} = \overbrace{xy}^{\cdot}$
   Ces opérations sont indépendantes des représentants choisis
2. Muni de ces 2 opérations, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, est un anneau commutatif.

Démonstration

1. **Le résultat de ces opérations est indépendant des représentants choisis ;**
   ▷ <u>Addition</u>
   En effet, si $x \equiv y\,[n]$ et si $a \equiv b\,[n]$, alors, $\dot{x} = \dot{y}$ et $\dot{a} = \dot{b}$
   Etudions $\overbrace{a+x}^{\cdot}$ et $\overbrace{y+b}^{\cdot}$.
   Par définition, $\overbrace{x+a}^{\cdot} = \dot{x} + \dot{a}$ et $\overbrace{y+b}^{\cdot} = \dot{y} + \dot{b}$.
   Comme, la relation de congruence est compatible avec l'addition, nous avons $x + a \equiv y + b\,[n]$, c'est à dire $\overbrace{x+a}^{\cdot} = \overbrace{y+b}^{\cdot}$
   Pour conclure, nous avons donc : $\dot{x} + \dot{a} = \overbrace{x+a}^{\cdot} = \overbrace{y+b}^{\cdot}) = \dot{y} + \dot{b}$
   Le résultat de l'opération est donc indépendant des représentants choisis.
   ▷ La démonstration est la même pour la multiplication *(à faire !)*
2. **Muni de ces 2 opérations, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, est un anneau commutatif.**
   La démonstration est très simple
   ⇒ Tout d'abord, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif
   ▷ L'addition est commutative, puisque, pour tout $\dot{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\dot{y} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:
   $$\dot{x} + \dot{y} = \overbrace{x+y}^{\cdot} = \overbrace{y+x}^{\cdot} = \dot{y} + \dot{x}$$

- ▷ Sans coup férir, l'addition est associative, puisque, pour tout $\dot{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\dot{y} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\dot{z} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \dot{x} + (\dot{y} + \dot{z}) = &\ \underbrace{\dot{x} + \left(\overbrace{y+z}^{\cdot}\right)} = \overbrace{x+y+z}^{\cdot} \\ = &\ \overbrace{(x+y)+z}^{\cdot} = \overbrace{x+y}^{\cdot} + \dot{z} \\ = &\ (\dot{x} + \dot{y}) + \dot{z} = \dot{x} + \dot{y} + \dot{z} \end{aligned}$$

- ▷ Le neutre pour l'addition est évidemment $\dot{0}$
- ▷ Et le symétrique de $\dot{x}$ est donc $\overbrace{(-x)}^{\cdot}$

⇒ La multiplication est commutative, distributive par rapport à l'addition et possède un neutre

- ▷ La multiplication est commutative, puisque, pour tout $\dot{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\dot{y} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

$$\dot{x} \times \dot{y} = \overbrace{x \times y}^{\cdot} = \overbrace{y \times x}^{\cdot} = \dot{y} \times \dot{x}$$

- ▷ Sans difficulté, la multiplication est associative.
- ▷ Le neutre pour la multiplication est évidemment $\dot{1}$
- ▷ Et la multiplication est distributive par rapport à l'addition.
  En effet, pour tout $\dot{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\dot{y} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\dot{z} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \dot{x} \times (\dot{y} + \dot{z}) = &\ \underbrace{\dot{x} \times \left(\overbrace{y+z}^{\cdot}\right)} = \overbrace{x\,(y+z)}^{\cdot} \\ = &\ \overbrace{xy + xz}^{\cdot} = \overbrace{xy}^{\cdot} + \overbrace{xz}^{\cdot} = \dot{x}\dot{y} + \dot{x}\dot{z} \end{aligned}$$

Ainsi, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est bien un anneau commutatif

Remarque 13 :

On peut construire une application « projection »

$$\begin{cases} p : \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ \quad x & \longrightarrow & p(x) = \dot{x} \end{cases}$$

D'après 4.2.5, cette projection est telle que : $p(x+y) = p(x) + p(y)$ et $p(xy) = p(x)\,p(y)$
p est un morphisme d'anneau

4.2.6 Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$, c'est à dire $b \neq 0$
Alors, il existe un unique couple d'entiers relatifs (q, r) tels que

$$a = bq + r \text{ et } 0 \leqslant r < |b|$$

q est le quotient et r le reste

Démonstration

1. Rappelons la propriété d'Archimède vue en 2.5.1 :
   Pour tout $a \in \mathbb{N}$, pour tout $b \in \mathbb{N}^*$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a < kb$
   Si $x > 0$, alors, pour tout $y \in \mathbb{Z}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$.
   On peut remarquer que l'énoncé de 2.5.1 est différent, mais, en fait, il n'y a rien de changé, puisque si $y \in \mathbb{Z}$, y pouvant être négatif, nous avons alors toujours $nx > y$ puisque $n \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$
2. Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$, c'est à dire $b \neq 0$.
   Considérons l'ensemble $\mathcal{M}(a, b)$ défini par :

$$\mathcal{M}(a, b) = \{t \in \mathbb{N} \text{ où } t = a - sb \text{ avec } s \in \mathbb{Z}\}$$

→ $\mathcal{M}(a,b)$ **est non vide**
C'est ici que nous allons utiliser la propriété d'Archimède 2.5.1
De $b \in \mathbb{Z}^*$, nous avons $|b| \in \mathbb{N}$ et $|b| > 0$.
D'après la propriété d'Archimède, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $m|b| > -a$, c'est à dire tel que $a + m|b| > 0$
- ⋆ Si $b > 0$, alors, nous avons $a + m|b| > 0 \Longleftrightarrow a + mb > 0$ et en posant $s = -m$, nous avons $t = a - sb > 0$ et donc $t \in \mathcal{M}(a,b)$
- ⋆ Par contre, si $b < 0$, alors, nous avons $a + m|b| > 0 \Longleftrightarrow a - mb > 0$ et en posant $s = m$, nous avons $t = a - sb > 0$ et donc $t \in \mathcal{M}(a,b)$

Nous venons de démontrer que $\mathcal{M}(a,b) \neq \emptyset$

→ $\mathcal{M}(a,b)$ **possède un plus petit élément**
Par construction, $\mathcal{M}(a,b) \subset \mathbb{N}$.
D'après les axiômes 2.1.2 de construction de $\mathbb{N}$, toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
Donc, $\mathcal{M}(a,b)$ possède un plus petit élément.

→ **Si r est le plus petit élément de $\mathcal{M}(a,b)$, alors** $0 \leqslant r < |b|$
Nous appelons donc r le plus petit élément de $\mathcal{M}(a,b)$
- ⋆ Tout d'abord, par la définition de $\mathcal{M}(a,b)$, nous avons $r \geqslant 0$
- ⋆ Montrons maintenant que nous avons $r < |b|$
  r, le plus petit élément de $\mathcal{M}(a,b)$ et donc $r \in \mathcal{M}(a,b)$, c'est à dire qu'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $r = a - bq$.
  Supposons $r \geqslant |b| \Longleftrightarrow r - |b| \geqslant 0$. Posons, maintenant, $t_0 = r - |b| = a - bq - |b|$
  - ▷ Si $b > 0$, alors $|b| = b$ et $t_0 = a - b(q+1)$, et d'après la définition de $\mathcal{M}(a,b)$, nous avons $t_0 \in \mathcal{M}(a,b)$ et
  $$t_0 - r = a - b(q+1) - a + bq = -b \leqslant 0$$
    C'est à dire $t_0 \leqslant r$, et r n'est plus le plus petit élément de $\mathcal{M}(a,b)$; il y a donc contradiction.
  - ▷ Maintenant, si $b < 0$, alors $|b| = -b$ et $t_0 = a - b(q-1)$, et d'après la définition de $\mathcal{M}(a,b)$, nous avons à nouveau $t_0 \in \mathcal{M}(a,b)$ et
  $$t_0 - r = a - b(q-1) - a + bq = b \leqslant 0$$
    C'est à dire $t_0 \leqslant r$, et r n'est plus le plus petit élément de $\mathcal{M}(a,b)$; il y a donc contradiction.

  Donc, les contradictions mènent à la conclusion $r < |b|$
- ⋆ En synthèse, nous avons bien $0 \leqslant r < |b|$

Il existe donc bien un couple d'entiers relatifs (q,r) tels que
$$a = bq + r \text{ et } 0 \leqslant r < |b|$$

3. Montrons l'unicité du couple (q,r)
Supposons donc qu'il existe 2 couples d'entiers relatifs (q_1,r_1) et (q_2,r_2) tels que :
$$a = bq_1 + r_1 \text{ avec } 0 \leqslant r_1 < |b| \text{ et } a = bq_2 + r_2 \text{ avec } 0 \leqslant r_2 < |b|$$
Alors $bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2 \Longleftrightarrow b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$
→ De l'égalité $b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$, nous tirons $|b||q_1 - q_2| = |r_2 - r_1|$
Si $q_1 \neq q_2$, alors, comme $q_1 - q_2 \in \mathbb{Z}$, nous avons $|q_1 - q_2| \geqslant 1$ et donc $|b||q_1 - q_2| \geqslant |b|$, c'est à dire $|r_2 - r_1| \geqslant |b|$
→ Or, de $0 \leqslant r_1 < |b|$ et de $0 \leqslant r_1 < |b|$, nous déduisons $-|b| < r_2 - r_1 < |b|$, c'est à dire $|r_2 - r_1| < |b|$
Il y a donc contradiction et nous avons $q_1 = q_2$ et $r_1 = r_2$

Et le théorème est démontré

Remarque 14 :

1. Le théorème 4.2.6 est le pilier de l'arithmétique
2. Nous pouvons trouver plusieurs couples d'entiers relatifs (q, r) tels que $a = bq + r$. L'unicité provient de la condition supplémentaire $0 \leqslant r < |b|$

   Exemple

   Etudions la division de 12 par 7
   - Nous avons $12 = 1 \times 7 + 5$ et nous avons $0 \leqslant 5 < 7$
   - Mais, nous avons aussi $12 = 2 \times 7 + -2$ ou encore $12 = -1 \times 7 + 19$
   - Il n'y a qu'un seul couple (q, r) tel que $12 = 1 \times 7 + 5$ avec $0 \leqslant 5 < 7$

Exercice 2 :

Soient $b \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{Z}$. Comparer les quotients q_1, q_2 et q_3 des divisions de a par b, de $2a$ par b et de $(2a + b)$ par $2b$

4.2.7 Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$
x et y sont congrus modulo n si et seulement si ils ont même reste dans la division par n

Démonstration

1. **Supposons x et y congrus modulo n**
   On va montrer que x et y admettent même reste dans la division par n
   Si x et y sont congrus modulo n, alors $x - y = kn$ où $k \in \mathbb{Z}$
   La division par n donne : $x = an + r$ et $y = bn + r'$ où r et r' sont tels que $0 \leqslant r \leqslant n - 1$ et $0 \leqslant r' \leqslant n - 1$.
   Donc, $x - y = (a - b)\, n + (r - r')$, où on aura $-(n - 1) \leqslant r - r' \leqslant (n - 1)$; $x - y$ étant un multiple de n, la seule possibilité pour $r - r'$ est d'être nul ; donc : $r = r'$
2. **Supposons que x et y ont même reste dans la division par n**
   Alors, $x = an + b$ où $0 \leqslant b < n$, et $y = a'n + b$.
   Donc,
   $$x - y = (an + b) - (a'n + b) = n\,(a - a')$$
   Ce qui montre que $x \equiv y\,[n]$

Remarque 15 :

Donc, si r est le reste de la division de x par n, on a $x \equiv r\,[n]$

4.2.8 Proposition

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un ensemble de n classes qui sont, en fait, tous les restes dans la division par n, c'est à dire :

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \left\{\dot{0}, \dot{1}, \dots, \overset{\cdot}{\overbrace{(n-2)}}, \overset{\cdot}{\overbrace{(n-1)}}\right\}$$

Démonstration

Tout $x \in \mathbb{Z}$ est congru, modulo n à un reste dans la division par n. Comme il y a n restes, il y a donc n classes

Exemple 2 :

1. Dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, nous avons :

$$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}=\{\dot{0},\dot{1},\dot{2},\dot{3},\dot{4}\}=\left\{\overset{\cdot}{\overbrace{(-4)}},\overset{\cdot}{\overbrace{(-3)}},\overset{\cdot}{\overbrace{(-2)}},\overset{\cdot}{\overbrace{(-1)}},\dot{0}\right\}=\left\{\overset{\cdot}{\overbrace{11}},\overset{\cdot}{\overbrace{12}},\overset{\cdot}{\overbrace{13}},\overset{\cdot}{\overbrace{14}},\overset{\cdot}{\overbrace{15}}\right\}$$

etc...

2. Dans $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$, l'ensemble des classes d'équivalence est donné par :$\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}=\left\{\overset{\cdot}{\overbrace{-2^{n-1}}},\dots,\overset{\cdot}{\overbrace{-2^{n-1}-1}}\right\}$

3. **Tables d'addition et de multiplication**

(a) On a ici, la table d'addition de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

(b) Et voici la table de multiplication de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

×	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

On remarquera que $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ admet de véritables diviseurs de zéro :3 et 4, car on a $3\times 4=0$,

4.2.9 Définition

On dit qu'un élement u de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est inversible ,s'il existe $v\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $uv=1$

Exercice 3 :

1. Faites la table de multiplication de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ *(Cette fois -ci, nous remarquerons que que $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ne possède pas de diviseurs de 0)*
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation $\dot{2}+x=\dot{1}$ d'inconnue x
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation $\dot{3}x=\dot{2}$ d'inconnue x
4. Trouver, dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, les inconnues $x\in\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et $y\in\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ vérifiant le système

$$\begin{cases}\dot{2}x+\dot{3}y= & \dot{2}\\ \dot{1}x+\dot{2}y= & \dot{4}\end{cases}$$

5. Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation $x^2+\dot{2}x-\dot{3}=\dot{0}$ d'inconnue x
6. Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, l'équation $x^2-x-\dot{2}=\dot{0}$

4.2.10 Exercices complémentaires

Exercice 4 :

Montrer que l'implication suivante est vraie : $x\equiv 4\,[8]\Longrightarrow x^2\equiv 16\,[64]$.

Exercice 5 :

1. Trouver les entiers relatifs $x \in \mathbb{Z}$ tels que $x^2 + x + 1 \equiv 0\,[4]$
2. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, nous avons $x^3 - x \equiv 0\,[3]$

Exercice 6 :

Rechercher les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

Exercice 7 :

Trouver r tel que $x \equiv r\,[n]$, avec r entier et $0 \leqslant r < n$, dans les cas suivants :

1. $x = 1789$ et $n = 7$
2. $x = 1815$ et $n = 2^3$
3. $x = 4^{56}$ et $n = 2^{56}$

Exercice 8 :

Résoudre les congruences suivantes :

1. $3x \equiv 7\,[16]$
2. $5x + 7 \equiv 6\,[23]$
3. $4x \equiv 9\,[13]$
4. $2x + 8 \equiv 5\,[33]$
5. $3x + 9 \equiv 8x + 61\,[64]$
6. $4x + 3 \equiv 7x + 2\,[11]$

Exercice 9 :

Montrer que, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, n^3 est de la forme $7k + 1$, $7k - 1$, $7k$

Exercice 10 :

Calculer les restes, modulo 7, des nombres 2^n et 3^n ; trouver alors $n$tel que $2^n + 3^n \equiv 0\,[7]$

Exercice 11 :

Erwann est représentant de commerce.
Partant de Vannes, il parcourt la Bretagne en respectant toujours les mêmes étapes :
il va à Nantes, puis à Rennes, puis à saint Brieuc ; de là il va à Brest, ensuite à Quimper et revient à Vannes.
En une année, il fait 147 étapes ; où se trouve-t-il à la fin de sa huitième année de travail ?

Exercice 12 :

1. Calculer le reste, modulo 7, de $(32)^{48}$, de $(237)^{349}$
2. Calculer le reste modulo 13 de $(100)^{100}$
3. Montrer que $2^{70} + 3^{70}$ est divisible par 13

Exercice 13 :

Critère de divisibilité par 9

1. Etudier les congruences de 10^n modulo 9
2. En déduire qu'un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9

Exercice 14 :

Trouver les trois derniers chiffres de $1! + 2! + 3! + \cdots + (2022)! + (2023)! + (2024)!$

Exercice 15 :

1. Démontrer que $(\forall k \in \mathbb{N})\,(\forall r \in \mathbb{N})\,\left(7^{4k+r} \equiv 7^r\,[10]\right)$
2. Etudier les classes de 7^n modulo 4
3. Quel est le chiffre des unités de $7^{\left(7^7\right)}$?

Exercice 16 :

Démontrer que Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$:

1. $7^n - 7^{n-2} \equiv 12\,[36]$
2. $9^n - 9^{n-2} \equiv 16\,[64]$
3. $11^n - 11^{n-2} \equiv 20\,[100]$
4. Pour tout $m \in \mathbb{N}$,$(2m+1)^n - (2m+1)^{n-2} \equiv 4m\,\left[4m^2\right]$

Exercice 17 :

Preuve par 9
Le but de l'exercice est de démontrer la proposition suivante appelée preuve par 9 dont l'énoncé est ci-après :

On cherche à vérifier le résultat de la multiplication $a \times b = c$.

1. On fait la somme des chiffres composant l'entier a et on itère jusqu'à n'avoir plus qu'un seul chiffre A appartenant à l'ensemble $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.
2. On fait de même pour b et c; on obtient respectivement les chiffres B et C. On calcule $A \times B$ et on fait à nouveau la somme des chiffres; on obtient le chiffre C'
3. Si la multiplication $a \times b = c$ était correcte, on doit avoir : $C = C'$

1. Montrez que tout nombre entier est congru à la somme de ses chiffres modulo 9
2. Vérifier le calcul suivant en utilisant la preuve par 9 :$43 \times 164 = 7042$
3. Démontrer la proposition de la preuve par 9

Exercice 18 :

Considérons l'anneau $\mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$

1. Soit $f : \mathbb{Z}/33\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$ définie par :
$$\left\{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{Z}/33\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/33\mathbb{Z} \\ x & \longmapsto & f(x) = 17x + 9 \end{array}\right.$$
   - ▷ Trouver l'inverse de 17 dans l'anneau $\mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$
   - ▷ Résoudre, dans $\mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$ l'équation $f(x) = 0$
   - ▷ Montrer que f est une bijection dont on donnera la bijection réciproque
2. Soit $g : \mathbb{Z}/33\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$ définie par :
$$\left\{\begin{array}{rcl} g : \mathbb{Z}/33\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/33\mathbb{Z} \\ x & \longmapsto & g(x) = 22x + 7 \end{array}\right.$$
   Quel est l'ensemble des images des éléments de $\mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$ par g ?

Exercice 19 :

Un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ s'écrit $n = \overline{(x20y1)_5}$ en base 5. Déterminer tous les couples (x, y) pour lesquels n est divisible par 6

4.3 Corrections des exercices

Exercice 1 :

Montrer que $3 \times 2^{11} \equiv 2^{12} \left[2^8\right]$

Il suffit de faire la différence $3 \times 2^{11} - 2^{12}$ Nous avons :

$$3 \times 2^{11} - 2^{12} = 2^{11}(3-2) = 2^{11} = 2^3 \times 2^8$$

Donc $3 \times 2^{11} - 2^{12} = k \times 2^8$, c'est à dire $3 \times 2^{11} \equiv 2^{12} \left[2^8\right]$

Exercice 2 :

Soient $b \in \mathbb{N}^*$ *et* $a \in \mathbb{Z}$. *Comparer les quotients* q_1, q_2 *et* q_3 *des divisions de* a *par* b, *de* $2a$ *par* b *et de* $(2a+b)$ *par* $2b$

Cet exercice joue beaucoup sur l'unicité du couple (Q, R) dans le théorème 4.2.6 sur la division euclidienne

1. Pour commencer :
   $\longrightarrow$ $a = bq_1 + r_1$ avec $0 \leqslant r_1 < b$
   $\longrightarrow$ Puis $2a = bq_2 + r_2$ avec $0 \leqslant r_2 < b$
   $\longrightarrow$ Et $2a + b = 2bq_3 + r_3$ avec $0 \leqslant r_3 < b$
   Nous avons $2a = 2bq_1 + 2r_1 = b(2q_1) + 2r_1$ et même $2a + b = 2b(q_1) + (2r_1 + b)$
2. Supposons $2r_1 < b$.
   $\longrightarrow$ Alors, d'après le théorème de division euclidienne 4.2.6, des égalités $2a = bq_2 + r_2$ avec $0 \leqslant r_2 < b$ et $2a = b(2q_1) + 2r_1$, nous avons $q_2 = 2q_1$ et même $r_2 = 2r_1$.
   $\longrightarrow$ De $2r_1 < b$, nous tirons $2r_1 + b < 2b$ et toujours d'après le théorème de la division euclidienne, des égalités $2a + b = 2bq_3 + r_3$ avec $0 \leqslant r_3 < b$ et $2a + b = 2b(q_1) + (2r_1 + b)$, nous avons $q_3 = q_1$ et $r_3 = 2r_1 + b$.
   En conclusion $q_2 = 2q_1 = 2q_3 \Longleftrightarrow q_1 + q_3 = q_2$
3. Supposons, maintenant que $b \leqslant 2r_1 < 2b$
   $\longrightarrow$ Nous avons alors :
   $$2a = 2bq_1 + 2r_1 \Longleftrightarrow 2a = b(2q_1) + b + 2r_1 - b \Longleftrightarrow 2a = b(2q_1 + 1) + (2r_1 - b)$$
   De $b \leqslant 2r_1 < 2b$, nous tirons $0 \leqslant 2r_1 - b < b$, et alors, comme $2a = bq_2 + r_2 = b(2q_1 + 1) + (2r_1 - b)$, d'après le théorèmes de la division euclidienne, nous obtenons $2q_1 + 1 = q_2$
   $\longrightarrow$ Maintenant :
   $$2a + b = 2bq_1 + 2r_1 + b = 2bq_1 + 2b + 2r_1 - b = 2b(q_1 + 1) + (2r_1 - b) = 2bq_3 + r_3$$
   D'après le théorème 4.2.6 nous avons $q_3 = q_1 + 1$
   Nous avons donc $q_2 = 2q_1 + 1$ et $q_3 = q_1 + 1$, c'est à dire $q_2 = q_1 + q_3$

Nous avons donc, de manière générale $q_2 = q_1 + q_3$

Exercice 3 :

1. *Faites la table de multiplication de* $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

$\times$ ↱	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

   On peut remarquer qu'il n'y a aucun diviseur de 0, et que tous les éléments non nuls sont inversibles : 1 et 4 sont leur propre inverse (remarquer que $4 \equiv -1\,[5]$ et que $4^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1\,[5]$) et que l'inverse de 2 est 3

2. *Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation $\dot{2}+x=\dot{1}$ d'inconnue x*

   Nous avons :
   $$\dot{2}+x=\dot{1} \iff x=\dot{1}-\dot{2}=\dot{1}+\dot{3}=\dot{4}=\dot{-1}$$

3. *Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation $\dot{3}x=\dot{2}$ d'inconnue x*

   Nous avons :
   $$\dot{3}x=\dot{2} \iff \dot{2}\times\dot{3}x=\dot{2}\times\dot{2} \iff x=\dot{4}$$

4. *Trouver, dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, les inconnues $x\in\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et $y\in\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ vérifiant le système*
   $$\left\{\begin{array}{ll} \dot{2}x+\dot{3}y= & \dot{2} \\ \dot{1}x+\dot{2}y= & \dot{4}\end{array}\right.$$

   On multiplie la seconde ligne par $\dot{2}$ et nous obtenons comme nouveau système :
   $$\left\{\begin{array}{ll} \dot{2}x+\dot{3}y= & \dot{2} \\ \dot{2}x+\dot{4}y= & \dot{3}\end{array}\right.$$

   Puis nous soustrayons les 2 lignes, et nous avons $y=\dot{3}-\dot{2}=\dot{1}$ et en remplaçant y par sa valeur, nous avons $x=\dot{2}$

5. *Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation $x^2+\dot{2}x-\dot{3}=\dot{0}$ d'inconnue x*

   Nous avons $x^2+\dot{2}x=\left(x+\dot{1}\right)^2-\dot{1}$ de telle sorte que nous avons :
   $$x^2+\dot{2}x-\dot{3}=\dot{0} \iff \left(x+\dot{1}\right)^2-\dot{1}-\dot{3}=\dot{0} \iff \left(x+\dot{1}\right)^2=\dot{4}$$

   D'où nous tirons $\left(x+\dot{1}\right)=\dot{2}$ ou $\left(x+\dot{1}\right)=-\dot{2}=\dot{3}$
   Ainsi nous avons comme solution $x=\dot{1}$ ou $x=\dot{2}$

6. *Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, l'équation $x^2-x-\dot{2}=\dot{0}$*

   Nous allons recommencer ce que nous avons fait à la question précédente. Nous avons :
   $$x^2-x=x^2+\dot{4}x=(x+2)^2-\dot{4}$$

   Et donc $x^2-x-\dot{2}=\dot{0} \iff \left(x+\dot{2}\right)^2-\dot{4}-\dot{2}=\dot{0} \iff \left(x+\dot{2}\right)^2-\dot{1}=\dot{0} \iff \left(x+\dot{2}\right)^2=\dot{1}$.
   D'où nous tirons donc $x+\dot{2}=\dot{1}$ ou $x+\dot{2}=-\dot{1}=\dot{4}$, c'est à dire $x=\dot{4}$ ou $x=\dot{2}$

Exercice 4 :

Montrer que l'implication suivante est vraie : $x\equiv 4\,[8] \Longrightarrow x^2\equiv 16\,[64]$.
En effet :
$$\begin{array}{rl} x\equiv 4\,[8] \iff & x=4+k\times 8 \\ \Longrightarrow & x^2=16+k^2\times 64+2\times 4\times 8\times k \iff x^2=16+64\left(k^2+k\right) \iff x^2\equiv 16\,[64]\end{array}$$

Remarquons que nous avons $x\equiv 4\,[8] \Longrightarrow x^2\equiv 16\equiv 0\,[8]$

Exercice 5 :

1. *Trouver les entiers relatifs $x\in\mathbb{Z}$ tels que $x^2+x+1\equiv 0\,[4]$* Nous allons écumer toutes les valeurs que peut prendre x dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
   - ⋄ Si $x\equiv 0\,[4]$, alors $x^2+x+1\equiv 1\,[4]$; donc $x\equiv 0\,[4]$ n'est pas une solution de l'équation
   - ⋄ Si $x\equiv 1\,[4]$, alors $x^2+x+1\equiv 3\,[4]$; donc $x\equiv 1\,[4]$ n'est pas une solution de l'équation
   - ⋄ Si $x\equiv 2\,[4]$, alors $x^2+x+1\equiv 3\,[4]$; donc $x\equiv 2\,[4]$ n'est pas une solution de l'équation
   - ⋄ Si $x\equiv 3\,[4]$, alors $x^2+x+1\equiv 1\,[4]$; donc $x\equiv 3\,[4]$ n'est pas une solution de l'équation

   En conclusion, il n'existe pas d'entiers relatifs $x\in\mathbb{Z}$ tels que $x^2+x+1\equiv 0\,[4]$

2. *Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, nous avons $x^3 - x \equiv 0\,[3]$* Nous itérons l'écumage, cette fois ci dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ en remarquant que $x^3 - x = x\,(x+1)\,(x-1)$:
   - ⋄ Si $x \equiv 0\,[3]$, alors $x^3 - x \equiv 0\,[3]$
   - ⋄ Si $x \equiv 1\,[4]$, alors $x^3 - x \equiv 0\,[3]$
   - ⋄ Si $x \equiv 2\,[4]$, alors $x^3 - x \equiv 0\,[3]$

   Ce qui signifie que pour tout entier relatif $x \in \mathbb{Z}$, le produit de 3 entiers consécutifs $x\,(x+1)\,(x-1)$ est divisible par 3.

Exercice 8 :

Résoudre les congruences suivantes :

1. $3x \equiv 7\,[16]$

   → Première chose de remarquable, c'est que 3 est inversible dans $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$. En effet :
   $$3 \times 11 = 33 \text{ et } 33 \equiv 1\,[16]$$
   → En utilisant la compatibilité de la multiplication avec la relation de congruence, nous avons :
   $$3x \equiv 7\,[16] \iff 11 \times 3x \equiv 11 \times 7 \equiv 13\,[16] \iff x \equiv 13\,[16]$$
   → Nous obtenons donc $x \equiv 13\,[16]$
2. $5x + 7 \equiv 6\,[23]$

   Pour commencer, nous avons $5x + 7 \equiv 6\,[23] \iff 5x \equiv -1 \equiv 22\,[23]$
   → Pour commencer, 5 est inversible dans $\mathbb{Z}/23\mathbb{Z}$. En effet :
   $$5 \times 14 = 70 \text{ et } 70 \equiv 1\,[23]$$
   → En utilisant la compatibilité de la multiplication avec la relation de congruence, nous avons :
   $$5x \equiv 22\,[23] \iff 14 \times 5x \equiv 14 \times 22 \equiv 9\,[23] \iff x \equiv 9\,[23]$$
   → Nous obtenons donc $x \equiv 9\,[23]$
3. $4x \equiv 9\,[13]$

   → Comme précédemment, 4 est inversible dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$. En effet :
   $$5 \times 14 = 70 \text{ et } 70 \equiv 1\,[23]$$
   → En utilisant la compatibilité de la multiplication avec la relation de congruence, nous avons :
   $$5x \equiv 22\,[23] \iff 14 \times 5x \equiv 14 \times 22 \equiv 9\,[23] \iff x \equiv 9\,[23]$$
   → Nous obtenons donc $x \equiv 9\,[23]$
4. $2x + 8 \equiv 5\,[33]$

   → Tout d'abord $2x + 8 \equiv 5\,[33] \iff 2x \equiv 30\,[33]$
   → Comme précédemment, 2 est inversible dans $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$. En effet :
   $$2 \times 17 = 34 \text{ et } 34 \equiv 1\,[33]$$
   → En utilisant la compatibilité de la multiplication avec la relation de congruence, nous avons :
   $$2x \equiv 30\,[33] \iff 17 \times 2x \equiv 30 \times 17 \equiv 15\,[33] \iff x \equiv 15\,[33]$$
   → Nous obtenons donc $x \equiv 15\,[33]$
5. $3x + 9 \equiv 8x + 61\,[64]$

   Rasoir de toujours faire les mêmes choses ; on trouve $x \equiv 28\,[64]$
6. $4x + 3 \equiv 7x + 2\,[11]$

   On trouvera $x \equiv 4\,[11]$

Exercice 9 :

Montrer que, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, n^3 est de la forme $7k+1$, $7k-1$, $7k$

Nous allons recenser tous les cas en étudiant les congruences modulo 7 ; ces cas sont présentés dans le tableau ci-après.

n	n^2	n^3
0	0	0
1	1	1
2	4	1
3	2	-1
4	2	1
5	4	-1
6	1	-1

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, nous avons $n^3 \equiv -1\,[7]$ ou $n^3 \equiv 0\,[7]$ ou $n^3 \equiv 1\,[7]$, ce qui veut dire $n^3 = 7k+1$, $n^3 = 7k-1$ ou $n^3 = 7k$

Exercice 10 :

Calculer les restes, modulo 7, des nombres 2^n et 3^n ; trouver alors n tel que $2^n + 3^n \equiv 0\,[7]$

→ On regarde les puissances de 2

$$2^0 \equiv 1\,[7] \quad 2^1 \equiv 2\,[7] \quad 2^2 \equiv 4\,[7] \quad 2^3 \equiv 1\,[7]$$

Ainsi,
- ⋆ Si $n \equiv 0\,[3]$, alors $2^n \equiv 1\,[7]$
- ⋆ Si $n \equiv 1\,[3]$, alors $2^n \equiv 2\,[7]$
- ⋆ Si $n \equiv 2\,[3]$, alors $2^n \equiv 4\,[7]$

→ On regarde les puissances de 3

$$3^0 \equiv 1\,[7] \quad 3^1 \equiv 3\,[7] \quad 3^2 \equiv 2\,[7] \quad 3^3 \equiv 6\,[7] \quad 3^4 \equiv 4\,[7] \quad 3^5 \equiv 5\,[7] \quad 3^6 \equiv 1\,[7]$$

Ainsi,
- ⋆ Si $n \equiv 0\,[6]$, alors $3^n \equiv 1\,[7]$
- ⋆ Si $n \equiv 1\,[6]$, alors $3^n \equiv 3\,[7]$
- ⋆ si $n \equiv 2\,[6]$, alors $3^n \equiv 2\,[7]$
- ⋆ si $n \equiv 3\,[6]$, alors $3^n \equiv 6\,[7]$
- ⋆ si $n \equiv 4\,[6]$, alors $3^n \equiv 4\,[7]$
- ⋆ si $n \equiv 5\,[6]$, alors $3^n \equiv 5\,[7]$

→ Et maintenant, faisons la synthèse :
- ⋆ Si $n \equiv 0\,[6]$, alors $n \equiv 0\,[3]$ et donc $2^n \equiv 1\,[7]$ et $3^n \equiv 1\,[7]$, c'est à dire $2^n + 3^n \equiv 2\,[7]$
- ⋆ Si $n \equiv 1\,[6]$, alors $n \equiv 1\,[3]$ et donc $2^n \equiv 2\,[7]$ et $3^n \equiv 3\,[7]$, c'est à dire $2^n + 3^n \equiv 5\,[7]$
- ⋆ Si $n \equiv 2\,[6]$, alors $n \equiv 2\,[3]$ et donc $2^n \equiv 4\,[7]$ et $3^n \equiv 2\,[7]$ d'où $2^n + 3^n \equiv 6\,[7]$
- ⋆ Si $n \equiv 3\,[6]$, alors $n \equiv 0\,[3]$ et donc $2^n \equiv 1\,[7]$ et $3^n \equiv 6\,[7]$ d'où $2^n + 3^n \equiv 0\,[7]$
- ⋆ Si $n \equiv 4\,[6]$, alors $n \equiv 1\,[3]$ et donc $2^n \equiv 2\,[7]$ et $3^n \equiv 4\,[7]$ d'où $2^n + 3^n \equiv 6\,[7]$
- ⋆ Si $n \equiv 5\,[6]$, alors $n \equiv 2\,[3]$ et donc $2^n \equiv 4\,[7]$ et $3^n \equiv 5\,[7]$, c'est à dire $2^n + 3^n \equiv 2\,[7]$

Et voilà le travail !

Exercice 11 :

Erwann est représentant de commerce. Partant de Vannes, il parcourt la Bretagne en respectant toujours les mêmes étapes :
il va à Nantes, puis à Rennes, puis à saint Brieuc ; de là il va à Brest, ensuite à Quimper et revient à Vannes. En une année, il fait 147 étapes ; où se trouve-t-il à la fin de sa huitième année de travail ?

La figure 4.1 montre que pour revenir à son point de départ, Erwann fait 6 étapes.
S'il fait 147 étapes en un an, en 8 ans, il en fait $147 \times 8 = 1176$ et en 8 ans, pour trouver la ville où il sera arrivé, il faut chercher à quoi est congru 1176 modulo 6.
Or, $1176 \equiv 0\,[6]$; il sera donc de retour sur Vannes !!

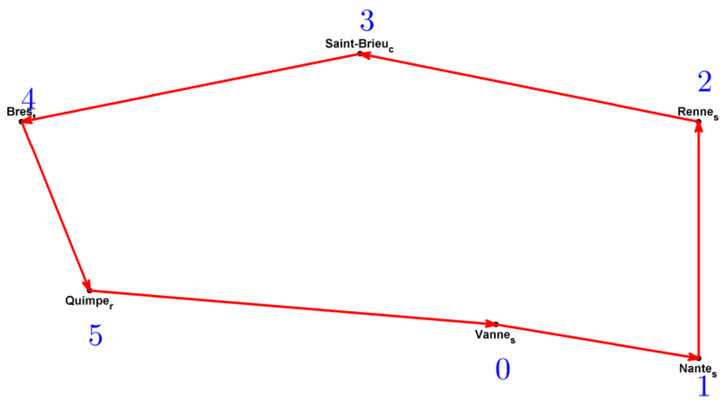


FIGURE 4.1 – Représentation graphique des trajets d'Erwann

Exercice 12 :

1. *Calculer le reste, modulo 7, de* $(32)^{48}$*, de* $(237)^{349}$
   ▷ *Le reste, modulo 7, de* $(32)^{48}$
   Recherchez le reste de $(32)^{48}$ dans la division par 7, c'est rechercher à quoi est congru $(32)^{48}$ modulo 7
   ⋆ Tout d'abord, $32 \equiv 4\,[7]$ et donc $32^{48} \equiv 4^{48}\,[7]$
   ⋆ Nous avons :
   $$4^0 \equiv 1\,[7] \quad 4^1 \equiv 4\,[7] \quad 4^2 \equiv 2\,[7] \quad 4^3 \equiv 1\,[7]$$
   ⋆ Ainsi :
   ⋄ Si $n \equiv 0\,[3]$ alors $4^n = 4^{3k} = \left(4^3\right)^k$.
   Comme $4^3 \equiv 1\,[7]$, alors $\left(4^3\right)^k \equiv 1^k = 1\,[7]$ et donc $4^n \equiv 1^k = 1\,[7]$
   ⋄ Si $n \equiv 1\,[3]$ alors $n = 3k+1$ et $4^n = 4^{3k+1} = 4^{3k} \times 4$ et $4^n \equiv 4^{3k} \times 4 \equiv 4\,[7]$, c'est à dire $4^n \equiv 4\,[7]$
   ⋄ Si $n \equiv 2\,[3]$ alors $n = 3k+2$ et $4^n = 4^{3k+2} = 4^{3k} \times 4^2$ et $4^n \equiv 4^{3k} \times 4^2 \equiv 2\,[7]$, c'est à dire $4^n \equiv 2\,[7]$
   Comme $48 \equiv 0\,[3]$, nous avons $(32)^{48} \equiv 1\,[7]$. Le reste, modulo 7, de $(32)^{48}$ est donc 1
   ▷ *Le reste, modulo 7, de* $(237)^{349}$
   Idem, $237 \equiv 6\,[7]$; or $6 \equiv -1\,[7]$ donc : $(237)^{349} \equiv (-1)^{349} \equiv -1 \equiv 6\,[7]$ Le reste, modulo 7, de $(237)^{349}$ est donc 6
2. *Calculer le reste modulo 13 de* $(100)^{100}$
   Pour la résolution, nous prenons la même méthode que ci-dessus :
   $$100 \equiv 9\,[13] \text{ et donc } (100)^{100} \equiv 9^{100}\,[13]$$
   Il faut donc, maintenant étudier les puissance successives de 9 modulo 13
   $$9^0 \equiv 1\,[13] \quad 9^1 \equiv 9\,[13] \quad 9^2 \equiv 3\,[13] \quad 9^3 \equiv 1\,[13]$$
   Ainsi :
   ⋄ Si $n \equiv 0\,[3]$ alors $9^n \equiv 1\,[13]$
   ⋄ Si $n \equiv 1\,[3]$ alors $9^n \equiv 9\,[13]$
   ⋄ Si $n \equiv 2\,[3]$ alors $9^n \equiv 3\,[13]$
   Or, $100 \equiv 1\,[3]$, donc $(100)^{100} \equiv 9^{100} \equiv 9\,[13]$
3. *Montrer que* $2^{70} + 3^{70}$ *est divisible par 13*

→ Nous allons étudier les puissances successives de 2 modulo 13

$$\begin{array}{llllll} 2^0 \equiv 1\,[13] & 2^1 \equiv 2\,[13] & 2^2 \equiv 4\,[13] & 2^3 \equiv 8\,[13] & 2^4 \equiv 3\,[13] & 2^5 \equiv 6\,[13] \\ 2^6 \equiv 12\,[13] & 2^7 \equiv 11\,[13] & 2^8 \equiv 9\,[13] & 2^9 \equiv 5\,[13] & 2^{10} \equiv 10\,[13] & 2^{11} \equiv 7\,[13] \\ 2^{12} \equiv 1\,[13] \end{array}$$

En poursuivant le même raisonnement que tout à l'heure, modulo 12, $70 \equiv 10\,[12]$ et donc $2^{70} \equiv 2^{10} \equiv 10\,[13]$

→ Nous allons étudier les puissances successives de 3 modulo 13

$$3^0 \equiv 1\,[13] \quad 3^1 \equiv 3\,[13] \quad 3^2 \equiv 9\,[13] \quad 3^3 \equiv 1\,[13]$$

Comme $70 \equiv 1\,[3]$, nous avons $3^{70} \equiv 3^1 = 3\,[13]$

→ Ainsi, $2^{70} + 3^{70} \equiv 10 + 3 \equiv 0\,[13]$

Donc $2^{70} + 3^{70}$ est divisible par 13

Exercice 13 :

1. *Etudier les congruences de 10^n modulo 9*

   Nous avons $10 \equiv 1\,[13]$, et donc, par compatibilité de la multiplication avec la relation de congruence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $10^n \equiv 1^n = 1\,[9]$

2. *En déduire qu'un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9*

   En base **dix**, un entier $n \in \mathbb{N}$ sécrit $n = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k 10^k$.

   Ainsi, modulo 9, $n \equiv \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k\,[9]$.

   Et donc, n est divisible par 9 si et seulement si $n \equiv 0\,[9]$, c'est à dire si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k \equiv 0\,[9]$.

   Et donc

   Un nombre, écrit en base 10, est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9

Exercice 14 :

Trouver les trois derniers chiffres de $1! + 2! + 3! + \cdots + (2022)! + (2023)! + (2024)!$

Connaître les 3 derniers chiffres d'un entier n, c'est savoir à quoi est congru n modulo 1000.

◇ Regardons, par hasard, à quoi est congru 15! :

$$\begin{aligned} 15! &= 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14 \times 15 \\ &= 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times 2 \times 3 \times 7 \times 2^3 \times 3^2 \times 2 \times 5 \times 11 \times 2^2 \times 3 \times 13 \times 2 \times 7 \times 3 \times 5 \\ &= 2^{11} \times 3^6 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times 13 \\ &= \left(2^3 \times 5^3\right) \times K = 1000 \times K \end{aligned}$$

D'où $15! \equiv 0\,[1000]$, et donc, pour $n \geqslant 15$, $n! \equiv 0\,[1000]$, et nous pouvons dire que :

$$1! + 2! + 3! + \cdots + (2022)! + (2023)! + (2024)! \equiv 1! + 2! + 3! + \cdots + (12)! + (13)! + (14)!\,[1000]$$

◇ Et maintenant, que vais-je faire ?... Et bien, je vais regarder les congruences jusque 14!

$$\begin{array}{ll} 1! \equiv 1\,[1000] & 8! \equiv 320\,[1000] \\ 2! \equiv 2\,[1000] & 9! \equiv 880\,[1000] \\ 3! \equiv 6\,[1000] & 10! \equiv 800\,[1000] \\ 4! \equiv 24\,[1000] & 11! \equiv 800\,[1000] \\ 5! \equiv 120\,[1000] & 12! \equiv 600\,[1000] \\ 6! \equiv 720\,[1000] & 13! \equiv 800\,[1000] \\ 7! \equiv 40\,[1000] & 14! \equiv 200\,[1000] \end{array}$$

D'où

$$1!+2!+3!+\cdots+(12)!+(13)!+(14)! \equiv 1+2+6+24+120+720+40+320+880+800+800+600+800+200\,[1000]$$

Et donc $1!+2!+3!+\cdots+(12)!+(13)!+(14)! \equiv 313\,[1000]$
Conclusion : les trois derniers chiffres de $1!+2!+3!+\cdots+(2022)!+(2023)!+(2024)!$ sont 313

Exercice 15 :

1. *Démontrer que* $(\forall k \in \mathbb{N})\,(\forall r \in \mathbb{N})\,\left(7^{4k+r} \equiv 7^r\,[10]\right)$

   Nous avons $7^{4k+r} = 7^{4k} \times 7^r = \left(7^4\right)^k \times 7^r$

   Or, $7^4 = 2401 \equiv 1\,[10]$, et donc $\left(7^4\right)^k \equiv 1^k\,[10] \iff \left(7^4\right)^k \equiv 1\,[10]$

   En conclusion $7^{4k+r} = \left(7^4\right)^k \times 7^r \equiv 7^r\,[10]$

   Ce que nous voulions

2. *Etudier les classes de 7^n modulo 4*

   Nous avons :

   $$\text{Si } n=0 \text{ alors } 7^0 \equiv 1\,[4] \quad \text{Si } n=1 \text{ alors } 7^1 \equiv 3\,[4] \quad \text{Si } n=2 \text{ alors } 7^2 \equiv 1\,[4]$$

   Et donc :
   $$\text{Si } n \equiv 0\,[2] \text{ alors } 7^n \equiv 1\,[4] \quad \text{Si } n \equiv 1\,[2] \text{ alors } 7^n \equiv 3\,[4]$$

   En d'autres termes, si n est pair, alors $7^n \equiv 1\,[4]$ et si n est impair, alors $7^n \equiv 3\,[4]$

3. *Quel est le chiffre des unités de $7^{\left(7^7\right)}$?*

   Comme toujours dans ces questions, il faut chercher à quoi est congru $7^{\left(7^7\right)}$ modulo 10.
   $\to$ Nous avons $7^7 \equiv 3\,[4]$, c'est à dire que $7^7 = 4k+3$
   $\to$ Et donc, d'après la première question, $7^{\left(7^7\right)} \equiv 7^3\,[10]$. Or, comme $7^3 = 343 \equiv 3\,[10]$
   $\to$ Donc, le chiffre des unités de $7^{\left(7^7\right)}$ est 3

Exercice 16 :

Démontrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$:$(2m+1)^n - (2m+1)^{n-2} \equiv 4m\,\left[4m^2\right]$
Nous allons faire une démonstration par récurrence.

- C'est vrai pour $n=2$ puisque $(2m+1)^2 - 1 = 4m^2 + 4m$ et nous avons donc bien $(2m+1)^2 - (2m+1)^{2-2} \equiv m\,\left[4m^2\right]$
- Supposons que pour $n \geqslant 2$, nous avons $(2m+1)^n - (2m+1)^{n-2} \equiv 4m\,\left[4m^2\right]$
- Alors, au rang $n+1$, nous avons, et en utilisant l'hypothèse de récurrence :

  $$(2m+1)^{n+1} - (2m+1)^{n-1} = (2m+1)\left[(2m+1)^n - (2m+1)^{n-2}\right]$$

  Or, par hypothèse de récurrence, $(2m+1)^n - (2m+1)^{n-2} \equiv 4m\,\left[4m^2\right]$ et donc

  $$(2m+1)^{n+1} - (2m+1)^{n-1} \equiv (2m+1) \times 4m\,\left[4m^2\right]$$
  $$\iff$$
  $$(2m+1)^{n+1} - (2m+1)^{n-1} \equiv 8m^2 + 4m\,\left[4m^2\right]$$
  $$\iff$$
  $$(2m+1)^{n+1} - (2m+1)^{n-1} \equiv 4m + 2 \times 4m^2 \equiv 4m\,\left[4m^2\right]$$

  C'est donc aussi vrai à l'ordre $n+1$

Nous venons donc de montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $n \geqslant 2$, $(2m+1)^n - (2m+1)^{n-2} \equiv 4m\,\left[4m^2\right]$

$\Rightarrow$ Pour démontrer que nous avons $7^n - 7^{n-2} \equiv 12\,[36]$, il suffit de prendre $m=3$
$\Rightarrow$ Pour démontrer que nous avons $9^n - 9^{n-2} \equiv 16\,[64]$, il suffit de prendre $m=4$
$\Rightarrow$ Pour démontrer que nous avons $11^n - 11^{n-2} \equiv 12\,[100]$, il suffit de prendre $m=5$

Exercice 17 :

1. *Montrez que tout nombre entier est congru à la somme de ses chiffres modulo 9*

   Soit $x = \overline{(a_n \cdots a_0)_{10}}$ un nombre écrit en base 10. Alors, $x = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k$

   Or, $10 \equiv 1\,[9]$, et, en utilisant la compatibilité de la multiplication avec la relation de congruence, nous avons, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $10^k \equiv 1\,[9]$, et donc $a_k 10^k \equiv a_k\,[9]$. En utilisant la compatibilité de l'addition avec la relation de congruence, nous avons $x = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k\,[9]$

   On vient donc de montrer que tout nombre entier est congru à la somme de ses chiffres modulo 9.
2. *Vérifier le calcul suivant en utilisant la preuve par 9 :*$43 \times 164 = 7042$

   Nous avons $43 \equiv 7\,[9]$ et $164 \equiv 2\,[9]$. Donc $43 \times 164 \equiv 7 \times 2 \equiv 5\,[9]$ alors que $7042 \equiv 4\,[9]$; la multiplication est sûrement fausse.
3. *Démontrer la proposition de la preuve par* 9

   Si $a \times b = c$, alors $ab \equiv c\,[9]$. Si nous n'avons pas $ab \equiv c\,[9]$, alors l'opération est sûrement fausse.
   Mais, ce n'est pas parce que $ab \equiv c\,[9]$ que la multiplication est correcte :
   Si nous trouvons $43 \times 164 = 7142$, nous avons toujours $43 \times 164 \equiv 5\,[9]$, $7142 \equiv 5\,[9]$, mais notre multiplication est fausse *(car, en fait :* $43 \times 164 = 7052$*)* .

En fait, la preuve par 9 ne dit pas si une opération est exacte. Il faut comprendre que si la preuve par 9 n'est pas vérifiée, alors la multiplication est fausse.

Exercice 18 :

Considérons l'anneau $\mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$

1. *Soit* $f : \mathbb{Z}/33\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$ *définie par :*

$$\begin{cases} f : \mathbb{Z}/33\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/33\mathbb{Z} \\ \quad x & \longmapsto & f(x) = 17x + 9 \end{cases}$$

   - *Trouver l'inverse de* 17 *dans l'anneau* $\mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$

     Il suffit de remarquer que $2 \times 17 = 34 \equiv 1\,[33]$.
     2 est donc l'inverse de 17 dans l'anneau $\mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$
   - *Résoudre, dans* $\mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$ *l'équation* $f(x) = 0$

     Nous avons :

$$f(x) = 0 \iff 17x + 9 \equiv 0\,[33] \iff 17x \equiv -9 \equiv 24\,[33] \iff 2 \times 17x \equiv 48\,[33] \iff x \equiv 15\,[33]$$

     La solution, dans $\mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$, de l'équation $f(x) = 0$ est donc $x = 15$
   - *Montrer que* f *est une bijection dont on donnera la bijection réciproque*
     - f est injective
       Soient $x_1 \in \mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$ et $x_2 \in \mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$; alors :

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\iff 17x_1 + 9 \equiv 17x_2 + 9\,[33] \\ &\iff 17x_1 \equiv 17x_2\,[33] \\ &\iff 2 \times 17x_1 \equiv 2 \times 17x_2\,[33] \\ &\iff x_1 \equiv x_2\,[33] \end{aligned}$$

       Ce qui veut dire que, dans $\mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$, nous avons $x_1 = x_2$.
       f est donc injective
     - f est surjective

Soit $y \in \mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$; existe-t-il $x \in \mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$ tel que $y = f(x)$? S'il existe, alors :

$$\begin{aligned} y = f(x) \iff & \quad y = 17x + 9 \iff y \equiv 17x + 9\,[33] \\ \iff & \quad y - 9 \equiv 17x\,[33] \\ \iff & \quad 2 \times (y-9) \equiv 2 \times 17x\,[33] \\ \iff & \quad x \equiv 2y - 18\,[33] \\ \iff & \quad x \equiv 2y + 15\,[33] \end{aligned}$$

f il existe donc $x \in \mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$ et $x = 2y + 15$ tel que $y = f(x)$.
f est donc surjective
f étant injective et surjective, est donc bijective et nous avons $f^{-1}(x) = 2x + 15$

2. *Soit $g : \mathbb{Z}/33\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$ définie par :*

$$\begin{cases} g : \mathbb{Z}/33\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/33\mathbb{Z} \\ \qquad x & \longmapsto & g(x) = 22x + 7 \end{cases}$$

Quel est l'ensemble des images des éléments de $\mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$ par g ?

Cette fois ci, ce n'est plus le même topo puisque 22 est un véritable diviseur de 0 dans $\mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$; en effet, nous avons, dans $\mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$

$$3 \times k \times 22 = 3 \times k \times 2 \times 11 = 2k \times 33 = 0 \text{ pour } k = 1, \cdots, 10$$

Ainsi, pour $k = 0, \cdots, 10$,
- ▷ $g(3k) = 22 \times 3k + 7 = 7$
- ▷ $g(3k+1) = 22 \times (3k+1) + 7 = 29$
- ▷ $g(3k+2) = 22 \times (3k+2) + 7 = 17$

Ainsi, $g(\mathbb{Z}/33\mathbb{Z}) = \{7, 17, 29\}$ et g n'est ni injective, ni surjective

Chapitre 5

La division dans $\mathbb{Z}$

5.1 Les entiers premiers

5.1.1 Définition

Soient $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

1. On dit que a divise b, ou que b est divisible par a ou encore que a est un diviseur de b, s'il existe $c \in \mathbb{Z}$ tel que $b = ac$; on écrit aussi $a \mid b$
2. On dit que a et b sont associés si $a \mid b$ et si $b \mid a$
3. Si a divise b, ou que b est divisible par a, on dit que b est un multiple de a

Remarque 1 :

1. Cette définition a un lien fort avec la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ définie en 4.2.6
2. La division dans $\mathbb{N}$ a évidemment un sens. Il suffit de ré-écrire la définition 5.1.1

   Soient $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
   On dit que a divise b, ou que b est divisible par a, s'il existe $c \in \mathbb{N}$ tel que $b = ac$; on écrit aussi $a \mid b$
3. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n \mid 0$ car $0 = n \times 0$
4. On montre que a et b sont associés, si et seulement si, $a = bu$, où u est un élément inversible, c'est à dire, dans $\mathbb{Z}$, $u = 1$ ou $u = -1$; ainsi a et b sont associés si et seulement si $a = b$ ou $a = -b$
5. 1 et -1 sont les diviseurs impropres de n

Exercice 1 :

Démontrer que a et b sont associés, si et seulement si, $a = bu$, où u est un élément inversible, c'est à dire, dans $\mathbb{Z}$, $u = 1$ ou $u = -1$

5.1.2 Proposition

1. Pour tout $x \in \mathbb{Z}$ et tout $y \in \mathbb{Z}$, si $x \mid y$, alors, pour tout $z \in \mathbb{Z}$, $x \mid yz$ et $xz \mid yz$
2. Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, tout $y \in \mathbb{Z}$ et tout $z \in \mathbb{Z}$, si $x \mid y$ et si $x \mid z$, alors, $x \mid y + z$ et $x \mid y - z$

Démonstration

Dans la démonstration qui suit, x, y et z désignent des entiers relatifs.

1. **Supposons** $x \mid y$
   Alors, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = kx$.

Soit $z \in \mathbb{Z}$; en multipliant l'égalité $y = kx$ par z, nous obtenons $yz = kxz$, qui peut donc être écrit de 2 manières différentes :
— $yz = (kz) \times x$, ce qui montre que $x \mid yz$
— $yz = k \times (xz)$, ce qui montre bien que $xz \mid yz$

2. **Supposons $x \mid y$ et $x \mid z$**
Alors, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = kx$ et il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $z = k'x$
Donc, $y + z = kx + k'x = x\,(k + k')$; ce qui montre bien que x divise $y + z$; on démontrerait de même que x divise $y - z$

5.1.3 Théorème

La divisibilité sur $\mathbb{N}^\star$ est une relation d'ordre partiel

Démonstration

1. **C'est une relation d'ordre**
   - Elle est réflexive
     Soit $x \in \mathbb{N}$, évidemment, $x \mid x$ car $x = x \times 1$
   - Elle est antisymétrique
     Supposons $x \mid y$ et $y \mid x$; il existe alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $y = kx$ et $k' \in \mathbb{N}$ tel que $x = k'y$; dès lors $y = kk'y$, et donc $kk' = 1$; la seule possibilité dans $\mathbb{N}$ est que $k = k' = 1$, c'est à dire $x = y$
   - Elle est transitive
     Soient $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{N}$ tels que $x \mid y$ et $y \mid z$.
     Il existe alors $k \in \mathbb{N}$ tel que $y = kx$ et $k' \in \mathbb{N}$ tel que $z = k'y$, et alors, $z = kk'x$, et nous avons donc $x \mid z$, d'où la transitivité.
2. **C'est une relation d'ordre partiel**
   C'est une relation d'ordre partiel parce qu'il existe des nombres que l'on ne peut pas comparer, au sens de la division. Exemple :
   $$3 \nmid 4 \text{ et } 4 \nmid 3$$

Remarque 2 :

1. Dans $\mathbb{N}$, si $m \mid n$ et si $n \neq 0$, alors $m \neq 0$ et $m \leqslant n$
   En effet, si $m \mid n$, alors, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = mk$; donc, si $n \neq 0$ alors $m \neq 0$ et $k \neq 0$ et donc $k \geqslant 1$, c'est à dire, $n \geqslant m$
2. Ceci veut dire que **le nombre de diviseurs d'un entier n est fini dans** $\mathbb{N}$, et à un signe près, c'est la même chose dans $\mathbb{Z}$

5.1.4 Définition de nombre premier

1. Un entier $n \in \mathbb{Z}$ est dit premier s'il n'a pas de diviseur propre, et s'il n'est pas inversible.
2. Un entier non premier autre que 0, -1 et $+1$ est dit composé

Remarque 3 :

1. On répond enfin à la grande question : **1 n'est pas un nombre premier !***(parce qu'il est inversible)*
2. Les diviseurs non propres d'un entier relatif sont $-n$, $+n$, -1 et $+1$, car $-n$, $+n$ sont associés à n et -1 et $+1$ sont les seuls éléments inversibles de $\mathbb{Z}$

5.1.5 Théorème

Soit $a \in \mathbb{Z}$; alors, a admet au moins un diviseur premier.

Démonstration

Soit D_a, l'ensemble des diviseurs de a ; comme $a \in D_a$, nous pouvons dire que $D_a \neq \emptyset$
Soit b le plus petit élément positif de D_a, c'est à dire le plus petit élément de $D_a \cap \mathbb{N}$; d'après la remarque 2 page 153, cet élément existe. C'est donc le plus petit élément positif de D_a
Montrons que b est premier
Supposons que b ne le soit pas ; soit donc $c > 0$ tel que $c \mid b$ et $c \neq b$, et donc, $c < b$. Comme $b \mid a$, que $c \mid b$, alors, $c \mid a$; b ne serait donc pas le plus petit diviseur de a ; il y a donc contradiction.
b est donc premier.

Remarque 4 :

On vient de montrer que tout nombre admet un diviseur premier, et que le plus petit diviseur positif d'un nombre est forcément premier.

Exercice 2 :

Soit $a \in \mathbb{N}$, non premier. Montrer que son plus petit diviseur positif b est tel que $b \leqslant \sqrt{a}$

5.1.6 Théorème de décomposition en un produit de facteurs premiers

Tout élément de $\mathbb{Z}$ est un produit $p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n$ de facteurs premiers.
Cette décomposition est unique.

Remarque 5 :

Les nombres premiers $p_1, p_2, \ldots p_n$ peuvent se retrouver plusieurs fois dans la décomposition ; en fait, c'est un produit $p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_n^{\alpha_n}$

Démonstration

1. Nous admettrons, pour le moment, l'unicité ; la démonstration utilise le lemme de Gauss qui sera prouvé un peu plus loin.
2. La démonstration de la décomposition se fait en deux temps : on le démontre pour $\mathbb{N}$, puis on le généralise à $\mathbb{Z}$
   (a) Pour $\mathbb{N}$, la démonstration se fait par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, avec $n > 1$.
   - C'est vrai pour $n = 2$, puisque 2 étant premier, est déjà une décomposition de lui-même
   - Supposons que jusqu'au rang n, tous les nombres peuvent être décomposés en un produit de nombres premiers
   - Montrons que $n+1$ peut l'être aussi.
     - Si $n+1$ est premier, alors, $n+1$ est déjà une décomposition de lui même
     - Si $n+1$ n'est pas premier, $n+1$ admet des diviseurs propres et donc $n+1 = ku$ avec $k < n+1$ et $u < n+1$
       Or, $\begin{cases} k = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_m \text{ car } k \leqslant n \\ u = q_{m+1} \times q_{m+2} \times \cdots \times q_n \text{ car } u \leqslant n \end{cases}$
       Donc, $n+1 = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_m \times q_{m+1} \times q_{m+2} \times \cdots \times q_n$; ce qui montre que $n+1$ peut se décomposer en un produit de facteurs premiers.

   (b) La généralisation à $\mathbb{Z}$ est simple : tout entier relatif est le produit d'un entier positif par une unité -1.

5.1.7 Théorème

Il y a, dans $\mathbb{Z}$, une infinité de nombres premiers

Démonstration

On suppose le contraire, c'est à dire que nous supposons que les entiers premiers sont en nombre fini, et nous appelons q le dernier d'entre eux ou le plus grand d'entre eux *(ce qui, pour nos considérations, revient au même)*.
Posons $n = q\,! + 1$
Divisons n par n'importe quel entier premier $p \leqslant q$. Nous avons donc :

$$n = \left(\frac{q\,!}{p}\right) \times p + 1$$

Ce qui exprime que n n'est divisible par aucun des quelconques entiers premiers. Ce qui contredit de le théorème 5.1.6 précédent, lequel affirmait que tout nombre entier admet des diviseurs premiers. Il y a donc contradiction
L'ensemble des nombres premiers est infini

Remarque 6 :

Si on sait que la suite des nombres premiers est infinie, un autre et important problème se pose : celui de **la répartition des nombres premiers** dans $\mathbb{N}$. C'est une vaste question qui dépasse ce cours de L_0. Par contre, il y a une inégalité qu'il est possible d'établir.

On appelle $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des nombres premiers. Nous avons donc :

$$p_1 = 2\ p_2 = 3\ p_3 = 5\ p_4 = 7\ p_5 = 11$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $p_n \geqslant n + 1$

Démonstration

Nous allons le démontrer par récurrence :
- ▷ C'est manifestement vrai pour $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$; ce sont même ces exemples qui nous ont conduit à cette inégalité
- ▷ Supposons maintenant qu'à l'ordre $n \geqslant 1$,$p_n \geqslant n + 1$
- ▷ Démontrons maintenant, à l'ordre $n + 1$.
  Clairement, p_n est impair, et de même p_{n+1} et donc $p_{n+1} \geqslant p_n + 2$; donc

$$p_{n+1} \geqslant p_n + 2 \geqslant n + 1 + 2 > n + 2 = (n + 1) + 1$$

Nous en déduisons donc que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $p_n \geqslant n + 1$.
On peut aussi en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = +\infty$

5.1.8 Exercices résolus

1. *Cet exercice résolu propose de démontrer un cas particulier du théorème de Dirichlet*
   Montrez qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4p + 3$

   Résolution
   Supposons le contraire, c'est à dire qu'il existe un nombre fini d'entiers premiers de la forme $4p + 3$, et soit $4n + 3$ le dernier d'entre eux.
   Les nombres premiers ne peuvent être que de 2 formes : $4p+1$ ou $4p+3$, lesquels sont des nombres impairs. $4p + 2$ et $4p$ sont des nombres pairs, donc, sûrement pas premiers.
   Soit $a = \prod\limits_{p=0}^{n}(4p + 3)$, c'est à dire que a est le produit de tous les nombres entiers de la forme $4p + 3$ jusqu'au dernier nombre premier $4n + 3$ et nous considérons $b = 4a + 3$.
   Ce nombre b est congru à 3 modulo 4 ; d'autre part, il n'est divisible par aucun des nombres premiers de la forme $4p + 3$.

En effet, si p_a est un nombre premier de ce type, $b = \left(\dfrac{4a}{p_a}\right) \times p_a + 3$.
Ainsi, les seuls nombres premiers qui divisent b sont de la forme $4p+1$, c'est à dire que nous avons $b = q_1^{\alpha_1} \times q_2^{\alpha_2} \times q_3^{\alpha_3} \times \ldots q_b^{\alpha_b}$, où $q_i \equiv 1\,[4]$ pour tout $i = 1, \ldots, b$, et nous avons, par conséquent, $b \equiv 1\,[4]$; ce qui est faux.
Il y a donc contradiction avec l'hypothèse où le nombre d'entiers premiers du type $4p+3$ est fini. Il existe donc une infinité de nombres premiers de la forme $4p+3$

2. *Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des nombres premiers, c'est à dire : $[p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5,\ p_4 = 7, \cdots.\ p_n$ est donc le n-ième nombre premier.*
Il faut montrer que $p_n < 2^{2^n}$

Résolution
Nous allons démontrer cette inégalité par une récurrence sur n.
— Nous avons $p_1 = 2 < 2^{2^1} = 2^2 = 4$; l'inégalité est donc vraie pour $n = 1$
— Supposons $p_n < 2^{2^n}$
— Démontrons l'inégalité à l'ordre $n+1$
Soit $a = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1$
Alors, clairement, a n'est divisible par aucun des nombres premiers $p_1, \cdots, p_n$. Comme a est décomposable en un produit de facteurs premiers, a admet donc comme diviseur un facteur premier q tel que $q > p_n$, c'est à dire $q \geqslant p_{n+1}$. Nous avons donc :

$$p_{n+1} \leqslant q \leqslant a < 2^{2^1} \times 2^{2^2} \times \cdots \times 2^{2^n} + 1$$

Or, $2^{2^1} \times 2^{2^2} \times \cdots \times 2^{2^n} = 2^{2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n}$ et $2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{n+1}-2$
Donc, nous avons $a < 2^{2^{n+1}-2} + 1$, à fortiori

$$a < 4 \times 2^{2^{n+1}-2} = 2^2 \times 2^{2^{n+1}-2} = 2^{2^{n+1}-2+2} = 2^{2^{n+1}}$$

C'est à dire $p_{n+1} < 2^{2^{n+1}}$ Ce que nous voulions

5.1.9 Quelques exercices

Exercice 3 :

Soit $A = 315$. Trouver le plus petit entier naturel k tel que $k \times A$ soit le carré d'un nombre entier.

Exercice 4 :

Montrer que les nombres suivants sont composés :

1. $n^4 - 20n^2 + 4$ pour $n \in \mathbb{Z}$
2. $a^4 + 4b^4$ pour $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ et $a \geqslant 2$ et $b \geqslant 2$

Exercice 5 :

Cet exercice s'intéresse à la répartition des nombres premiers et complète la remarque de 5.1.7
Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$

1. On considère les $(n-1)$ nombres :
$$n!+2,\ n!+3,\ \cdots, n!+(n-1),\ n!+n$$
Démontrer que ces nombres ne sont pas premiers
2. En déduire que l'on peut trouver une suite de k nombres consécutifs non premiers

Exercice 6 :

1. Déterminer les couples $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $x^2 - y^2 = 1969$
2. Déterminer les couples $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $9y^2 - (x+1)^2 = 32$

Exercice 7 :

Soient $p_1, p_2, \ldots, p_k$ des nombres entiers premiers distincts rangés par ordre croissant, c'est à dire : $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$.
Montrer que le nombre $1 + p_1 p_2 \ldots p_k = 1 + \prod_{j=1}^{k} p_j$ n'est divisible par aucun des nombres $p_1, p_2, \ldots, p_k$

Exercice 8 :

Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $6p + 5$

Exercice 9 :

Montrer que si p est un nombre premier supérieur à 4, alors $p^2 \equiv 1\,[6]$

Exercice 10 :

Etude de la somme des diviseurs d'un nombre entier positif

Soit $x = a^m b^n c^p$, où a, b et c sont 3 nombres premiers

1. De quelle forme sont les diviseurs de x ?
2. Soient $n_0 \leqslant n$ et $p_0 \leqslant p$ fixés ; calculez $\sum_{k=0}^{m} a^k b^{n_0} c^{p_0}$
3. En déduire la somme des diviseurs de x

Exercice 11 :

En étudiant les congruences modulo 3, montrer que si p et $2p-1$ sont premiers, alors, $2p+1$ est composé

5.2 Le pgcd, plus grand diviseur commun

Rappels

- Dans $\mathbb{Z}$, tout sous groupe est de la forme $n\mathbb{Z}$; on en déduit donc que tout idéal est de la forme $n\mathbb{Z}$
- Les idéaux de la forme $n\mathbb{Z}$ sont dits principaux : $\mathbb{Z}$ est appelé anneau principal
- On dit que n engendre $n\mathbb{Z}$

5.2.1 Proposition

Pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $m\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z}$, si et seulement si $n \mid m$

Remarque 7 :

1. Un diviseur propre n de m définit donc un idéal $n\mathbb{Z}$ plus grand que $m\mathbb{Z}$
2. **Exemple :**
   Nous avons $2 \mid 6$ et $6\mathbb{Z} \subset 2\mathbb{Z}$, les multiples de 6 étant aussi des multiples de 2. Par contre, $4 \notin 6\mathbb{Z}$: 4 est un multiple de 2, mais pas de 6

Démonstration

1. **Supposons $m\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z}$, et montrons que $n \mid m$**
   Si $m\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z}$, alors comme $m \in m\mathbb{Z}$ et que $m\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z}$, nous avons, en particulier $m \in m\mathbb{Z}$.
   Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $m = kn$, donc $n \mid m$
2. **Réciproquement, supposons $n \mid m$, et montrons que $m\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z}$**
   Si $n \mid m$, ceci veut dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $m = kn$, et donc $m \in n\mathbb{Z}$, et tout multiple de m devient donc un multiple de n, ce qui montre que $m\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z}$

5.2.2 Théorème admis

Soit $n_1\mathbb{Z} \subset n_2\mathbb{Z} \subset \cdots \subset n_k\mathbb{Z} \subset \cdots n_{p-1}\mathbb{Z} \subset n_p\mathbb{Z}$ une suite croissante d'idéaux de $\mathbb{Z}$
Alors, il existe un entier p tel que $n_p\mathbb{Z} = n_{p+1}\mathbb{Z} = n_{p+2}\mathbb{Z} = \cdots$

Remarque 8 :

Même si nous admettons ce théorème, nous pouvons en faire des commentaires.

1. Si $n_1\mathbb{Z} \subset n_2\mathbb{Z} \subset n_3\mathbb{Z} \subset n_4\mathbb{Z} \subset \cdots \subset n_k\mathbb{Z} \subset \cdots \subset n_{p-1}\mathbb{Z} \subset n_p\mathbb{Z}$, alors $n_p \mid n_{p-1}$, $n_{p-1} \mid n_{p-2}$, jusque $n_2 \mid n_1$. Par transitivité, $n_2, n_2, n_3, n_4, \cdots n_k, \cdots, n_{p-1}, n_p$ sont tous des diviseurs de n_1, et ces diviseurs sont en nombre fini.
   Soit u le plus petit diviseur de n_1, u est un nombre premier, et il n'existe pas d'autre diviseur de u, donc pas de diviseur plus petit de n_1
2. Tout idéal engendré par un nombre premier est appelé **idéal premier**.

5.2.3 Définition de pgcd

Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$; on appelle plus grand diviseur commun à a et à b ou pgcd de a et de b, un entier $d \in \mathbb{Z}$ tel que la proposition suivante soit vraie :

$$(\forall c \in \mathbb{Z})\,(d|a \quad d|b \quad c|a \quad c|b) \Longrightarrow (c|d)$$

On note $d = \text{pgcd}\,(a, b)$ ou $d = a \wedge b$

Remarque 9 :

1. Si $d = \text{pgcd}\,(a, b)$, alors d est le multiple de tout nombre diviseur commun à a et b et tout diviseur commun à a et b divise d
2. 2 pgcd différents de a et b, sont en fait associés.*(Dans $\mathbb{Z}$, d et $-d$ sont en fait* pgcd *de a et b)*

5.2.4 Théorème *(Important)*

Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$

1. Soit $I = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \left\{z \in \mathbb{Z} \text{ tels que } \exists\,(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tels que } z = k_1 a + k_2 n\right\}$; alors, I est un idéal de $\mathbb{Z}$
2. I est engendré par $d = \text{pgcd}\,(a, b)$, c'est à dire que $I = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$
3. Il existe donc $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $d = au + bv$

Démonstration

1. Démontrons que $I = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$
   — Tout d'abord, I est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$
   En effet
   - $I \neq \emptyset$ puisque $0 = a \times 0 + b \times 0$ et donc $0 \in I$
   - D'autre part, si $u \in I$ et $v \in I$, alors $u = am + bn$ et $v = am' + bn'$ et donc $u - v = a\,(m - m') + b\,(n - n')$. Donc, $u - v \in I$
   - Des 2 items ci-dessus, on déduit que I est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$

   — Soit $r \in \mathbb{Z}$ et $u \in I$. Alors $ru = r\,(am + bn) = a\,(mr) + b\,(nr)$
   Donc $ru \in I$

   I est donc un idéal de $\mathbb{Z}$
2. Démontrons que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est engendré par $d = \text{pgcd}\,(a, b)$
   — $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ étant un idéal de $\mathbb{Z}$, sachant que tous les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $\lambda\mathbb{Z}$ avec $\lambda \in \mathbb{N}$, il existe donc un nombre $d \in \mathbb{N}$ tel que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$

— Remarquons d'abord que $a\mathbb{Z} \subset d\mathbb{Z}$
Soit $y \in a\mathbb{Z}$, alors, $y = ak$, et comme $ak = ak + b \times 0$, $ak \in d\mathbb{Z}$; donc $a\mathbb{Z} \subset d\mathbb{Z}$, et, de même, $b\mathbb{Z} \subset d\mathbb{Z}$, donc $d \mid a$ et $d \mid b$

— Montrons que $d = \text{pgcd}\,(a, b)$.
Soit donc $c \in \mathbb{Z}$ tel que $c \mid a$ et $c \mid b$; comme $d = sa + tb$, que $a = ck$ et $b = ck'$, nous avons $d = sck + tck'$, c'est à dire : $d = c\,(sk + tk')$, et donc $c \mid d$; ce qui traduit donc que $d = \text{pgcd}\,(a, b)$

3. Comme $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$, il existe donc $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$ tel que $d = au + bv$

Remarque 10 :

1. Nous venons de montrer que **si** $d = \text{pgcd}\,(a, b)$, **alors** il existe donc $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$ tel que $d = au + bv$
2. Avons nous la réciproque ?
C'est à dire que s'il existe $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$ tel que $d = au + bv$ avons nous $d = \text{pgcd}\,(a, b)$?
La réponse est non : nous avons $3 = \text{pgcd}\,(6, 15)$; il existe donc $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$ tel que $3 = 6u + 15v$: il suffit de choisir $u = -2$ et $v = +1$.
Mais nous avons aussi $6 = 6 \times (-4) + 15 \times (2)$, alors que 6 n'est pas le pgcd de 6 et 15 car 6 ne divise pas 15.

Exercice 12 :

Généralisation :
Soit $(R, +, \times)$ un anneau, I et J, deux idéaux de R
Montrer que $I + J = \{z \in R$ tels que $\exists\,(x, y) \in I \times J$ tels que $z = x + y\}$ est un idéal de R

5.2.5 Nombres premiers entre eux

Soient $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
On dit que a et b entiers naturels sont premiers entre eux si et seulement si $\text{pgcd}\,(a, b) = a \wedge b = 1$

Remarque 11 :

1. Deux nombres premiers sont forcément premiers entre eux.
2. Deux nombres premiers entre eux n'ont forcément aucun diviseur commun, sauf 1.
Exemple : 45 et 14
45 et 14 ne sont pas des nombres premiers, mais sont des nombres premiers entre eux puisque $45 = 5 \times 3^2$ et $14 = 2 \times 7$

5.2.6 Proposition

Soient a et b 2 entiers naturels non nuls, et $d = \text{pgcd}\,(a, b)$. Soient a' et b' tels que $a = a'd$ et $b = b'd$. Alors, a' et b' sont premiers entre eux.

Démonstration

Soit c un diviseur commun de a' et b', c'est à dire que : $a' = cx$ et $b' = cy$
Alors, $a = cxd = (cd)\,x$ et $b = cyd = (cd)\,y$, ce qui montre que cd est un diviseur commun de a et b, donc, parce que $d = \text{pgcd}\,(a, b)$, $cd \mid d$.
Comme $d \mid cd$, nous avons $cd = d$, et donc, $c = 1$
C'est à dire $\text{pgcd}\,(a', b') = 1$

5.2.7 Identité de Bachet-Bezout

Soient a et b deux entiers de $\mathbb{Z}$; les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Ces deux nombres a et b sont premiers entre eux
2. Il existe deux entiers u et v tels que : $au + bv = 1$
3. $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

Démonstration

1. **Supposons que a et b soient premiers entre eux**
   Alors, $\text{pgcd}\,(a, b) = 1$, et, d'après le théorème 5.2.4 ci-dessus, il existe $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1$
2. **Supposons qu'il existe deux entiers u et v tels que : $au + bv = 1$**
   Montrons que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$
   - ⋆ Clairement, nous avons $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$
   - ⋆ Démontrons, maintnant, que $\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$
     Soit donc $m \in \mathbb{Z}$, alors :
     $$m = m \times 1 = m\,(au + bv) = a\,(mu) + b\,(mv)$$
     et donc $m \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$

   Donc $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$
3. **Supposons qu' il existe deux entiers u et v tels que : $au + bv = 1$**
   Démontrons que $\text{pgcd}\,(a, b) = 1$
   1 est évidemment un diviseur de a et b.
   Soit d un diviseur commun à a et b. Alors, $a = da'$ et $b = db'$, et nous avons $da'u + db'v = d\,(a'u + b'v) = 1$, c'est à dire que $d \mid 1$; donc, tout diviseur commun de a et b divise 1 ; donc, $\text{pgcd}\,(a, b) = 1$

Remarque 12 :

1. Par rapport à la remarque précédente sur le pgcd, nous avons, ici, un résultat bien plus fort : **une équivalence.**
2. Nous pouvons, dès maintenant, donner une autre démonstration de la proposition 5.2.6
   Supposons donc que $d = \text{pgcd}\,(a, b)$ et soient $a' \in \mathbb{Z}$ et $b' \in \mathbb{Z}$ tels que $a = da'$ et $b = db'$
   Comme $d = \text{pgcd}\,(a, b)$, il existe $u \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ tels que $ua + bv = d$. Or :
   $$ua + bv = d \Longleftrightarrow u\,(a'd) + v\,(b'd) = d \Longleftrightarrow ua' + vb' = 1$$
   Donc, d'après le théorème 5.2.7, $\text{pgcd}\,(a', b') = 1$, c'est à dire que a' et b' sont premier entre eux
3. Point d'Histoire : c'est plus un résultat dû à Bachet qu'à Bezout. Bezout a généralisé ce résultat aux polynômes, les nombres ne devenant qu'un cas particulier.

Exercice 13 :

a, b, c et d sont 4 entiers naturels non nuls tels que $ab - dc = 1$

1. Démontrer que cette relation est équivalente à $a\,(b + d) - d\,(c + a) = 1$
2. En déduire que les fractions $\dfrac{a}{a + c}$, $\dfrac{d}{b + d}$ et $\dfrac{a + c}{b + d}$ sont irréductibles

5.2.8 Conséquences de la définition de pgcd

Cette proposition contient des redites, notamment de 5.2.6 ; mais, elle a l'intérêt de faire une synthèse.

1. Soient $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{Z}$. Alors :
$$\operatorname{pgcd}(ka, kb) = |k| \operatorname{pgcd}(a, b)$$
2. Soit $d \in \mathbb{Z}$, un diviseur commun à a et à b. Alors :
$$\operatorname{pgcd}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = \frac{1}{|d|}\operatorname{pgcd}(a, b)$$
3. Conséquence :
Soit d un diviseur commun à a et à b. On suppose donc que $a = da'$ et $b = db'$. Alors :
$$d = \operatorname{pgcd}(a, b) \iff \operatorname{pgcd}(a', b') = 1$$

Démonstration

1. Soient $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{Z}$ et soit d le pgcd de a et b, c'est à dire $d = \operatorname{pgcd}(a, b)$ et d' le pgcd de ka et kb, c'est à dire $d' = \operatorname{pgcd}(ka, kb)$
Alors, nous avons $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$ et $ka\mathbb{Z} + kb\mathbb{Z} = d'\mathbb{Z}$
— Soit $x \in d'\mathbb{Z}$; alors, il existe $\lambda \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \lambda d'$. Mieux, il est possible d'écrire
$$x = u(ka) + v(kb) = k(au + bv) \text{ avec } u \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}$$
Or, $au + bv \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$, c'est à dire $au + bv \in d\mathbb{Z}$, c'est à dire $x = k\mu d = \mu kd$.
x est donc aussi un multiple de kd et donc $x \in kd\mathbb{Z}$. Nous avons donc $d'\mathbb{Z} \subset kd\mathbb{Z}$
— Réciproquement, soit $x \in kd\mathbb{Z}$. Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \lambda kd$. Comme il existe $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$ tels que $d = au + bv$, nous avons :
$$x = \lambda kd = \lambda k(au + bv) = (\lambda u)ka + (\lambda v)kb$$
Donc $x \in ka\mathbb{Z} + kb\mathbb{Z}$, c'est à dire $x \in d'\mathbb{Z}$. Nous avons donc $kd\mathbb{Z} \subset d'\mathbb{Z}$
Donc $kd\mathbb{Z} = d'\mathbb{Z}$. D'où $\operatorname{pgcd}(ka, kb) = |k| \operatorname{pgcd}(a, b)$
2. Soit $d \in \mathbb{Z}$, un diviseur commun à a et à b. Alors, nous avons $a = da'$ et $b = db'$. D'après le point précédent, nous avons :
$$\operatorname{pgcd}(a, b) = \operatorname{pgcd}(da', db') = |d| \operatorname{pgcd}(a', b')$$
C'est à dire $\operatorname{pgcd}(a, b) = |d| \operatorname{pgcd}(a', b')$; si nous utilisons :$a = da' \iff a' = \dfrac{a}{d}$ et $b = db' \iff b' = \dfrac{b}{d}$, nous obtenons :
$$\operatorname{pgcd}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = \frac{1}{|d|}\operatorname{pgcd}(a, b)$$
3. Cette fois ci, supposons $d = \operatorname{pgcd}(a, b)$; alors, toujours d'après le point précédent,
$$d = \operatorname{pgcd}(a, b) = d\operatorname{pgcd}(a', b')$$
Donc, en simplifiant par d, $\operatorname{pgcd}(a', b') = 1$

5.2.9 Théorème

Soit p un nombre premier.
Alors, pour tout nombre $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ $p \mid ab \Longrightarrow (p \mid a)$ ou $(p \mid b)$

Démonstration

Supposons $p \mid ab$, alors, $ab = pk$
p est un nombre premier ; donc, il y a deux possibilités : $\text{pgcd}\,(a,p) = 1$ ou bien $\text{pgcd}\,(a,p) = p$

— Si $\text{pgcd}\,(a,p) = p$, alors $p \mid a$, et c'est terminé
— Si $\text{pgcd}\,(a,p) = 1$, alors, il existe u et v tels que $au + pv = 1$, et donc, en multipliant par b, on obtient :

$$b\,(au+pv) = bau + bpv = pku + bpv = p\,(ku+bv) = b$$

C'est à dire $p \mid b$

5.2.10 Corollaire : lemme de Gauss

Si le nombre a divise le produit bc, et si $\text{pgcd}\,(a,b) = 1$, alors a divise c, c'est à dire, en langage formalisé :

$$a \mid bc \text{ et } \text{pgcd}\,(a,b) = 1 \Longrightarrow a \mid c$$

Démonstration

C'est la seconde partie de la démonstration du théorème 5.2.9 précédent.

5.2.11 Unicité de la décomposition en un produit de facteurs premiers

Tout élément de $m \in \mathbb{Z}$ se décompose de manière unique un produit $p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n$ de facteurs premiers.

Démonstration

L'existence a été démontrée dans le théorème 5.1.6. A l'aide du lemme de Gauss, il est venu le temps de la démonstration de l'unicité de cette décomposition.
Soit $N \in \mathbb{N}$ et supposons que N admette 2 décompositions en un produit de facteurs premiers, c'est à dire :

$$N = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_k = q_1 \times q_2 \times \cdots \times q_j$$

Où les p_i et les q_i sont des nombres premiers.
p_1 divise donc $q_1 \times q_2 \times \cdots \times q_j = N$ et p_1 est premier. Il existe donc i tel que $p_1 = q_i$; supposons, pour simplifier que $p_1 = q_1$. Nous avons donc :

$$p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_k = q_2 \times q_3 \times \cdots \times q_j$$

Ce raisonnement peut être recommencé pour tout nombre p_i où $1 \leqslant i \leqslant k$ et donc $\{p_1, p_2, \cdots, p_k\} \subset \{q_1, q_2, \cdots, q_j\}$
Avec le même raisonnement, nous avons $\{q_1, q_2, \cdots, q_j\} \subset \{p_1, p_2, \cdots, p_k\}$, et donc nous avons :

$$\{q_1, q_2, \cdots, q_j\} = \{p_1, p_2, \cdots, p_k\}$$

Ce qui prouve donc l'unicité de la décomposition de N

5.2.12 Quelques exercices

Exercice 14 :

1. Montrer que pour $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{Z}$, si $\text{pgcd}\,(a,c) = 1$, alors $\text{pgcd}\,(a,b) = \text{pgcd}\,(a,bc)$
2. Montrer que pour $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{Z}$, nous avons

$$\text{pgcd}\,(a,c) = 1 \text{ et } \text{pgcd}\,(a,b) = 1 \text{ équivalent à } \text{pgcd}\,(a,bc) = 1$$

Ce résultat nous autorise à écrire :

$$\boxed{\text{pgcd}\,(a,b) = 1 \Longleftrightarrow (\forall m \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})\,\text{pgcd}\,(a^m, b^n) = 1}$$

3. Montrer que pour $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, nous avons l'équivalence suivante :

$$\text{pgcd}\,(a,b) = 1 \Leftrightarrow \text{pgcd}\,(ab, a+b) = 1$$

Exercice 15 :

Montrer que pour $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{Z}$, si $\text{pgcd}\,(a,b) = 1$ et si $a \mid c$ et $b \mid c$ alors $ab \mid c$

Exercice 16 :

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ nous avons :

1. $\left(n^2+n\right) \wedge (2n+1) = 1$
2. $\left(3n^2+2n\right) \wedge (n+1) = 1$
3. $(2^n+3^n) \wedge \left(3^{n+1}+2^{n+1}\right) = 1$

Exercice 17 :

Trouver les nombres entiers naturels tels que :

$$\begin{cases} a+b = 182 \\ \text{pgcd}\,(a,b) = 13 \end{cases}$$

Exercice 18 :

1. On considère deux entiers quelconques $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$. On considère 2 nombres A et B tels que :

$$A = 5a + 4b \qquad \text{et} \qquad B = 11a + 9b$$

   Démontrer que $\text{pgcd}\,(a,b) = \text{pgcd}\,(A,B)$

2. **Généralisation**
   On considère 2 nombres A' et B' tels que :

$$A' = pa + qb \qquad \text{et} \qquad B' = ra + sb \qquad \text{avec } ps - qr = 1$$

   Démontrer que $\text{pgcd}\,(a,b) = \text{pgcd}\,(A',B')$

Exercice 19 :

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $n+1$ et $2n+1$ sont premiers entre eux.
2. En déduire que $n+1 \mid \mathrm{C}_{2n}^{n} = \dbinom{2n}{n}$

Exercice 20 :

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un unique couple $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que :

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2} \text{ et } \left(1-\sqrt{2}\right)^n = a_n - b_n\sqrt{2}$$

2. Calculer $a_n^2 - 2b_n^2$
3. En déduire que a_n et b_n sont premiers entre eux

5.3 Recherche du pgcd et résolution d'équations diophantiennes

5.3.1 Lemme

Soient a et b 2 entiers tels que $a = bq + r$, alors $\text{pgcd}\,(a,b) = \text{pgcd}\,(b,r)$

Démonstration

1. Soit c un diviseur quelconque *(et pourquoi pas le* pgcd *?)* de a et b ; alors, $a = a'c$ et $b = b'c$; or, $r = a - bq = a'c - bb'cq = c\,(a' - bb'q)$, c'est à dire que c divise r
   On montre ainsi qu'un diviseur quelconque de a et b divise aussi r, et donc, en particulier, $\text{pgcd}\,(a,b)$ divise r
2. Réciproquement, soit c un diviseur commun à b et r, c'est à dire que nous avons $b = b'c$ et $r = r'c$; alors, $a = bq + r = b'cq + r'c = c\,(b'q + r')$, et donc c divise a et c est un diviseur commun à a, b et r

On vient ainsi de montrer qu'un diviseur commun à a et à b est aussi un diviseur commun à b et r

Exercice résolu

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\left(5n^3 - n\right) \wedge (n+2) = (n+2) \wedge 38$

Et si nous faisions la division euclidienne de $5n^3 - n$ par $n+2$?
Nous avons : $\left(5n^3 - n\right) = \left(5n^2 - 10n + 19\right)(n+2) - 38$
Nous avons donc bien $\left(5n^3 - n\right) \wedge (n+2) = (n+2) \wedge 38$

5.3.2 Description de l'algorithme

On suppose a et b strictement positifs

1. Si b divise a, c'est à dire si $a = bq$, alors $b = \text{pgcd}\,(a,b)$
2. Si b ne divise pas a, il existe alors un unique couple d'entiers (q,r) tels que $a = bq + r$ avec $0 < r < b$, et nous avons $\text{pgcd}\,(a,b) = \text{pgcd}\,(b,r)$

Exemple 1 :

1. $\text{pgcd}\,(795, 53) = 53$ car 53 divise 795
2. Recherche de $\text{pgcd}\,(1971, 63)$.
   Cette fois ci, 63 ne divise pas 1971 ; on effectue la division euclidienne de 1971 par 63
   — $1971 = (31 \times 63) + 18$, donc $\text{pgcd}\,(1971,63) = \text{pgcd}\,(63,18)$
   — Il n'y a aucune raison de s'arrêter là !!
   — On ré-effectue donc la division euclidienne de 63 par 18
   — $63 = (3 \times 18) + 9$, donc $\text{pgcd}\,(1971,63) = \text{pgcd}\,(63,18) = \text{pgcd}\,(18,9)$
   — 9 divise 18, donc $\text{pgcd}\,(1971,63) = \text{pgcd}\,(63,18) = \text{pgcd}\,(18,9) = 9$
   On arrive donc à la généralisation qui suit.

5.3.3 Généralisation

Le pgcd de a et b est le dernier reste non nul dans la méthode des divisions successives de a par b

Démonstration

1. Si on divise a par b, on obtient $a = bq_1 + r_1$ avec $0 < r_1 < b$ et $\text{pgcd}\,(a,b) = \text{pgcd}\,(b, r_1)$
2. On divise b par r_1 et nous obtenons $b = r_1 q_2 + r_2$ avec $0 < r_2 < r_1$ et
$$\text{pgcd}\,(a,b) = \text{pgcd}\,(b,r_1) = \text{pgcd}\,(r_1,r_2)$$
3. En itérant, on construit ainsi une suite décroissante $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers positifs tels que $\text{pgcd}\,(a,b) = \text{pgcd}\,(b,r_1) = \text{pgcd}\,(r_1,r_2) = \cdots = \text{pgcd}\,(r_n, r_{n-1})$
4. Au bout d'un certain nombre de divisions, on obtient un reste nul ; supposons $r_{n+1} = 0$, alors, $r_{n-1} = q_{n+1} r_n$ d'où
$$\text{pgcd}\,(a,b) = \text{pgcd}\,(b,r_1) = \text{pgcd}\,(r_1,r_2) = \cdots = \text{pgcd}\,(r_n,r_{n-1}) = r_n$$

Exercice résolu

Recherche du pgcd de 2375 et 75

On utilise donc la méthode des divisions successives :

$$\begin{array}{ll} 2375 = 31 \times 75 + 50 & \text{donc } \operatorname{pgcd}(2375, 75) = \operatorname{pgcd}(75, 50) \\ 75 = 1 \times 50 + 25 & \text{donc } \operatorname{pgcd}(75, 50) = \operatorname{pgcd}(50, 25) \\ 50 = 2 \times 25 & \text{donc } \operatorname{pgcd}(50, 25) = 25 \end{array}$$

Donc, $\operatorname{pgcd}(2375, 75) = 25$

Il y a une façon de présenter les résultats sous forme de tableau :

	31	1	2	$\longleftarrow$ quotient
2375	75	50	25	$\longleftarrow$ diviseur
50	25	0		$\longleftarrow$ reste
	$\uparrow$ pgcd			

Exercice 21 :

1. Rechercher le pgcd de 4641 et 1898
2. Ecrire un algorithme de recherche du pgcd de 2 nombres
   A l'aide de cet algorithme, rechercher :

— $\operatorname{pgcd}(871, 533)$ — $\operatorname{pgcd}(285, 322)$ — $\operatorname{pgcd}(1812, 537)$

Exercice 22 :

Calculez

1. $\operatorname{pgcd}(1980, 546)$
2. $\operatorname{pgcd}(46488, 2379)$
3. $\operatorname{pgcd}(13860, 4488)$

5.3.4 Proposition

Le pgcd est associatif, c'est à dire que, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, tout $b \in \mathbb{Z}$ et tout $c \in \mathbb{Z}$:

$$\operatorname{pgcd}(a, b, c) = \operatorname{pgcd}(\operatorname{pgcd}(a, b,)\, c) = \operatorname{pgcd}(a, \operatorname{pgcd}(b, c))$$

Démonstration

Soit D_a l'ensemble des diviseurs de a, D_b l'ensemble des diviseurs de b et D_c l'ensemble des diviseurs de c.
L'ensemble $D_a \cap D_b$ est l'ensemble des diviseurs communs à a et b auquel appartient $\operatorname{pgcd}(a, b)$. Ainsi, si $c \in D_a \cap D_b$, alors c divise $\operatorname{pgcd}(a, b)$. Et donc, $D_a \cap D_b = D_{\operatorname{pgcd}(a,b)}$.
En faisant le même raisonnement, nous avons :
— $(D_a \cap D_b) \cap D_c = D_{\operatorname{pgcd}(\operatorname{pgcd}(a,b),c)}$
— $D_a \cap (D_b \cap D_c) = D_{\operatorname{pgcd}(a,\operatorname{pgcd}(b,c))}$
— $D_a \cap D_b \cap D_c = D_{\operatorname{pgcd}(a,b,c)}$
L'associativité du pgcd est totalement liée à l'associativité de l'intersection. En effet, nous avons :

$$D_a \cap D_b \cap D_c = (D_a \cap D_b) \cap D_c = D_a \cap (D_b \cap D_c)$$

Généralisation : pgcd de plusieurs nombres

On peut alors étendre la notion de pgcd à un nombre fini d'entiers : $d = \operatorname{pgcd}(a_1 \cdots a_n)$ où d est un diviseur commun à $a_1, \cdots, a_n$, et tel que tout diviseur de ces entiers divise d.

5.3.5 Application : résolution d'une équation diophantienne

Résoudre l'équation : $437x - 241y = 1$

Résolution

1. Il faut d'abord vérifier que 437 et 241 sont des nombres premiers entre eux ; pour ce faire, on utilise l'algorithme d'Euclide ; si le pgcd de 437 et 241 n'est pas 1, cette équation n'a pas de solution.

$$\left\{\begin{array}{l} 437 = 1 \times 241 + 196 \\ 241 = 1 \times 196 + 45 \\ 196 = 4 \times 45 + 16 \\ 45 = 2 \times 16 + 13 \\ 16 = 1 \times 13 + 3 \\ 13 = 4 \times 3 + 1 \end{array}\right.$$

donc, $\text{pgcd}\,(437, 241) = 1$

2. **Recherchons une solution particulière de l'équation**

L'idée est d'exprimer 1 **en fonction** de 437 et 241.

$$\left\{\begin{array}{rcll} 13 & = & 4 \times 3 & +1 \\ -4 \times 16 & = & -4 \times 13 & + -4 \times 3 \\ 5 \times 45 & = & 10 \times 16 & +5 \times 13 \\ -14 \times 196 & = & (-14) \times 4 \times 45 & +(-14) \times 16 \\ 61 \times 241 & = & 61 \times 196 & +61 \times 45 \\ (-75) \times 437 & = & (-75) \times 241 & +(-75) \times 196 \end{array}\right.$$

En additionnant les égalités, des simplifications arrivent, et on obtient :

$$61 \times 241 + (-75) \times (437) = 1 + (-75) \times 241$$

C'est à dire $(136) \times 241 + (-75) \times (437) = 1$.

On obtient donc comme solution particulière : $x_0 = -75$, $y_0 = -136$

3. **Recherchons une solution générale :**

Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ une solution générale.

Nous avons alors :

$$437x - 241y = 437x_0 - 241y_0$$

C'est à dire :

$$437\,(x - x_0) = 241\,(y - y_0)$$

Nous avons 437 qui divise $241\,(y - y_0)$; or 437 est premier avec 241, donc, **d'après le lemme de Gauss,** 437 divise $(y - y_0)$.

Nous avons donc : $(y - y_0) = 437 \times k$, et de la même manière, $(x - x_0) = 241 \times k'$.

On a donc : $x = -75 + 241k'$ et $y = -136 + 437k$

Nous avons $k = k'$.

En effet,

$$(437(-75 + 241k') - 241\,(-136 + 437k) = 1) \Rightarrow (437 \times 241\,(k' - k) = 0)$$

Donc $k = k'$

L'ensemble des solutions est donc : $\left\{\begin{array}{l} x = -75 + 241k \\ y = -136 + 437k \end{array}\right.$ avec $k \in \mathbb{Z}$

5.3.6 Quelques exercices

Exercice 23 :

1. Calculer le pgcd de 5145, 4410, 3675
2. Résoudre l'équation : $3675x - 5145y = 4410$

Exercice 24 :

Résoudre dans $\mathbb{Z}$, les équations

$\star$ $65x = 16y$ $\star$ $65x - 16y = 1$ $\star$ $65x - 16y = 7$

Exercice 25 :

Un pays décide de ne mettre en circulation que des pièces de 3 et 5 euros.

1. Combien de prix sont impraticables entre 1 et 20 euros, si le commerçant ne veut pas être obligé de rendre la monnaie ?
2. Tous les prix supérieurs à 20 euros sont-ils admissibles ?
3. Quels sont les prix admissibles si le commerçant accepte de rendre la monnaie ?

Exercice 26 :

Trouver tous les couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que :

$\triangleright$ $5x + 7y = 1$ $\triangleright$ $48x + 60y = 30$ $\triangleright$ $20x + 25y = 1$ $\triangleright$ $21x - 56y = 49$

Exercice 27 :

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système d'équation d'inconnue x

$$\begin{cases} x \equiv 4\,[7] \\ x \equiv 5\,[15] \end{cases}$$

Exercice 28 :

Deux entiers naturels a et b s'écrivent dans le système de numération de base n :

$$a = \overline{(2310)}_n \qquad b = \overline{(252)}_n$$

On appelle $d = \text{pgcd}\,(a, b)$

1. (a) Démontrer que $2n + 1$ divise a et b
   (b) Démontrer que, si n est pair, alors $d = \text{pgcd}\,(a, b) = 2\,(2n + 1)$, et que, si n est impair, alors $d = \text{pgcd}\,(a, b) = 2n + 1$
2. On suppose que $n = 6$. Résoudre alors dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation diophantienne $ax + by = -26$

Exercice 29 :

Un exercice d'arithmétique et de codage

1. (a) Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $7u - 13v = 1$
   (b) Déterminer tous les couples (a, k) d'entiers relatifs tels que $14a - 26k = 4$
2. On considère deux entiers naturels a et b. Pour tout entier n, on note $\rho\,(n)$ le reste 1e la division euclidienne de $an + b$ par 26.
   On décide de coder un message, en procédant comme suit :
   — À chaque lettre de l'alphabet on associe un entier compris entre 0 et 25 (A est numéroté 0, B numéroté 1. . . etc . . .)
   — Pour chaque lettre α du message, on détermine l'entier n associé puis on calcule $\rho\,(n)$.
   — La lettre α est alors codée par la lettre associée à $\rho\,(n)$.
   Dans cette question, on ne connaît pas les entiers a et b, mais on sait que la lettre F est codée par la lettre K et la lettre T est codée par la lettre O.
   (a) Montrer que les entiers a et b sont tels que $5a + b \equiv 10\,[26]$ et $19a + b \equiv 14\,[26]$
   (b) En déduire qu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $14a - 26k = 4$

(c) Déterminer tous les couples d'entiers (a, b), avec $0 \leqslant a \leqslant 25$ et $0 \leqslant b \leqslant 25$,tels que :

$$\begin{aligned} 5a + b &\equiv 10\,[26] \\ 19a + b &\equiv 14\,[26] \end{aligned}$$

3. On suppose que $a = 17$ et $b = 3$.
   (a) Coder le message « GAUSS »
   (b) Soient n et p deux entiers naturels quelconques. Montrer que, si $\rho(n) = \rho(p)$, alors $17\,(n - p) \equiv 0\,[26]$
   (c) En déduire que deux lettres distinctes de l'alphabet sont codées par deux autres lettres distinctes
4. On suppose toujours que $a = 17$ et $b = 3$
   (a) Soit n un entier naturel. Calculer le reste de la division euclidienne de $23\rho(n) + 9 - n$ par 26
   (b) En déduire un procédé de décodage
   (c) En déduire le décodage du message « KTGZDO »

5.4 Le ppcm, le plus petit multiple commun

5.4.1 Définition

Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$
On appelle plus petit multiple commun à a et à b, un entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que la proposition suivante soit vraie :

$$(\forall c \in \mathbb{Z})\,(a \mid c \quad b \mid c) \Longrightarrow (m \mid c)$$

On note $m = \operatorname{ppcm}(a, b)$

5.4.2 Théorème

Pour tout $a \in \mathbb{Z}$ et tout $b \in \mathbb{Z}$, nous avons :

$$a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$$

Où $m = \operatorname{ppcm}(a, b)$

Démonstration

1. Montrons que $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ est un idéal
   Cette question est un cas particulier d'un énoncé plus général : voir pour cela l'exercice qui suit.
   — Tout d'abord, l'intersection de 2 sous-groupes est un sous-groupe ; donc $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$
   — Soit $\lambda \in \mathbb{Z}$ et $x \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$; il faut montrer que $\lambda x \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$
   Tout d'abord, $a\mathbb{Z}$ est un idéal et donc, $\lambda x \in a\mathbb{Z}$; de même, $\lambda x \in b\mathbb{Z}$ donc, $\lambda x \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$
   Nous en déduisons que $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$
   Dans la mesure où $\mathbb{Z}$ est un anneau principal, cet idéal est engendré par un seul élément, appelé m ; nous avons donc $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$
2. Il faut maintenant montrer que $m = \operatorname{ppcm}(a, b)$.
   Soit $x \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$; alors, x est un multiple de a et un multiple de b ; c'est aussi un multiple de m ; donc $m \mid x$, c'est à dire, en utilisant la définition, que $m = \operatorname{ppcm}(a, b)$

Exercice 30 :

Exercice corrigé
Montrez que, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, tout $b \in \mathbb{Z}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, $\text{ppcm}\,(ka, kb) = k\text{ppcm}\,(a, b)$
On appelle $m' = \text{ppcm}\,(ka, kb)$ et $m = \text{ppcm}\,(a, b)$; il faut donc montrer que $m' = km$ ou encore que :

$$(ka)\,\mathbb{Z} \cap (kb)\,\mathbb{Z} = (km)\,\mathbb{Z}$$

1. <u>Montrons que $(ka)\,\mathbb{Z} \cap (kb)\,\mathbb{Z} \subset (km)\,\mathbb{Z}$</u>
   Soit $x \in (ka)\,\mathbb{Z} \cap (kb)\,\mathbb{Z}$. Alors :
   — Il existe $\lambda \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \lambda\,(ka)$
   — De même, il existe $\lambda_1 \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \lambda_1\,(kb)$
   Or, $x = \lambda\,(ka) = \lambda_1\,(kb) \iff k\,(\lambda a) = k\,(\lambda_1 b) \iff \lambda a = \lambda_1 b$
   En posant $\mu = \lambda a = \lambda_1 b$, nous montrons que μ est un multiple de a et de b et donc un multiple de $m = \text{ppcm}\,(a, b)$. On peut donc écrire $\mu = pm$.
   Donc $x = k\,(pm) = (km)\,p$, c'est à dire que $x \in km\mathbb{Z}$.
   Donc, $(ka)\,\mathbb{Z} \cap (kb)\,\mathbb{Z} \subset (km)\,\mathbb{Z}$
2. <u>Montrons que $(km)\,\mathbb{Z} \subset (ka)\,\mathbb{Z} \cap (ka)\,\mathbb{Z}$</u>
   Soit donc $x \in (km)\,\mathbb{Z}$. Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \lambda\,(km)$. Or, $m = \text{ppcm}\,(a, b)$ est donc un multiple commun à a et b et donc, il existe α et β tels que $m = \alpha a = \beta b$. Donc $x = \lambda \times k \times \alpha a = \lambda\alpha \times ka$ ce qui montre que $x \in ka\mathbb{Z}$.
   De même, $x = \lambda \times k \times \beta b = \lambda\beta \times kb$ ce qui montre que $x \in kb\mathbb{Z}$
   Donc, $x \in (ka)\,\mathbb{Z} \cap (ka)\,\mathbb{Z}$, et donc $(km)\,\mathbb{Z} \subset (ka)\,\mathbb{Z} \cap (ka)\,\mathbb{Z}$

Ainsi, $(ka)\,\mathbb{Z} \cap (kb)\,\mathbb{Z} = (km)\,\mathbb{Z}$, et nous avons $\text{ppcm}\,(ka, kb) = k\text{ppcm}\,(a, b)$

Remarque 13 :

En fait, le schéma suivant montre bien les différentes inclusions *(les flèches représentant les inclusions)* :

$$\begin{tikzcd}
 & a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z} & \\
a\mathbb{Z} \arrow[ur] & & b\mathbb{Z} \arrow[ul] \\
 & a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

5.4.3 Proposition

Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$; alors, les 2 propositions suivantes sont équivalentes

1. $m = \text{ppcm}\,(a, b)$ et $m = a'a = b'b$
2. $m = a'a = b'b$ et $\text{pgcd}\,(a', b') = 1$

<u>Démonstration</u>

1. <u>On suppose $m = \text{ppcm}\,(a, b)$ et $m = a'a = b'b$</u>
   Il faut donc montrer que $\text{pgcd}\,(a', b') = 1$
   Soit δ un diviseur commun à a' et à b'
   Alors, $a' = \alpha\delta$ et $b' = \beta\delta$ et donc $m = a\alpha\delta = b\beta\delta$.
   Si $m' = \dfrac{m}{\delta} \Leftrightarrow m'\delta = m$, nous avons $m' = a\alpha = b\beta$, ce qui montre que m' est un multiple commun à a et à b, ce qui est impossible, sauf si $\delta = 1$
   Donc, $\text{pgcd}\,(a', b') = 1$

2. Réciproquement, soit $m = a'a = b'b$, avec $\text{pgcd}\,(a', b') = 1$
   Soit $\mu = \text{ppcm}\,(a, b)$.
   De $m = a'a = b'b$, nous concluons que m est un multiple de a et b et donc du $\text{ppcm}\,(a, b)$ qui est μ. Donc, $m = k\mu$
   De cette égalité, on tire que $m = k\,(ax) = k\,(by)$, c'est à dire, que $k\,(ax) = a'a \iff a' = kx$
   De même, $b' = ky$
   Ainsi, k divise donc a' et b' et donc divise $\text{pgcd}\,(a', b') = 1$, c'est à dire, $k = 1$, et donc,
   $$m = 1 \times \mu = \text{ppcm}\,(a, b)$$

5.4.4 Théorème

1. Pour tout $a \in \mathbb{Z}$ et tout $b \in \mathbb{Z}$ $\text{ppcm}\,(a, b) \times \text{pgcd}\,(a, b) = ab$
2. Et, bien entendu, en corollaire, si a et b sont premiers entre eux, $\text{ppcm}\,(a, b) = ab$

Démonstration

Soient $d = \text{pgcd}\,(a, b)$, a' et b' deux nombres tels que $a = a'd$ et $b = b'd$, avec $\text{pgcd}\,(a', b') = 1$
On pose $m = \dfrac{ab}{d}$. Nous aimerions montrer que $m = \text{ppcm}\,(a, b)$
Alors, $m = \dfrac{ab}{d} = \dfrac{(a'd)\,(b'd)}{d} = a'b'd$.
De cette écriture, nous déduisons $m = b'a = a'b$, avec $\text{pgcd}\,(a', b') = 1$
D'après la proposition 5.4.3, nous avons $m = \text{ppcm}\,(a, b)$
On conclue donc bien que $md = ab$, ce qui se traduit aussi par : $\text{ppcm}\,(a, b) \times \text{pgcd}\,(a, b) = ab$

Remarque 14 :

L'utilisation de l'algorithme de recherche du pgcd permet de calculer aussi le ppcm

5.4.5 Lemme chinois

Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$ tels que $a \wedge b = 1$. Alors, l'équation :

$$\begin{cases} x \equiv c & [a] \\ x \equiv d & [b] \end{cases}$$

n'a qu'une seule solution modulo ab

Démonstration

— Comme a et b sont premiers, il existe $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1$ et nous pouvons donc conclure que :
$$\begin{cases} au \equiv 1 & [b] \\ bv \equiv 1 & [a] \end{cases}$$
— Donc $x_0 = dau + cbv$ est une solution particulière de l'équation.
— Soit x une autre solution de cette équation. Alors :
$$\begin{cases} x - x_0 \equiv 0 & [a] \\ x - x_0 \equiv 0 & [b] \end{cases}$$
Ce qui traduit que $x - x_0$ est à la fois multiple de a et multiple de b, et donc multiple du ppcm de a et b. Comme a et b sont premiers entre eux, $\text{ppcm}\,(a, b) = ab$.
Donc $x - x_0 \equiv 0\,[ab]$, c'est à dire $x \equiv x_0\,[ab]$

5.4.6 Quelques exercices

Exercice 31 :

Résoudre, dans $\mathbb{Z}$ les équations :

$$\begin{cases} x \equiv 3\,[11] \\ x \equiv 7\,[15] \end{cases} \qquad \begin{cases} x \equiv 4\,[10] \\ x \equiv 8\,[14] \end{cases}$$

Exercice 32 :

Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$. Donner $\operatorname{pgcd}(a+b, \operatorname{ppcm}(a,b))$

Exercice 33 :

Déterminer l'ensemble des couples (x, y) d'entiers naturels tels que :

$$\begin{cases} \delta = 60 \\ \mu = 3600 \end{cases}$$

Où $\delta = \operatorname{pgcd}(x, y)$ et $\mu = \operatorname{pppcm}(x, y)$

5.5 Les théorèmes de Fermat et de Wilson

5.5.1 Théorème

Soit p un nombre premier. Alors $p\mathbb{Z}$, l'idéal de $\mathbb{Z}$ engendré par p est maximal, c'est à dire :
Il n'existe pas d'idéal $I \neq \mathbb{Z}$ tel que $p\mathbb{Z} \subsetneqq I \subsetneqq \mathbb{Z}$

Démonstration

Supposons que l'idéal $p\mathbb{Z}$ ne soit pas maximal.
Il existe alors $x \in \mathbb{Z}$ tel que $p\mathbb{Z} \subsetneqq x\mathbb{Z}$; en particulier $p \in x\mathbb{Z}$ et il existe $c \in \mathbb{Z}$ tel que $p = cx$, ce qui signifie que $c \mid p$; il y a donc contradiction avec le fait que p soit premier.
Donc $p\mathbb{Z}$ est maximal

5.5.2 Théorème

Soit $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Alors, a est inversible si et seulement a et n sont premiers entre eux

Démonstration

1. Supposons a et n premiers entre eux
   Alors, il existe $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + nv = 1$, ce qui veut dire que $au \equiv 1\,[n]$
   Donc, dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, a admet un inverse qui est u modulo n
2. Supposons a inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
   Il existe donc $u \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $au \equiv 1\,[n]$, c'est à dire que $au = 1 + kn$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Or, $au = 1 + kn \iff au - kn = 1$, ce qui traduit, d'après Bachet-Bezout que a et n sont premiers entre eux

5.5.3 Corollaire

Les générateurs du groupe additif $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ sont les entiers a tels que a et n sont premiers entre eux $(a \wedge n = 1)$

Démonstration

1. Soit $a \in \mathbb{Z}$ tel que $a \wedge n = 1$.
Alors, il existe $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + vn = 1$, et donc, $au \equiv 1\,[n]$.
Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $kau \equiv k\,[n]$, c'est à dire $(ku)\,a \equiv k\,[n]$
a est donc un générateur du groupe additif $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$
2. Réciproquement, soit a un générateur du groupe additif $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.
Alors, pour tout $p \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $ka \equiv p\,[n]$. En particulier si $p = 1$, nous avons $ka \equiv 1\,[n]$, ce qui est équivalent à :
$$ka - 1 = \lambda n \Longleftrightarrow ka - \lambda n = 1$$
Ce qui traduit que a et n sont premiers entre eux.

5.5.4 Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}$

1. L'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ noté $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\star$ est un groupe commutatif pour la multiplication.
2. On appelle $\varphi(n)$ la fonction indicatrice d'Euleur qui désigne le nombre d'entiers positifs compris entre 1 et n qui sont premiers avec n, c'est à dire :
$$\varphi(n) = \text{Card } \{m \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } m \leqslant n \text{ et } \text{pgcd}\,(m, n) = 1\}$$
Alors, Card $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\star = \varphi(n)$

Démonstration

— Que Card $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\star = \varphi(n)$ est complètement évident puisque les éléments inversibles de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ sont les entiers premiers avec n ; ils sont donc en nombre $\varphi(n)$

— Démontrons donc que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\star$ est un groupe commutatif pour la multiplication.
- ▷ Tout d'abord, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\star \neq \emptyset$ puisque $1 \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\star$
- ▷ Ensuite, si $u \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\star$, évidemment que $u^{-1} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\star$ puisque $\left(u^{-1}\right)^{-1} = u$
- ▷ D'autre part, si $u \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\star$ et $v \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\star$, alors $uv \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\star$ puisque uv est inversible et nous avons : $(uv)^{-1} = v^{-1}u^{-1}$

Donc, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\star$ est un groupe pour la multiplication ; la commutativité découle de celle de la multiplication dans $\mathbb{Z}$

Remarque 15 :

1. Il y a donc $\varphi(n)$ générateurs du groupe additif $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$
2. Si $(R, +, \times)$ est un anneau unitaire, l'ensemble des éléments inversibles de R noté $R^\star$ forme un groupe pour la multiplication (pas forcément commutatif).

5.5.5 Corollaire de 5.5.2

Soit $p \in \mathbb{Z}$ un nombre premier ; alors, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps

Démonstration

La démonstration est une redite de 5.5.2
Soit $p \in \mathbb{Z}$ un nombre premier
On sait déjà que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif ; il faut maintenant montrer que chacun des éléments non nuls de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est inversible.
Soit donc $a \in \mathbb{Z}$ tel que $0 < a < p$; alors, a et p sont premiers entre eux, et, d'après le théorème de Bezout, il existe $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + pv = 1$; or, $pv \equiv 0\,[p]$ et donc $ua \equiv 1\,[p]$; il existe un inverse à a ; donc $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps.

5.5.6 Théorème

La caractéristique d'un corps $\mathbb{K}$ est zéro ou un nombre premier

Remarque 16 :

Qu'est ce que la caractéristique d'un corps ?

La caractéristique d'un corps est le plus petit entier positif m tel que $m \times 1 = 0$
C'est donc en fait l'ordre additif de l'unité.

Démonstration

Soit m la caractéristique du corps $\mathbb{K}$
Supposons que la caractéristique du corps $\mathbb{K}$ soit non nulle et non premier, et on écrit $m = hk$. Nous avons, évidemment, $h < m$ et $k < m$; donc, $m \times 1 = 0$ est équivalent à $hk \times 1 = 0$, c'est à dire $(h \times 1)(k \times 1) = 0$; comme $\mathbb{K}$ est un corps, $\mathbb{K}$ est intègre, donc $h \times 1 = 0$ ou $k \times 1 = 0$; il y a donc contradiction ; donc m est premier.

5.5.7 Le petit théorème de Fermat

Soit $p \in \mathbb{Z}$ un nombre premier ; alors, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $a^p \equiv a\,[p]$

Démonstration

1. Si $a = 0$, ou si a est multiple de p, c'est à dire $a \equiv 0\,[p]$, le théorème est démontré.
2. Supposons $a \neq 0$ et a non multiple de p
   On appelle $\mathcal{U} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} - \{0\}$. $\mathcal{U}$ est l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ qui est un groupe multiplicatif d'ordre $p-1$; alors, $a^{p-1} \equiv 1\,[p]$, c'est à dire $a^p \equiv a\,[p]$

Remarque 17 :

Voici une autre démonstration du théorème de Fermat 5.5.7 :

Nous appelons toujours $\mathcal{U}$ le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
Soit $a \in \mathcal{U}$. On appelle

$$\begin{cases} \Phi : \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ \quad x & \longmapsto & \Phi(x) = ax \end{cases}$$

Φ est un automorphisme *(homomorphisme bijectif)*. Alors :

$$\Phi(1) \times \Phi(2) \times \cdots \times \Phi(p-1) = 1 \times 2 \times \cdots \times (p-1)$$

Car Φ est une bijection. Or :

$$\Phi(1) \times \Phi(2) \times \cdots \times \Phi(p-1) = (a \times 1) \times (a \times 2) \times \cdots \times (a(p-1))$$

Or,

$$(a \times 1) \times (a \times 2) \times \cdots \times (a(p-1)) = (1 \times 2 \times \cdots \times (p-1))\, a^{p-1}$$

Et donc :

$$1 \times 2 \times \cdots \times (p-1) = (1 \times 2 \times \cdots \times (p-1))\, a^{p-1}$$

Et, par simplification, $a^{p-1} = 1$ dans $\mathcal{U}$

5.5.8 Le théoprème de Wilson

Soit p un nombre premier ; alors :

$$(p-1)! + 1 \equiv 0\,[p] \iff (p-1)! \equiv -1\,[p] \iff (p-1)! \equiv p-1\,[p]$$

Démonstration

On considère $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $\mathcal{U}$ le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. p étant premier, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps.
Donc, $(p-1)!$ est le produit de tous les éléments de $\mathcal{U}$. $\mathcal{U}$ ayant un nombre pair d'éléments, on peut les regrouper 2 à 2, c'est à dire chaque élément et son inverse. Il se peut que des éléments soient leur propre inverse.
Recherchons donc les éléments qui sont leur propre inverse. Il s'agit donc de résoudre l'équation

$$X^2 \equiv 1\,[p] \Longleftrightarrow X^2 - 1 \equiv 0\,[p]$$

Or, $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$. $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ étant un corps est intègre et nous avons :

$$\begin{cases} (X-1) \equiv 0\,[p] & \Longleftrightarrow & X \equiv 1\,[p] \\ & \text{ou} & \\ (X+1) \equiv 0\,[p] & \Longleftrightarrow & X \equiv -1\,[p] \Longleftrightarrow X \equiv p-1\,[p] \end{cases}$$

Donc, seuls 1 et $p-1$ sont leur propre inverse. Donc $(p-1)! \equiv p-1\,[p] \Longleftrightarrow (p-1)! \equiv -1\,[p]$
Ce que nous voulions.

5.5.9 Quelques exercices

Exercice 34 :

Encore une autre démonstration du théorème de Fermat 5.5.7

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 < k < n$.
   (a) Montrer que si n est premier, alors n divise C_n^k [1]
   (b) Démontrer que si n est premier, alors n divise $2^n - 2$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, premier et $a \in \mathbb{N}$. Montrer que $a^n - a$ est divisible par n

Exercice 35 :

La fonction indicatrice d'Euler

Cet exercice revient sur la fonction indicatrice d'Euler définie en 5.5.4. Nous allons en donner une forme explicite et travailler quelques unes de ses propriétés

1. Calculer $\varphi(8)$ et $\varphi(78)$
2. Démontrer que p est premier si et seulement si $\varphi(p) = p - 1$
3. Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 2
   (a) Montrer que $k \wedge p^\alpha \neq 1 \Longleftrightarrow p \mid k$
   (b) Démontrer qu'il y a $p^{\alpha-1}$ multiples de p entre 0 et $p^\alpha - 1$
   (c) En déduire $\varphi(p^\alpha)$
4. Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $m \wedge n = 1$. On appelle $\mathcal{U}(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})$, les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$, tout comme on appelle $\mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\mathcal{U}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$, ceux de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.
   (a) Pour $x \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})$, on appelle r le reste de la division de x par m. Montrer que $r \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$.
   De la même manière, si $x \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})$ et s le reste de la division de x par n alors $s \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$
   (b) Soit :
   $$\begin{cases} f : \mathcal{U}(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathcal{U}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times \mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\ x & \longmapsto & f(x) = (r, s) \end{cases}$$
   Montrer que f est un isomorphisme de groupe multiplicatif.
   (c) En déduire que si $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ sont tels que $m \wedge n = 1$, alors $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\varphi(n)$ en fonction de la décomposition de n en un produit de facteurs premiers.
6. Montrer que, pour $n \geqslant 3$, nous avons $\varphi(n)$ est un nombre pair

1. Rappel : $\mathrm{C}_n^k = \binom{n}{k}$

Exercice 36 :

Démontrer que, pour $n \geqslant 3$, $\varphi(n) \geqslant \dfrac{n \ln 2}{\ln n + \ln 2}$

Exercice 37 :

On appelle $\mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On sait que $(\mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), \times)$ est un groupe commutatif *(voir5.5.4)* de cardinal $\varphi(n)$
Montrer que pour tout $a \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, nous avons $a^{\varphi(n)} = 1$

Exercice 38 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; en considérant les fractions $\left\{\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \cdots, \dfrac{k}{n}, \cdots, \dfrac{n}{n}\right\}$, montrer que :

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

Exercice 39 :

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$
Montrer que si $(n-1)!$ est un multiple de n, alors, n n'est pas un nombre premier ; la réciproque est-elle vraie ?

5.6 Quelques exercices corrigés

Comme à chaque fois, tous les exercices du chapitre ne sont pas corrigés. Seuls ceux qui nous ont paru moins simples ou moins répétitifs le sont.

5.6.1 Sur les entiers premiers

Exercice 2 :

Soit $a \in \mathbb{N}$, non premier. Montrer que son plus petit diviseur positif b est tel que $b \leqslant \sqrt{a}$

On appelle donc b le plus petit diviseur positif de a.
Il existe alors $d \in \mathbb{N}$, diviseur de a tel que $a = db$ avec $d \geqslant b$. Donc, $db \geqslant b^2$, c'est à dire $a \geqslant b^2$, et en passant à la racine, nous obtenons :

$$\sqrt{a} \geqslant b \Longleftrightarrow b \leqslant \sqrt{a}$$

Exercice 3 :

Soit $A = 315$. Trouver le plus petit entier naturel k tel que $k \times A$ soit le carré d'un nombre entier.

Mon dieu, rien de bien compliqué ici.
On décompose 315 en un produit de facteurs premiers : $315 = 3^2 \times 5 \times 7$
En prenant $k = 5 \times 7$, nous avons $k \times 315 = 3^2 \times 5^2 \times 7^2$. Et c'est tout ! !

Exercice 4 :

Montrer que les nombres suivants sont composés :

1. *$n^4 - 20n^2 + 4$ pour $n \in \mathbb{Z}$*

   Il suffit de factoriser $n^4 - 20n^2 + 4$. Nous avons :

   $$n^4 - 20n^2 + 4 = \left(n^2 - 2\right)^2 + 4n^2 - 20n^2 = \left(n^2 - 2\right)^2 - 16n^2 = \left(n^2 - 2 - 4n\right)\left(n^2 - 2 + 4n\right)$$

   Comme $n^4 - 20n^2 + 4 = \left(n^2 - 4n - 2\right)\left(n^2 + 4n - 2\right)$, $n^4 - 20n^2 + 4$ est bien un nombre composé
2. *$a^4 + 4b^4$ pour $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ et $a \geqslant 2$ et $b \geqslant 2$*

   On procède, ici, de la même manière :

   $$a^4 + 4b^4 = \left(a^2 + 2b^2\right)^2 - 4a^2b^2 = \left(a^2 + 2b^2 - 2ab\right)\left(a^2 + 2b^2 + 2ab\right)$$

   C'est donc bien un nombre composé

Exercice 5 :

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$

1. *On considère les $(n-1)$ nombres : $n! + 2,\ n! + 3,\ \cdots, n! + (n-1),\ n! + n$ Démontrer que ces nombres ne sont pas premiers*

   C'est assez facile, puisque, en écrivant, pour $k = 2, \cdots, n$

   $$n! + k = k \times \left(\prod_{\substack{j=2 \\ j \neq k}}^{n} j + 1\right)$$

   montre que $n! + k$ est divisible par $k \geqslant 2$ et n'est donc pas premier.
2. *En déduire que l'on peut trouver une suite de k nombres consécutifs non premiers*

   Soit $k \geqslant 2$ entier.
   Alors, en utilisant la construction vue dans la question précédente, les entiers

   $$(k+1)! + 2,\ (k+1)! + 3,\ \cdots, (k+1)! + k,\ (k+1)! + k + 1$$

   sont k entiers consécutifs non premiers

Exercice 6 :

1. *Déterminer les couples* $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ *tels que* $x^2 - y^2 = 1969$

   Nous allons aller pas à pas
   - ▷ Tout d'abord, nous décomposons 1969 en un produit de facteurs premiers :
   $$1969 = 11 \times 179$$
   - ▷ D'autre part, $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$, c'est à dire que $x + y$ et $x - y$ apparaissent conmme des diviseurs de 1969
   - ▷ Nous avons alors plusieurs systèmes d'équations :

   $\star \left\{\begin{array}{rl} x+y= & 1 \\ x-y= & 1969 \end{array}\right.$ $\star \left\{\begin{array}{rl} x+y= & 1969 \\ x-y= & 1 \end{array}\right.$ $\star \left\{\begin{array}{rl} x+y= & 11 \\ x-y= & 179 \end{array}\right.$ $\star \left\{\begin{array}{rl} x+y= & 179 \\ x-y= & 11 \end{array}\right.$

   - Résolution de $\left\{\begin{array}{rl} x+y= & 1 \\ x-y= & 1969 \end{array}\right.$
     En additionnant, nous obtenons $2x = 1970$, d'où $x = 985$ et $y = -984$
   - Résolution de $\left\{\begin{array}{rl} x+y= & 1969 \\ x-y= & 1 \end{array}\right.$
     Toujours en additionnant, $x = 985$ et $y = 984$
   - Résolution de $\left\{\begin{array}{rl} x+y= & 11 \\ x-y= & 179 \end{array}\right.$
     Donc $2x = 190$ et donc $x = 95$ d'où $y = -84$
   - Résolution de $\left\{\begin{array}{rl} x+y= & 179 \\ x-y= & 11 \end{array}\right.$
     Nous avons toujours $x = 95$ et, cette fois ci, $y = 84$

   Il y a donc 4 couples (x, y) solutions de ce système :
   $$(985, -984) \quad (985, 984) \quad (95, -84) \quad (95, 84)$$

2. *Déterminer les couples* $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ *tels que* $9y^2 - (x + 1)^2 = 32$

   Nous allons procéder de la même manière que la question précédente. Si D_{32} est l'ensemble des diviseurs de 32, de $32 = 2^5$, nous tirons : $D_{32} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$

   D'autre part, comme tout à l'heure, $9y^2 - (x + 1)^2 = (3y + x + 1)(3y - x - 1)$. Nous avons donc plusieurs systèmes à résoudre :
   - ▷ Les deux premiers : $\left\{\begin{array}{rl} 3y+x+1= & 1 \\ 3y-x-1= & 32 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{rl} 3y+x+1= & 32 \\ 3y-x-1= & 1 \end{array}\right.$
     Dans les 2 systèmes, lorsque nous additionnons les deux lignes, nous obtenons $6y = 33$, qui est impossible puisque 33 est un nombre impair, alors que $6y$ est un nombre pair.
   - ▷ Deux autres systèmes semblables $\left\{\begin{array}{rl} 3y+x+1= & 2 \\ 3y-x-1= & 16 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{rl} 3y+x+1= & 16 \\ 3y-x-1= & 2 \end{array}\right.$
     Dans les deux systèmes, lorsque nous additionnons, nous trouvons $6y = 18$, d'où $y = 3$.
     En remplaçant y par sa valeur dans la première équation du premier système, nous obtenons : $9 + x + 1 = 2$, c'est à dire $x = -8$
     En faisant la même opération dans la première équation du second système, nous obtenons : $9 + x + 1 = 16$ c'est à dire $x = 6$
     Nous obtenons, ici, deux couples solutions $(-8, 3)$ et $(6, 3)$
   - ▷ Nous allons étudier les deux derniers systèmes $\left\{\begin{array}{rl} 3y+x+1= & 4 \\ 3y-x-1= & 8 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{rl} 3y+x+1= & 8 \\ 3y-x-1= & 4 \end{array}\right.$
     Dans les deux systèmes, lorsque nous additionnons, nous trouvons $6y = 12$, d'où $y = 2$.
     En remplaçant y par sa valeur dans la première équation du premier système, nous obtenons : $6 + x + 1 = 4$, c'est à dire $x = -3$
     En faisant la même opération dans la première équation du second système, nous obtenons : $6 + x + 1 = 8$ c'est à dire $x = 1$
     Nous obtenons, ici, deux couples solutions $(-3, 2)$ et $(1, 2)$

   Il y a donc 4 couples (x, y) solutions de ce système :
   $$(-8, 3) \quad (6, 3) \quad (-3, 2) \quad (1, 2)$$

Exercice 8 :

Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $6p+5$

Supposons qu'il n'y en ait qu'un nombre fini de nombres premiers du type $6p+5$, et soit $6n+5$ le dernier.
Les nombres premiers ne peuvent être que de la forme $6p+1$ ou $6p+5$, puisque les autres nombres qui sont tous de la forme $6p$, $6p+2$, $6p+3$ $6p+4$ admettent tous un diviseur propre et ne sont donc pas premiers.

Soient $A = \prod_{k=0}^{n}(6k+5)$ et $B = 6A+5$

Ce nombre B est congru à 5, modulo 6, et n'est en aucun cas divisible par un entier premier du type $6k+5$, donc B n'est divisible que par des entiers premiers du type $6k+1$, c'est à dire que B est congru à 1 modulo 6.

Contradiction. Donc, il existe une infinité de nombres premiers de la forme $6p+5$

Exercice 9 :

Montrer que si p est un nombre premier supérieur à 4, alors $p^2 \equiv 1\,[6]$

Cet exercice fait référence à l'exercice précédent. Modulo 6, les nombres premiers ne peuvent qu'être du type $6p+1$ ou $6p-1$. Donc, si $n \equiv 1\,[6] \iff n = 6p+1$, alors $n^2 \equiv 1\,[6]$ ou si $n \equiv -1 \equiv 5\,[6] \iff n = 6p+5$, alors $n^2 \equiv 1\,[6]$.

Ce que nous voulions.

Exercice 10 :

Soit $x = a^m b^n c^p$, où a, b et c sont 3 nombres premiers

1. *De quelle forme sont les diviseurs de x ?*

   Il est parfaitement clair qu'un diviseur de x est de la forme $x = a^i \times b^j \times c^k$ où $0 \leqslant i \leqslant m$, $0 \leqslant j \leqslant n$ et $0 \leqslant k \leqslant p$

2. *Soient $n_0 \leqslant n$ et $p_0 \leqslant p$ fixés ; calculez $\sum_{k=0}^{m} a^k b^{n_0} c^{p_0}$*

   Voilà qui n'est pas très difficile :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m} a^k b^{n_0} c^{p_0} &= b^{n_0} c^{p_0} \sum_{k=0}^{m} a^k \\ &= b^{n_0} c^{p_0} \frac{1-a^{m+1}}{1-a}\end{aligned}$$

3. *En déduire la somme des diviseurs de x*

La somme des diviseurs est donnée par :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p}\left(\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{m}a^k b^j c^k\right)\right) &= \sum_{k=0}^{p}\left(\sum_{j=0}^{n}b^j c^k\left(\sum_{i=0}^{m}a^k\right)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{p}\left(\sum_{j=0}^{n}b^j c^k\left(\frac{1-a^{m+1}}{1-a}\right)\right)\\
&= \left(\frac{1-a^{m+1}}{1-a}\right)\sum_{k=0}^{p}\left(\sum_{j=0}^{n}b^j c^k\right)\\
&= \left(\frac{1-a^{m+1}}{1-a}\right)\sum_{k=0}^{p}c^k\left(\sum_{j=0}^{n}b^j\right)\\
&= \left(\frac{1-a^{m+1}}{1-a}\right)\sum_{k=0}^{p}c^k\left(\frac{1-b^{m+1}}{1-b}\right)\\
&= \left(\frac{1-a^{m+1}}{1-a}\right)\left(\frac{1-b^{m+1}}{1-b}\right)\sum_{k=0}^{p}c^k\\
&= \left(\frac{1-a^{m+1}}{1-a}\right)\left(\frac{1-b^{n+1}}{1-b}\right)\left(\frac{1-c^{p+1}}{1-c}\right)
\end{aligned}$$

La somme des diviseurs de $x = a^m b^n c^p$, où a, b et c sont 3 nombres premiers est donc donnée par

$$\left(\frac{1-a^{m+1}}{1-a}\right)\left(\frac{1-b^{n+1}}{1-b}\right)\left(\frac{1-c^{p+1}}{1-c}\right)$$

Par exemple : $30 = 2\times 3\times 5$. La somme des diviseurs est donc donnée par :

$$\left(\frac{1-2^2}{1-2}\right)\left(\frac{1-3^2}{1-3}\right)\left(\frac{1-5^2}{1-5}\right) = \frac{-3}{-1}\times\frac{-8}{-2}\times\frac{-24}{-4} = 3\times 4\times 6 = 72$$

Exercice 11 :

En étudiant les congruences modulo 3, montrer que si p et $2p-1$ sont premiers, alors, $2p+1$ est composé

C'est un exercice un peu....spécieux, plus ou moins intéressant.
Soit $p\in\mathbb{N}$ tel que p soit un nombre premier.
Alors, modulo 3, nous n'avons que 2 possibilités : $p\equiv 1\,[3]$ ou $p\equiv 2\,[3]$

— Si $p\equiv 2\,[3]$, alors $2p-1\equiv 0\,[3]$ et $2p-1$, n'est sûrement pas premier. Donc, ce cas ne nous intéresse pas.
— Si $p\equiv 1\,[3]$, alors $2p-1\equiv 1\,[3]$ et $2p-1$, est peut-être premier. Donc, $2p+1\equiv 0\,[3]$ et $2p+1$ est sûrement un nombre composé.

Nous avons donc répondu à la question.

5.6.2 Exercices sur le pgcd

Exercice 13 :

a, b, c et d sont 4 entiers naturels non nuls tels que $ab-dc=1$

1. *Démontrer que cette relation est équivalente à $a\,(b+d)-d\,(c+a)=1$*

   Point très difficile : il suffit d'écrire :

   $$ab-dc = ab+ad-ad-dc = a\,(b+d)-d\,(c+a)$$

2. *En déduire que les fractions $\dfrac{a}{a+c}$, $\dfrac{d}{b+d}$ et $\dfrac{a+c}{b+d}$ sont irréductibles*

   En utilisant $a\,(b+d)-d\,(c+a)=1$ et le théorème de Bachet, nous voyons que :
   ⋆ Les nombres a et $b+d$ sont premiers entre eux, qu'ils n'ont pas de diviseurs commens et que donc la fraction $\dfrac{a}{a+c}$ n'est pas simplifiable et est donc irréductible.
   ⋆ Le même raisonnement vaut pour les fractions $\dfrac{d}{b+d}$ et $\dfrac{a+c}{b+d}$

Exercice 14 :

1. *Montrer que pour $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{Z}$, si $\operatorname{pgcd}(a, c) = 1$, alors $\operatorname{pgcd}(a, b) = \operatorname{pgcd}(a, bc)$*

   Soient $D_{a,b}$ l'ensemble des diviseurs communs à a et b, $D_{a,bc}$ l'ensemble des diviseurs communs à a et bc. Nous allons montrer que si a et c sont premiers entre eux, alors $D_{a,b} = D_{a,bc}$
   — Premièrement, $D_{a,b} \subset D_{a,bc}$
   En effet, soit $x \in D_{a,b}$; alors, il existe k_1 et k_2 tels que $a = k_1 x$ et $b = k_2 x$.
   Donc $bc = k_2 xc = (k_2 c)\, x$, et x divise donc bc, donc $x \in D_{a,bc}$
   — Secondement, démontrons que $D_{a,bc} \subset D_{a,b}$
   Soit $x \in D_{a,bc}$; alors, il existe k_1 et k_2 tels que $a = k_1 x$ et $bc = k_2 x$.
   Or, a et c sont premiers entre eux, et d'après le théorème de Bachet, il existe $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + cv = 1$.
   Donc,

   - $a = k_1 x \Longleftrightarrow bua = buk_1 x$
   - $bc = k_2 x \Longleftrightarrow bvc = vk_2 x$

   En additionnant, nous obtenons :

   $$bua + bvc = vk_2 x + buk_1 x \Longleftrightarrow b\,(ua + cv) = (vk_2 + buk_1)\, x \Longleftrightarrow b = (vk_2 + buk_1)\, x$$

   C'est à dire que x divise b et donc $x \in D_{a,b}$
   Nous en déduisons que $D_{a,b} = D_{a,bc}$, et qu'en particulier, nous avons $\operatorname{pgcd}(a, b) = \operatorname{pgcd}(a, bc)$

2. *Montrer que pour $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{Z}$, nous avons :*

   $$\operatorname{pgcd}(a, c) = 1 \text{ et } \operatorname{pgcd}(a, b) = 1 \text{ équivalent à } \operatorname{pgcd}(a, bc) = 1$$

   Nous allons utiliser l'identité de Bachet-Bezout de la proposition 5.2.7
   (a) Supposons que $\operatorname{pgcd}(a, c) = 1$ et $\operatorname{pgcd}(a, b) = 1$
   Alors, il existe $u \in \mathbb{Z}$, $v \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{Z}$ et $t \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1$ et $sa + tc = 1$. En faisant le produit, nous obtenons :

   $$(au + bv)\,(sa + tc) = 1 \Longleftrightarrow a\,(sau + tcu + sbv) + (tv)\, bc = 1$$

   Ce qui montre donc que $\operatorname{pgcd}(a, bc) = 1$
   (b) Réciproquement, supposons que $\operatorname{pgcd}(a, bc) = 1$
   Alors, il existe $u \in \mathbb{Z}$, $v \in \mathbb{Z}$ tels que $ua + v\,(bc) = 1$. Or :
   — $ua + v\,(bc) = 1 \Longrightarrow ua + (vb)\, c = 1$, c'est à dire $\operatorname{pgcd}(a, c) = 1$
   — $ua + v\,(bc) = 1 \Longrightarrow ua + (vc)\, b = 1$, c'est à dire $\operatorname{pgcd}(a, b) = 1$

   Nous avons bien démontré l'équivalence.

3. *Montrer que pour $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, nous avons l'équivalence suivante :*

   $$\operatorname{pgcd}(a, b) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{pgcd}(ab, a + b) = 1$$

   Nous allons utiliser le théorème de Bachet-Bezout 5.2.7 qui est une équivalence ; nous avons :

   $$\operatorname{pgcd}(ab, a + b) = 1 \Longleftrightarrow \text{ il existe } u \in \mathbb{Z} \text{ et } v \in \mathbb{Z} \text{ tels que } u\,(ab) + v\,(a + b) = 1$$

   Or,

   $$u\,(ab) + v\,(a + b) = 1 \Longleftrightarrow a\,(ub + v) + bv = 1 \Longleftrightarrow aU_0 + bV_0 = 1 \Longleftrightarrow \operatorname{pgcd}(a, b) = 1$$

   Ce que nous voulions

Exercice 15 :

Montrer que pour $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{Z}$, si $\mathrm{pgcd}\,(a,b) = 1$ et si $a \mid c$ et $b \mid c$ alors $ab \mid c$

Ré-écrivons les hypothèses :
- Si $a \mid c$, il existe alors $k \in \mathbb{Z}$ tel que $c = ka$
- Si $b \mid c$, il existe alors $k_1 \in \mathbb{Z}$ tel que $c = k_1 b$
- Si $\mathrm{pgcd}\,(a,b) = 1$, alors il existe $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$ tels que $ua + bv = 1$ *(cf 5.2.7)*

Clairement, nous avons :

$$ua + bv = 1 \Longleftrightarrow c\,(ua + bv) = c \Longleftrightarrow uac + bvc = c \Longleftrightarrow uak_1 b + bvka = c \Longleftrightarrow ab\,(uk_1 + vk) = c$$

Ce qui montre bien que ab divise c

Exercice 16 :

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ nous avons :

1. $\left(n^2 + n\right) \wedge (2n+1) = 1$
   - On montre d'abord que $(2n+1) \wedge (n+1) = 1$
     Rien de plus facile ; en utilisant Bachet-Bezout :
     $$2 \times (n+1) - (2n+1) = 1$$
     Et nous avons le résultat !
   - Il est tout aussi facile de montrer que $(2n+1) \wedge n = 1$
   - En utilisant le produit, nous avons :
     $$((2n+1) \wedge (n+1) = 1) \ \text{ et } \ ((2n+1) \wedge n = 1) \Longrightarrow (n\,(n+1) \wedge (2n+1) = 1)$$
2. $\left(3n^2 + 2n\right) \wedge (n+1) = 1$

   La démonstration est tout aussi simple :
   - On montre que $n \wedge (n+1) = 1$ par Bachet Bezout
   - Puis que $(3n+2) \wedge (n+1) = 1$, toujours par Bachet-Bezout
   - Et nous concluons en utilisant le produit
3. $(2^n + 3^n) \wedge \left(3^{n+1} + 2^{n+1}\right) = 1$

   Soit d un diviseur commun à $(2^n + 3^n)$ et $\left(3^{n+1} + 2^{n+1}\right)$. Alors $(2^n + 3^n) = kd$ et $\left(3^{n+1} + 2^{n+1}\right) = k_1 d$
   - ⋆ $(2^n + 3^n) - 3 \times \left(3^{n+1} + 2^{n+1}\right) = -2^n$ et donc $kd - 3k_1 d = -2^n \Longleftrightarrow d\,(k - 3k_1) = -2^n$, ce qui montre que $d \mid 2^n$
   - ⋆ De même, $\left(3^{n+1} + 2^{n+1}\right) - 2 \times (2^n + 3^n) = 3^n$ et donc $k_1 d - 2kd = 3^n \Longleftrightarrow d\,(k_1 - 3k) = 3^n$, ce qui montre que $d \mid 3^n$

Or, $\mathrm{pgcd}\,(2^n, 3^n) = 1$ et donc $d = 1$

Exercice 17 :

Trouver les nombres entiers naturels tels que :

$$\begin{cases} a + b = 182 \\ \mathrm{pgcd}\,(a,b) = 13 \end{cases}$$

Remarquons tout d'abord que $182 = 2 \times 7 \times 13$ et que $a = 13a'$ et $b = 13b'$ avec $\mathrm{pgcd}\,(a', b') = 1$.
Nous avons donc :

$$\begin{cases} 13a' + 13b' = 14 \times 13 \\ \mathrm{pgcd}\,(a', b') = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a' + b' = 14 \\ \mathrm{pgcd}\,(a', b') = 1 \end{cases}$$

Nous trouvons donc comme couples :
- $a' = 1$ et $b' = 13$, c'est à dire $a = 13$ et $b = 169$
- $a' = 3$ et $b' = 11$, c'est à dire $a = 39$ et $b = 143$
- $a' = 5$ et $b' = 9$, c'est à dire $a = 65$ et $b = 117$

Exercice 18 :

1. *On considère deux entiers quelconques $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$. On considère 2 nombres A et B tels que :*

$$A = 5a + 4b \qquad \text{et} \qquad B = 11a + 9b$$

Démontrer que $\text{pgcd}\,(a, b) = \text{pgcd}\,(A, B)$

On pose $D_{a,b}$ l'ensemble des diviseurs communs à a et b, ainsi que $D_{A,B}$ l'ensemble des diviseurs communs à A et B. Nous allons démontrer que $D_{a,b} = D_{A,B}$

— Montrons que $D_{a,b} \subset D_{A,B}$
Soit $x \in D_{a,b}$. Alors, il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$ tels que $a = kx$ et $b = k'x$. Alors :

$$A = 5a + 4b = 5kx + 4k'x = x\,(5k + 4k')$$

Et donc x divise A. Nous démontrerions de même que $B = x\,(11k + 9k')$ et que x divise B, et donc $x \in D_{A,B}$
On vient de montrer que $D_{a,b} \subset D_{A,B}$

— Montrons que $D_{A,B} \subset D_{a,b}$
Soit $x \in D_{A,B}$. Alors, il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$ tels que $A = kx$ et $B = k'x$. Alors :

$$A = 5a + 4b \qquad \text{et} \qquad B = 11a + 9b \Longleftrightarrow kx = 5a + 4b \text{ et} \qquad k'x = 11a + 9b$$

Nous avons :

$$\left\{\begin{array}{rl} kx = & 5a + 4b \\ k'x = & 11a + 9b \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} 9 \times kx = & 45a + 36b \\ -4 \times k'x = & -44a - 36b \end{array}\right. \Longrightarrow \text{en additionnant } x\,(9k - 4k') = a$$

Ce qui montre que x divise a
De même, nous avons :

$$\left\{\begin{array}{rl} kx = & 5a + 4b \\ k'x = & 11a + 9b \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} 11 \times kx = & 55a + 44b \\ -5 \times k'x = & -55a - 45b \end{array}\right. \Longrightarrow \text{en additionnant } x\,(5k' - 11k) = b$$

Ce qui montre que x divise b et donc $x \in D_{a,b}$
On vient de montrer que $D_{A,B} \subset D_{a,b}$

Ainsi, $D_{A,B} = D_{a,b}$, ce qui signifie que a et b ont même diviseurs communs que A et B et donc même pgcd. Donc, $\text{pgcd}\,(a, b) = \text{pgcd}\,(A, B)$

2. *Généralisation*
On considère 2 nombres A' et B' tels que :

$$A' = pa + qb \qquad \text{et} \qquad B' = ra + sb \qquad \text{avec } ps - qr = 1$$

Démontrer que $\text{pgcd}\,(a, b) = \text{pgcd}\,(A', B')$

Bien entendu, la démonstration est semblable. Reprenant les même notations que pour la question 1, nous avons, de manière très évidente, $D_{a,b} \subset D_{A',B'}$
Démontrons maintenant que $D_{A',B'} \subset D_{a,b}$
Soit $x \in D_{A',B'}$. Alors, il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$ tels que $A' = kx$ et $B' = k'x$. Alors :

$$(A' = pa + qb \text{ et } B' = ra + sb) \Longleftrightarrow (kx = pa + qb \text{ et } k'x = ra + sb)$$

Nous avons :

$$\left\{\begin{array}{rl} kx = & pa + qb \\ k'x = & ra + sb \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} s \times kx = & spa + sqb \\ -q \times k'x = & -qra - sqb \end{array}\right. \Longrightarrow \text{en additionnant } x\,(sk - qk') = a$$

en tenant compte de $ps - qr = 1$ Ce qui montre que x divise a
De même, nous avons :

$$\left\{\begin{array}{rl} kx = & pa + qb \\ k'x = & ra + sb \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} r \times kx = & rpa + rqb \\ -p \times k'x = & -pra - psb \end{array}\right. \Longrightarrow \text{en additionnant } x\,(rk - pk') = b$$

en tenant compte de $ps - qr = 1$ Ce qui montre que x divise b et donc $x \in D_{a,b}$
On vient de montrer que $D_{A',B'} \subset D_{a,b}$
Ainsi, $D_{A',B'} = D_{a,b}$, ce qui signifie que a et b ont même diviseurs communs que A' et B' et donc même pgcd. Donc, $\text{pgcd}\,(a, b) = \text{pgcd}\,(A', B')$

Exercice 19 :

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $n+1 \mid \mathrm{C}_{2n}^{n} = \binom{2n}{n}$

Nous avons $\mathrm{C}_{2n+1}^{n+1} = \dfrac{(2n+1)!}{(n+1)! \times n!} = \dfrac{2n+1}{n+1} \times \mathrm{C}_{2n}^{n}$, c'est à dire :

$$(n+1)\,\mathrm{C}_{2n+1}^{n+1} = (2n+1)\,\mathrm{C}_{2n}^{n}$$

$n+1$ divise $(2n+1)\,\mathrm{C}_{2n}^{n}$, et comme $n+1$ et $2n+1$ sont premiers entre eux, d'après le lemme de Gauss, $n+1 \mid \mathrm{C}_{2n}^{n}$

Exercice 20 :

1. *Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un unique couple $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que :*

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2} \text{ et } \left(1-\sqrt{2}\right)^n = a_n - b_n\sqrt{2}$$

C'est la question cruciale pour cet exercice!!

— **Démontrons l'unicité de a_n et b_n**
Supposons qu'il y ait une autre décomposition, c'est à dire que :

$$a_n + b_n\sqrt{2} = \alpha_n + \beta_n\sqrt{2}$$

Montrons que $a_n = \alpha_n$ et $b_n = \beta_n$
Supposons $a_n \neq \alpha_n$ et $b_n \neq \beta_n$[2] Alors, de l'égalité $a_n + b_n\sqrt{2} = \alpha_n + \beta_n\sqrt{2}$, on déduit que $\dfrac{a_n - \alpha_n}{\beta_n - b_n} = \sqrt{2}$. Or comme $\dfrac{a_n - \alpha_n}{\beta_n - b_n} \in \mathbb{Q}$, ceci sous entend que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, ce qui est faux.
Donc, $a_n = \alpha_n$ et $b_n = \beta_n$

— **Calculons explicitement a_n et b_n**
Nous commençons par calculer $\left(1+\sqrt{2}\right)^n$ en utilisant le binôme de Newton :

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \left(\sqrt{2}\right)^k$$

⋆ Supposons n pair,c'est à dire $n = 2p$.
Nous séparons la somme en deux : d'une part, les termes de rang pair, et d'autre part, les termes de rang impair :

$$\begin{aligned}\left(1+\sqrt{2}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \left(\sqrt{2}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_n^{2k} \left(\sqrt{2}\right)^{2k} + \sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{C}_n^{2k+1} \left(\sqrt{2}\right)^{2k+1}\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{C}_n^{2k+1} \left(\sqrt{2}\right)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{C}_n^{2k+1} \left(\sqrt{2}\right)^{2k} \sqrt{2} = \sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{C}_n^{2k+1} 2^k \sqrt{2} = \left(\sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{C}_n^{2k+1} 2^k\right)\sqrt{2}$

De même, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_n^{2k} \left(\sqrt{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_n^{2k} 2^k$

⋆ Donc, si n est pair, avec $n = 2p$, $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_n^{2k} 2^k$ et $b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{C}_n^{2k+1} 2^k$

2. Démonstration un peu réductrice ; il faidrait supposer $a_n \neq \alpha_n$ **ou** $b_n \neq \beta_n$, puis envisager 3 cas : $a_n \neq \alpha_n$,$b_n \neq \beta_n$ et $a_n \neq \alpha_n$ **et** $b_n \neq \beta_n$; les deux premiers cas étant élémentaires ne sont donc pas traités ici.

◇ Supposons n impair,c'est à dire $n = 2p + 1$.
Nous séparons une nouvelle fois la somme en deux, et de la même façon : d'une part, les termes de rang pair, et d'autre part, les termes de rang impair :

$$\begin{aligned}\left(1+\sqrt{2}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \left(\sqrt{2}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_n^{2k} \left(\sqrt{2}\right)^{2k} + \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_n^{2k+1} \left(\sqrt{2}\right)^{2k+1}\end{aligned}$$

Il n'y a donc pas grand chose de changé par rapport aux points ci-dessus

◇ Donc, si n est impair, avec $n = 2p + 1$ $a_n = \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_n^{2k} 2^k$ et $b_n = \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_n^{2k+1} 2^k$

— **Intéressons nous maintenant à $\left(1-\sqrt{2}\right)^n$**

Nous réutilisons le binôme de Newton pour calculer $\left(1-\sqrt{2}\right)^n$:

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \left(-\sqrt{2}\right)^k$$

⋆ Supposons n pair,c'est à dire $n = 2p$.
Alors, en séparant d'une part, les termes de rang pair, et d'autre part, les termes de rang impair :

$$\begin{aligned}\left(1+\sqrt{2}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \left(-\sqrt{2}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_n^{2k} (-1)^{2k} \left(\sqrt{2}\right)^{2k} + \sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{C}_n^{2k+1} (-1)^{2k+1} \left(\sqrt{2}\right)^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_n^{2k} \left(\sqrt{2}\right)^{2k} - \sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{C}_n^{2k+1} \left(\sqrt{2}\right)^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_n^{2k} 2^k - \left(\sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{C}_n^{2k+1} 2^k\right) \sqrt{2}\end{aligned}$$

⋆ Donc, si n est pair, nous avons $\left(1-\sqrt{2}\right)^n = a_n - b_n\sqrt{2}$

◇ Supposons n impair,c'est à dire $n = 2p + 1$.
Nous démontrions de la même manière que si n est impair, $\left(1-\sqrt{2}\right)^n = a_n - b_n\sqrt{2}$

2. *Calculer $a_n^2 - 2b_n^2$*

Nous avons :

$$\begin{aligned}a_n^2 - 2b_n^2 &= \left(a_n - b_n\sqrt{2}\right)\left(a_n + b_n\sqrt{2}\right) \\ &= \left(1-\sqrt{2}\right)^n \left(1+\sqrt{2}\right)^n \\ &= \left(\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)\right)^n \\ &= (-1)^n\end{aligned}$$

3. *En déduire que a_n et b_n sont premiers entre eux*

La relation $a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$ permet d'écrire $a_n(a_n) - 2b_n(b_n) = (-1)^n$. Ce qui montre, d'après l'égalité de Bachet-Bezout que a_n et b_n sont premiers entre eux.

5.6.3 Equations diophantiennes

Exercice 21 :

Ecrire un algorithme de recherche du pgcd *de 2 nombres*

Nous proposons cet algorithme en Python. C'est un algorithme récursif, conforme au cours

```
def pgcd(a,b):
    r=a%b
    if r==0:
      return  b
    else:
      return pgcd(b,r)
```

Exercice 23 :

1. *Calculer le pgcd de 5145, 4410, 3675*

   Nous avons $5145 = 5 \times 3 \times 7^3$, $4410 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$ et $3675 = 3 \times 5^2 \times 7^2$ et donc

   $$\text{pgcd}(5145, 4410, 3675) = 3 \times 5 \times 7^2 = 735$$

2. *Résoudre l'équation :* $3675x - 5145y = 4410$

   Il est possible de simplifier par $\text{pgcd}(5145, 4410, 3675) = 735$, et nous avons

   $$3675x - 5145y = 4410 \Longleftrightarrow 5x - 7y = 6$$

   ⋆ Recherche d'une solution particulière
   Les nombres 7 et 5 sont premiers entre eux, il existe donc $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$ tels que $5x - 7y = 1$; il suffit de choisir $x' = 3$ et $y' = 2$.
   Les solutions particulières à l'équation $5x - 7y = 6$ sont donc $x_0 = 18$ et $y_0 = 12$

   ⋆ Recherche de la solution générale
   Soient $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$ les solutions générales de l'équation $5x - 7y = 6$. Alors, nous avons :

   $$5x - 7y = 5x_0 - 7y_0 = 6 \Longleftrightarrow 5(x - x_0) = 7(y - y_0)$$

   Donc, par l'utilisation du lemme de Gauss
   — 7 étant premier avec 5, divisant $5(x - x_0)$ divise forcément $x - x_0$. Donc $x - x_0 = 7k \Longleftrightarrow x = x_0 + 7k$ avec $k \in \mathbb{Z}$
   — De même, $y - y_0 = 5k \Longleftrightarrow y = y_0 + 5k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

   Les solutions de l'équation $3675x - 5145y = 4410$ sont donc données par : $\begin{cases} x = 18 + 7k \\ y = 12 + 5k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 24 :

Résoudre dans $\mathbb{Z}$, les équations

1. $65x = 16y$

   Tout d'abord, il est facile de remarquer que $\text{pgcd}(65, 15) = 1$, c'est à dire que 65 et 16 sont premiers entre eux.
   16 divise $65x$, 16 est premier avec 65, donc, d'après le lemme de Gauss, 16 divise x et donc $x = 16k$ avec $k \in \mathbb{Z}$
   De même, pour 65, 65 divise y et donc $y = 65k_1$ avec $k_1 \in \mathbb{Z}$
   En remplaçant dans les équations, nous obtenons : $65 \times 16 \times k = 16 \times 65 \times k_1$; d'où $k = k =_1$ Les solutions sont donc :

   $$x = 16k \qquad y = 65k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

2. $65x - 16y = 1$

   65 et 16 étant premiers entre eux, d'après le théorème de Bachet, il existe bien $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$ tels que $65x - 16y = 1$

   ⋆ Une solution particulière est donnée par $x_0 = 1$ et $y_0 = 4$
   ⋆ Soient $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$ la solution générale. Alors :

   $$65x_0 - 16y_0 = 1 = 65x - 16y \Longleftrightarrow 65(x - x_0) = 16(y - y_0)$$

⋆ Donc, d'après la question précédente :

$$x - x_0 = 16k \text{ et } y - y_0 = 65k \Longleftrightarrow x = 1 + 16k \text{ et } y = 4 + 65k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

3. $65x - 16y = 7$

   Comme tout à l'heure, 65 et 16 étant premiers entre eux, il existe bien $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$ $65x - 16y = 7$
   ⋆ Une solution particulière est donnée par $x_0 = 7$ et $y_0 = 28$
   ⋆ Soient $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$ la solution générale. Alors :

$$65x_0 - 16y_0 = 7 = 65x - 16y \Longleftrightarrow 65\left(x - x_0\right) = 16\left(y - y_0\right)$$

   ⋆ Donc, d'après la question 1 :

$$x - x_0 = 16k \text{ et } y - y_0 = 65k \Longleftrightarrow x = 7 + 16k \text{ et } y = 28 + 65k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Exercice 25 :

Un pays décide de ne mettre en circulation que des pièces de 3 et 5 euros.

1. *Combien de prix sont impraticables entre 1 et 20 euros, si le commerçant ne veut pas être obligé de rendre la monnaie ?*
2. *Tous les prix supérieurs à 20 euros sont-ils admissibles ?*
3. *Quels sont les prix admissibles si le commerçant accepte de rendre la monnaie ?*

- Soit S la somme *(positive)* que doit payer le client. Pour payer cette somme, il faut x pièces de 3 euros et y pièces de 5 euros pour obtenir la somme, c'est à dire pour que $3x + 5y = S$
- Comme 5 et 3 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bachet, il existe $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$ tels que $3x + 5y = 1$

  Résolvons l'équation $3x + 5y = 1$
  ⋆ Une solution particulière est $x_0 = 2$ et $y_0 = -1$
  ⋆ Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la slution générale. Alors :

$$3x + 5y = 3x_0 + 5y_0 \Longleftrightarrow 3\left(x - x_0\right) = 5\left(y_0 - y\right)$$

  D'où nous avons :

$$\left\{\begin{array}{rl} x - x_0 = & 5k \\ y_0 - y = & 3k \end{array}\right. \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x = & 2 + 5k \\ y = & -1 - 3k \end{array}\right. \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

- Pour $S \in \mathbb{N}^*$, la solution à l'équation $3x + 5y = S$ est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{rl} x = & 2S + 5k \\ y = & -S - 3k \end{array}\right. \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

- Ya-t-il des sommes impossibles à payer ?

  Regardons quelques cas particuliers :
  ⋆ **Pour** $S = 1$
  Nous devons résoudre $3x + 5y = 1$ donc les solutions sont :

$$x = 2 + 5k \qquad y = -1 - 3k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

  Nous devons avoir $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, c'est à dire $2 + 5k \geqslant 0$ et $-1 - 3k \geqslant 0$ ce qui est équivalent à $\dfrac{-2}{5} \leqslant k \leqslant \dfrac{-1}{3}$; et il n'existe pas d'entiers tels que $\dfrac{-2}{5} \leqslant k \leqslant \dfrac{-1}{3}$
  Le client ne peut donc pas payer une somme de 1 euro.
  ⋆ **Pour** $S = 2$**,** $S = 4$ **et** $S = 7$, c'est aussi impossible ; et la démonstration est la même.
  ⋆ **Pour** $S = 3$, nous avons $x = 1$ et $y = 0$

⋆ **Faisons la synthèse dans un tableau**

S	x	y
5	0	1
6	2	0
8	1	1
9	3	0
10	0	2
11	2	1
12	4	0
13	1	2

S	x	y
14	3	1
15	5	0
15	0	3
16	2	2
17	4	2
18	6	0
18	1	3
19	3	2
20	0	4

On peut remarquer que, pour $S = 15$ et $S = 18$, il y a 2 solutions.

- A partir de quelle somme pouvons nous payer ?
  On peut payer si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, c'est à dire si :

$$2S + 5k \geqslant 0 \text{ et } -S - 3k \geqslant 0 \Longleftrightarrow \frac{-2S}{5} \leqslant k \leqslant \frac{-S}{3}$$

  Et k entier existe si et seulement si $\dfrac{-S}{3} - \left(\dfrac{-2S}{5}\right) \geqslant +1$
  Or $\dfrac{-S}{3} - \left(\dfrac{-2S}{5}\right) = \dfrac{S}{15}$ et donc $\dfrac{S}{15} \geqslant 1 \Longleftrightarrow S \geqslant 15$
- Si le commerçant accepte de rendre la monnaie, ceci signifie que x ou y peuvent avoir des valeurs négatives, et à ce moment là, toutes les sommes S sont possibles.
  Pour $S = 7$, les solutions à l'équation $3x + 5y = 7$ sont du type :

$$x = 14 + 5k \qquad y = -7 - 3k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

  Une solution possible de cette équation est $x = 14$ et $y = -7$, ce qui veut dire que le client donne 14 pièces de 3 euros et que le commerçant rend 7 billet de 5 euros.
  Une autre solution est $x = 9$ et $y = -4$ ou $x = 4$ et $y = -1$

Exercice 26 :

Trouver tous les couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que :

▷ $5x + 7y = 1$

Comme 5 est premier avec 7, cette équation a des solutions.

⋆ Une solution particulière est donnée par $x_0 = 3$ et $y_0 = -2$

⋆ Soient $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$ la solution générale de l'équation ; alors, nous avons :

$$5x + 7y = 5x_0 + 7y_0 \Longleftrightarrow 5(x - x_0) = 7(y_0 - y)$$

⋆ La solution générale est donc donnée par :

$$x = x_0 + 7k \quad y = y_0 - 5k \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow x = 3 + 7k \quad y = -2 - 5k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

▷ $48x + 60y = 30$

On peut simplifier par 6 ; nous avons donc :

$$48x + 60y = 30 \Longleftrightarrow 8x + 10y = 5$$

Or, $\text{pgcd}(8, 10) = 2$ et 2 ne divise pas 5 ; cette équiation est impossible.

▷ $20x + 25y = 1$

Comme $\text{pgcd}(20, 25) = 5$, cette équation est impossible

▷ $21x - 56y = 49$

On peut simplifier par 7 ; nous avons donc :

$$21x - 56y = 49 \Longleftrightarrow 3x - 8y = 7$$

Or, $\text{pgcd}\,(8,3) = 1$, il existe donc des solutions

⋆ Une solution particulière est donnée par $x_0 = 21$ et $y_0 = 7$

⋆ Soient $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$ la solution générale de l'équation ; alors, nous avons :

$$3x - 8y = 3x_0 - 8y_0 \Longleftrightarrow 3\,(x - x_0) = 8\,(y - y_0)$$

⋆ La solution générale est donc donnée par :

$$x = x_0 + 8k \quad y = y_0 + 3k \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow x = 21 + 8k \quad y = 7 + 3k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Exercice 27 :

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système d'équation d'inconnue x $\left\{\begin{array}{l} x \equiv 4\,[7] \\ x \equiv 5\,[15] \end{array}\right.$

Nous avons :

$$\left\{\begin{array}{l} x \equiv 4\,[7] \\ x \equiv 5\,[15] \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4 + 7u \\ x = 5 + 15v \end{array}\right.$$

De $x = 4 + 7u$ et $x = 5 + 15v$, nous tirons :

$$4 + 7u = 5 + 15v \Longleftrightarrow 7u - 15v = 1$$

comme, $\text{pgcd}\,(7,15) = 1$, il existe donc des solutions.

⋆ Une solution particulière est donnée par $u_0 = -2$ et $v_0 = -1$

⋆ Soient $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$ la solution générale de l'équation ; alors, nous avons :

$$7u - 15v = 7u_0 - 15v_0 \Longleftrightarrow 7\,(u - u_0) = 15\,(v - v_0)$$

⋆ La solution générale est donc donnée par :

$$u = u_0 + 15k \quad v = v_0 + 7k \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow u = -2 + 15k \quad v = -1 + 7k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

D'où on trouve $x = -10 + 105k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, c'est à dire $x \equiv 95\,[105]$

Exercice 28 :

Deux entiers naturels a et b s'écrivent dans le système de numération de base n :

$$a = \overline{(2310)}_n \qquad b = \overline{(252)}_n$$

On appelle $d = \text{pgcd}\,(a,b)$

1. (a) *Démontrer que $2n + 1$ divise a et b*

Premièrement, il faut ré-écrire a et b :

— $a = n + 3n^2 + 2n^3 = n\,(2n+1)\,(n+1)$ *(factorisation classique)*

— $b = 2 + 5n + 2n^2 = (2n+1)\,(n+2)$

D'après les factorisations ci-dessus, il est donc clair que $2n + 1$ divise a et b

(b) *Démontrer que, si n est pair, alors $d = \text{pgcd}\,(a,b) = 2\,(2n+1)$, et que, si n est impair, alors $d = \text{pgcd}\,(a,b) = 2n + 1$*

Tout d'abord, $2n + 1$ divise d.

— Supposons n pair, c'est à dire que $\dfrac{n}{2}$ est un entier. Alors,

$$a = n(2n+1)(n+1) = 2 \times \frac{n}{2}(2n+1)(n+1) = [2(2n+1)]\frac{n}{2}(n+1)$$
$$b = (2n+1)(n+2) = (2n+1) \times 2 \times \left(\frac{n}{2}+1\right) = [2(2n+1)]\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

Pour montrer que $d = \text{pgcd}(a,b) = 2(2n+1)$ il faut montrer que $\dfrac{n}{2}(n+1)$ et $\left(\dfrac{n}{2}+1\right)$ sont premiers entre eux, ou, d'après l'identité de Bezout, trouver A et B tels que

$$A \times \frac{n}{2}(n+1) + B \times \left(\frac{n}{2}+1\right) = 1$$

En choisissant $A = 1$ et $B = 1-n$, nous avons :

$$\frac{n}{2}(n+1) + (1-n)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + \frac{n}{2} + 1 - \frac{n^2}{2} - n = 1$$

Nous avons donc bien $d = \text{pgcd}(a,b) = 2(2n+1)$

— Supposons n impair. Alors,

$$a = n(2n+1)(n+1) = [(2n+1)]\,n(n+1)$$
$$b = (2n+1)(n+2) = [(2n+1)](n+2)$$

Pour montrer que $d = \text{pgcd}(a,b) = (2n+1)$ il faut montrer que $n(n+1)$ et $(n+2)$ sont premiers entre eux.
Remarquons que si n est pair, $n(n+1)$ et $n+2$ sont pairs et ne sont pas premiers entre eux.
Nous avons $\text{pgcd}(n+1, n+2) = 1$. Si nous montrons que $\text{pgcd}(n, n+2) = 1$, par les résultats sur le produit, nous avons $\text{pgcd}(n(n+1), n+2) = 1$
Soit donc d un diviseur commun à $n+2$ et n . Alors, $n = kd$ et $n+2 = k'd$. n étant impair, $n+2$ l'est aussi, et donc k, k' et d sont aussi impair.
d, divisant n et $n+2$ divise aussi $n+2-n = 2$. La seule valeur possible est donc 1, et nous en déduisons que $\text{pgcd}(n, n+2) = 1$, et donc, que si n est impair, $\text{pgcd}(a,b) = 2n+1$

2. *On suppose que $n = 6$. Résoudre alors dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation diophantienne $ax + by = -26$*

Si $n = 6$, alors n est pair et donc le pgcd de a et b est $\text{pgcd}(a,b) = 26$.
Pour $n = 6$, l'équation $ax + by = -26$ devient : $21x + 4y = -1$ qui est une équation diophantienne classique dont une solution particulière est donnée par $x_0 = -1$ et $y_0 = 5$. La solution générale est donc donnée par :

$$\begin{cases} x = -1 + 4k \\ y = 5 + 21k \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

Exercice 29 :

Un exercice d'arithmétique et de codage

1. (a) *Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $7u - 13v = 1$*

Premièrement, comme 7 et 13 sont premiers entre eux, d'après l'identité de Bachet-Bezout, cette équation admet des solutions. Une solution particulière de cette équation est bien entendue donnée par $(u_0, v_0) = (2, 1)$
Même si ceci n'est pas demandé, cherchons toutes les solutions de cette équation.

▷ Soit $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ la solution générale de l'équation ; alors, nous avons :

$$7u - 13v = 7u_0 - 13v_0 \Longleftrightarrow 7(u - u_0) = 13(v - v_0)$$

Nous avons 7 qui divise le produit $13(v - v_0)$, et comme 7 est premier avec 13, d'après le lemme de Gauss, 7 divise $v - v_0$; donc $v - v_0 = 7k$

▷ En remplaçant $v - v_0$ par sa valeur trouvée, nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{rl} 7(u-u_0) = & 13(v-v_0) \\ = & 13 \times 7k \end{array}\right. \iff u - u_0 = 13k$$

▷ La solution générale est donc donnée par :

$$\boxed{u = 2 + 13k \quad v = 1 + 7k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$$

(b) *Déterminer tous les couples (a, k) d'entiers relatifs tels que $14a - 26k = 4$*

▷ Remarquons, sans perdre de généralité, que l'équation $14a - 26k = 4$ est équivalente à $7a - 13k = 2$. Donc, pour trouver des solutions particulières, il suffit de multiplier les solutions particulières de $7u - 13v = l$ trouvées juste auparavant par 2 pour les avoir. Donc, nous avons comme solutions pariculières :

$$a_0 = 4 \qquad k_0 = 2$$

▷ Pour trouver la solution générale, l'algorithme est le même que précédemment.
Soit $(a, k) \in \mathbb{Z}^2$ la solution générale de l'équation ; alors, nous avons :

$$7a - 13k = 7a_0 - 13k_0 \iff 7(a - a_0) = 13(k - k_0)$$

Nous avons 7 qui divise le produit $13(k - k_0)$, et comme 7 est premier avec 13, d'après le lemme de Gauss, 7 divise $k - k_0$; donc $k - k_0 = 7z$
En remplaçant $k - k_0$ par sa valeur trouvée, nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{rl} 7(a-a_0) = & 13(k-k_0) \\ = & 13 \times 7z \end{array}\right. \iff a - a_0 = 13z$$

▷ La solution générale est donc donnée par :

$$\boxed{a = 4 + 13z \quad k = 2 + 7z \text{ avec } z \in \mathbb{Z}}$$

Il faut absolument remarquer l'analogie des solutions ; la différence se faisant uniquement sur les valeurs particulières

2. *On considère deux entiers naturels a et b. Pour tout entier n, on note $\rho(n)$ le reste 1e la division euclidienne de $an + b$ par 26.*
On décide de coder un message, en procédant comme suit :
— *À chaque lettre de l'alphabet on associe un entier compris entre 0 et 25 (A est numéroté 0, B numéroté 1... etc ...)*
— *Pour chaque lettre α du message, on détermine l'entier n associé puis on calcule $\rho(n)$.*
— *La lettre α est alors codée par la lettre associée à $\rho(n)$.*
Dans cette question, on ne connaît pas les entiers a et b, mais on sait que la lettre F est codée par la lettre K et la lettre T est codée par la lettre O.

(a) *Montrer que les entiers a et b sont tels que $5a + b \equiv 10\,[26]$ et $19a + b \equiv 14\,[26]$*

En faisant un tableau de correspondances, si la lettre F est codée par la lettre K, au nombre 5 associé à F, correspond le nombre $\rho(5) = 10$ correspondant à K. Nous avons alors une première équation :

$$a \times 5 + b \equiv 10\,[26]$$

De même, si la lettre T est codée par la lettre 0, au nombre 19 associé à T, correspond le nombre $\rho(19) = 14$ correspondant à O. Nous avons donc le·système d'équation :

$$\begin{array}{l} 5a + b \equiv 10\,[26] \\ 19a + b \equiv 14\,[26] \end{array}$$

(b) *En déduire qu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $14a - 26k = 4$*

Par compatibilité de l'addition avec la relation de congruence, nous avons :

$$(19a + b) - (5a + b) \equiv 4\,[26]$$

C'est à dire $14a \equiv 4\,[26]$. Attention à ne pas faire l'erreur de simplifier, car 14, 4 et 26 ont pour pgcd 2

Il faut donc réécrire la congruence. Nous avons donc : $14a = 4 + 26k$ où $k \in \mathbb{Z}$

(c) *Déterminer tous les couples d'entiers (a, b), avec $0 \leqslant a \leqslant 25$ et $0 \leqslant b \leqslant 25$,tels que :*

$$\begin{array}{l} 5a + b \equiv 10\,[26] \\ 19a + b \equiv 14\,[26] \end{array}$$

D'après la question précédente, il faut donc commencer à résoudre $14a = 4+26k$ ou, $14a-26k = 4$ ou, ce qui est équivalent, $7a - 13k = 2$; dans des questions précédentes, nous avons trouvé :

$$a = 4 + 13z \qquad k = 2 + 7z \text{ avec } z \in \mathbb{Z}$$

C'est à dire $a \equiv 4\,[13]$. Les entiers a compris entre 0 et 25 vérifiant $a \equiv 4\,[13]$ sont donc 4 et 17

De $b \equiv 10 - 5a\,[26]$, nous tirons les couples d'entiers (a, b) où b compris entre 0 et 25 :

$$\boxed{(4, 16)\,(17, 3)}$$

3. *On suppose que $a = 17$ et $b = 3$.*

(a) *Coder le message « GAUSS »*

Il faut d'abord chercher les correspondance des lettres :

G	A	U	S
6	0	20	18

Puis rechercher les différents correspondances en fonction de la transformation proposée

$$\begin{array}{rcllcl} 6 & \longmapsto & 17 \times 6 + 3 = 105 & \equiv & 1\,[26] & \longmapsto & B \\ 0 & \longmapsto & 17 \times 0 + 3 = 3 & \equiv & 3\,[26] & \longmapsto & D \\ 20 & \longmapsto & 17 \times 20 + 3 = 343 & \equiv & 5\,[26] & \longmapsto & F \\ 18 & \longmapsto & 17 \times 18 + 3 = 309 & \equiv & 23\,[26] & \longmapsto & X \end{array}$$

Ainsi, « GAUSS »est noté « BDFXX »

(b) *Soient n et p deux entiers naturels quelconques. Montrer que, si $\rho(n) = \rho(p)$, alors $17(n - p) \equiv 0\,[26]$*

Par hypothèse, nous avons $\rho(n) = \rho(p)$, ce qui signifie donc que $17n + 3 \equiv 17p + 3\,[26]$, ce qui autrement traduit donne :

$$17n + 3 = 17p + 3 + 26k \Longleftrightarrow 17n - 17p \equiv 0\,[26] \Longleftrightarrow 17(n - p) == 0\,[26]$$

(c) *En déduire que deux lettres distinctes de l'alphabet sont codées par deux autres lettres distinctes*

Il faut en fait montrer que si $\rho(n) = \rho(p)$ alors, $n = p$ où, et c'est important, $0 \leqslant n \leqslant 25$ et $0 \leqslant p \leqslant 25$. Or, 17 est premier avec 26 et est donc inversible dans $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$, et son inverse est un nombre u tel que $17u \equiv 1\,[26]$; par calcul, on trouve $3 \times 17 = 51 \equiv -1\,[26]$, et donc $(3 \times 17)^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1\,[26]$, et donc l'inverse de 17 est donné par $u = 9 \times 17 = 153 \equiv 23\,[26]$

Je multiplie donc chaque membre de l'équation $17(n - p) \equiv 0\,[26]$ par 23, et j'obtiens :

$$\begin{array}{rl} 17(n - p) \equiv & 0\,[26] \\ 23 \times 17(n - p) \equiv & 0\,[26] \\ (n - p) \equiv & 0\,[26] \end{array}$$

D'où $n \equiv p\,[26]$

4. *On suppose toujours que $a = 17$ et $b = 3$*

   (a) *Soit n un entier naturel. Calculer le reste de la division euclidienne de $23\rho(n) + 9 - n$ par 26*

   D'après l'énoncé, nous avons $17n + 3 \equiv \rho(n)\,[26]$, et donc, en utilisant la question précédente,

$$23 \times (17n + 3) \equiv 23 \times \rho(n)\,[26]$$

   Ce qui est équivalent à :

$$n + 69 \equiv 23 \times \rho(n)\,[26]$$

   Comme $69 \equiv 17\,[26]$, nous avons : $n + 17 \equiv 23 \times \rho(n)\,[26]$, de telle sorte que :

$$23 \times \rho(n) - 17 - n \equiv 0\,[26] \Longleftrightarrow 23 \times \rho(n) + 9 - n \equiv 0\,[26]$$

   (b) *En déduire un procédé de décodage*

   L'objet de la question est de retrouver n connaissant $\rho(n)$. Or, dans la question précédente, nous avons trouvé que $23 \times \rho(n) + 9 - n \equiv 0\,[26]$, c'est à dire que $n \equiv 23 \times \rho(n) + 9\,[26]$; c'est le procédé de décodage!!

   (c) *En déduire le décodage du message « KTGZDO »*

   On recommence le même algorithme que dans la question 1 : Il faut d'abord chercher les correspondance des lettres :

K	T	G	Z	D	O
10	19	6	25	3	14

   Puis on recherche les différents correspondances en fonction de la transformation proposée

$$\begin{array}{rclcll}
10 & \longmapsto & 23 \times 10 + 9 = 239 & \equiv & 5\,[26] & \longmapsto & F \\
19 & \longmapsto & 23 \times 19 + 9 = 446 & \equiv & 4\,[26] & \longmapsto & E \\
6 & \longmapsto & 23 \times 6 + 9 = 147 & \equiv & 17\,[26] & \longmapsto & R \\
25 & \longmapsto & 23 \times 25 + 9 = 584 & \equiv & 12\,[26] & \longmapsto & M \\
3 & \longmapsto & 23 \times 3 + 9 = 78 & \equiv & 0\,[26] & \longmapsto & A \\
14 & \longmapsto & 23 \times 14 + 9 = 331 & \equiv & 19\,[26] & \longmapsto & T
\end{array}$$

   Ainsi, « KTGZDO »code le mot « FERMAT »

Allons plus loin

1. Pourquoi ne pas avoir pris $a = 4$ et $b = 16$. Très simplement parce qu'à 2 lettres différentes du message peu correspondre la même lettre du code ; par exemple :

$$\begin{array}{rclcll}
A = 0 & \longmapsto & 4 \times 0 + 16 = 16 & \equiv & 16\,[26] & \longmapsto & Q \\
N = 13 & \longmapsto & 4 \times 13 + 16 = 68 & \equiv & 16\,[26] & \longmapsto & Q \\
F = 5 & \longmapsto & 4 \times 5 + 16 = 36 & \equiv & 10\,[26] & \longmapsto & K \\
S = 18 & \longmapsto & 4 \times 18 + 16 = 88 & \equiv & 10\,[26] & \longmapsto & K
\end{array}$$

   Ainsi, à un code correspond 2 lettres, ce qui rend impossible le décodage

2. La clef réside dans le fait que la fonction ρ doit être bijective :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \rho : \mathbb{Z}/26\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/26\mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & \rho(n) = an + b \end{array}\right.$$

3. <u>Que faut-il pour que ρ soit bijective ?</u>

   Pour que ρ soit bijective, il faut que a soit premier avec 26, et donc inversible dans $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$

   ▷ ρ est injective, puisque :

$$\rho(n) = \rho(p) \Longleftrightarrow an + b = ap + b \Longleftrightarrow an = ap \Longleftrightarrow a^{-1}(an) = a^{-1}(ap) \Longleftrightarrow n = p$$

   ▷ ρ est surjective, puisque si $p \in \mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$, alors :

$$an + b = p \Longleftrightarrow an = p - b \Longleftrightarrow n = a^{-1}(p - b)$$

   Et $\rho\left(a^{-1}(p - b)\right) = p$.

- ▷ Donc, si a est premier avec 26, $\rho(n) = an + b$ est bijective dans $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$; et nous avons une fonction de décodage donnée par $\Delta(n) = a^{-1}(n - b)$
- ▷ C'est le problème plus général des fonctions ρ :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \rho : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ x & \longmapsto & \rho(x) = ax + b \end{array} \right.$$

  Pour que ρ soit bijective, il faut donc que $a \wedge n = 1$
- ▷ Si $a = 4$, alors $4 \wedge 26 = 2$; 4 et 26 ne sont pas premiers entre eux.

4. Historiquement, c'est le modèle de codage de Jules César. Jules n'utilisait qu'un seul code : $a = 1$ et $b = 3$. Il aurait dû, par prudence, modifier ses a et ses b en prenant simplement a tel que a soit premier avec 26.

5.6.4 Exercices sur le ppcm

Exercice 31 :

Résoudre, dans $\mathbb{Z}$ les équations :

1. $\left\{ \begin{array}{l} x \equiv 3\,[11] \\ x \equiv 7\,[15] \end{array} \right.$

   Comme 11 et 15 sont premier entre eux, d'après le lemme chinois 5.4.5, il existe une unique solution modulo 165.

   Recherchons cette solution
   - Tout d'abord, nous avons $x = 3 + 11u$ et $x = 7 + 15v$, d'où nous tirons $3 + 11u = 7 + 15v \Longleftrightarrow 11u - 15v = 4$
   - Les solutions particulières de cette équation sont : $u_0 = -16$ et $v_0 = -12$
   - Si u et v sont des solutions générales de l'équation, nous avons :

   $$11u - 15v = 11u_0 - 15v_0 \Longleftrightarrow 11(u - u_0) = 15(v - v_0)$$

   D'où nous trouvons comme solutions :

   $$u - u_0 = 15k \text{ et } v - v_0 = 11k \Longleftrightarrow u = -16 + 15k \text{ et } v = -12 + 11k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

   D'où nous obtenons $x = 3 + 11 \times (-16 + 15k) = 3 - 176 + 165k = -173 + 165k$, c'est à dire que $x \equiv -173\,[165] \Longleftrightarrow x \equiv 157\,[165]$

2. $\left\{ \begin{array}{l} x \equiv 4\,[10] \\ x \equiv 8\,[14] \end{array} \right.$

Cette fois ci, c'est bien différent puisque 10 et 14 ne sont pas premiers entre eux.
- Tout d'abord, nous avons $x = 4 + 10u$ et $x = 8 + 14v$, d'où nous tirons $4 + 10u = 8 + 14v \Longleftrightarrow 10u - 14v = 4 \Longleftrightarrow 5u - 7v = 2$. Comme 5 et 7 sont premiers entre eux, cette équation a des solutions.
- Les solutions particulières de cette équation sont : $u_0 = 6$ et $v_0 = 4$
- Si u et v sont des solutions générales de l'équation, nous avons :

$$5u - 7v = 5u_0 - 7v_0 \Longleftrightarrow 5(u - u_0) = 7(v - v_0)$$

D'où nous trouvons comme solutions :

$$u - u_0 = 7k \text{ et } v - v_0 = 7k \Longleftrightarrow u = 6 + 7k \text{ et } v = 4 + 5k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

D'où nous obtenons $x = 4 + 10 \times (6 + 7k) = 64 + 70k$, c'est à dire que $x \equiv 64\,[70]$

Exercice 32 :

Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$. Donner $\operatorname{pgcd}(a+b, \operatorname{ppcm}(a,b))$

On appelle $d = \operatorname{pgcd}(a,b)$

Alors, il existe $a' \in \mathbb{Z}$ et $b' \in \mathbb{Z}$ tels que $a = da'$ et $b = db'$ et $\operatorname{pgcd}(a',b') = 1$

Donc, d'après 5.4.2 page 169, $\operatorname{ppcm}(a,b) = \operatorname{ppcm}(da',db') = d \times \operatorname{ppcm}(a',b') = da'b'$ puisque $a' \wedge b' = 1$.

Donc,

$$\begin{aligned} \operatorname{pgcd}(a+b, \operatorname{ppcm}(a,b)) = & \operatorname{pgcd}(da'+db', da'b') \\ = & d \times \operatorname{pgcd}(a'+b', a'b') \end{aligned}$$

D'après les résultats sur le pgcd vu en exercices, comme $\operatorname{pgcd}(a',b') = 1$, $\operatorname{pgcd}(a'+b', a'b') = 1$, et donc :

$$\operatorname{pgcd}(a+b, \operatorname{ppcm}(a,b)) = d$$

Exercice 33 :

Déterminer l'ensemble des couples (x,y) d'entiers naturels tels que :

$$\begin{cases} \delta = 60 \\ \mu = 3600 \end{cases}$$

Où $\delta = \operatorname{pgcd}(x,y)$ et $\mu = \operatorname{pppcm}(x,y)$

Soient donc $x' \in \mathbb{N}$ et $y' \in \mathbb{N}$ tels que $x = \delta x'$ et $y = \delta y'$ avec $x' \wedge y' = 1$.

Nous avons aussi $\mu \times \delta = xy = \delta^2 x'y' \iff \mu = \delta x'y'$.

Nous avons donc :

$$\begin{cases} \delta = 60 \\ \mu = 3600 \end{cases} \iff \begin{cases} \delta = 60 \\ \delta x'y' = 3600 \end{cases} \iff \begin{cases} \delta = 60 \\ x'y' = 60 \end{cases}$$

x' et y' apparaissent comme les diviseurs de 60. Les diviseurs de 60 sont : $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$.

Il faut maintenant choisir x' et y' tels que $x' \wedge y' = 1$.

Nous obtenons le tableau suivant :

x'	y'	x	y
1	60	60	3600
3	20	180	1200
4	15	240	900
5	12	300	720

5.6.5 Les théorèmes de Fermat et de Wilson

Exercice 34 :

Une autre démonstration du petit théorème de Fermat

1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 < k < n$.*

   (a) *Montrer que si n est premier, alors n divise C_n^k*

   Par définition de l'analyse combinatoire :

   $$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n}{k} \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,[(n-1)-(k-1)]!} = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$$

   En fait, nous avons donc : $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$, et donc n divise kC_n^k. n étant un nombre premier, est premier avec k et, d'après le lemme de Gauss, divise C_n^k.

   Ainsi, si n est un nombre premier, pour tout k entier tel que $0 < k < n$, n divise C_n^k.

   (b) *Démontrer que si n est premier, alors n divise $2^n - 2$*

   Le résultat précédent peut aussi s'écrire :

   Si n est un nombre premier, pour tout k entier tel que $0 < k < n$, alors $C_n^k \equiv 0\,[n]$

Nous avons :

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+1)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \\ &= \mathrm{C}_n^0 + \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_n^n \\ &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{C}_n^k \end{aligned}$$

Or, pour $0 < k < n$, nous avons $\mathrm{C}_n^k \equiv 0\,[n]$ et donc $\sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{C}_n^k \equiv 0\,[n]$.

Nous en concluons donc que $2^n \equiv 2\,[n] \iff 2^n - 2 \equiv 0\,[n]$, c'est à dire $2^n - 2$ divisible par n.

2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, premier et $a \in \mathbb{N}$. Montrer que $a^n - a$ est divisible par n*

   Nous allons faire cette démonstration par récurrence sur a
   - ▷ C'est trivialement vrai pour $a = 0$
   - ▷ Supposons que $a^n - a$ soit divisible par n
     C'est à dire que, écrit autrement, $a^n - a \equiv 0\,[n] \iff a^n \equiv a\,[n]$
   - ▷ Démontrons que $(a+1)^n - (a+1)$ est divisible par n

$$\begin{aligned} (a+1)^n &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k \\ &= \mathrm{C}_n^0 a^0 + \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{C}_n^k a^k + \mathrm{C}_n^n a^n \\ &= 1 + a^n + \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{C}_n^k a^k \end{aligned}$$

   n étant premier, pour $0 < k < n$, nous avons $\mathrm{C}_n^k \equiv 0\,[n]$ et donc $\sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{C}_n^k a^k \equiv 0\,[n]$.

   Nous en déduisons donc que $(a+1)^n \equiv 1 + a^n\,[n]$. Par hypothèse de récurrence, $a^n \equiv a\,[n]$, donc, par transitivité de la relation de congruence, $(a+1)^n \equiv 1 + a\,[n]$.
   Ce que nous voulions.

   Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, premier et $a \in \mathbb{N}$, $a^n - a$ est divisible par n

Exercice 35 :

La fonction indicatrice d'Euler

1. *Calculer $\varphi(8)$ et $\varphi(78)$*
   - ▷ Calcul de $\varphi(8)$
     Nous avons $8 = 2^3$; les nombres premiers avec 8 sont donc $\{1, 3, 5, 7\}$ et donc $\varphi(8) = 4$
   - ▷ Calcul de $\varphi(78)$
     Ici, nous avons $78 = 2 \times 3 \times 13$ et les nombres qui sont premiers avec 78 sont ceux dont la décomposition en un produit de facteurs premiers ne comportent ni 2, ni 3 ni 13. Ce sont donc :

$$\{1, 5, 7, 11, 17, 19, 2325, 29, 31, 35, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 55, 59, 61, 67, 71, 73, 77\}$$

     et donc $\varphi(78) = 24$

2. *Démontrer que p est premier si et seulement si $\varphi(p) = p - 1$*
   - ▷ Supposons p premier
     Alors, pour tout k tel que $1 \leqslant k \leqslant p-1$, $p \wedge k = 1$ et donc $\varphi(p) = p - 1$

▷ Réciproquement, supposons $\varphi(p) = p - 1$
Comme $\varphi(p) \geqslant 1$, nous avons $p \geqslant 2$
Supposons p non premier ; alors, il existe k tel que $2 \leqslant k \leqslant p-1$ tel que k divise p, c'est à dire que $p = kp'$ et donc $k = p \wedge k$, et donc $\varphi(p) < p - 1$.
Nous aboutissons donc à une contradiction, et donc p est premier

3. *Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 2*

(a) *Montrer que $k \wedge p^\alpha \neq 1 \iff p \mid k$*

▷ Supposons que p divise k
Comme p divise p^α, p divise le pgcd de p^α et k et donc $k \wedge p^\alpha \neq 1$

▷ Réciproquement, supposons que $k \wedge p^\alpha \neq 1$
Soit $d = k \wedge p^\alpha$, ce qui veut dire que $d \mid p^\alpha$; p étant un nombre premier, d est du type p^β où $\beta \leqslant \alpha$.
Nous avons $k = dk' = p^\beta k' = p \times \left(p^{\beta-1}k'\right)$, ce qui signifie que $p \mid k$

(b) *Démontrer qu'il y a $p^{\alpha-1}$ multiples de p entre 0 et $p^\alpha - 1$*

Soit u un multiple de p tel que $0 \leqslant u \leqslant p^\alpha - 1$; alors $u = kp$ avec $0 \leqslant k \leqslant p^{\alpha-1} - 1$
En effet, si $k > p^{\alpha-1} - 1$, c'est à dire $k \geqslant p^{\alpha-1}$, alors $kp \geqslant p^\alpha > p^\alpha - 1$; il y a donc contradiction
Il y a donc $p^{\alpha-1}$ multiples de p entre 0 et $p^\alpha - 1$

(c) *En déduire $\varphi(p^\alpha)$*

Une autre façon d'écrire la proposition $k \wedge p^\alpha \neq 1 \iff p \mid k$ est de l'écrire :

$$k \wedge p^\alpha = 1 \iff k \text{ n'est pas multiple de } p$$

Ainsi, $\varphi(p^\alpha)$ compte le nombre d'éléments qui ne sont pas multiples de p compris entre 1 et $p^\alpha - 1$; il y en a donc :

$$(p^\alpha - 1) - \left(p^{\alpha-1} - 1\right) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$$

Donc, si p est premier, $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$

Remarque :Retour à la question 1.
Nous avons $\varphi(8) = \varphi\left(2^3\right) = 2^3 - 2^2 = 4$

4. *Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $m \wedge n = 1$. On appelle $\mathcal{U}(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})$, les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$, tout comme on appelle $\mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\mathcal{U}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$, ceux de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.*

Nous confondons, volontairement, le nombre x et sa classe $\dot{x}$. Ceci ne pénalise en rien la généralité des démonstrations. Lorsque cela sera nécessaire, nous noterons $\hat{x}_{[n]}$ la classe de x modulo n

(a) *Pour $x \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})$, on appelle r le reste de la division de x par m. Montrer que $r \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$.*

Comme $x \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})$, nous avons $x \wedge mn = 1$. Effectuons la division euclidienne de x par m
Nous avons alors : $x = am + r$ où $0 \leqslant r \leqslant m - 1$
Nous allons montrer que r est premier avec m.
Supposons le contraire, c'est à dire qu'il existe un entier $b \geqslant 2$ divisant à la fois m et r. Alors, b divise aussi x.
b divisant x, divisant aussi m, divise aussi mn, ce qui contredit le fait que x est premier avec mn.
Donc, r est premier, c'est à dire $r \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$

Il faut faire remarquer que si r est le reste de la division de x par m, alors $x \equiv r\,[m]$

(b) *Soit :*

$$\begin{cases} f : \mathcal{U}(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}) & \longrightarrow \quad \mathcal{U}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times \mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\ \qquad\qquad x & \longmapsto \quad f(x) = (r, s) = \left(\hat{x}_{[m]}, \hat{x}_{[n]}\right) \end{cases}$$

Montrer que f est un isomorphisme de groupe multiplicatif.

- ▷ Nous allons montrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$, $f(x)$ n'a qu'une seule valeur bien définie
  Soient $x \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})$ et $y \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})$ tels que $x \equiv y\,[mn]$ *(c'est à dire que $x = y$ dans $\mathcal{U}(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})$)*
  Alors, nous avons $x \equiv y\,[mn] \iff x - y = k \times mn$ avec $k \in \mathbb{Z}$, et nous avons alors $x \equiv y\,[n]$ et $x \equiv y\,[m]$, c'est à dire $f(x) = f(y)$
- ▷ f est un morphisme de groupe
  Soient $x \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})$ et $y \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})$; alors :

$$f(xy) = \left(\widehat{xy}_{[m]}, \widehat{xy}_{[n]}\right) = \left(\hat{x}_{[m]}\hat{y}_{[m]}, \hat{x}_{[n]}\hat{y}_{[n]}\right) = \left(\hat{x}_{[m]}, \hat{x}_{[n]}\right) \times \left(\hat{y}_{[m]}, \hat{y}_{[n]}\right) = f(x)\,f(y)$$

  Et, pour finir, $f(1) = \left(\hat{1}, \hat{1}\right)$ qui est le neutre dans $\mathcal{U}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times \mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$
- ▷ f est injective
  Soient $x \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})$ et $y \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})$ tels que $f(x) = f(y)$, ce qui sous-entend que $\left(\hat{x}_{[m]}, \hat{x}_{[n]}\right) = \left(\hat{y}_{[m]}, \hat{y}_{[n]}\right)$.
  Nous avons donc $x \equiv y\,[m]$ et $x \equiv y\,[n]$, ce qui est équivalent à $x - y = km$ et $x - y = k'n$.
  Nous en déduisons donc que $km = k'n$, et comme $n \wedge m = 1$ n divise k ; il existe donc $\lambda \in \mathbb{Z}$ tels que $k = \lambda n$, et donc $x - y = \lambda(nm)$, c'est à dire $x \equiv y\,[mn]$; autrement dit, $x = y$ dans $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$, et donc $x = y$ dans $\mathcal{U}(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})$
  f est donc injective
- ▷ f est surjective
  Soit $\left(\hat{x}_{[m]}, \hat{y}_{[n]}\right) \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times \mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Existe-t-il $\lambda \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})$ tel que $f(\lambda) = \left(\hat{x}_{[m]}, \hat{y}_{[n]}\right)$?
  Si ce λ existe, alors, nous avons le système d'équation :

$$\begin{aligned} \lambda &\equiv x\,[m] \\ \lambda &\equiv y\,[n] \end{aligned}$$

  Comme m et n sont premiers, d'après le théorème chinois 5.4.5, il existe une seule solution à ce système, modulo mn
  Il existe donc $\lambda \in \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ tel que $f(\lambda) = \left(\hat{x}_{[m]}, \hat{x}_{[n]}\right)$
  Il reste maintenant à montrer que $\lambda \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})$, c'est à dire que λ est premier avec mn
  Supposons le contraire, c'est à dire que λ ne soit pas premier avec mn, c'est à dire $\lambda \wedge mn = d$ avec $d \geqslant 2$
  Soit t un entier premier qui divise d *(on peut avoir $t = d$ ou t qui qui est un diviseur premier de d)* ; alors, t divise λ et mn.
  t étant premier et divisant mn alors t divise m ou t divise n
  Supposons que t divise m.
  Comme $\lambda \equiv x\,[m]$, nous avons $\lambda - x = km \iff x = \lambda - km \iff x = t\lambda' - ktm'$, c'est à dire que t divise x, donc t est un diviseur commun à x et m, et il y a contradiction avec le fait que $x \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$, c'est à dire que $x \wedge m = 1$
  Donc, λ est premier avec mn et $\lambda \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})$

f est donc un isomorphisme de groupe

(c) *En déduire que si $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ sont tels que $m \wedge n = 1$, alors $\varphi(mn) = \varphi(m)\,\varphi(n)$*

Nous venons de montrer que, si m et n étaient premiers entre eux, $\mathcal{U}(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})$ étant en bijection avec $\mathcal{U}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times \mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$; donc :

$$\operatorname{Card} \mathcal{U}(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}) = \operatorname{Card}\ \left(\mathcal{U}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times \mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\right)$$

D'après les propriétés des produits cartésiens, $\operatorname{Card}\ \left(\mathcal{U}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times \mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\right) = \operatorname{Card} \mathcal{U}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \operatorname{Card} \mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.
Comme $\operatorname{Card} \mathcal{U}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \varphi(m)$, nous avons bien, si $m \wedge n = 1$, $\varphi(mn) = \varphi(m)\,\varphi(n)$

5. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\varphi(n)$ en fonction de la décomposition de n en un produit de facteurs premiers.*

- ▷ Tout d'abord, si $m_1, \cdots, m_k$ sont des entiers premiers dans leur ensemble, nous avons, d'après la question précédente, bien évidemment :

$$\varphi\left(\prod_{j=1}^{k} m_j\right) = \prod_{j=1}^{k} \varphi(m_j)$$

▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ dont la décomposition en un produits de facteurs premiers est donnée par :

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\varphi(n) &= \varphi\left(\prod_{j=1}^{k} p_j^{\alpha_j}\right) \\
&= \prod_{j=1}^{k} \varphi\left(p_j^{\alpha_j}\right) \\
&= \prod_{j=1}^{k} \left(p_j^{\alpha_j} - p_j^{\alpha_j - 1}\right) \\
&= \prod_{j=1}^{k} p_j^{\alpha_j}\left(1 - \frac{1}{p_j}\right) \\
&= \prod_{j=1}^{k} p_j^{\alpha_j} \prod_{j=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{p_j}\right) \\
&= n \prod_{j=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{p_j}\right)
\end{aligned}$$

Nous avons donc $\varphi(n) = n \prod_{j=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$

6. *Montrer que, pour $n \geqslant 3$, nous avons $\varphi(n)$ est un nombre pair*

Tout d'abord, remarquons qu'il est licite de prendre $n \geqslant 3$, puisque $\varphi(2) = 1$ et $\varphi(3) = 2$
Nous aurons besoin, pour cette question, des résultats suivants :

— Pour tout entier impair $x \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, x^n est un nombre impair [3]
— La différence de deux nombres impairs est un nombre pair

Soit $n \geqslant 3$ de décomposition en un produit de facteurs premiers suivante :

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} = \prod_{j=1}^{k} p_j^{\alpha_j}$$

Alors, $\varphi(n) = \prod_{j=1}^{k}\left(p_j^{\alpha_j} - p_j^{\alpha_j - 1}\right)$

▷ Supposons que, pour $j = 1, \cdots, k$, p_j soit un nombre premier impair.
Alors $p_j^{\alpha_j}$ et $p_j^{\alpha_j - 1}$ sont des nombres impairs ; donc, la différence $p_j^{\alpha_j} - p_j^{\alpha_j - 1}$ est un nombre pair, et donc le produit $\prod_{j=1}^{k}\left(p_j^{\alpha_j} - p_j^{\alpha_j - 1}\right)$ est un nombre pair.
On en conclue donc que, dans ce cas, $\varphi(n)$ est un nombre pair

▷ Supposons maintenant, qu'il existe j_0 entre 1 et k tel que p_{j_0} soit un entier premier pair. La seule possibilité que nous ayons est que $p_{j_0} = 2$. Nous avons alors, en réordonnant, $n = 2^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} = 2^{\alpha_1} \prod_{j=2}^{k} p_j^{\alpha_j}$
Alors, $\varphi(n) = \left(2^{\alpha_1} - 2^{\alpha_1 - 1}\right) \prod_{j=2}^{k}\left(p_j^{\alpha_j} - p_j^{\alpha_j - 1}\right)$.
Nous venons de montrer que $\prod_{j=2}^{k}\left(p_j^{\alpha_j} - p_j^{\alpha_j - 1}\right)$ était un nombre pair.
Nous avons 2^{α_1} et $2^{\alpha_1 - 1}$ qui sont des nombres pairs, et donc $\varphi(n)$ est bien un nombre pair

On vient de montrer que, pour $n \geqslant 3$, nous avons $\varphi(n)$ est un nombre pair

Exercice 36 :

Démontrer que, pour $n \geqslant 3$, $\varphi(n) \geqslant \dfrac{n \ln 2}{\ln n + \ln 2}$

3. Facile à démontrer, par le binôme de Newton

L'objet de cet exercice est de donner une évaluation de $\varphi(n)$ en fonction de n. En fait, nous ne donnerons qu'une minoration très large de $\varphi(n)$, peu signicative.
La seule chose que nous pourrions conclure c'est que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(n) = +\infty$
Soit $n \geqslant 3$ que nous écrivons par sa décomposition en un produit de facteurs premiers : $n = p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}$ où nous avons $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \cdots \leqslant p_k$
Ici, k désigne le nombre de facteurs premiers distincts qui entrent dans la décomposition de n.
Nous avons que $\varphi(n) = n \prod\limits_{j=1}^{k} \left(1 - \dfrac{1}{p_j}\right)$

- ▷ Etudions $\prod\limits_{j=1}^{k} \left(1 - \dfrac{1}{p_j}\right)$

  Nous avons, pour tout j tel que $1 \leqslant j \leqslant k$, $p_j \geqslant j+1$, et donc, $\dfrac{1}{p_j} \leqslant \dfrac{1}{j+1}$, soit $1 - \dfrac{1}{p_j} \geqslant 1 - \dfrac{1}{j+1}$, et donc, en passant au produit :

$$\prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right) \geqslant \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{j+1}\right)$$

  Nous avons, $1 - \dfrac{1}{j+1} = \dfrac{j}{j+1}$ et donc $\prod\limits_{j=1}^{k} \left(1 - \dfrac{1}{j+1}\right) = \prod\limits_{j=1}^{k} \left(\dfrac{j}{j+1}\right)$
  Maintenant, $\prod\limits_{j=1}^{k} \left(\dfrac{j}{j+1}\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{4} \times \cdots \times \dfrac{k-1}{k} \times \dfrac{k}{k+1} = \dfrac{1}{k+1}$
  Donc, $\prod\limits_{j=1}^{k} \left(1 - \dfrac{1}{p_j}\right) \geqslant \dfrac{1}{k+1}$ et donc $\varphi(n) \geqslant \dfrac{n}{k+1}$
- ▷ Majorons k en fonction de n
  Les p_j pour $1 \leqslant j \leqslant k$ étant premiers, nous avons $p_j \geqslant 2$, et donc :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k} \geqslant 2^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_k}$$

  Comme pour chaque j, $\alpha_j \geqslant 1$, nous avons $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k \geqslant k$ et donc $n \geqslant 2^k$ et donc, $k \leqslant \dfrac{\ln n}{\ln 2}$ [4]
  Donc, $k + 1 \leqslant \dfrac{\ln n}{\ln 2} + 1 = \dfrac{\ln n + \ln 2}{\ln 2}$; et donc $\dfrac{1}{k+1} \geqslant \dfrac{\ln 2}{\ln n + \ln 2}$

De $\varphi(n) \geqslant \dfrac{n}{k+1}$, on trouve bien $\varphi(n) \geqslant \dfrac{n \ln 2}{\ln n + \ln 2}$

Exercice 37 :

On appelle $\mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On sait que $(\mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), \times)$ est un groupe commutatif de cardinal $\varphi(n)$. Montrer que pour tout $a \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, nous avons $a^{\varphi(n)} = 1$

Pour ce faire, nous allons utiliser une méthode classique.
Soit une application f définie par :

$$\begin{cases} f : \mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\ \qquad\qquad x & \longmapsto & f(x) = ax \end{cases}$$

1. Nous allons montrer que f est bijective
   - ▷ f est injective
     Soient $x \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ et $y \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ tels que $f(x) = f(y)$.
     Nous avons alors $ax = ay$; en composannt à gauche par a^{-1}, nous avons $a^{-1}(ax) = a^{-1}(ay)$; en utilisant l'associativité, nous avons $\left(a^{-1}a\right)x = \left(a^{-1}a\right)y$, c'est à dire $x = y$
     f est donc injective.

4. Il faut se rappeler que k est le nombre de facteurs premiers apparaissant dans la décomposition de n. Cette inégalité donne donc une borne pour le nombre de facteurs premiers apparaisant dans la décomposion de n. Cette borne supérieure est donc $\dfrac{\ln n}{\ln 2}$

- f est surjective
  Soit $z \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$; montrons qu'il existe $x \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ tel que $f(x) = z$
  Si cet élément $x \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ existe, alors z est tel que $ax = z$, et en composant à gauche par a^{-1}, nous obtenons $x = a^{-1}z$
  f est donc surjective

2. f étant bijective, nous avons $f(\mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})) = \mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, et donc :
$$\prod_{x\in\mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})} f(x) = \prod_{x\in\mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})} x \Longleftrightarrow \prod_{x\in\mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})} ax = \prod_{x\in\mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})} x$$
Or, $\displaystyle\prod_{x\in\mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})} ax = a^{\varphi(n)}\left(\prod_{x\in\mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})} x\right)$, ce qui nous donne :
$$a^{\varphi(n)}\left(\prod_{x\in\mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})} x\right) = \prod_{x\in\mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})} x$$
Et donc, $a^{\varphi(n)} = 1$ par régularité dans un groupe.

Exercice 38 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; en considérant les fractions $\left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{k}{n}, \cdots, \frac{n}{n}\right\}$, montrer que :
$$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

Comme proposé, nous considérons les n fractions distinctes :
$$\left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{k}{n}, \cdots, \frac{n}{n}\right\}$$
On considère les fractions $\frac{a}{d}$ irréductibles associées aux fractions $\frac{k}{n}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$, c'est à dire $\frac{a}{d} = \frac{k}{n}$ et $a \wedge d = 1$.
Pour chaque d divisant n, il y a $\varphi(d)$ fractions du type $\frac{a}{d}$:
$$\frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}, \cdots, \frac{a_{\varphi(d)}}{d} \text{ avec } a_i \wedge d = 1 \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant \varphi(d)$$
En appelant $A_d = \left\{\frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}, \cdots, \frac{a_{\varphi(d)}}{d}\right\}$, les A_d où $d \mid n$ forment une partition de $\left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{k}{n}, \cdots, \frac{n}{n}\right\}$, et donc, comme Card $A_d = \varphi(d)$, nous avons donc : $n = \displaystyle\sum_{d|n} \varphi(d)$

Exercice 39 :

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ Montrer que si $(n-1)$! est un multiple de n, alors, n n'est pas un nombre premier ; la réciproque est-elle vraie ?

1. Le théorème de Wilson 5.5.8 nous assure que si l'entier n est premier, alors $(n-1)! \equiv n - 1\,[n]$, c'est à dire que le nombre $(n-1)!$ n'est pas un multiple de n.
   L'énoncé proposé est donc la contraposée du théorème de Wilson 5.5.8
2. **Réciproquement**, si n n'est pas un nombre premier, alors, n possède des diseurs propres, c'est à dire qu'il existe k et j avec $1 < k < j < n$ tels que $n = k \times j$ Or,
$$\begin{aligned}(n-1)! = \;& 2 \times 3 \times \cdots \times k \times \cdots \times j \cdots \times (n-1)\\ =\;& (k \times j)(2 \times \cdots \times (k-1) \times (k+1) \times \cdots \times (j-1) \times (j+1) \times \cdots \times (n-1))\\ =\;& n \times (2 \times \cdots \times (k-1) \times (k+1) \times \cdots \times (j-1) \times (j+1) \times \cdots \times (n-1))\end{aligned}$$
   n divise donc $(n-1)!$, ou encore, $(n-1)!$ est un multiple de n

Chapitre 6

Matrices, déterminants

Ce chapitre est conçu pour être une introduction au calcul matriciel ; par exemple, nous ne parlerons que de matrices à coefficients réels. Nous retrouverons les matrices dans les espaces vectoriels, en probabilité et, bien sûr, dans les mathématiques appliquées

6.1 Algèbre des matrices ; généralités, vocabulaire

6.1.1 Définition

Un ensemble de mn nombres réels rangés dans un tableau rectangulaire de m lignes et n colonnes est appelé matrice

Exemple 1 :

Exemples de matrices

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice rectangulaire à 3 lignes et 2 colonnes
2. $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ est une **matrice carrée** à 3 lignes et 3 colonnes

Remarque 1 :

On écrit le plus souvent : $A = \left((a_{i,j})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}} \right)$ et les $(a_{i,j})$ sont les **coefficients de la matrice** ; le premier indice désigne la ligne, et le second indice, la colonne

6.1.2 Vocabulaire

1. On dit qu'une matrice rectangulaire à m lignes et n colonnes est une matrice d'ordre $m \times n$. L'ensemble des matrices rectangulaires à m lignes et n colonnes est à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$
2. Si $m = n$, autrement dit, s'il y a autant de lignes que de colonnes, on dit que la matrice est carrée. L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
3. Si la matrice est de la forme $1 \times n$, on dit que c'est un vecteur-ligne
4. Si la matrice est de la forme $n \times 1$, on dit que c'est un vecteur-colonne

Exemple 2 :

- ▹ Exemple de Vecteur-ligne : $\begin{pmatrix} x & \cdots & \cdots & y & z \end{pmatrix}$
- — Exemple de vecteur-colonne : $\begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ \vdots \\ b \\ c \end{pmatrix}$
- — Comme cas particulier, un nombre *(encore appelé* ***scalaire****)* peut être considéré comme une matrice 1×1
- — Comme autre cas particulier, on a **la matrice nulle**, c'est à dire celle dont tous les coefficients sont nuls.

  On la note souvent $\mathcal{O}$. Par exemple : $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice nulle d'ordre 4×3

6.1.3 Définition de matrice diagonale

On appelle matrice diagonale , une matrice carrée $A = \left((a_{ij})_{\substack{i=1,..,n \\ j=1,...,n}} \right)$ telle que, si $i \neq j$, alors , $a_{i,j} = 0$

Exemple 3 :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ou $\mathrm{Id}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont 2 matrices diagonales.
2. On appelle **matrice unité ,** une matrice diagonale $\mathrm{Id}_n = \left((a_{i,j})_{\substack{i=1,..,n \\ j=1,...,n}} \right)$ telle que $a_{i,i} = 1$

   $\mathrm{Id}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice unité d'ordre 4 .

   La plupart du temps, on note Id_n la matrice unité d'ordre n

6.1.4 Définition

On appelle matrice triangulaire une matrice carrée de la forme

$$T_s = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \ddots & \ddots & a_{n-1\,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ou de la forme

$$T_i = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{22} & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{nn1} & \cdots & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

- T_s est dite matrice triangulaire supérieure. Nous avons, dans ce cas, $a_{i;j} = 0$ si $j > i$
- T_i est dite matrice triangulaire inférieure. Nous avons, dans ce cas, $a_{i;j} = 0$ si $j < i$

Exemple 4 :

1. La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure,
2. La matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure
3. Les matrices qui sont à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure sont les matrices diagonales.

6.2 Opération sur les matrices

6.2.1 Egalité de 2 matrices

On dit que 2 matrices $A = \left((a_{ij})_{\substack{i=1\ldots m\\ j=1\ldots n}}\right)$ et $B = \left((b_{ij})_{\substack{i=1\ldots m\\ j=1\ldots n}}\right)$ sont égales et on écrit alors $A = B$ si :

1. Elles sont de même dimension c'est à dire qu'elles ont toutes deux, même nombre de lignes et même nombre de colonnes
2. ET si $(\forall i)\,(\forall j)\,(a_{ij} = b_{ij})$

Exemple 5 :

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- ▷ $A \neq B$ puisque, par exemple, $1 = a_{11} \neq b_{11} = 2$
- ▷ $A \neq C$ et $B \neq C$, car ces matrices ne sont pas de même dimension

6.2.2 Somme et différence de 2 matrices

1. On appelle somme de 2 matrices $A = \left((a_{ij})_{\substack{i=1\ldots m \\ j=1\ldots n}}\right)$ et $B = \left((b_{ij})_{\substack{i=1\ldots m \\ j=1\ldots n}}\right)$, une matrice $C = \left((c_{ij})_{\substack{i=1\ldots m \\ j=1\ldots n}}\right)$ telle que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
2. On appelle différence de 2 matrices $A = \left((a_{ij})_{\substack{i=1\ldots m \\ j=1\ldots n}}\right)$ et $B = \left((b_{ij})_{\substack{i=1\ldots m \\ j=1\ldots n}}\right)$, une matrice $C' = \left((c'_{ij})_{\substack{i=1\ldots m \\ j=1\ldots n}}\right)$ telle que $c'_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

Remarque 2 :

Remarque très importante

1. On ne peut additionner ou soustraire, que des matrices de même dimension
2. Pour additionner ou soustraire 2 matrices, on soustrait ou additionne, TERMES àTERMES

Exemple 6 :

Reprenons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

— Alors, $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

— Et $A - B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 1 :

Est-il possible d'additionner les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 9 \\ 1 & 8 & 10 \end{pmatrix}$? Si oui, en donner la somme.

6.2.3 Propriétés de l'addition des matrices

1. L'addition des matrices est associative, c'est à dire :

   $(\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))\,(\forall B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))\,(\forall C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))\,(A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C)$

2. L'addition des matrices est commutative, c'est à dire :

$$(\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))\,(\forall B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))\,(A + B) = (B + A)$$

3. L'addition des matricesadmet un élément neutre : la matrice nulle :$\mathcal{O}$, c'està dire :

$$(\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))\,(A + \mathcal{O} = \mathcal{O} + A = A)$$

4. Chaque matrice, admet, pour l'addition une matrice opposée,.
   C'est à dire :

$$(\forall A \in matmn\mathbb{R})\,(\exists A' \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))\,(A + A' = A' + A = \mathcal{O})$$

Démonstration

Démonstration du seul dernier point

En effet, Si $A = \left((a_{ij})_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}} \right)$, alors, $A' = \left((-a_{ij})_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}} \right)$ est tel que chaque élément de la matrice $A + A'$ est $\left((c_{ij})_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}} \right)$ où $c_{ij} = a_{ij} + (-a_{ij}) = 0$

Remarque 3 :

La matrice $A' = \left((-a_{ij})_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}} \right)$ est notée $A' = -A$

6.2.4 Groupe additif des matrices

L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ muni de l'addition des matrices est un groupe abélien.

Démonstration

La démonstration en est très simple :

- ▷ L'addition est associative
- ▷ L'addition admet un élément neutre : la matrice nulle $\mathcal{O}$
- ▷ Chaque matrice A admet, pour l'addition une matrice opposée notée $-A$
- ▷ L'addition des matrices est commutative

6.2.5 Produit d'une matrice par un scalaire

On appelle produit d'une matrice $A = \left((a_{ij})_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}} \right)$ par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, une matrice $C = \left((c_{ij})_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}} \right)$ telle que $c_{ij} = \lambda a_{ij}$

Remarque 4 :

La matrice C est notée $C = \lambda A$

Exemple 7 :

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 9 \\ -7 & 3 & 8 \end{pmatrix}$, alors, $5A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 15 & 25 & 45 \\ -35 & 15 & 40 \end{pmatrix}$

6.2.6 Propriétés de la multiplication par un scalaire

1. $(\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))\,(1 \times A = A)$
2. $(\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))\,(0 \times A = \mathcal{O})$
3. $(\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))\,(\forall \alpha \in \mathbb{R})\,(\forall \beta \in \mathbb{R})\,(\alpha(\beta A) = (\alpha\beta) A)$
4. $(\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))\,(\forall \alpha \in \mathbb{R})\,(\forall \beta \in \mathbb{R})\,((\alpha + \beta) A = (\alpha A + \beta A))$
5. $(\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))\,(\forall B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))\,(\forall \alpha \in \mathbb{R})\,(\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B)$

Démonstration

La démonstration est simple et très calculatoire et laissée aux soins du lecteur

Remarque 5 :

1. Si $A' = \left((-a_{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}} \right)$ est l'opposée de $A = \left((a_{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}} \right)$, on a $A' = -1A = -A$ de telle sorte que $A - B$ s'écrive $A + (-B)$
2. On démontrera ultérieurement que, muni de l'addition des matrices et de la multiplication des scalaires, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

6.2.7 Multiplication des matrices

On appelle produit de 2 matrices $A = \left((a_{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}} \right)$ et $B = \left((b_{ij})_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots p}} \right)$, une matrice C
$C = \left((c_{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots p}} \right)$ telle que $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

Remarque 6 :

Pour que le produit soit possible, **il faut donc que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B**

Exercice 2 :

Les produits des matrices AB ou BA suivants sont-ils possibles ?

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & 6 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

6.2.8 Propriétés du produit matriciel

1. La multiplication des matrices est associative c'est à dire :
$$(\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))\,(\forall B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}))\,(\forall C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}))\,(A\,(BC) = (AB)\,C = ABC)$$
2. La multiplication des matrices est distributive par rapport à l'addition c'est à dire
$$(\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))\,(\forall B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}))\,(\forall C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}))\,(A\,(B + C) = AB + AC)$$
et
$$(\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))\,(\forall B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))\,(\forall C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}))\,((A + B)\,C = AC + BC)$$

Remarque 7 :

1. **Très important** :
La multiplication des matrices n'est pas commutative ; il suffit de le vérifier sur le contre-exemple suivant :
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$; calculer AB et BA
Résolution :
Nous avons $AB = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$
Nous avons bien $AB \neq BA$

2. Muni de l'addition et de la multiplication, l'ensemble des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un **anneau non commutatif**

6.3 Matrices transposées

6.3.1 Définition

Soit $A = \left((a_{ij})_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}}\right)$ une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
On appelle matrice transposée de A , la matrice

$$^tA = A^T = \left((a_{ji})_{\substack{j=1,\dots,n\\ i=1,\dots,m}}\right)$$

Nous avons $A^T \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$

Exemple 8 :

1. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ alors, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$
2. Si u est la matrice ligne $u = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \end{pmatrix}$, alors, u^T est la matrice colonne

$$u^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

6.3.2 Propriétés des matrices transposées

1. La transposée de la transposée est la matrice elle même, c'est à dire :
   Pour toute matrice $A = \left((a_{ij})_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}}\right)$ de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\left(A^T\right)^T = A$
2. Pour toute matrice $A = \left((a_{ij})_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}}\right)$ de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B = \left((b_{ij})_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}}\right)$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ nous avons $(AB)^T = B^T A^T$

Démonstration

Les démonstrations *(en particulier du premier point)* sont très simples.
Pour le second point, les calculs sont réellement fastidieux ; on peut le faire sur des matrices de dimension raisonnable (2 ou 3).
Pour que le produit AB soit faisable, il faut donc que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B, et le produit AB est donc dans $\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$, et $(AB)^T$ est donc dans $\mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})$

6.3.3 Définition

1. Une matrice $A = \left((a_{ij})_{\substack{i=1\dots n\\ j=1\dots n}}\right)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **symétrique** si $A = A^T$
2. Une matrice $A = \left((a_{ij})_{\substack{i=1\dots n\\ j=1\dots n}}\right)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **antisymétrique** si $A = -A^T$

Remarque 8 :

1. Une matrice symétrique est **forcément une matrice carrée.**
2. **Exemple de matrice symétrique :**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & \sqrt{2} & -1 \\ 3 & -1 & \sqrt[3]{7} \end{pmatrix}$$

6.4 Matrice inverse

6.4.1 Définition

On appelle <u>matrice inverse</u>, d'une matrice $A = \left((a_{ij})_{\substack{i=1\dots n\\ j=1\dots n}}\right)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice $B = \left((b_{ij})_{\substack{i=1\dots n\\ j=1\dots n}}\right)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = \mathrm{Id}_n$ et on note alors $B = A^{-1}$

Remarque 9 :

1. Première remarque : on ne parle de matrice inverse que dans les matrices carrées.
2. Pour une matrice $A = \left((a_{ij})_{\substack{i=1\dots n\\ j=1\dots n}}\right)$ donnée, il n'existe qu'une seule inverse A^{-1}.
3. Mieux, si on considère une inverse à droite ou une inverse à gauche, tout inverse à gauche, est aussi une inverse à droite. Démontrez le ! !

Exercice 3 :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Existe-t-il une matrice $B \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ telle que $AB = \mathrm{Id}_2$?
2. Quel est l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$?
3. Trouver les conditions sur a, b, c, d pour que les matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ admettent un inverse ; lorsque l'inverse existe, donner A^{-1}
4. Quel est l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

6.4.2 Propriétés

1. Soit $A = \left((a_{ij})_{\substack{i=1\dots n\\ j=1\dots n}}\right)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice $B = \left((b_{ij})_{\substack{i=1\dots n\\ j=1\dots n}}\right)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ toutes deux inversibles ; on a alors, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
2. La transposée de l'inverse estégale à l'inverse de la transposée, c'est à dire $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$

<u>**Démonstration**</u>

1. La première démonstration est simple : il suffit de calculer le produit $(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right)$
2. Pour la seconde démonstration, nous partons du fait que $\left(AA^{-1}\right)^T = (\mathrm{Id}_n)^T = \mathrm{Id}_n$.
Or, $\left(AA^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}\right)^T \times A^T = \mathrm{Id}_n$. Nous avons donc bien $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$

6.5 Puissance d'une matrice

6.5.1 Définition

1. Soit $A = \left((a_{ij})_{\substack{i=1\dots n\\ j=1\dots n}}\right)$ une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; pour $p \in \mathbb{N}$, on note $A^P = \underbrace{A \times A \cdots \times A}_{p \text{ fois}}$
2. En particulier, $A^0 = \mathrm{Id}_n$
3. Et si A est inversible, pour $p \in \mathbb{Z}^-$ (entiers négatifs) $A^p = \left(A^{-1}\right)^{-p}$ ou encore, si $p \in \mathbb{N}$ $A^{-p} = \left(A^{-1}\right)^p$

6.5.2 Propriétés évidentes des puissances de matrices

Pour toute matrice carrée $A = \left((a_{ij})_{\substack{i=1\dots n\\ j=1\dots n}}\right)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nous avons

1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $q \in \mathbb{N}$, $(A^p)^q = A^{pq}$
2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $q \in \mathbb{N}$, $(A^p)(A^q) = A^{p+q}$
3. Si A est inversible, on a le même résultat pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et tout $q \in \mathbb{Z}$

Exercice 4 :

1. Calculer $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$ et généraliser pour calculer $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n$
2. Question complémentaire : la matrice : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

6.5.3 Binôme de Newton

Si A et B sont des matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent c'est à dire telles que $AB = BA$; nous avons alors la formule du Binôme de NEWTON :

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$$

Remarque 10 :

C'est un résultat déjà exposé dans la leçon sur les anneaux

Exercice 5 :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n
2. Calculer $(A - \mathrm{Id}_2)^2$
3. En déduire A^{-1}

6.6 Exercices sur le calcul matriciel

Exercice 6 :

Calculer le produit AB et BA des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$$

Exercice 7 :

Vérifier l'associativité du produit sur les exemples suivants

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 8 :

Trouver les matrices carrées d'ordre 2 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que :

1. $A^2 = A$
2. $A^2 = \mathrm{Id}_2$
3. $AB = BA$, avec $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 9 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$;Trouver les matrices B et B' telles que $BA = \mathrm{Id}_2$ et $AB' = \mathrm{Id}_3$

Exercice 10 :

Soit a un nombre réel non nul et soit $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$
Calculer A^n pour tout **entier relatif** n.

Exercice 11 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. calculer A^2
2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 12 :

On considère l'ensemble

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x+y & 4y \\ -y & x-y \end{pmatrix} \text{ où } x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Montrer que A, muni de l'addition et de la multiplication des matrices forme un sous-corps de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Exercice 13 :

Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on considère l'ensemble G des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$$

où $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$
Montrer que G muni de la multiplication des matrices est un groupe ; est-il commutatif ?

Exercice 14 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Trouver une matrice B telle que $A = 2\mathrm{Id}_3 + B$
2. Calculer B^2 et B^3
3. En déduire la valeur de A^n en fonction de n

Exercice 15 :

Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, trouver 3 matrices, A, B et C, telles que $X = aA + bB + cC$ où

$$X = \begin{pmatrix} a+b & a-b+c & a-c \\ a-b-c & a & a+b+c \\ a+c & a+b-c & a-b \end{pmatrix}$$

Exercice 16 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

1. Calculer AA^T et A^TA
2. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, le produit AA^T est symétrique

Exercice 17 :

Montrer que toute matrice carrée peut s'écrire comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique

Exercice 18 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 2^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

Exercice 19 :

On définit 3 suites de nombre réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_n = u_{n-1} + v_{n-1} \\ v_n = v_{n-1} + w_{n-1} \\ w_n = w_{n-1} \end{cases}$$

Le but du problème est d'exprimer u_n, v_n, w_n en fonction de u_0, v_0, w_0

1. Trouver une matrice A telle que $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \\ w_{n-1} \end{pmatrix}$ et en déduire que $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$
2. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Calculer $(M + \mathrm{Id}_3)^n$ et en déduire que $A^n = \mathrm{Id}_3 + nM + \frac{n(n-1)}{2}M^2$; en déduire u_n, v_n, w_n en fonction de u_0, v_0, w_0

Exercice 20 :

Trace d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

On appelle Trace de A , la somme des éléments diagonaux, c'est à dire le nombre $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$

1. Montrer que pour toute matrice A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
$$\mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(A+B)$$
2. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda \mathrm{tr}(A)$
3. Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$
4. Montrer que si P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,
$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}\left(P^{-1}AP\right)$$

Exercice 21 :

Nous nous situons dans l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n et à coefficients réels.

Pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$ on considère les matrices $E_{i,j} = \left((e_{k,l})_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ 1\leqslant l\leqslant n}}\right)$ où $e_{k,l} = 1$ si $k = 1$ et $l = j$ et $e_{k,l} = 0$ sinon

- Une **matrice de dilation d'ordre α** est une matrice $D_i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :
$$D_i = \mathrm{Id}_n - (1-\alpha) E_{i,i}$$

  Exemple dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

  Une matrice de dilatation D_2 d'ordre α est une matrice du type :
$$D_2 = \mathrm{Id}_3 - (1-\alpha) E_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - (1-\alpha) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Une **matrice de transvection d'ordre α** est une matrice $T_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :
$$T_{i,j} = \mathrm{Id}_n + \alpha E_{i,j} \text{ avec } i \neq j$$

  Exemple dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

  Une matrice de transvection $T_{2,1}$ d'ordre α est une matrice du type :
$$T_{2,1} = \mathrm{Id}_3 + \alpha E_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ Faites les calculs matriciels suivants :

1. D_2A
2. AD_2
3. $AT_{2,1}$
4. $T_{2,1}A$

Quelles sont vos conclusions ?

Exercice 22 :

Dans ce problème, on ne considère que les matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels ; l'ensemble de ces matrices est noté $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

1. (a) Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ +7 & +4 \end{pmatrix}$

   (b) Trouver toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

2. L'objet de cette question est de trouver toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que
$$X^2 - 6X + B = \mathcal{O}_2$$
   Où $B = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{O}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (a) Trouver $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $X^2 - 6X = (X - 3\mathrm{Id}_2)^2 + C$ où Id_2 est la matrice identité d'ordre 2

   (b) En déduire toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $X^2 - 6X + B = \mathcal{O}$

3. Proposer une méthode de résolution d'équations dont l'inconnue est une matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la forme $X^2 + aX + B = \mathcal{O}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

4. Appliquer cette méthode à la résolution de $X^2 + 10X + C = \mathcal{O}_2$ où $C = \begin{pmatrix} 26 & -7 \\ -7 & 21 \end{pmatrix}$

6.7 Déterminant d'une matrice

L'exposé que nous faisons ici, n'a rien de théorique ! Il est seulement l'exposé de base donnant les modes de calcul, et surtout, les propriétés des déterminants !

6.7.1 Définition des déterminants

Soit $A = \left((a_{ij})_{\substack{i=1,..,n \\ j=1,...,n}}\right)$ une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On appelle **déterminant** de A, le nombre

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & a_{ij} & \ddots & & \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

On dit qu'on a là, un déterminant d'ordre n

Remarque 11 :

Ecrit comme cela, un déterminant ne nous dit rien !!

6.7.2 Comment calculer un déterminant ?

Pour calculer un déterminant, on prend une colonne ,(la colonne N ° j par exemple) ou une ligne, (la ligne N ° i) et on a alors :

1. Si on choisit la colonne N ° j, alors $\det A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\,\Delta_{ij}$
2. Si on choisit la ligne N ° i, alors $\det A = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\,\Delta_{ij}$

Où, Δ_{ij} est le déterminant obtenu à partir de celui de A en supprimant la ligne N ° i et la colonne N ° j , appelé déterminant mineur

Remarque 12 :

1. On définit un déterminant d'ordre n à partir de combinaison linéaire de déterminants d'ordre $n-1$; ce qui ne nous avance pas ! !
2. On appelle **cofacteur** de A le nombre $A_{ij} = (-1)^{i+j}\,\Delta_{ij}$
3. Ces cofacteurs définissent une matrice $\left((A_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}\right)$ appelée **matrice des cofacteurs** ou **comatrice**

Les comatrices seront étudiées ultérieurement.

Exemple 9 :

Il vaut mieux commencer par des choses simples ! !

1. Calculons le déterminant de la matrice d'ordre 2 $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

   En utilisant la définition, nous avons $\det A = 1\times 4 + (-1)^{1+2}\times 3\times 2 = -2$
2. Généraliser à $X = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

   Toujours en utilisant la définition, nous avons $\det A = a\times d + (-1)^{1+2}\times c\times b = ad - bc$
   C'est un résultat sur les déterminants d'ordre 2 qu'il faut retenir
3. Calculer le déterminant de la matrice d'ordre 3 $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

   Nous allons ré-utiliser la définition en développant suivant la première colonne :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\times\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 6\times\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1\times\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 2\times 9 - 6\times(-5) + 1\times(-17) = 31$$

6.7.3 Propriétés des déterminants

Sans démontrer les résultats anoncés, nous le vérifions sur des déterminants d'ordre 2

1. Si on permute 2 colonnes ou 2 lignes d'un déterminant, le déterminant change de signe

   Exemple :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix}$$

2. Si on multiplie une ligne ou un colonne par une constante, le déterminant est multiplié par cette constante.

   Exemple :

$$\begin{vmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{vmatrix}$$

3. On ne change pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à une ligne ou à une colonne une combinaison linéaire des autres lignes ou colonnes

Exemple :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{vmatrix}$$

4. Nous avons aussi, $\det A = \det\left(A^T\right)$

Exercice 23 :

Calculer le déterminant d'une matrice triangulaire *(supérieure ou inférieure)*

Résolution

Soit $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}$ une matrice triangulaire inférieure. Alors, en développant suivant la première ligne, nous obtenons :

$$\det A = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{vmatrix} = a \times \begin{vmatrix} c & 0 \\ e & f \end{vmatrix} = acf$$

Le déterminant d'une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est le produit de ses éléments diagonaux

Ce résultat peut être généralisé à toute matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Exemple 10 :

Utilisation de 6.7.3 pour le calcul des déterminants

Soit A une matrice carrée d'ordre n. D'après les propositions précédentes 6.7.3, on peut donc utiliser des combinaisons linéaires pour calculer $\det(A)$. On se ramène ainsi, au mieux, à un calcul du déterminant d'une matrice triangulaire.

Exemple :

Calcul de $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

Résolution

On soustrait la colonne 2 à la colonne 1 (c'est à dire que nous faisons : $C_1 - C_2 \to C_1$ D'où

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a-b & b & c \\ a^2-b^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

On soustrait la colonne 3 à la colonne 2 ($C_2 - C_3 \to C_2$). D'où

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a-b & b & c \\ a^2-b^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

En utilisant un facteur commun ($a-b$ dans C_1 et $b-c$ dans C_2), nous avons :

$$\Delta = (a-b)(b-c) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & c \\ a+b & b+c & c^2 \end{vmatrix}$$

Or, en développant suivant la première ligne :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & c \\ a+b & b+c & c^2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+b & b+c \end{vmatrix} = (c-a)$$

et donc, $\Delta = (a-b)(b-c)(c-a)$

Exercice 24 :

Faites, par la méthode de combinaisons linéaires, le calcul du déterminant de la matrice d'ordre 3 suivante : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

6.7.4 Conséquences

1. Un déterminant dont une ligne ou une colonne est nulle est nul
2. Un déterminant dont deux lignes ou deux colonnes sont égales est nul
3. Un déterminant dont une ligne ou une colonne sont combinaison linéaire des autres lignes ou colonnes est nul
4. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$

Démonstration

On admet ces résultats ; cependant, on peut les démontrer facilement pour les déterminants d'ordre 2

6.7.5 Théorème

Etant données 2 matrices carrées A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\det(A \times B) = (\det A)(\det B)$

Démonstration

De la même manière, on admet ces résultats ; cependant, qui peuvent être démontrés facilement à l'ordre 2

Remarque 13 :

Une matrice inversible a forcément un déterminant non nul.

En effet, si A est inversible, il existe une matrice A^{-1} telle que $AA^{-1} = \mathrm{Id}_n$. Donc

$$\det AA^{-1} = \det \mathrm{Id}_n \iff \det A \times \det A^{-1} = 1$$

Ce qui montre bien que $\det A$ et $\det A^{-1}$ sont non nuls

La proposition ci-après précise les choses

6.7.6 Proposition

Nous avons :

1. A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$
2. Si A est inversible alors $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$
3. Si A et B sont semblables c'est à dire il existe une matrice P telle que $B = P^{-1}AP$ alors $\det(A) = \det(B)$

Démonstration

1. Nous avons démontré que si A était inversible, alors $\det A \neq 0$
   Nous admettons, pour le moment, la réciproque, à savoir : $\det A \neq 0 \Longrightarrow A$ inversible
2. Dans la remarque précédente, nous avons vu que $\det A \times \det A^{-1} = 1$, c'est à dire que

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

3. Supposons qu'il existe une matrice P inversible telle que $B = P^{-1}AP$; alors, en utilisant les propriétés du déterminant :

$$\begin{aligned}\det B = & \det\left(P^{-1}AP\right)\\ = & \det\left(P^{-1}\right)\times\det(AP)\\ = & \det\left(P^{-1}\right)\times\det A\times\det P\\ = & \det\left(P^{-1}\right)\times\det P\times\det A\\ = & \det A\end{aligned}$$

6.8 Systèmes de Cramer

L'objet de cette section est de réutiliser la notion de déterminant. Nous ne le ferons que dans des cas simples *(ordre 2 et ordre 3)*

6.8.1 Système de cramer d'ordre 2

On appelle système de Cramer d'ordre 2 tout système

$$\begin{cases} ax+by= & c\\ a'x+b'y= & c'\end{cases}$$

d'inconnues x et y et de coefficients $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$, $a'\in\mathbb{R}$, $b'\in\mathbb{R}$, $c'\in\mathbb{R}$

1. Le déterminant du système est donné par $\Delta = \begin{vmatrix} a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}$
2. Si $\Delta\neq 0$, alors le système admet un unique couple de solutions $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ donné par :

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta} \quad \text{et} \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$$

   — Δ_x est appelé le déterminant en x et est donné par : $\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b\\ c' & b'\end{vmatrix}$

   — Δ_y est appelé le déterminant en y et est donné par : $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c\\ a' & c'\end{vmatrix}$
3. Si $\Delta = 0$, alors le système peut n'avoir aucune solution ou une infinité de solutions
   — Si $\Delta_x\neq 0$ ou $\Delta_y\neq 0$ alors, le système n'admet aucune solution
   — Si $\Delta_x = 0$ et $\Delta_y = 0$ alors, le système admet une infinté de solutions

Démonstration

Considérons donc le système

$$\begin{cases} ax+by= & c\\ a'x+b'y= & c'\end{cases}$$

Nous allons tenter de le résoudre en éliminant les inconnues. On suppose a et a' non nuls *(Si l'un des deux était nul, il suffirait de permuter les colonnes)*

1. Tout d'abord, éliminons x en multipliant la première ligne par a' et la seconde ligne par $-a$. Nous obtenons donc :

$$\begin{cases} a'ax+a'by= & a'c\\ -aa'x-ab'y= & -ac'\end{cases}$$

   En additionnant, nous obtenons : $(a'b-ab')\,y = a'c-ac'$. Ainsi :

   ▷ Si $a'b-ab'\neq 0$, alors $y=\dfrac{a'c-ac'}{a'b-ab'}=\dfrac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$

   Et c'est là qu'on remarque que $ab'-a'b=\begin{vmatrix} a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}$ et que $ac'-a'c=\begin{vmatrix} a & c\\ a' & c'\end{vmatrix}$. Nous avons donc bien $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$

- ▷ Si $a'b - ab' = 0$, alors, alors l'équation devient $0y = a'c - ac'$
  - — Donc, si $a'c - ac' = 0$, c'est à dire si $\Delta_y = 0$, il y a une infinité de solutions
  - — Donc, si $a'c - ac' \neq 0$, c'est à dire si $\Delta_y \neq 0$, il n'y a aucune solution

2. La discussion serait la même pour le calcul de x

D'où le résultat annoncé.

Remarque 14 :

On remarque que pour former Δ_x, on remplace la colonne formée par les coefficients de l'inconnue x par les constantes c et c'. Idem pour Δ_y, on remplace la colonne formée par les coefficients de l'inconnue y par les constantes c et c'

Exemple 11 :

Voici donc quelques exemples de résolution.

1. Résoudre le système : $\left\{\begin{array}{rr} 2x+3y = & 2 \\ x-7y = & 1 \end{array}\right.$

   Résolution

   Le déterminant du système est donné par $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -17$. Comme $\Delta \neq 0$, il y a un unique couple solution donné par :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{-17}{-17} = 1 \quad \text{et} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{0}{-17} = 0$$

2. Résoudre le système : $\left\{\begin{array}{rr} 2x+3y = & 2 \\ 8x+12y = & 8 \end{array}\right.$

   Résolution

   Le déterminant du système est donné par $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} = 0$. Comme $\Delta = 0$, il y a un problème !!

   $\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} = 0$ et $\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} = 0$

   Il y a donc une infinité de solutions. Comment les exprimer ?

   Il est clair que nous avons :

$$\left\{\begin{array}{rr} 2x+3y = & 2 \\ 8x+12y = & 8 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rr} 2x+3y = & 2 \\ 2x+3y = & 2 \end{array}\right.$$

   Et que le système ne se réduit qu'à une seule équation $2x+3y = 2$. L'ensemble des solutions est donc donné par :

$$S = \left\{\left(x, \frac{1}{3}(2-2x)\right) \text{ où } x \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\left(\frac{1}{2}(2-3y), y\right) \text{ où } y \in \mathbb{R}\right\}$$

3. Résoudre le système : $\left\{\begin{array}{rr} 2x+3y = & 1 \\ 8x+12y = & 8 \end{array}\right.$

   Résolution

   Le déterminant du système est donné par $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} = 0$. Comme $\Delta = 0$, il y a un problème !!

   $\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} = -12$

   Nous avons $\Delta_x \neq 0$, et il n'y a donc pas de solutions.

Nous pouvons voir qu'en divisant par 4 la seconde équation, nous obtenons le système
$$\begin{cases} 2x+3y = & 1 \\ 2x+3y = & 2 \end{cases}$$
Nous ne pouvons, évidemment, avoir en même temps $2x+3y=1$ et $2x+3y=2$, ce qui montre bien l'impossibilité du système.

6.8.2 Système de cramer d'ordre 3

On appelle système de Cramer d'ordre 3 tout système

$$\begin{cases} ax+by+cz = & d \\ a'x+b'y+c'z = & d' \\ a''x+b''y+c''z = & d'' \end{cases}$$

d'inconnues x, y et z et de coefficients $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $a' \in \mathbb{R}$, $b' \in \mathbb{R}$, $c' \in \mathbb{R}$ $a'' \in \mathbb{R}$, $b'' \in \mathbb{R}$, $c'' \in \mathbb{R}$

1. Le déterminant du système est donné par $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$
2. Si $\Delta \neq 0$, alors le système admet un unique triplet de solutions $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ donné par :
$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \qquad \text{et} \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$
   — Δ_x est appelé le déterminant en x et est donné par : $\Delta_x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$
   — Δ_y est appelé le déterminant en y et est donné par : $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix}$
   — Δ_z est appelé le déterminant en z et est donné par : $\Delta_z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}$
3. Si $\Delta = 0$, alors le système peut n'avoir aucune solution ou une infinité de solutions
   — Si $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$ ou $\Delta_z \neq 0$ alors, le système n'admet aucune solution
   — Si $\Delta_x = 0$ et $\Delta_y = 0$ et $\Delta_z \neq 0$ alors, le système admet une infinté de solutions

Remarque 15 :

Comme précédemment, pour former Δ_x, on remplace la colonne formée par les coefficients de l'inconnue x par les constantes d, d' et d''. La procédure est la même pour Δ_x, Δ_z

Exemple 12 :

1. Résoudre le système : $\begin{cases} x+2y+z = & 8 \\ x-2y+z = & -4 \\ -x+2y-z & = 4 \end{cases}$

   Résolution

   ▷ Le déterminant du système est donné par $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$. On voit de suite que 2 colonnes sont égales, donc $\Delta = 0$

   ▷ Nous avons $\Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$
   La 1° colonne est 2 fois la troisième plus 3 fois la seconde. La première colonne est donc combinaison linéaire des deux autres, donc $\Delta_x = 0$

▷ Nous avons $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$.
Une nouvelle fois, 2 colonnes soont égales donc $\Delta_y = 0$

▷ Nous avons $\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.
La 3° colonne est 2 fois la première plus 3 fois la seconde. Donc $\Delta_z = 0$.
Il faudrait remarquer que Δ_x et Δ_z sont les mêmes, à une permutation de colonnes près.

Le système admet donc une infinité de solutions.

Nous pouvons remarquer que la 3° ligne est l'opposée de la seconde ligne, et que donc le système des 3 équations ne se réduit qu'à un système de 2 équations à 3 inconnues :

$$\left\{\begin{array}{ll} x+2y+z= & 8 \\ x-2y+z= & -4 \\ -x+2y-z & =4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} x+2y+z= & 8 \\ x-2y+z= & -4 \end{array}\right.$$

Fixons $z \in \mathbb{R}$. z devient, en quelques sortes, un paramètre. Le système devient : $\left\{\begin{array}{ll} x+2y= & 8-z \\ x-2y= & -4-z \end{array}\right.$

D'où on tire, par addition simple $x = 2-z$ et $y = 3$. L'ensemble S des solutions du système est donc :

$$S = \{(2-z, 3, z)\} \text{ avec } z \in \mathbb{R}$$

6.9 Exercices sur les déterminants

Les exercices proposés ici n'ont rien de vraiment difficile. Seuls les plus représentatifs et les plus percutants le sont ! !

6.9.1 Sytèmes de Cramer

Exercice 25 :

Résoudre le système $\left\{\begin{array}{ll} x+2y+z= & 8 \\ x-2y+z= & -4 \\ -x+2y-z= & 2 \end{array}\right.$

Exercice 26 :

Résoudre et discuter, en fonction des valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$ les systèmes suivants :

1. $\left\{\begin{array}{ll} mx+y= & 1 \\ x+my= & 1 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{ll} (m-2)\,x+my= & -m \\ mx+(m-2)\,y= & 3m-2 \end{array}\right.$

Exercice 27 :

1. Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ll} -x+y+z= & 1 \\ x-y+z= & 1 \\ x+y-z= & 1 \end{array}\right.$$

2. Résoudre et discuter, en fonction des valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ll} mx+y+z= & 1 \\ x+my+z= & 1 \\ x+y+mz= & 1 \end{array}\right.$$

6.9.2 Pratique des déterminants

Exercice 28 :

1. Démontrer que $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 2abc$;
2. Démontrer que $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$

Exercice 29 :

Calculer

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$$

Exercice 30 :

1. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Pour chacune des matrices ci-dessus, dire si elles ont inversibles, et si oui calculez-en l'inverse.

Exercice 31 :

Vérifier sur un exemple que $\det(A \times B) = (\det A)(\det B)$ *On pourra le vérifier sur des matrices carrées d'ordre 2, puis d'ordre 3*

Exercice 32 :

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Exercice 33 :

On dit que 2 matrices carrées d'ordre n A et B sont semblables, s'il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}BP$

1. Montrer que la similitude de matrices est une relation d'équivalence
2. Montrer que 2 matrices semblables ont même déterminant

Exercice 34 :

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Vérifier que $A^2 - \mathrm{tr}(A)\,A + \det A\,\mathrm{Id}_2 = \mathcal{O}_2$ où $\mathrm{tr}(A)$ est la trace de la matrice A et $\mathcal{O}_2$ la matrice nulle d'ordre 2.

6.10 Quelques exercices corrigés

6.10.1 Sur le calcul matriciel

Exercice 3 :

1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ *une matrice de* $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$*. Existe-t-il une matrice* $B \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ *telle que* $AB = \mathrm{Id}_2$ *?*

   Soit $B \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, telle que $AB = \mathrm{Id}_2$

   Posons alors $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$. Nous avons :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} a+3e & b+3f \\ 4a+5c & 4b+5d \end{pmatrix} \end{array}$$

   De l'identité $AB = \mathrm{Id}_2$, nous pouvons écrire : $\begin{pmatrix} a+3e & b+3f \\ 4a+5c & 4b+5d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, de telle sorte que nous obtenons un système 4 équations à 6 inconnues ; il y en a beaucoup trop !!

$$\begin{cases} a+3e = & 1 \\ b+3f = & 0 \\ 4a+5c = & 0 \\ 4b+5d = & 1 \end{cases}$$

   D'où nous tirons :

$$\begin{cases} b = -3f \\ a = 1-3e \\ 5c = -4a = -4(1-3e) = 4+12e \Longrightarrow c = -\dfrac{4}{5} + \dfrac{12}{5}e \\ 5d = 1-4b = 1+12f \Longrightarrow d = \dfrac{1}{5} + \dfrac{12}{5}f \end{cases}$$

   Nous obtenons ainsi comme matrice B :

$$B = \begin{pmatrix} 1-3e & -3f \\ -\dfrac{4}{5} + \dfrac{12}{5}e & \dfrac{1}{5} + \dfrac{12}{5}f \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{4}{5} & \dfrac{1}{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ \dfrac{12}{5} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & \dfrac{12}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } e \in \mathbb{R} \text{ et } f \in \mathbb{R}$$

   Il y a donc une infinité de matrices $B \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, telle que $AB = \mathrm{Id}_2$ *(une double infinité, même !)*

2. *Quel est l'inverse de la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *?*

   Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui soit l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

   Nous avons donc $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Nous avons, par calcul $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix}$ Et nous avons donc le système d'équations :

$$\begin{cases} a+2c = & 1 \\ a+2c = & 0 \\ b+2d = & 0 \\ b+2d = & 1 \end{cases}$$

Ce qui est impossible ; il n'existe donc pas d'inverse à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. *Trouver les conditions sur a, b, c, d pour que les matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ admettent un inverse ; lorsque l'inverse existe, donner A^{-1}*

Soit $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui soit l'inverse de A et posons $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

Nous avons donc :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix} \end{array}$$

Si X est l'inverse de A, nous avons $AX = \mathrm{Id}_2$, c'est à dire :

$$\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous obtenons donc 2 systèmes d'équations :

▷ Le premier d'inconnues x et z :

$$\begin{cases} ax+bz = & 1 \\ cx+dz = & 0 \end{cases}$$

▷ Le second d'inconnues y et t :

$$\begin{cases} ay+bt = & 0 \\ cy+dt = & 1 \end{cases}$$

En multipliant la première ligne des systèmes par $-c$ et la seconde ligne par a, nous obtenons :

▷ $\begin{cases} ax+bz = & 1 \\ cx+dz = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -cax-cbz = & -c \\ acx+adz = & 0 \end{cases} \implies (ad-bc)\,z = -c$

▷ $\begin{cases} ay+bt = & 0 \\ cy+dt = & 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -cay-cbt = & 0 \\ acy+adt = & a \end{cases} \implies (ad-bc)\,t = a$

Ainsi, si $ad-bc \neq 0$, nous obtenons $z = \dfrac{-c}{ad-bc}$, $t = \dfrac{a}{ad-bc}$, $x = \dfrac{d}{ad-bc}$ et $y = \dfrac{-b}{ad-bc}$.

Donc, si $ad-bc \neq 0$, alors, la matrice A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

<u>Supposons maintenant $ad-bc = 0 \iff ad = bc$</u>

◇ Si $a = 0$, alors $bc = 0$ et $b = 0$ ou $c = 0$
 Supposons $b = 0$
 Alors, les systèmes deviennent :

$$\begin{cases} 0x+0z = & 1 \\ cx+dz = & 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 0y+0t = & 0 \\ cy+dt = & 1 \end{cases}$$

 Avoir $0x+0z = 1$ est impossible, donc, si $a = 0$ et $b = 0$, la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ n'est pas inversible
 Si $c = 0$, la discussion est semblable, et la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ n'est pas inversible

◇ La discussion est identique si $d = 0$, et dans ces cas, nous voyons que les matrices $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas inversibles

◇ Supposons $ad \neq 0$; alors, comme $ad = bc$, $bc \neq 0$, c'est à dire $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ et $d \neq 0$.
 De $ad = bc$, nous tirons $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \lambda \neq 0$ et donc $a = \lambda b$ et $c = \lambda d$.
 On s'intéresse aux systèmes d'équations :

Pour le premier d'inconnues x et z :

$$\left\{\begin{array}{rl} ax+bz= & 1 \\ cx+dz= & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} \lambda bx+bz= & 1 \\ \lambda dx+dz= & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} b\left(\lambda x+z\right)= & 1 \\ d\left(\lambda x+z\right)= & 0 \end{array}\right.$$

Comme $b \neq 0$ et $d \neq 0$, nous avons $\lambda x+z=0$ et $\lambda x+z \neq 0$; contradiction ! !

Pour le second système, ce serait identique. La matrice A n'est donc pas inversible.

Donc

$$A \in \mathcal{M}_2\left(\mathbb{R}\right) \text{ avec } A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ est inversible si et seulement si } ad-bc \neq 0$$

La matrice inverse est donnée par $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

4. *Quel est l'inverse de la matrice* $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

Soit $B \in \mathcal{M}_3\left(\mathbb{R}\right)$ qui est l'inverse de la matrice. Alors $B=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ et nous avons :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tous calculs faits, nous avons :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_1+2y_1 & -x_2+2y_2 & -x_3+2y_3 \\ 2x_1+5y_1+3z_1 & 2x_2+5y_2+3z_2 & 2x_3+5y_3+3z_3 \end{pmatrix}$$

De l'égalité $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_1+2y_1 & -x_2+2y_2 & -x_3+2y_3 \\ 2x_1+5y_1+3z_1 & 2x_2+5y_2+3z_2 & 2x_3+5y_3+3z_3 \end{pmatrix}$, nous obtenons 3 systèmes de 3 équations à 3 inconnues :

- ▷ $\left\{\begin{array}{rl} x_1= & 1 \\ -x_1+2y_1= & 0 \\ 2x_1+5y_1+3z_1= & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow x_1=1 \quad y_1=\dfrac{1}{2} \quad z_1=\dfrac{-3}{2}$
- ▷ $\left\{\begin{array}{rl} x_2= & 0 \\ -x_2+2y_2= & 1 \\ 2x_2+5y_2+3z_2= & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow x_2=0 \quad y_2=\dfrac{1}{2} \quad z_2=\dfrac{-5}{6}$
- ▷ $\left\{\begin{array}{rl} x_3= & 0 \\ -x_3+2y_3= & 0 \\ 2x_3+5y_3+3z_3= & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow x_3=0 \quad y_3=0 \quad z_3=\dfrac{1}{3}$

D'où nous obtenons l'inverse $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-3}{2} & \frac{-5}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Nous pouvons remarquer que si A est triangulaire inférieure, son inverse $B=A^{-1}$ est elle aussi triangulaire inférieure

Exercice 4 :

1. *Calculer* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$ *et généraliser pour calculer* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n$

Par simples calculs, nous obtenons

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{O}_4$

Il est donc possible de généraliser, en écrivant que si $n \geqslant 4$, alors $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n = \mathcal{O}_4$

2. *La matrice :* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *est-elle inversible*

   Si cette matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ était inversible, il existerait $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = \mathrm{Id}_4$. Or, pour $n \geqslant 4$, $(AB)^n = A^n \times B^n = \mathcal{O}_4 \times B^n = \mathcal{O}_4$, alors que $(\mathrm{Id}_4)^n = \mathrm{Id}_4$. C'est donc impossible, et la matrice A n'est pas inversible

Exercice 5 :

1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Calculer* A^n

   Premièrement, en posant $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, nous avons $A = \mathrm{Id}_2 + X$, et donc, comme Id_2 et X commutent, par la formule du binôme :

   $$A^n = (\mathrm{Id}_2 + X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k \mathrm{Id}_2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k$$

   Or, nous avons $X^0 = \mathrm{Id}_2$ et $X^2 = \mathcal{O}_2$ donc :

   $$A^n = (\mathrm{Id}_2 + X)^n = \mathrm{Id}_2 + nX = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. *Calculer* $(A - \mathrm{Id}_2)^2$

   De $A = \mathrm{Id}_2 + X$, nous tirons que $A - \mathrm{Id}_2 = X$; comme $X^2 = \mathcal{O}_2$, nous avons $(A - \mathrm{Id}_2)^2 = \mathcal{O}_2$

3. *En déduire* A^{-1}

   Par la formule du binôme, nous avons $(A - \mathrm{Id}_2)^2 = A^2 - 2A + \mathrm{Id}_2 = \mathcal{O}_2$, c'est à dire :

   $$A^2 - 2A + \mathrm{Id}_2 = \mathcal{O}_2 \iff 2A - A^2 = \mathrm{Id}_2 \iff A(2\mathrm{Id}_2 - A) = \mathrm{Id}_2$$

   Et donc, $A^{-1} = 2\mathrm{Id}_2 - A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Question complémentaire :

   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 6 :

Calculer le produit AB et BA des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$$

Par calcul, nous trouvons :

$$AB = \begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & b^2+2ac \\ a+b+c & b^2+2ac & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} a+c+ac & b+c+ab & 2c+a^2 \\ a+b+bc & 2b+b^2 & b+c+ab \\ 2a+c^2 & a+b+bc & 2a+c \end{pmatrix}$$

Une nouvelle preuve de la non commutativité de la multiplication matricielle ! !

Exercice 8 :

On considère les matrices carrées d'ordre 2 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ du type $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

1. *Trouver les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$*

   Nous avons $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}$

   Pour touver les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$, nous devons résoudre le système :

$$\begin{cases} a^2+bc = & a \\ b(a+d) = & b \\ c(a+d) = & c \\ d^2+bc = & d \end{cases}$$

▷ **Supposons $b \neq 0$**

Alors, de l'équation $b(a+d) = b$, nous tirons, par simplification, $a+d = 1 \Longleftrightarrow d = 1-a$
De l'équation $a^2+bc = a$, nous tirons l'équation du second degré $a^2 - a + bc = 0$ avec pour paramètres b et c.

Le discriminant est donné par $\Delta = 1-4bc$. Ainsi, si $\Delta \geqslant 0 \Longleftrightarrow 1-4bc \geqslant 0 \Longleftrightarrow bc \leqslant \frac{1}{4}$, il y a 2 racines à cette équation, et nous avons :

$$a_1 = \frac{1+\sqrt{1-4bc}}{2} \quad d_1 = \frac{1-\sqrt{1-4bc}}{2} \text{ ou bien } a_2 = \frac{1-\sqrt{1-4bc}}{2} \quad d_1 = \frac{1+\sqrt{1-4bc}}{2}$$

Nous avons donc 2 familles de solutions :

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{1-4bc}}{2} & b \\ c & \dfrac{1-\sqrt{1-4bc}}{2} \end{pmatrix} \text{ avec } b \in \mathbb{R}^* \text{ et } c \in \mathbb{R} \text{ et } bc \leqslant \frac{1}{4} \right\}$$

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \dfrac{1-\sqrt{1-4bc}}{2} & b \\ c & \dfrac{1+\sqrt{1-4bc}}{2} \end{pmatrix} \text{ avec } b \in \mathbb{R}^* \text{ et } c \in \mathbb{R} \text{ et } bc \leqslant \frac{1}{4} \right\}$$

Et si $b \neq 0$, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$

▷ **Supposons $b = 0$**

Alors, le système devient :

$$\begin{cases} a^2 = & a \\ c(a+d) = & c \\ d^2 = & d \end{cases}$$

D'où nous tirons $a = 1$ ou $a = 0$ et $d = 1$ ou $d = 0$

◇ Si $a = 1$ et $d = 1$, alors $2c = c$ et donc $c = 0$, et nous obtenons la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est la matrice identité Id_2

◇ Si $a = 1$ et $d = 0$, alors, nous avons $c = c$, ce qui veut dire que $c \in \mathbb{R}$, nous obtenons donc une famille de solutions :

$$\mathcal{T}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } c \in \mathbb{R} \right\}$$

◇ Si $a = 0$ et $d = 1$, le problème est identique et nous obtenons donc une seconde famille de solutions :

$$\mathcal{T}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } c \in \mathbb{R} \right\}$$

◇ Si $a = 0$ et $b = 0$, nous avons $0c = c$ et donc $c = 0$ et nous obtenons la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est la matrice nulle $\mathcal{O}_2$

Les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$ sont appelées « projecteurs » Nous avons donc, ici, tous les projecteurs de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

2. *Trouver les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = \mathrm{Id}_2$*

Nous avons déjà calculé A^2, mais les nouvelles conditions nous donnent un nouveau système :

$$\begin{cases} a^2 + bc = & 1 \\ b(a+d) = & 0 \\ c(a+d) = & 0 \\ d^2 + bc = & 1 \end{cases}$$

▷ **Supposons $b \neq 0$**

Alors $a + d = 0 \iff a = -d$, et le système devient : $a^2 + bc = 1$ et $c \in \mathbb{R}$, d'où $a^2 = 1 - bc$. Donc, si $b \neq 0$, l'ensemble des matrices est de la forme $\begin{pmatrix} \sqrt{1-bc} & b \\ c & -\sqrt{1-bc} \end{pmatrix}$ avec $c \in \mathbb{R}$ et $1 - bc \geqslant 0 \iff bc \leqslant 1$ ou de la forme $\begin{pmatrix} -\sqrt{1-bc} & b \\ c & \sqrt{1-bc} \end{pmatrix}$ avec $c \in \mathbb{R}$ et $1 - bc \geqslant 0 \iff bc \leqslant 1$

▷ **Supposons $b = 0$**

Alors, le système devient :

$$\begin{cases} a^2 = & 1 \\ c(a+d) = & 0 \\ d^2 = & 1 \end{cases}$$

Alors, $a = 1$ ou $a = -1$ et $d = 1$ ou $d = -1$

◇ Si $c \neq 0$, alors $a + d = 0 \iff a = -d$, et nous obtenons comme matrices solutions :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

— Si $c \neq 0$, alors $a+d$ peut prendre n'importe quelle valeur, et nous avons 4 matrice solutions :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}_2 \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix} = -\mathrm{Id}_2$$

Les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = \mathrm{Id}_2$ sont appelées « involutions » Nous avons donc, ici, toutes les involutions de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

3. *Trouver les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$, avec $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$*

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; nous posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

▷ Dans un premier temps, nous calculons AB :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2a-b & a+b \\ 2c-d & c+d \end{pmatrix} \end{array}$$

Donc, $AB = \begin{pmatrix} 2a-b & a+b \\ 2c-d & c+d \end{pmatrix}$

▷ Calculons, maintenant BA.

Un calcul simple donne $BA = \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ -a+c & -b+d \end{pmatrix}$

▷ En faisant l'égalité $BA = AB$, nous tombons sur un système de 4 équations à 4 inconnues :

$$\left\{\begin{array}{rl} 2a-b = & 2a+c \\ a+b = & 2b+d \\ 2c-d = & -a+c \\ c+d = & -b+d \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} -b = & c \\ a = & b+d \\ c-d = & -a \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} b+c = & 0 \\ a-b-d = & 0 \\ a+c-d = & 0 \end{array}\right.$$

D'où on trouve : $c = -b$, $a = b+d$ avec $b \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}$. Ces matrices sont donc de la forme :

$$\begin{pmatrix} b+d & b \\ -b & d \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } b \in \mathbb{R} \text{ et } d \in \mathbb{R}$$

Exercice 10 :

Soit a un nombre réel non nul et soit $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ Calculer A^n pour tout entier relatif n.

1. **Supposons $n \in \mathbb{N}$**

   Il est facile de voir que $A = a \times \mathrm{Id}_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'après le binôme de Newton *(puisque* Id_2 *commute avec toutes les matrices)* :

   $$A^n = \left(a \times \mathrm{Id}_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k$$

   Un calcul rapide montre que si $k \geqslant 2$, alors $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k = \mathcal{O}_2$, de telle sorte que

   $$A^n = a^n \mathrm{Id}_2 + n \times a^{n-1} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

2. **Supposons maintenant que $n \in \mathbb{Z}^-$**

   C'est à dire que n est un entier négatif. Nous avons alors $A^n = \left(A^{-1}\right)^{-n}$ avec $-n \in \mathbb{N}$

   Nous avons $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-1}{a^2} \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} = a^{-1} \times \mathrm{Id}_2 + a^{-2} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Un nouveau calcul rapide montre que si $k \geqslant 2$, alors $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k = \mathcal{O}_2$, et en réutilisant la formule du binôme, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\left(A^{-1}\right)^n &= \left(a^{-1} \times \mathrm{Id}_2 + a^{-2} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(a^{-1}\right)^{n-k} \times \left(a^{-2}\right)^k \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{-n-k} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k \\
&= a^{-n} \times \mathrm{Id}_2 + n a^{-n-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^{-n} & -n a^{-n-1} \\ 0 & a^{-n} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $n \in \mathbb{Z}^-$, nous avons $A^n = \begin{pmatrix} a^n & n a^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

3. **En faisant la synthèse des points 1 et 2 ci-dessus**

   Nous avons donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $A^n = \begin{pmatrix} a^n & n a^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

Exercice 12 :

On considère l'ensemble

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x+y & 4y \\ -y & x-y \end{pmatrix} \text{ où } x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Montrer que A, muni de l'addition et de la multiplication des matrices forme un sous-corps de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Pour plus de concision et de clarté, nous notons, pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, $M(x,y) = \begin{pmatrix} x+y & 4y \\ -y & x-y \end{pmatrix}$

Nous avons ainsi $M(0,0) = \mathcal{O}_2$ et $M(1,0) = \mathrm{Id}_2$

1. Tout d'abord, $A \neq \emptyset$ puisque $M(0,0)$ et $M(1,0)$ sont des éléments de A
2. D'autre part, pour $M(x,y) \in A$ et $M(x_1,y_1) \in A$:
   - ▷ $M(x,y) - M(x_1,y_1) = \begin{pmatrix} x+y & 4y \\ -y & x-y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1+y_1 & 4y_1 \\ -y_1 & x_1-y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-x_1+y-y_1 & 4(y-y_1) \\ -(y-y_1) & x-x_1-y+y_1 \end{pmatrix}$

     Et donc $M(x,y) - M(x_1,y_1) = M(x-x_1, y-y_1)$

     D'où, si $M(x,y) \in A$ et $M(x_1,y_1) \in A$, alors $M(x,y) - M(x_1,y_1) \in A$
   - ▷ Calculons maintenant $M(x,y) \times M(x_1,y_1)$

     $$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} x_1+y_1 & 4y_1 \\ -y_1 & x_1-y_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x+y & 4y \\ -y & x-y \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} (x+y)(x_1+y_1) - 4yy_1 & 4y_1(x+y) + 4y(x_1-y_1) \\ -y(x_1+y_1) - y(x-y)_1 & -4yy_1 + (x-y)(x_1-y_1) \end{pmatrix} \end{array}$$

     Ainsi,

     $$\begin{aligned} M(x,y) \times M(x_1,y_1) &= \begin{pmatrix} xx_1 - 3yy_1 + xy_1 + yx_1 & 4(xy_1 + yx_1) \\ -(xy_1 + yx_1) & xx_1 - 3yy_1 - (xy_1 + yx_1) \end{pmatrix} \\ &= M(xx_1 - 3yy_1, xy_1 + x_1 y) \end{aligned}$$

     Et donc, si $M(x,y) \in A$ et $M(x_1,y_1) \in A$, alors $M(x,y) \times M(x_1,y_1) \in A$
3. D'autre part, $M(x,y) \in A$ est inversible si et seulement si $(x+y)(x-y) + 4y^2 = x^2 + 3y^2 \neq 0$. Or, $x^2 + 3y^2 = 0$ si et seulement si $x = y = 0$. Ainsi, seule $M(0,0) = \mathcal{O}_2$ n'est pas inversible. Supposons $x \neq 0$ ou $y \neq 0$, alors $M(x,y)$ est inversible et :

   $$(M(x,y))^{-1} = \frac{1}{x^2+3y^2} \begin{pmatrix} x-y & -4y \\ y & x+y \end{pmatrix} = M\left(\frac{x}{x^2+3y^2}, \frac{-y}{x^2+3y^2}\right)$$

Donc A muni de l'addition et de la multiplication des matrices est un corps.

Exercice 13 :

Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on considère l'ensemble G des matrices de la forme

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$$

où $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ Montrer que G muni de la multiplication des matrices est un groupe ; est-il commutatif ?

Il y a plusieurs conditions à vérifier !

1. Premièrement, $G \neq \emptyset$ puisque $M(0,0,0) = \mathrm{Id}_3$ est un élément de G ; ceci est d'autant plus intéressant que Id_3 est le neutre pour la multiplication des matrices.
2. D'autre part, comme la multiplication est associative dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, elle l'est, en particulier dans G
3. Montrons que la multiplication est interne à G.
   Soient donc $M(a,b,c)$ et $M(a_1,b_1,c_2)$ 2 matrices de G, avons nous $M(a,b,c) \times M(a_1,b_1,c_2) \in G$?
   Nous avons :
   $$M(a,b,c) \times M(a_1,b_1,c_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+a_1 & 1 & 0 \\ b+a_1c+b_1 & c+c_1 & 1 \end{pmatrix} = M(a+a_1, b+b_1+a_1c, c+c_1)$$
   La multiplication est donc une loi interne dans G
   Avec ce résultat, la multiplication est-elle commutative dans G ?
   $$M(a_1,b_1,c_1) \times M(a,b,c) = M(a_1+a, b_1+b+ac_1, c_1+c)$$
   On voit tout de suite que, pour que la multiplication soit commutative, il faut que
   $$b+b_1+a_1c = b_1+b+ac_1 \Longrightarrow a_1c = ac_1$$
   La multiplication n'est donc pas commutative : **nous n'avons pas,** en particulier
   $$M(2,1,4) \times M(3,1,3) = M(3,1,3) \times M(2,1,4)$$
   puisque $M(2,1,4) \times M(3,1,3) = M(5,14,7)$ et $M(3,1,3) = M(3,1,3) \times M(2,1,4) = M(5,8,7)$
4. Les matrices de G sont-elles inversibles et leur inverse est-elle dans G ?[1]
   Il faut donc trouver une matrice $\begin{pmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$ telle que :
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   Tous calculs faits, nous arrivons aux systèmes :
   $$\left\{\begin{aligned} x &= 1 \\ ax+x_1 &= 0 \\ bx+cx_1+x_2 &= 0 \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} y &= 0 \\ ay+y_1 &= 1 \\ by+cy_1+y_2 &= 0 \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} z &= 0 \\ az+z_1 &= 0 \\ bz+cz_1+z_2 &= 1 \end{aligned}\right.$$
   D'où nous tirons, très simplement, que $z_2 = 1$, $z = z_1 = 0$, puis que $y = 0$, $y_1 = 1$ et $y_2 = -c$ et, enfin, $x = 1$, $x_1 = -a$ et $x_2 = -b+ac$, et donc :
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ -b+ac & -c & 1 \end{pmatrix} = M(-a, -b+ac, -c)$$
   Ainsi l'inverse de $M(a,b,c)$ qui est $M(-a,-b+ac,-c)$ est bien un élément de A

Ainsi, G est un groupe multiplicatif non abélien

1. Nous utilisons, ici, des outils forts rudimentaires. Dans les prochains cours, nous donnerons des méthodes systématiques de calcul

Exercice 14 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. *Trouver une matrice* B *telle que* $A = 2\mathrm{Id}_3 + B$

   Clairement, nous avons :

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   En posant $B = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, nous avons bien $A = 2\mathrm{Id}_3 + B$

2. *Calculer* B^2 *et* B^3

   Par calcul, nous avons :

   ▷ $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   ▷ $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   Et donc, pour tout $n_geqslant3$, nous avons $B^n = \mathcal{O}_3$

3. *En déduire la valeur de* A^n *en fonction de* n

   Nous avons donc $A^n = (2\mathrm{Id}_3 + B)^n$. D'après le binôme de Newton, nous avons :

$$A^n = (2\mathrm{Id}_3 + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}\mathrm{Id}_3^{n-k}B^k = \binom{n}{0}2^n\mathrm{Id}_3 + \binom{n}{1}2^{n-1}B + \binom{n}{2}2^{n-2}B^2$$

   Et donc $A^n = 2^n\mathrm{Id}_3 + n2^{n-1}B + \dfrac{n(n-1)}{2}2^{n-2}B^2 = 2^n\mathrm{Id}_3 + n2^{n-1}B + n(n-1)2^{n-3}B^2$

   D'où

$$\begin{aligned} A^n = \; & 2^n\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n2^{n-1}\begin{pmatrix} 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + n(n-1)2^{n-3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 2^n & -3n2^n & -3n(n-1)2^{n-1} \\ 0 & 2^n & n2^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \\ = & \; 2^n\begin{pmatrix} 1 & -3n & -\dfrac{3n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 16 :

Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$*, le produit* $A \times A^T$ *est symétrique*

La résolution de cet exercice utilise 4 types de résultats :

▷ Le premier, c'est que si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, alors $A^T \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et que, donc, le produit $A \times A^T$ est une matrice carrée de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$

▷ D'autre part, si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, alors $\left(A^T\right)^T = A$

▷ Le troisième résultat, c'est que $(AB)^T = B^T \times A^T$

▷ Le dernier résultat, c'est que $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique, si et seulement si $X = X^T$

Donc, forts de ces remarques, nous avons : $\left(A \times A^T\right)^T = \left(A^T\right)^T \times A^T = A \times A^T$.

Nous avons donc $\left(A \times A^T\right)^T = A \times A^T$ et la matrice $A \times A^T$ est symétrique

Exercice 17 :

Montrer que toute matrice carrée peut s'écrire comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice quelconque. Nous notons : $A = \left((a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}\right)$

- ▷ Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où $S = \left((s_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}\right)$ et $s_{i,j} = \dfrac{a_{i,j}+a_{j,i}}{2}$.
  Clairement, $s_{i,j} = s_{j,i}$ et la matrice S est donc symétrique
- ▷ De la même manière, soit $S^1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où $S^1 = \left((s^1_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}\right)$ et $s^1_{i,j} = \dfrac{a_{i,j}-a_{j,i}}{2}$.
  Tout aussi clairement, $s^1_{i,j} = -s^1_{j,i}$ et la matrice S^1 est donc antisymétrique

Nous avons, de manière évidente, $a_{i,j} = s_{i,j} + s^1_{i,j}$, et donc, au niveau des matrices $A = S + S^1$, ce qui montre que toute matrice carrée peut s'écrire comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique

Exercice 18 :

On définit 3 suites de nombre réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_n = & u_{n-1} + v_{n-1} \\ v_n = & v_{n-1} + w_{n-1} \\ w_n = & w_{n-1} \end{cases}$$

Le but du problème est d'exprimer u_n, v_n, w_n en fonction de u_0, v_0, w_0

1. *Trouver une matrice A telle que $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \\ w_{n-1} \end{pmatrix}$*

   Clairement, nous avons :

$$\begin{cases} u_n = & u_{n-1} + v_{n-1} + 0w_{n-1} \\ v_n = & 0u_{n-1} + v_{n-1} + w_{n-1} \\ w_n = & 0u_{n-1} + 0v_{n-1} + w_{n-1} \end{cases} \iff \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \\ w_{n-1} \end{pmatrix}$$

   Donc, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. *En déduire que $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$*

   Voilà un résultat assez évident :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} = A\left(A \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}\right) = A^2 \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

   En généralisant par une récurrence simple, nous avons donc $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$

3. *Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $(M + \mathrm{Id}_3)^n$ et en déduire que $A^n = \mathrm{Id}_3 + nM + \dfrac{n(n-1)}{2}M^2$; en déduire u_n ,v_n ,w_n en fonction de u_0 ,v_0 ,w_0*

   Par des calculs simples, nous avons $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \mathcal{O}_3$

Tout de suite, nous voyons que $A = M + \mathrm{Id}_3$, et que $A^n = (M + \mathrm{Id}_3)^n$ se calcule grêce au binôme de Newton :

$$\begin{aligned} A^n &= (M+\mathrm{Id}_3)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\mathrm{Id}_3)^{n-k} M^k \\ &= \binom{n}{0}\mathrm{Id}_3 + \binom{n}{1}M + \binom{n}{2}M^2 \\ &= \mathrm{Id}_3 + nM + \frac{n(n-1)}{2}M^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où nous obtenons :

$$\begin{cases} u_n = & u_0 + nv_0 + \dfrac{n(n-1)}{2}w_0 \\ v_n = & v_0 + nw_0 \\ w_n = & w_0 \end{cases}$$

Il y a une autre façon de résoudre, sans passer par le calcul matriciel

Reprenons la définition des 3 suites :

$$\begin{cases} u_n = & u_{n-1} + v_{n-1} \\ v_n = & v_{n-1} + w_{n-1} \\ w_n = & w_{n-1} \end{cases}$$

- ▷ De la dernière égalité $w_n = w_{n-1}$, nous déduisons que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0$
- ▷ L'égalité suivante $v_n = v_{n-1} + w_{n-1} \iff v_n = v_{n-1} + w_0$, montre que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison w_0, et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $v_n = v_0 + nw_0$
- ▷ Et, pour terminer, nous avons

$$u_n = u_{n-1} + v_{n-1} \iff u_n = u_{n-1} + v_0 + (n-1)w_0 \iff u_n - u_{n-1} = v_0 + (n-1)w_0$$

En passant aux sommations, nous avons : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}(v_0 + (k-1)w_0)$

Or :

— $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k-1}) = u_n - u_0$

— $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(v_0 + (k-1)w_0) = \sum_{k=1}^{n} v_0 + \sum_{k=1}^{n}(k-1)w_0 = nv_0 + w_0\sum_{k=1}^{n}(k-1) = nv_0 + \frac{n(n-1)}{2}w_0$

D'où $u_n - u_0 = nv_0 + \dfrac{n(n-1)}{2}w_0$, c'est à dire $u_n = u_0 + nv_0 + \dfrac{n(n-1)}{2}w_0$

Exercice 19 :

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{32} & a_{3,3} \end{pmatrix}$ *On appelle Trace de* A *, la somme des éléments diagonaux, c'est à dire le nombre* $\mathrm{tr}(A) = a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3}$

1. *Montrer que pour toute matrice* A *et* B *de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(A+B)$
   - ▷ Soit donc $A = \left((a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\1\leqslant j\leqslant 3}}\right)$ et $\mathrm{tr}(A) = a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3}$
   - ▷ Pour $B = \left((b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\1\leqslant j\leqslant 3}}\right)$ et $\mathrm{tr}(B) = b_{1,1} + b_{2,2} + b_{3,3}$; d'où $\mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B) = a_{1,1} + b_{1,1} + a_{2,2} + b_{2,2} + a_{3,3} + b_{3,3}$

▷ Nous avons $A+B = \left((a_{i,j}+b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\1\leqslant j\leqslant 3}}\right)$ et donc $\mathrm{tr}\,(A+B) = a_{1,1}+b_{1,1}+a_{2,2}+b_{2,2}+a_{3,3}+b_{3,3} = \mathrm{tr}\,(A)+\mathrm{tr}\,(B)$

2. *Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{tr}\,(\lambda A) = \lambda \mathrm{tr}\,(A)$*

   Rien de moins difficile, puisque $\lambda A = \left((\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\1\leqslant j\leqslant 3}}\right)$

3. *Montrer que $\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)$*

   ▷ Si $A = \left((a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\1\leqslant j\leqslant 3}}\right)$ et $B = \left((b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\1\leqslant j\leqslant 3}}\right)$, alors $AB = \left((c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\1\leqslant j\leqslant 3}}\right)$ où $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{3} a_{i,k}b_{k,j}$

   ▷ Et $BA = \left((d_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\1\leqslant j\leqslant 3}}\right)$ où $d_{i,j} = \sum_{k=1}^{3} b_{i,k}a_{k,j}$

   ▷ Et donc

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\,(AB) &= \sum_{i=1}^{3} c_{i,i}\\ &= \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{3} a_{i,k}b_{k,i}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3} a_{i,k}b_{k,i}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3} b_{k,i}a_{i,k}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{3} d_{k,k}\\ &= \mathrm{tr}\,(BA)\end{aligned}$$

   Nous en concluons donc que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)$

4. *Montrer que si P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}\,(A) = \mathrm{tr}\left(P^{-1}AP\right)$*

   Par la question précédente, nous avons :

$$\mathrm{tr}\left(\left(P^{-1}A\right)P\right) = \mathrm{tr}\left(P\left(P^{-1}A\right)\right) = \mathrm{tr}\left(\left(PP^{-1}\right)A\right) = \mathrm{tr}\,(A)$$

Exercice 22 :

Cet exercice est, en fait, l'étude d'une équation du second degré dans un anneau ; étude qui peut nous donner quelques surprises ! !

Dans ce problème, on ne considère que les matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels ; l'ensemble de ces matrices est noté $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

1. *Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 7\\ +7 & +4\end{pmatrix}$*

   C'est un type de question déjà résolue. Nous appelons $M = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ et alors $M^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d)\\ c(a+d) & d^2+bc\end{pmatrix}$.

   L'égalité $M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 7\\ +7 & +4\end{pmatrix}$ nous conduit au système :

$$\left\{\begin{aligned} a^2+bc &= -1\\ b(a+d) &= 7\\ c(a+d) &= 7\\ d^2+bc &= 4\end{aligned}\right.$$

   Des équations $b(a+d) = 7$ et $c(a+d) = 7$, on déduit $b \neq 0$, $c \neq 0$, $a+d \neq 0$ et $b = c$; nous obtenons donc un nouveau système, équivalent au premier :

$$\left\{\begin{aligned} a^2+b^2 &= \ -1 \\ b\,(a+d) &= \ 7 \\ b &= \ c \\ d^2+b^2 &= \ 4 \end{aligned}\right.$$

Système qui est impossible puisque nous ne pouvons pas avoir $a^2+b^2=-1$. Il n'existe donc pas de matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ +7 & +4 \end{pmatrix}$

2. *Trouver toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$*

Nous appelons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et alors $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b\,(a+d) \\ c\,(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}$.

L'égalité $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ nous conduit au système :

$$\left\{\begin{aligned} a^2+bc &= \ 1 \\ b\,(a+d) &= \ 8 \\ c\,(a+d) &= \ 0 \\ d^2+bc &= \ 9 \end{aligned}\right.$$

Des équations $b\,(a+d)=8$ on déduit $b \neq 0$ et $a+d \neq 0$. De $c\,(a+d)=0$ et de $a+d \neq 0$ on déduit $c=0$; nous obtenons donc un nouveau système, équivalent au premier :

$$\left\{\begin{aligned} a^2 &= \ 1 \\ b\,(a+d) &= \ 7 \\ c &= \ 0 \\ d^2 &= \ 9 \end{aligned}\right.$$

D'où $a=\pm 1$ et $d=\pm 3$. Ainsi :

- ▷ Si $a=+1$ et $d=+3$, alors $b\,(a+d)=8 \Longleftrightarrow 4b=8$ d'où $b=2$ et la matrice A est du type :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- ▷ Si $a=+1$ et $d=-3$, alors $b\,(a+d)=8 \Longleftrightarrow -2b=8$ d'où $b=-4$ et la matrice A est du type :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

- ▷ Si $a=-1$ et $d=+3$, alors $b\,(a+d)=8 \Longleftrightarrow 2b=8$ d'où $b=4$ et la matrice A est du type :

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- ▷ Si $a=-1$ et $d=-3$, alors $b\,(a+d)=8 \Longleftrightarrow -4b=8$ d'où $b=-2$ et la matrice A est du type :

$$A_4 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Il existe donc 4 racines carrées à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$. De plus, nous pouvons remarquer que $A_4=-A_1$ et $A_3=-A_2$

3. *Nous voulons trouver toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $X^2-6X+B=\mathcal{O}_2$ où $B = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{O}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$*

(a) *Trouver $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $X^2 - 6X = (X - 3\mathrm{Id}_2)^2 + C$ où Id_2 est la matrice identité d'ordre 2*

Il suffit d'utiliser le binôme de Newton !

$$(X - 3\mathrm{Id}_2)^2 = X^2 - 6X + 9\mathrm{Id}_2 \iff X^2 - 6X = (X - 3\mathrm{Id}_2)^2 - 9\mathrm{Id}_2$$

Et donc $C = -9\mathrm{Id}_2$

(b) *En déduire toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $X^2 - 6X + B = \mathcal{O}_2$*

$$X^2 - 6X + B = \mathcal{O}_2 \iff (X - 3\mathrm{Id}_2)^2 - 9\mathrm{Id}_2 + B = \mathcal{O}_2 \iff (X - 3\mathrm{Id}_2)^2 = 9\mathrm{Id}_2 - B$$

Il faut donc trouver des matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = 9\mathrm{Id}_2 - B$. Or, $9\mathrm{Id}_2 - B = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

Nous avons donc $X - 3\mathrm{Id}_2 = A_1$, $X - 3\mathrm{Id}_2 = A_2$, $X - 3\mathrm{Id}_2 = -A_1$ ou $X - 3\mathrm{Id}_2 = -A_2$. Il y a donc 4 racines à cette équation du second degré qui sont :

i. $X_1 = 3\mathrm{Id}_2 + A_1$, c'est à dire $X_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

ii. $X_2 = 3\mathrm{Id}_2 + A_2$, c'est à dire $X_2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

iii. $X_3 = 3\mathrm{Id}_2 - A_1$, c'est à dire $X_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

iv. $X_4 = 3\mathrm{Id}_2 - A_2$, c'est à dire $X_4 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

4. *Résoudre $X^2 + 10X + C = \mathcal{O}_2$ où $C = \begin{pmatrix} 26 & -7 \\ -7 & 21 \end{pmatrix}$*

Nous allons utiliser la méthode précédente :

$$X^2 + 10X + C = (X + 5\mathrm{Id}_2)^2 - 25\mathrm{Id}_2 + C$$

Et donc, $X^2 + 10X + C = \mathcal{O}_2 \iff (X + 5\mathrm{Id}_2)^2 - 25\mathrm{Id}_2 + C = \mathcal{O}_2 \iff (X + 5\mathrm{Id}_2)^2 = 25\mathrm{Id}_2 - C$

Or : $25\mathrm{Id}_2 - C = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 26 & -7 \\ -7 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$

Il faut donc trouver $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ +7 & +4 \end{pmatrix}$. Or, il n'existe pas de telles matrices. L'équation matricielle $X^2 + 10X + C = \mathcal{O}_2$ n'admet donc pas de solution

6.10.2 Calcul des déterminants

Exercice 24 :

Par des méthodes de combinaisons linéaires, calculer le déterminant de la matrice d'ordre 3 suivante : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

On considère le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Si nous faisons des combinaisons linéaires sur les lignes, nous ne changeons pas le déterminant :

$$\begin{cases} L'_1 \longleftarrow & L_1 \\ L'_2 \longleftarrow & L_2 - 2L_1 \\ L'_3 \longleftarrow & L_3 + L_1 \end{cases}$$

Nous obtenons alors :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

En permutant 2 lignes, le déterminant change de signe ; donc :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Or, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure dont le déterminant est le produit des éléments diagonaux. donc :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -10$$

Exercice 25 :

Résoudre le système $\left\{ \begin{array}{rl} x + 2y + z = & 8 \\ x - 2y + z = & -4 \\ -x + 2y - z & = 2 \end{array} \right.$

Le déterminant du système est $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ qui, visiblement, est nul.

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$. Nous avons :

$$\Delta_x = 8 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 4 \times (-2-2) + 2 \times (2+2) = -16 + 8 = -8$$

Donc $\Delta_x \neq 0$, et le système n'admet pas de solutions

Exercice 26 :

Résoudre et discuter, en fonction des valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$ les systèmes suivants :

1. $\left\{ \begin{array}{rl} mx + y = & 1 \\ x + my = & 1 \end{array} \right.$

   Le déterminant du système est $\Delta = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1$

   ▷ $\Delta \neq 0$ si et seulement si $m \neq 1$ et $m \neq -1$.

   Donc, si $m \neq 1$ et $m \neq -1$, alors $\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m - 1$ et $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{m-1}{m^2-1} = \dfrac{1}{m+1}$

   De la même manière, $\Delta_y = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m - 1$ et $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{m-1}{m^2-1} = \dfrac{1}{m+1}$

   Et donc $S = \left\{ \left(\dfrac{1}{m+1}, \dfrac{1}{m+1} \right) \right\}$

   ▷ Si $m = 1$, alors $\Delta = 0$, et le système devient :

$$\left\{ \begin{array}{rl} x + y = & 1 \\ x + y = & 1 \end{array} \right. \iff x + y = 1$$

   Il y a donc une infinité de solutions donnée par l'ensemble : $S = \{(x, 1-x) \text{ avec } x \in \mathbb{R}\}$

▷ Si $m = -1$, nous avons toujours $\Delta = 0$, et le système devient :

$$\begin{cases} -x + y = & 1 \\ x - y = & 1 \end{cases}$$

Système qui est impossible. Il n'y a donc pas de solutions

2. $\begin{cases} (m-2)\,x + my = & -m \\ mx + (m-2)\,y = & 3m-2 \end{cases}$

Le déterminant du système est $\Delta = \begin{vmatrix} m-2 & m \\ m & m-2 \end{vmatrix} = (m-2)^2 - m^2 = 4 - 4m$

▷ $\Delta \neq 0$ si et seulement si $m \neq 1$.

Donc, si $m \neq 1$, alors $\Delta_x = \begin{vmatrix} -m & m \\ 3m-2 & m-2 \end{vmatrix} = -m\,(m-2) - m\,(3m-2) = -m^2 + 2m - 3m^2 + 2m = 4m - 4m^2 = 4m\,(1-m)$ et $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{4m\,(1-m)}{4-4m} = m$

De la même manière, $\Delta_y = \begin{vmatrix} m-2 & -m \\ m & 3m-2 \end{vmatrix} = (m-2)\,(3m-2) + m^2 = 3m^2 - 2m - 6m + 4 + m^2 = 4m^2 - 8m + 4 = 4\left(m^2 - 2m + 1\right) = 4\,(m-1)^2$ et $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{4\,(m-1)^2}{4-4m} = 1 - m$

Et donc $S = \{(m, 1-m)\}$

▷ Si $m = 1$, alors $\Delta = 0$, et le système devient :

$$\begin{cases} -x + y = & -1 \\ x - y = & 1 \end{cases} \iff x - y = 1$$

Il y a donc une infinité de solutions donnée par l'ensemble : $S = \{(x, x-1) \text{ avec } x \in \mathbb{R}\}$

Exercice 27 :

1. *Résoudre le système suivant :* $\begin{cases} -x + y + z = & 1 \\ x - y + z = & 1 \\ x + y - z = & 1 \end{cases}$

▷ On calcule donc le déterminant du système en développant suivant la première ligne :

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1-1) - (-1-1) + (1+1) = 4$$

▷ Nous calculons le déterminant en x :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(-1-1) + (1+1) = 4$$

D'où on trouve $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{4}{4} = 1$

▷ Nous calculons le déterminant en y :

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(-1-1) - (-1-1) + 0 = 4$$

D'où on trouve $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{4}{4} = 1$

▷ Nous calculons le déterminant en z :

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(-1-1) - 0 + (1+1) = 4$$

D'où on trouve $z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} = \dfrac{4}{4} = 1$

Nous ontenons donc comme solution, $x = y = z = 1$

Il y a une autre façon de résoudre ce système *(peut-être plus simple ! !)*
On part du système de départ :

$$\left\{\begin{array}{rl} -x+y+z= & 1 \\ x-y+z= & 1 \\ x+y-z= & 1 \end{array}\right.$$

On fait des combinaisons linéaires entre les lignes :

$$L_1' = L_1 \qquad L_2' = L_2 + L_1 \qquad L_3' = L_3 + L_1$$

Nous obtenons alors le système :

$$\left\{\begin{array}{rl} -x+y+z= & 1 \\ 2z= & 2 \\ 2y= & 2 \end{array}\right.$$

D'où $x = y = z = 1$

2. *Résoudre et discuter, en fonction des valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le système suivant :*

$$\left\{\begin{array}{rl} mx+y+z= & 1 \\ x+my+z= & 1 \\ x+y+mz= & 1 \end{array}\right.$$

▷ Toujours pareil, on commence par calculer le déterminant du système qui, cette fois-ci, dépendra d'un paramètre m.

$$\begin{array}{rcl} \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} & = & m \times \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ & = & m\left(m^2-1\right) - (m-1) + (1-m) \\ & = & (m-1)\left(m(m+1)-2\right) \\ & = & (m-1)\left(m^2+m-2\right) \\ & = & (m-1)^2(m+2) \end{array}$$

Donc $\Delta = 0$ si et seulement si $m = 1$ ou $m = -2$

- Si $m = -2$, alors, le système devient :

$$\left\{\begin{array}{rl} -2x+y+z= & 1 \\ x-2y+z= & 1 \\ x+y-2z= & 1 \end{array}\right.$$

En additionnant les lignes, nous obtenons $0x + 0y + 0z = 3$, ce qui est impossible. Donc, si $m = -2$, le système n'admet pas de solution.

- Si $m = 1$, alors le système devient ;

$$\left\{\begin{array}{rl} x+y+z= & 1 \\ x+y+z= & 1 \\ x+y+z= & 1 \end{array}\right.$$

qui se réduit à une seule équation : $x + y + z = 1$. Le système admet donc une infinité de solutions :

$$\mathcal{S} = \{(x, y, 1-x-y) \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$$

▷ Si $m \neq 1$ et $m \neq -2$, alors le système admet une unique solution :

- Calculons Δ_x

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & 1 \end{vmatrix} = m^2 - 1 - (m-1) + 1 - m = (m-1)^2$$

D'où $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{(m-1)^2}{(m-1)^2(m+2)} = \dfrac{1}{(m+2)}$

- Calculons Δ_y

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m(m-1) - (m-1) = (m-1)^2$$

D'où $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{(m-1)^2}{(m-1)^2(m+2)} = \dfrac{1}{m+2}$

- Calculons Δ_z

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m \times \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & 1 \end{vmatrix} = m(m-1) + (1-m) = (m-1)^2$$

D'où $z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} = \dfrac{(m-1)^2}{(m-1)^2(m+2)} = \dfrac{1}{m+2}$

Ainsi, si $m \neq 1$ et $m \neq -2$, alors le système admet une unique solution $x = y = z = \dfrac{1}{m+2}$

Exercice 28 :

Démontrer que $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$

Pour le calcul, nous allons jouer sur les combinaisons linéaires de lignes ou de colonnes. Tout d'abord, une combinaison sur les lignes :

$$L'_1 = L_1 \quad L'_2 = L_2 \quad L'_3 = L_3 + L_2 + L_1$$

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Et maintenant, une combinaison sur les colonnes :

$$C"_1 = C'_1 - C'_3 \quad C"_2 = C'_2 - C'_3$$

Nous avons donc :

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a-b-c & 0 & 2a \\ 0 & -b-c-a & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-a-b-c)^2 = (a+b+c)^2$$

D'où, nous avons bien $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$

Exercice 29 :

Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$

Une fois de plus, on utilise combinaison avec lignes et colonnes :

$$L'1 = L_1 \quad L'_2 = L_2 \quad L'_3 = L_3 + L_2$$

Alors :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Exercice 33 :

On dit que 2 matrices carrées d'ordre n A et B sont semblables, s'il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}BP$

1. *Montrer que la similitude de matrices est une relation d'équivalence*

   Pour plus de clarté, nous notons $\mathfrak{R}$ la relation :

   $$A\mathfrak{R}B \iff \text{il existe une matrice inversible } P \text{ telle que } A = P^{-1}BP$$

   ▷ **$\mathfrak{R}$ est évidemment réflexive.**
   En effet, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nous avons $A = \mathrm{Id}_n \times A \times \mathrm{Id}_n$; or, $(\mathrm{Id}_n)^{-1} = \mathrm{Id}_n$ et donc $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est semblable à elle-même et donc $A\mathfrak{R}A$

   ▷ **Montrons qu'elle est symétrique**
   Supposons donc que pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nous ayions $A\mathfrak{R}B$.
   Ce ci veut donc dire qu'il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}BP$. Or :

   $$A = P^{-1}BP \iff PA = PP^{-1}BP \iff PA = BP \iff PAP^{-1} = BPP^{-1} \iff PAP^{-1} = B$$

   Il existe donc une matrice inversible, P^{-1} telle que $B = \left(P^{-1}\right)^{-1}AP^{-1}$, c'est à dire que $B\mathfrak{R}A$
   La relation $\mathfrak{R}$ est donc symétrique

   ▷ **Montrons qu'elle est Transitive**
   Supposons donc que pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nous ayions $A\mathfrak{R}B$ et $B\mathfrak{R}C$.
   Ce ci veut donc dire qu'il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}BP$ et une autre matrice inversible Q telle $B = Q^{-1}CQ$.
   Donc $A = P^{-1}BP \iff A = P^{-1}Q^{-1}CQP$. Or, $(QP)^{-1} = P^{-1}Q^{-1}$
   Il existe donc une matrice inversible, $R = QP$ telle que $A = R^{-1}CR$, c'est à dire que $A\mathfrak{R}C$
   La relation $\mathfrak{R}$ est donc symétrique

   La relation $\mathfrak{R}$ étant réflexive, symétrique et transitive, est donc une relation d'équivalence

2. *Montrer que 2 matrices semblables ont même déterminant*

   Soient A et B 2 matrices semblables ; alors il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}BP$.
   Des propriétés des déterminants, nous avons :

   $$\det A = \det\left(P^{-1}BP\right) = \det P^{-1} \times \det(BP) = \det P^{-1} \times \det B \det P = \det B$$

   2 matrices semblables ont donc même déterminant.

   Remarques sur les matrices semblables et la notion d'invariant
   Nous venons de découvrir 2 types d'invariants pour les matrices semblables : la trace et le déterminant.
   — 2 matrices semblables ont même trace
   — 2 matrices semblables ont même déterminant
   — Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Chapitre 7

Espaces vectoriels réels

La notion **d'espace vectoriel** est essentielle en mathématiques ; en fait, **tout est vecteur**, et cette modélisation géométrique est un excellent outil, très utilisé dans l'approximation en analyse. Chapitre important, donc !

7.1 Espace vectoriel

7.1.1 Définition

Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ est un triplet $(E, +, \bullet)$ formé d'un ensemble E, d'une loi de composition interne $+$, d'une loi d'action notée $\bullet$ qui va de $\mathbb{R} \times E$ dans E, tels que :

1. $(E, +)$ est un groupe commutatif,
2. La loi d'action $\bullet$ vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times E & \longrightarrow & E \\ (a, u) & \longmapsto & au \end{array}$$

   (a) $\forall u \in E,\ 1 \bullet u = u$
   (b) $\forall u \in E\ ,\forall v \in E,\ \forall a \in \mathbb{R}\ ,\ a \bullet (u + v) = a \bullet u + a \bullet v$ *(distributivité)*
   (c) $\forall u \in E,\ \forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R}\ ,\ a \bullet (b \bullet u) = (ab) \bullet u$ *(associativité)*
   (d) $\forall u \in E,\ \forall a \in \mathbb{R},\ (a + b) \bullet u = a \bullet u + b \bullet u$

Remarque 1 :

1. La dernière propriété est une pseudo-distributivité car l'addition à gauche de l'égalité est celle des réels tandis que celle à droite est celle des vecteurs.
2. Un espace vectoriel se définit de façon plus générale sur un corps commutatif ; par exemple sur $\mathbb{C}$ ou sur $\mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z}$ avec p nombre premier. Ce corps commutatif est appelé **corps des scalaires.**
3. A partir de maintenant, nous écrivons plutôt . que $\bullet$
4. Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ est souvent noté $\mathbb{R}$-espace vectoriel

7.1.2 Proposition

On relève les conséquences immédiates des propriétés d'espace vectoriel :

1. $\forall u \in E,\ \forall v \in E,\ \forall a \in \mathbb{R},\ a\,(u-v) = au - av$
2. $\forall a \in \mathbb{R},\ a.\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$
3. $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall u \in E,\ a\,(-u) = (-au)$
4. $\forall u \in E,\ \forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ (a-b)\,u = au - bu$
5. $\forall \overrightarrow{u} \in E$, nous avons $0.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ (où $\overrightarrow{0}$ est le vecteur nul)
6. $\forall u \in E,\ \forall a \in \mathbb{R},\ (-a).\overrightarrow{u} = -(a\overrightarrow{u})$; en particulier, $\forall u \in E$, et pour $a=1$, $(-1).\overrightarrow{u} = -(\overrightarrow{u})$(symétrique de $\overrightarrow{u}$ pour $+$)
7. $\forall u \in E,\ \forall a \in \mathbb{R},\ (-a)\,(-u) = au$
8. $a.u = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $a=0$ ou $u = \overrightarrow{0}$
9. On appelle homothétie une application h_a où $a \in \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} h_a : E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & h_a(u) = au \end{array} \right.$$

h_a est bijective si et seulement si $a \neq 0$

Démonstration

On ne démontre pas toutes les propriétés.

1. Démonstration du premier résultat :
   en effet : $\overrightarrow{u} + 0.\overrightarrow{u} = 1.\overrightarrow{u} + 0.\overrightarrow{u} = (1+0).\overrightarrow{u} = 1.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$ d'où le résultat.
2. En effet : $a.\overrightarrow{0} + a.\overrightarrow{0} = a.\left(\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0}\right) = a.\overrightarrow{0}$, d'où le résultat.
3. En effet : $\overrightarrow{u} + (-1).\overrightarrow{u} = 1.\overrightarrow{u} + (-1).\overrightarrow{u} = (1-1).\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
4. Montrons qu'une homothétie de rapport $a \neq 0$ est une bijection
   - ▷ Montrons qu'elle est injective.
     Soient u_inE et $v \in E$ tels que $h_a(u) = h_a(v)$, c'est à dire que $au = av$, et donc $a\,(u-v) = \overrightarrow{0}$; comme $a \neq 0$ alors $u - v = \overrightarrow{0}$ et donc $u = v$ et h_a est injective
   - ▷ Montrons qu'elle est surjective.
     Soit $u \in E$; on pose $w = \dfrac{1}{a}u$ et donc, on démontre facilement que $h_a(w) = u$ et donc que si $a \neq 0$, h_a est surjective

   Donc, si $a \neq 0$, h_a est bijective

Exemple 1 :

Les ensembles suivants sont des $\mathbb{R}$-espace vectoriel

1. Pour tout entier n, l'ev $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel .
2. L'espace $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, ensemble des fonctions de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
3. $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
4. L'ensemble des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
5. L'ensemble des suites bornées de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
6. $\mathbb{R}[X]$ ensemble des polynômes à coefficients réels est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Exercice 1 :

Etant donnés les couples $A = (-2, 3, 7)$, $B = (-2, -1, 0)$, $C = (-7, -4, 5)$, déterminer le triplet X défini par

1. $X = 5A + B$
2. $3X + 2A - B = 0$
3. $7X + C - 2B = 0$

7.2 Sous espaces vectoriels

7.2.1 Définition

Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(F, +', \bullet')$ un second $\mathbb{R}$-espace vectoriel .
$(F, +', \bullet')$ est un sous espace vectoriel de $(E, +, \bullet)$ si et seulement si :

1. $F \subset E$
2. $+'$ est la restriction sur F de $+$, c'est à dire : $\forall u, v \in F$,nous avons $u +' v = u + v$
3. $\bullet'$ est la restriction sur F de $\bullet$, c'est à dire : $\forall \overrightarrow{u} \in F$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \bullet' \overrightarrow{u} = a \bullet \overrightarrow{u}$

Remarque 2 :

En fait F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset E$ **et** F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel avec **les mêmes lois** que celles de E

7.2.2 Proposition importante

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel . Un sous ensemble F de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

1. $F \neq \emptyset$
2. F est stable par combinaison linéaire, c'est à dire :
   (a) $(\forall u \in F)\,(\forall v \in F)\,(u + v \in F)$
   (b) $\forall u \in F$, $\forall a \in \mathbb{R}$, nous avons , $a.u \in F$

Remarque 3 :

1. C'est presque toujours la vérification de $\overrightarrow{0} \in F$ qui permet de voir que F est non vide.
2. Si nous réussissons à démontrer que le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ **n'est pas dans** F, alors on peut être sûr que F n'est pas un sous-espace vectoriel, car un espace vectoriel contient forcément le vecteur nul
3. Après avoir montré que $F \neq \emptyset$, au lieu des deux dernières conditions on peut donner une condition unique que nous utilisons le plus souvent :

$$\boxed{(\forall u, v \in F)\,(\forall a, b \in \mathbb{R})\,(a.u + b.v \in F)}$$

4. Très souvent, pour montrer que nous avons affaire à un $\mathbb{R}$-espace vectoriel , nous démontrerons que c'est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel bien connu
5. Comment alors démontrer qu'un sous-ensemble F est une sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E ?
   (a) Premièrement, on démontre que $F \neq \emptyset$, et pour ce faire, on se précipite sur le vecteur nul $\overrightarrow{0}$
      i. En effet, si $\overrightarrow{0} \in F$, on démontre que $F \neq \emptyset$ et que F est **peut-être** un sous-espace vectoriel
      ii. Et si $\overrightarrow{0} \notin F$, alors, F n'est sûrement pas un sous-espace vectoriel , puisque, dans un sous-espace vectoriel , **nous avons toujours** $\overrightarrow{0} \in F$
   (b) Puis on étudie la stabilité par combinaison linéaire
      i. On prend $u \in F$ et $v \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$
      ii. Et on vérifie que $\lambda u + \mu v \in F$

Exemple 2 :

Premiers exemples de sous-espaces vectoriels

1. L'espace des fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$, noté $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel , car il est non vide *(il suffit de choisir la fonction nulle)* et la somme de 2 fonctions continues est une fonction continue. De même pour le produit d'une fonction continue par une constante réelle quelconque est aussi une fonction continue.
2. L'espace des fonctions bornées sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$
3. L'espace des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
4. L'espace de polynômes de degrés inférieur ou égal à n.

Exemple 3 :

1. **Montrer que $F_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x+2y=0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$**
   (a) Premièrement, on démontre que $F_1 \neq \emptyset$, et pour ce faire, on se précipite sur le vecteur nul $\overrightarrow{0}$. Le vecteur nul de $\mathbb{R}^2$ est donné par $\overrightarrow{0} = (0,0)$. Et nous avons bien $(0,0) \in F_1$ puisque $(0,0)$ vérifie bien la relation de définition de F_1 qui est $x+2y=0$
   (b) Soient $u \in F_1$ et $v \in F_1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ et on vérifie que $\lambda u + \mu v \in F_1$
   — Nous avons $u=(x,y)$ et $x+2y=0$, car $u \in F_1$. De même, si $v=(x',y')$, nous avons $x'+2y'=0$, car $v \in F_1$
   — $\lambda u + \mu v = \lambda(x,y) + \mu(x',y') = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y')$
   — Vérifions que $\lambda u + \mu v \in F_1$
   $(\lambda x + \mu x') + 2(\lambda y + \mu y') = \lambda(x+2y) + \mu(x'+2y') = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0$
   Donc, $\lambda u + \mu v \in F_1$
   Donc F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$
2. **L'espace des suites bornées est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$**
   Qu'est ce qu'une suite bornée ? ? Donnons en la définition formalisée :
   $$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ est bornée } \Longleftrightarrow (\exists M_u > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(|u_n| \leqslant M_u)$$
   Montrons que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
   (a) Premièrement, c'est bien un ensemble non vide puisque la suite nulle $\mathcal{O}$ est bien une suite bornée
   (b) Secondement, soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites bornées, c'est à dire telles que
   — $(\exists M_u > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(|u_n| \leqslant M_u)$
   — $(\exists M_v > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(|v_n| \leqslant M_u)$
   Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ et on vérifie que $\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons, en utilisant l'inégalité triangulaire, $|\lambda u_n + \mu v_n| \leqslant |\lambda u_n| + |\mu v_n|$
   D'autre part, $|\lambda u_n| = |\lambda|\,|u_n|$ et $|\mu v_n| = |\mu|\,|v_n|$
   Donc, $|\lambda u_n + \mu v_n| \leqslant |\lambda|\,|u_n| + |\mu|\,|v_n|$
   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\lambda u_n + \mu v_n| \leqslant |\lambda|\,M_u + |\mu|\,M_v$, ce qui montre que la suite $\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée.
   L'ensemble des suites brnées est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
3. On appelle $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications numériques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   Montrez que $F_1 = \{f \in \mathcal{F} \text{ telle que } f \text{ est paire }\}$ sous-espace vectoriel
   Une fonction paire est une fonction telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous ayions $f(-x) = f(x)$
   (a) Tout d'abord, F_1 est non vide, puisque la fonction nulle $\mathcal{O}$ est paire, car, pour tout $x \in \mathbb{R}$
   $$\mathcal{O}(-x) = \mathcal{O}(x) = 0$$

(b) Montrons que F_1 est stable par combinaison linéaire
Soient $f \in F_1$ $g \in F_1$ $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned}(af+bf)(-x) &= (af)(-x)+(bf)(-x)\\ &= af(-x)+bf(-x)\\ &= af(x)+bf(x)\\ &= (af)(x)+(bf)(x)\\ &= (af+bf)(x)\end{aligned}$$

Nous avons bien, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(af+bf)(-x) = (af+bf)(x)$, ce qui montre que $af+bg$ est paire, et que F_1 est stable par combinaison linéaire.

F_1 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$

Exercice 2 :

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

1. L'ensemble $F_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x-2y=2\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?
2. L'ensemble $F_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x-2y=0\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?
3. Soient $u=(2,-1)$ et $v=(2,1)$; nous avons $u \in F_1 \cup F_3$ et $v \in F_1 \cup F_3$; avons nous $u+v \in F_1 \cup F_3$? Que pensez-vous de la réunion de 2 sous-espaces vectoriels ?

7.2.3 Proposition

Exemple très important de sous-espace vectoriel : l'intersection de 2 sous-espaces vectoriels

L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel , et F_1 et F_2, 2 sous-espaces vectoriels de E ; considérons donc $F_1 \cap F_2$

1. Tout d'abord,$F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$; en effet, comme ce sont 2 sous-espaces vectoriels , alors, $\overrightarrow{0}$ appartient à F_1 et $\overrightarrow{0}$ appartient à F_2, et donc $\overrightarrow{0} \in F_1 \cap F_2$
2. En second lieu, soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{u} \in F_1 \cap F_2$ et $\overrightarrow{v} \in F_1 \cap F_2$
Alors, $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} \in F_1$, car $\overrightarrow{u} \in F_1$ et $\overrightarrow{v} \in F_1$ et que F_1 est un sous-espace vectoriel . De même, et pour les mêmes raisons, $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} \in F_2$; donc $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} \in F_1 \cap F_2$; ce que nous voulions.

7.2.4 Sous espaces de $\mathbb{R}^n$

1. Étant donnés des nombres réels $a_1, \ldots, a_n$ non tous nuls, l'ensemble des n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ vérifiant l'équation :$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ est appelé hyperplan de $\mathbb{R}^n$.
2. Plus généralement, on peut définir les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ comme intersection de plusieurs hyperplans. Ainsi les solutions d'un système de n équations homogènes à n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 4 :

1. Dans $\mathbb{R}^3$, un hyperplan a pour équation $ax+by+cz=0$, qui est donc appelé plan. L'intersection de deux hyperplans de $\mathbb{R}^3$ est donc le système d'équation :

$$\left\{\begin{array}{l} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \end{array}\right.$$

qui est, en fait, l'équation d'une droite dans $\mathbb{R}^3$

2. Dans le cas précédent, nous avons affaire à l'intersection de 2 sous-espaces vectoriels . En effet $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } ax + by + cz = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, de même que $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } a'x + b'y + c'z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   Les éléments de $F_1 \cap F_2$ vérifient :
   $$F_1 \cap F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } ax + by + cz = 0 \textbf{ et } a'x + b'y + c'z = 0\}$$
   Les éléments de $F_1 \cap F_2$ sont donc les solutions du système.

7.3 Combinaisons linéaires, espaces engendrés

7.3.1 Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel . Soient $u_1, .., u_p$ des vecteurs de E.

1. On appelle combinaison linéaire à coefficients réels de $u_1, .., u_p$ tout vecteur $X \in E$ de la forme :
   $$X = a_1 u_1 + \ldots + a_p u_p$$
   avec $a_1, \ldots, a_p$ réels.
2. 2 vecteurs u et v de E sont dits colinéaires s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda v$
3. p vecteurs $u_1, .., u_p$ sont dits colinéaires, su l'un des vecteurs s'écrit comme combinaison linéaire des autres

Remarque 4 :

1. Une combinaison linéaire est toujours une somme finie.
2. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est stable par combinaison linéaire.

Exemple 5 :

1. Dans $\mathbb{R}^3$, si $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (4, 5, 6)$ et $u_3 = (7, 8, 9)$, nous avons $u_2 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_3$; u_2 est donc combinaison linéaire de u_1 et de u_3
2. En fait, dans $\mathbb{R}^3$, tous les triplets (x, y, z) sont combinaison linéaire de $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$, car :
   $$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$$
3. Dans $\mathbb{R}_2[X]$,$\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, tout polynôme P est combinaison linéaire des polynômes e_0, e_1 et e_2, où $e_0(X) = 1$, $e_1(X) = X$ et $e_2(X) = X^2$

7.3.2 Proposition et définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $u_1, .., u_p$, p vecteurs de E. On appelle $\text{Vect}(u_1, .., u_p)$ l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients réels des vecteurs $u_1, .., u_p$, c'est à dire :
$$\text{Vect}(u_1, .., u_p) = \left\{ x \in E \text{ tels que } x = \sum_{i=1}^{p} a_i u_i \text{ où } a_i \in \mathbb{R} \right\}$$
Nous avons les résultats suivants :

1. $\text{Vect}(u_1, .., u_p)$ est un sous-espace vectoriel de E
2. $\text{Vect}(u_1, .., u_p)$ est appelé espace engendré par $u_1, .., u_p$, ou que que la famille $\{u_1, .., u_p\}$ est génératrice de $\text{Vect}(u_1, .., u_p)$

Démonstration

Nous allons montrer que $\text{Vect}\,(u_1, .., u_p)$ est un sous-espace vectoriel de E

1. Vérifions d'abord que $\text{Vect}\,(u_1, .., u_p) \neq \emptyset$

   Il suffit de voir que $\overrightarrow{0} = 0.u_1 + \ldots + 0.u_p$; donc, $\overrightarrow{0}$ est combinaison linéaire des $u_1, .., u_p$, et donc $\overrightarrow{0} \in \text{Vect}\,(u_1, .., u_p)$

2. Soient $a \in \text{Vect}\,(u_1, .., u_p)$, $b \in \text{Vect}\,(u_1, .., u_p)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ Alors

$$\begin{aligned}\lambda a + \mu b &= \lambda \sum_{i=1}^{p} a_i u_i + \mu \sum_{i=1}^{p} b_i u_i \\ &= \sum_{i=1}^{p} \lambda a_i u_i + \sum_{i=1}^{p} \mu b_i u_i \\ &= \sum_{i=1}^{p} (\lambda a_i + \mu b_i)\, u_i\end{aligned}$$

   Ce qui montre bien que $\lambda a + \mu b$ est combinaison linéaire des $u_1, .., u_p$ et est élément de $\text{Vect}\,(u_1, .., u_p)$

Donc $\text{Vect}\,(u_1, .., u_p)$ est un sous-espace vectoriel de E

7.3.3 Proposition et définition

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A une partie non vide de E. Alors,

1. Il existe un plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A ; ce sous-espace vectoriel est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels contenant A. On appelle cet espace $\text{Vect}\,(A)$
   $\text{Vect}\,(A)$ est le sous-espace vectoriel engendré par A
2. $\text{Vect}\,(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de A

Démonstration

On appelle $\Gamma(A)$, l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de A ; il faut donc montrer que $\Gamma(A) = \text{Vect}\,(A)$

1. Tout d'abord, montrons que $\Gamma(A)$ est un sous-espace vectoriel , et $A \subset \Gamma(A)$
   - ▷ $\Gamma(A) \neq \emptyset$ puisque $\overrightarrow{0} = 0 \times \overrightarrow{a}$ où $\overrightarrow{a} \in A$
   - ▷ Ensuite, si $x \in \Gamma(A)$, $y \in \Gamma(A)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$.

     Alors $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k a_k$ et $y = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} y_k b_k$, avec $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_p$ $n+p$ éléments de A et $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p$ $n+p$ éléments de $\mathbb{R}$, et donc :

$$\lambda x + \mu y = \sum_{k=1}^{n} \lambda x_k a_k + \sum_{k=1}^{p} \mu y_k b_k$$

     Et $\lambda x + \mu y$ apparaît ainsi comme une combinaison linéaire d'éléments de A et $\lambda x + \mu y \in \Gamma(A)$
   - ▷ Ainsi,$\Gamma(A)$ est un sous-espace vectoriel de E

   Donc, $\Gamma(A)$ étant un sous-espace vectoriel et $\text{Vect}\,(A)$ étant le plus petit sous-espace vectoriel contenant A $\text{Vect}\,(A) \subset \Gamma(A)$
2. Tout sous-espace vectoriel F de E contenant A contient toute combinaison linéaire d'éléments de A, donc $\Gamma(A) \subset F$
3. Donc $\Gamma(A) \subset \bigcap\limits_{F \supset A} F$; donc $\Gamma(A) \subset \text{Vect}\,(A)$
4. Ainsi,$\Gamma(A) = \text{Vect}\,(A)$

Exemple 6 :

1. Si dans $\mathbb{R}^3$, $u_1 = (1,2,3)$, $u_2 = (4,5,6)$, alors, $\text{Vect}(\{u_1, u_2\}) = \{\lambda u_1 + \mu u_2$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}\}$
   Si $A = \{u_1, u_2, u_3\}$ où $u_3 = (7,8,9)$, que dire de $\text{Vect}(\{u_1, u_2\})$ et de $\text{Vect}(A)$?

   Nous avons clairement $\text{Vect}(\{u_1, u_2\}) = \text{Vect}(A)$

   — Soit $x \in \text{Vect}(\{u_1, u_2\})$; alors, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $x = \lambda u_1 + \mu u_2$. Or $u_1 + u_3 = 2u_2$, c'est à dire que $u_3 = 2u_2 - u_1$.
   Donc,
   $$\begin{aligned} x = \ & \lambda u_1 + \mu u_2 \\ = \ & \lambda u_1 + \mu u_2 + u_3 - u_3 \\ = \ & \lambda u_1 + \mu u_2 + u_3 - 2u_2 + u_1 \\ = \ & (\lambda + 1)\, u_1 + (\mu - 2)\, u_1 + u_3 \end{aligned}$$
   x est donc combinaison linéaire de u_1, u_2 et u_3, et donc $x \in \text{Vect}(A)$
   Donc $\text{Vect}(\{u_1, u_2\}) \subset \text{Vect}(A)$

   — Réciproquement, supposons $x \in \text{Vect}(A)$; alors, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $x = \lambda u_1 + \mu u_2 + \gamma u_3$
   De l'égalité $u_3 = 2u_2 - u_1$, nous avons,
   $$\begin{aligned} x = \ & \lambda u_1 + \mu u_2 + \gamma u_3 \\ = \ & \lambda u_1 + \mu u_2 + \gamma (2u_2 - u_1) \\ = \ & (\lambda - \gamma)\, u_1 + (\mu + 2\gamma)\, u_2 \end{aligned}$$
   x est donc combinaison linéaire de u_1 et u_2, et donc $x \in \text{Vect}(\{u_1, u_2\})$
   Donc, $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(\{u_1, u_2\})$

   En conclusion, $\text{Vect}(A) = \text{Vect}(\{u_1, u_2\})$

2. Tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ s'écrit sous la forme $(x,y) = x\,(1,0) + y\,(0,1)$, et on a donc :
   $$\mathbb{R}^2 = \text{Vect}(\{(0,1)\,;(1,0)\})$$

3. Mais nous avons aussi $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}(\{(2,0)\,;(-1,1)\})$

Remarque 5 :

1. L'espace engendré par un seul vecteur non nul u est appelé **droite vectorielle engendrée par** u. L'espace engendré par deux vecteurs non nuls et non colinéaires est un plan vectoriel.
2. Cette proposition justifie le fait que l'on pose $\text{Vect}(\emptyset) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ puisque $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E.
3. Cette proposition permet de construire des sous-espaces vectoriels en donnant l'ensemble des vecteurs qui les engendrent. Par exemple on peut parler du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par u qui n'est autre qu'une droite vectorielle.

7.3.4 Proposition

Soient A et B des parties de E qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel . On suppose que $A \subset B$. Alors $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$.

Démonstration

Soit $x \in \text{Vect}(A)$; alors il existe $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A^n$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$

Comme $A \subset B$, pour tout $i = 1, \cdots, n$, si $x_i \in A$, alors $x_i \in B$ et $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ est donc un élément de $\text{Vect}(B)$; donc $x \in \text{Vect}(B)$ C'est à dire, $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$

7.3.5 Proposition

Soient $p \geqslant 2$ un entier et $u_1, .., u_p$ des vecteurs de E.

1. Soit a un réel non nul, alors : $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \text{Vect}(a.u_1, \dots, u_p)$
2. Soit $v = u_1 + \sum_{i=2}^{p} \lambda_i u_i$, alors : $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \text{Vect}(v, u_2 \dots, u_p)$

C'est à dire : On ne change pas l'espace engendré par un ensemble de vecteurs quand on change un des vecteurs en lui ajoutant une combinaison linéaire des autres vecteurs.

Démonstration

1. Montrons que $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \text{Vect}(a.u_1, \dots, u_p)$

   ▷ Soit $x \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$; alors, il existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$. Nous pouvons aussi écrire $x = \frac{\lambda_1}{a} a u_1 + \sum_{i=2}^{p} \lambda_i u_i$, et on démontre ainsi que $x \in \text{Vect}(a.u_1, \dots, u_p)$

   Donc, $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) \subset \text{Vect}(a.u_1, \dots, u_p)$

   ▷ Une démonstration semblable montrerait que $\text{Vect}(a.u_1, \dots, u_p) \subset \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$

   Donc, nous avons $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \text{Vect}(a.u_1, \dots, u_p)$

2. Montrons que $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \text{Vect}(v, u_2 \dots, u_p)$ où $v = u_1 + \sum_{i=2}^{p} \lambda_i u_i$

   ▷ Soit $x \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$; alors, il existe $x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_p \in \mathbb{R}$ tels que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i u_i$. Nous pouvons aussi écrire $x = x_1 u_1 + \sum_{i=2}^{p} x_i u_i$.

   En re-écrivant $u_1 = v - \sum_{i=2}^{p} \lambda_i u_i$, nous avons :

   $$x = x_1 u_1 + \sum_{i=2}^{p} x_i u_i = x_1 \left(v - \sum_{i=2}^{p} \lambda_i u_i \right) + \sum_{i=2}^{p} x_i u_i = x_1 v + \sum_{i=2}^{p} (x_i - \lambda_i) u_i$$

   Donc, $x \in \text{Vect}(v, u_2 \dots, u_p)$ et $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) \subset \text{Vect}(v, u_2 \dots, u_p)$

   ▷ Soit $x \in \text{Vect}(v, u_2 \dots, u_p)$

   Alors, $x = x_1 v + \sum_{i=2}^{p} x_i u_i$. On utilise le fait que $v = u_1 + \sum_{i=2}^{p} \lambda_i u_i$, et nous avons :

   $$x = x_1 \left(u_1 + \sum_{i=2}^{p} \lambda_i u_i \right) + \sum_{i=2}^{p} x_i u_i = x_1 u_1 + \sum_{i=2}^{p} (x_1 \lambda_i + x_i) u_i$$

   D'où $x \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ et donc $\text{Vect}(v, u_2 \dots, u_p) \subset \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$

   Donc, nous avons $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \text{Vect}(v, u_2 \dots, u_p)$

Exercice 3 :

Dans $\mathbb{R}^3$,on considère la famille $u = (-1, 1, -3), v = (1, 2, 5), w = (-1, 7, 1)$. Avons nous

1. $\text{Vect}(u, v, w) = \text{Vect}(u, v)$
2. $\text{Vect}(u, v, w) = \text{Vect}(u, w)$
3. $\text{Vect}(u, v, w) = \text{Vect}(v, w)$

Résolution de l'exercice

Pour démontrer une quelconque de ces égalités, il faut vérifier que l'un des vecteurs est combinaison linéaire des 2 autres, en d'autres termes, existe-t-il $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que, par exemple, $w = au + bv$?

Si ces réels existent, nous avons le système :

$$\begin{cases} -a + b = & -1 \\ a + 2b = & 7 \\ -3a + 5b = & 1 \end{cases}$$

D'où on tire que $a = 3$ et $b = 2$, et donc $w = 3u + 2v$

1. Ainsi, si $x \in \text{Vect}\,(u, v, w)$, alors $x = au + bv + cw$ et, en remplaçant w par sa valeur en fonction de u et v, nous avons :

$$x = au + bv + cw = au + bv + c\,(3u + 2v) = (a + 3c)\,u + (b + 2c)\,v$$

   Et donc, $x \in \text{Vect}\,(u, v)$

2. Réciproquement, si $x \in \text{Vect}\,(u, v)$, alors $x = au + bv = au + bv + w - w = au + bv + w - (3u + 2v) = (a - 3)\,u + (b - 2)\,v + w$

   et donc, $x \in \text{Vect}\,(u, v, w)$

3. Nous avons donc $\text{Vect}\,(u, v, w) = \text{Vect}\,(u, v)$

Les autres démonstrations sont semblables. Il faut simplement remarquer que :

$$w = 3u + 2v \Longleftrightarrow u = \frac{1}{3}w - \frac{2}{3}v \Longleftrightarrow v = \frac{1}{2}w - \frac{3}{2}u$$

Exercice 4 :

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $a = (2, 3, -1)$, $b = (1, -1, -2)$, $c = (3, 7, 0)$ et $d = (5, 0, -7)$.
Montrer que $\text{Vect}\,(a, b) = \text{Vect}\,(c, d)$.

Résolution de l'exercice

La résolution de cet exercice ne diffère pas de l'exercice précédent. Il suffit effectivement de montrer que les vecteurs c et d sont combinaisons linéaires de a et b

1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $c = \lambda a + \mu b$; alors, nous avons le système :

$$\begin{cases} 2\lambda + \mu = & 3 \\ 3\lambda - \mu = & 7 \\ -\lambda - 2\mu = & 0 \end{cases}$$

   D'où nous tirons $\lambda = 2$ et $\mu = -1$, c'est à dire que $c = 2a - b$

2. de même, soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $d = \lambda a + \mu b$; alors, nous avons le système :

$$\begin{cases} 2\lambda + \mu = & 5 \\ 3\lambda - \mu = & 0 \\ -\lambda - 2\mu = & -7 \end{cases}$$

   D'où nous tirons $\lambda = 1$ et $\mu = 3$, c'est à dire que $d = a + 3b$

3. Du système

$$\begin{cases} c = & 2a - b \\ d = & a + 3b \end{cases}$$

   On tire donc $a = \dfrac{3}{7}c + \dfrac{1}{7}d$ et $b = -\dfrac{1}{7}c + \dfrac{1}{7}d$

Nous avons donc bien $\text{Vect}\,(a, b) = \text{Vect}\,(c, d)$

7.3.6 Définition

Soient E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel , et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E ; on appelle sous-espace vectoriel somme de F_1 et F_2 l'ensemble

$$F_1 + F_2 = \{y \in E \text{ tels que } y = x_1 + x_2 \text{ où } x_1 \in F_1 \text{ et } x_2 \in F_2\}$$

7.3.7 Proposition

Soient E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel , et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E

Démonstration

1. Premièrement, $F_1 + F_2 \neq \emptyset$. Comme d'habitude, il suffit de voir que $\overrightarrow{0} \in F_1 + F_2$.
   En effet, $\overrightarrow{0} \in F_1 \cap F_2$, et $\overrightarrow{0}$ peut être considéré comme élément de F_1 ou élément de F_2. De $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0}$, nous avons bien $\overrightarrow{0} \in F_1 \cap F_2$
2. En second lieu, soient $u \in F_1 + F_2$, $v \in F_1 + F_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$; nous allons montrer que $\lambda u + \mu v \in F_1 + F_2$
   - Comme $u \in F_1 + F_2$, il existe $u_1 \in F_1$ et $u_2 \in F_2$ tels que $u = u_1 + u_2$; de même $v = v_1 + v_2$ avec $v_1 \in F_1$ et $v_2 \in F_2$.
     Donc : $\lambda u + \mu v = \lambda (u_1 + u_2) + \mu (v_1 + v_2) = (\lambda u_1 + \mu v_1) + (\lambda u_2 + \mu v_2)$
   - F_1 étant un sous-espace vectoriel de E, $\lambda u_1 + \mu v_1 \in F_1$; de même, F_2 étant un sous-espace vectoriel de E, $\lambda u_2 + \mu v_2 \in F_1$
     Donc, $\lambda u + \mu v \in F_1 + F_2$

$F_1 + F_2$ est bien un sous-espace vectoriel de E

7.3.8 Proposition

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel , et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E ; alors, $\text{Vect}(F_1 \cup F_2) = F_1 + F_2$

Démonstration

Il nous faut donc démontrer que $F_1 + F_2$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant $F_1 \cup F_2$

1. Tout d'abord, $F_1 \cup F_2 \subset F_1 + F_2$
   En effet, si $y \in F_1 \cup F_2$, alors $y \in F_1$ ou $y \in F_2$.
   Si $y \in F_1$, alors $y = y + \overrightarrow{0}$ et donc $y \in F_1 + F_2$. Il en est de même si $y \in F_2$.
   Donc $F_1 \cup F_2 \subset F_1 + F_2$
2. Ensuite, $F_1 + F_2$ étant un sous-espace vectoriel de E, nous avons donc sûrement $\text{Vect}(F_1 \cup F_2) \subset F_1 + F_2$
3. Mais, en fait, $F_1 + F_2$ est strictement l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de F_1 et de F_2, donc d'éléments de $F_1 \cup F_2$; ainsi, d'après 7.3.3, $\text{Vect}(F_1 \cup F_2) = F_1 + F_2$

Exercice 5 :

Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E. Montrez que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Correction de l'exercice

1. Si $F \subset G$, alors $F \cup G = G$, et G étant un sous-espace vectoriel , il en est de même de $F \cup G$
   De même si $G \subset F$, alors $F \cup G = F$, et F étant un sous-espace vectoriel , il en est de même de $F \cup G$

2. Réciproquement, supposons $F \nsubseteq G$ et $G \nsubseteq F$
   Il existe alors $x \in F$ tel que $x \notin G$, c'est à dire tel que $x \in F \backslash G$; de même, il existe $y \in G$ tel que $y \notin F$, c'est à dire tel que $y \in G \backslash F$
   Nous avons, en fait, $x \in F \cup G$ et $y \in F \cup G$; comme $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel , nous avons $x + y \in F \cup G$, c'est à dire $x + y \in F$ ou $x + y \in G$
   — Si $x + y \in F$, alors $y = (x + y) - x$, et $y \in F$, car F est un sous-espace vectoriel ; ce qui est absurde, car, par hypothèse, $y \notin F$
   — De même, on démontre que si $x + y \in G$, alors $x \in G$
   La réunion de deux sous-espace vectoriel n'est pas un sous-espace vectoriel , si aucun des deux n'est inclus dans l'autre

7.3.9 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E
Il y a équivalence entre les deux propositions suivantes :
1. $E = F_1 + F_2$ et $F_1 \cap F_2 = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$
2. Tout élément $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$

Démonstration

1. Supposons $E = F_1 + F_2$ et $F_1 \cap F_2 = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$
   Montrons l'unicité de la décomposition $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$
   Supposons qu'il y ait deux décompositions, c'est à dire que nous avons aussi $x = y_1 + y_2$ où $y_1 \in F_1$ et $y_2 \in F_2$.
   Alors, nous avons l'égalité $y_1 + y_2 = x_1 + x_2$, c'est à dire,$y_1 - x - 1 = x_2 - y_2$; F_1 étant un sous-espace vectoriel , $y_1 - x_1 \in F_1$; de même $x_2 - y_2 \in F_2$, et donc $y_1 - x_1 \in F_1 \cap F_2$, c'est à dire $y_1 - x_1 = \overrightarrow{0}$, et donc $y_1 = x_1$.
   Le raisonnement vaut aussi pour $y_2 = x_2$
   Ainsi, si $E = F_1 + F_2$ et $F_1 \cap F_2 = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, Tout élément $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$
2. Réciproquement, supposons que tout élément $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in$
   Il faut donc montrer que $F_1 \cap F_2 = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$
   Soit $y \in F_1 \cap F_2$
   - Alors, on considère d'abord que $y \in F_1$: $y = y + \overrightarrow{0}_{F_2}$;
   - De même, si on considère $y \in F_2$, nous avons $y = \overrightarrow{0}_{F_1} + y$
   - Donc $\overrightarrow{0}_{F_1} + y = y + \overrightarrow{0}_{F_2}$
     De l'unicité de la décomposition,nous déduisons que $y = \overrightarrow{0}_{F_1} = \overrightarrow{0}_{F_2} = \overrightarrow{0}$

7.3.10 Définition

Quand l'une des deux conditions de 7.3.9 sont réunies, on dit que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E et on note alors $E = F_1 \oplus F_2$
On dit donc que E est somme directe de F_1 et de F_2, et que F_2 est un supplémentaire de F_1 dans E, *(et réciproquement ! !)*

Exemple 7 :

1. Dans $\mathbb{R}^2$, les espaces $F_1 = \{(x, 0)\, x \in \mathbb{R}\}$ et $F_2 = \{(0, y)\, y \in \mathbb{R}\}$ sont supplémentaires.
   Il est tout à fait évident que tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ s'écrit de manière unique

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y)$$

2. **Un exemple classique :** On appelle $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, l'espace des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est somme directe des ensembles des fonctions paires et des fonctions impaires.
   (a) Soit P l'ensemble des fonctions paires. Nous avons déjà démontré que c'était un sous-espace vectoriel
   (b) Soit I l'ensemble des fonctions impaires. Nous démontrons, de la même manière que c'est un sous-espace vectoriel
   (c) Le plus difficile est donc de montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = P \oplus I$
      i. On montre que $P \cap I = \{\mathcal{O}\}$
      Soit $\varphi \in P \cap I$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\varphi(-x) = \varphi(x)$ car $\varphi \in P$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ car $\varphi \in I$
      Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\varphi(x) = -\varphi(x)$, c'est à dire $2\varphi(x) = 0$, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\varphi(x) = 0$; φ est donc la fonction nulle $\mathcal{O}$
      ii. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$; nous allons montrer que f est somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
      En posant
      — $\varphi(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$
      — $\psi(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$
      On démontre facilement, que φ est paire, que ψ est impaire, et que $f = \varphi + \psi$
   Nous avons bien $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = P \oplus I$

7.4 Familles génératrices, Familles libres

7.4.1 Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel .
Une famille $\{u_1, .., u_p\}$ de vecteurs de E telle que $\text{Vect}(\{u_1, .., u_p\}) = E$ est appelée famille génératrice de E.
Autrement dit
La famille $\{u_1, .., u_p\}$ est une famille génératrice de E si et seulement si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de vecteurs de cette famille.

7.4.2 Définition

On dit que E $\mathbb{R}$-espace vectoriel , est de dimension finie s'il existe une famille génératrice finie d'éléments de E.

Remarque 6 :

Si E est de dimension finie et non réduit à $\overrightarrow{0}$, il existe alors $\{u_1, .., u_p\}$ dans E tels que $\text{Vect}(\{u_1, .., u_p\}) = E$, c'est à dire que tout vecteur $x \in E$ peut s'écrire $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$. Cette écriture, à priori, n'est pas unique

Exemple 8 :

1. Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ avec $u_1 = (1, 0)$, $u_2 = (0, 2)$ et $u_3 = (1, 1)$ est génératrice, car tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ s'écrit $(x, y) = \dfrac{x}{2}u_1 + \left(\dfrac{y}{2} - \dfrac{x}{4}\right)u_2 + \dfrac{x}{2}u_3$, et cette écriture n'est pas unique, puisque nous avons aussi $(x, y) = \dfrac{x}{3}u_1 + \left(\dfrac{y}{2} - \dfrac{x}{3}\right)u_2 + \dfrac{2x}{3}u_3$
2. L'espace $\mathbb{R}_2[X]$ est un espace vectoriel de dimension finie. En effet si $e_0(X) = 1$, $e_1(X) = X$ et $e_2(X) = X^2$, tout polynôme du second degré s'écrit : $P = ae_2 + be_1 + ce_0$
3. L'ensemble des polynômes $\mathbb{R}[X]$ $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie.

Supposons, au contraire, que $\mathbb{R}[X]$ soit de dimension finie.
Alors il existe $e_0, e_1, \dots, e_n$ qui engendrent $\mathbb{R}[X]$.
On appelle $q = \max\limits_{k=0,\dots,n} (\deg e_k)$, alors $Q(X) = X^{q+1}$ ne peut pas s'écrire en fonction des $e_0, e_1, \dots, e_n$.
Il y a donc contradiction et $\mathbb{R}[X]$ est de dimension finie

7.4.3 Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

1. Deux vecteurs $u \in E$ et $v \in E$ sont dits linéairement indépendants si et seulement si l'implication suivante est vraie :
$$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R})(a.u + b.v = 0 \Rightarrow a = b = 0)$$
2. Plus généralement, n vecteurs $u_1 \in E, \dots u_n \in E$ sont linéairement indépendants si et seulement si l'implication suivante est vraie :
$$(\forall a_1 \in \mathbb{R}, \dots, a_n \in \mathbb{R})(a_1.u_1 + \dots + a_n.u_n = 0 \Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0)$$

Remarque 7 :

1. La **dépendance linéaire** est le contraire de l'indépendance linéaire : n vecteurs $u_1, \dots u_n$ sont **linéairement dépendants** si et seulement si
$$(\forall a_1 \in \mathbb{R}, \dots, a_n \in \mathbb{R})(a_1.u_1 + \dots + a_n.u_n = 0 \text{ et il existe } k = 1 \dots n \text{ tel que } a_k \neq 0)$$
2. Un ensemble de vecteurs linéairement indépendant est une **famille libre**, sinon c'est une **famille liée**.
3. 2 vecteurs u et v sont colinéaires, si et seulement si, il existe $\lambda \neq 0$ tel que $u = \lambda v \iff u - \lambda v = \overrightarrow{0}$.
2 vecteurs colinéaires ne peuvent donc pas être indépendants.
4. On peut donner une définition analogue :
Deux vecteurs u et$v$ sont colinéaires si et seulement si $u \in \mathrm{Vect}(v)$ ou si $v \in \mathrm{Vect}(u)$.
5. La définition de la dépendance linéaire est équivalente à celle-ci : n vecteurs $u_1, \dots u_n$ sont **linéairement dépendants** si et seulement si l'un des vecteurs peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres : c'est à dire s'il existe $k \in \{1 \dots n\}$ tels que
$$u_k = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{k-1} u_{k-1} + \lambda_{k+1} u_{k+1} + \dots + \lambda_n u_n$$
6. 3 vecteurs linéairement dépendants ne sont pas nécessairement colinéaires 2 à 2.
   - ▷ Dans $\mathbb{R}^2$, la famille des 3 vecteurs $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (1, 1)$ et $e_3 = (0, 1)$. Cette famille n'est pas libre, car $e_2 = e_1 + e_3$.
   Par contre, ils sont 2 à 2 non colinéaires.*(cf figure 7.1)*

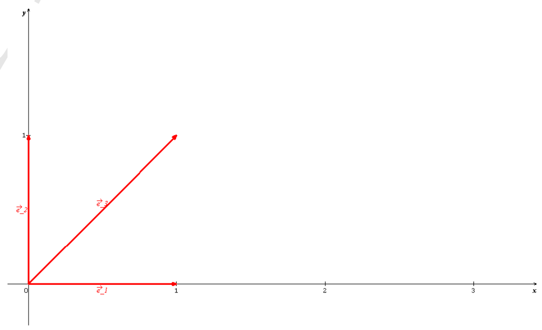


FIGURE 7.1 – La représentation des vecteurs e_1, e_2 et e_3

▷ De même, dans $\mathbb{R}^3$, on considère $u_1 = (1,2,3)$, $u_2 = (4,5,6)$ et $u_3 = (7,8,9)$; le système $\{u_1, u_2, u_3\}$ est lié car $u_2 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_3$, alors que chacun des systèmes $\{u_1, u_3\}$, $\{u_1, u_2\}$, $\{u_2, u_3\}$ est libre

7. Le vecteur nul ne peut pas appartenir à une famille libre.

   En effet, prenons $\mathbb{R}^3$, avec les vecteurs $i = (1,0,0)$ et $j = (0,1,0)$. Alors, la famille $\left\{\overrightarrow{0}, i, j\right\}$ n'est pas libre, puisque :
   $$25 \times \overrightarrow{0} + 0 \times i + 0 \times j = \overrightarrow{0}$$

8. De la même manière, un même élément ne peut pas apparaître deux fois dans une famille libre.

   Prenons toujours $\mathbb{R}^3$, avec les vecteurs $i = (1,0,0)$ et $j = (0,1,0)$. Alors, la famille $\{i, i, j\}$ n'est pas libre, puisque :
   $$25i - 25i + 0 \times j = \overrightarrow{0}$$

9. Une famille extraite d'une famille libre est libre.

Exercice 6 :

Montrez que les vecteurs $u = (3,1,2,0)$, $v = (0,0,-1,1)$ et $w = (0,0,0,2)$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^4$

7.4.4 Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une famille de n vecteurs de E.
Le rang de la famille $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est le plus grand nombre de vecteurs de cette famille linéairement indépendants.

7.4.5 Proposition

On considère une famille libre de n vecteurs $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de E .
Alors, tout vecteur de $\text{Vect}\left(\{u_1, \ldots, u_n\}\right)$ s'exprime de façon unique comme combinaison linéaire des $u_1, \ldots u_n$.

Démonstration

Soit $X \in \text{Vect}\left(\{u_1, \ldots, u_n\}\right)$, et on suppose que X admet deux décompositions suivant $\{u_1, \ldots, u_n\}$, c'est à dire : $X = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i = \sum_{i=1}^{n} y_i u_i$

Alors, en transposant, nous avons : $(x_1 - y_1)\, u_1 + \ldots + (x_n - y_n)\, u_n = \overrightarrow{0}$.
De l'indépendance des $\{u_1, \ldots, u_n\}$, on tire :$(x_1 - y_1) = \ldots = (x_n - y_n) = 0$, c'est à dire que pour tout $k = 1 \ldots n$, $x_k = y_k$

Remarque 8 :

1. Le mot important dans cette définition est le mot « **unique** »
2. La proposition précédente veut dire que si une famille est liée, un même élément de $\text{Vect}\left(\{u_1, \ldots, u_n\}\right)$ peut s'écrire de plusieurs façons

   Exemple :
   Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les 3 vecteurs $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (1,1)$ et $e_3 = (0,1)$. Le vecteur $X = (1,2)$ qui est un vecteur de $\text{Vect}\left(\{e_1, e_2, e_3\}\right)$ s'écrit : $X = e_1 + e_3 = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{3}{2}e_3$
   Il n'y a pas d'unicité de la décomposition de X suivant e_1, e_2, e_3

7.5 Base et dimension d'un espace vectoriel

7.5.1 Définition

On dit qu'une famille B de vecteurs d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est une base de E si c'est une famille libre et génératrice de E, c'est à dire si tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base B.

Remarque 9 :

1. **Qu'est ce que cela veut dire ?**
   Si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est une base de E, ceci veut dire que :
   (a) Pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$, c'est à dire $\text{vect}(\{u_1, \ldots, u_n\}) = E$
   (c'est un système générateur)
   (b) Ces scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont uniques*(c'est un système libre)*. L'unicité vient de la proposition 7.4.5
2. Cette notion est très importante puisqu'elle permet de calculer commodément dans les $\mathbb{R}$-espace vectoriel . Il faut cependant en montrer l'existence.
3. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots e_n)\}$ une base de E. Tout vecteur u de E s'écrit de façon unique : $u = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ avec $x_i \in \mathbb{R}$
   Ces réels $x_1, \ldots, x_n$sont appelés **coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.**
   Ces coordonnées sont uniques : on dit qu'**il y a unicité de la décomposition d'un vecteur dans une base.**

7.5.2 Théorème : existence d'une base

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.
De toute famille génératrice de E, on peut extraire une base B de E.

Démonstration

D'après la définition 7.4.2, E étant de dimension finie, il existe une famille génératrice finie de E.

1. Si cette famille génératrice est vide alors $E = \{\overrightarrow{0}\}$ et $B = \emptyset$
2. Supposons cette famille non vide et notons la $\{u_1, .., u_n\}$ et considérons toutes les sous-familles de cette famille. Certaines engendrent E et d'autres pas.
   On en choisit une qui engendre E et ait le plus petit nombre p d'éléments possible : $p \leqslant n$
   Démontrons par l'absurde que cette famille B, que l'on suppose formée des vecteurs $\{u_1, .., u_p\}$ est libre.
   En effet, si elle n'est pas libre, il y a un de ses éléments, disons u_1 par exemple, qui s'écrit comme combinaison linéaire des autres et on a alors :
   $$\text{Vect}(\{u_1, .., u_p\}) = \text{Vect}(\{u_2, .., u_p\})$$
   Par conséquent la famille $\{u_2, .., u_p\}$ engendre E et comporte $p-1$ éléments ce qui contredit la définition de p.
   Nous avons donc trouvé une famille libre et génératrice de E, donc une base de E.

Exemple 9 :

1. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère ; $\mathcal{B}_0 = \{(1,0)\ \ (0,1)\}$; c'est une base de $\mathbb{R}^2$. **Mais, ce n'est pas la seule !.** Il y a plusieurs bases dans un espace vectoriel
   Démontrons que $\mathcal{B}_1 = \{(1,1)\ \ (-1,1)\}$ est aussi une base de $\mathbb{R}^2$.

- C'est une famille libre.
  En effet, soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda(1,1) + \mu(-1,1) = (0,0)$
  Alors, nous avons $(\lambda - \mu, \lambda + \mu) = (0,0)$, ce qui nous donne le système :
  $$\begin{cases} \lambda - \mu = & 0 \\ \lambda + \mu = & 0 \end{cases}$$
  D'où on tire $\lambda = \mu = 0$
- C'est une famille génératrice
  Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Il faut trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $(x,y) = \lambda(1,1) + \mu(-1,1)$, ce qui nous donne le système :
  $$\begin{cases} \lambda - \mu = & x \\ \lambda + \mu = & y \end{cases}$$
  D'où on tire $\lambda = \dfrac{x+y}{2}$ et $\mu = \dfrac{y-x}{2}$; c'est donc bien une famille génératrice

$\mathcal{B}_1 = \{(1,1)\ (-1,1)\}$ est donc une base de $\mathbb{R}^2$

2. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère ; $\mathcal{B}_0 = \{(1,0,0)\ (0,1,0)\ (0,0,1)\}$; c'est une base de $\mathbb{R}^3$; on l'appelle **la base canonique**
3. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, si on considère $e_0(X) = 1$, $e_1(X) = X$ et $e_2(X) = X^2$, $\mathcal{B}_0 = \{e_0\ e_1\ e_2\}$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$; c'est ausssi la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$

7.5.3 Théorème de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors,
Toute famille libre $\mathcal{C} = \{u_1, \ldots, u_p\}$ de vecteurs de E, peut être complétée en une base $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_p, u_{p+1}, \ldots, u_n\}$ de E.

Démonstration

Il y a deux possibilités au départ : la famille $\mathcal{C}$ peut être génératrice de E, ou bien elle peut ne pas l'être.

1. Si la famille $\mathcal{C}$ engendre E, il suffit de poser $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ et nous ne complétons pas la famille $\mathcal{C}$, car la famille $\mathcal{C}$ étant libre et génératrice est une base
2. Supposons maintenant que $\mathcal{C}$ n'engendre pas E
   E étant de dimension finie, il existe une famille finie $\mathcal{G} = \{v_1, \ldots, v_q\}$ qui engendre E *(le problème, c'est qu'à priori elle n'est pas libre).*
   Nous allons construire une suite de familles libres $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_q$, par récurrence, de façon à ce que, au final, $\mathcal{C}_q$ soit une base de E.
   (a) Nous prenons au départ $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C} = \{u_1, \ldots, u_p\}$, et on construit $\mathcal{C}_1$ de la façon suivante :
   Nous examinons le vecteur v_1, le premier vecteur issu de la famille génératrice $\mathcal{G}$.
      i. Si $v_1 \in \text{Vect}(\mathcal{C}_0)$, on pose $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_0$.*(Mais on n'a pas avancé)*
      ii. Si $v_1 \notin \text{Vect}(\mathcal{C}_0)$, on pose $u_{p+1} = v_1$ et on construit alors $\mathcal{C}_1$ en adjoignant à $\mathcal{C}_0$ le vecteur v_1
      Donc, $\mathcal{C}_1 = \{u_1, \ldots, u_p, v_1\} = \{u_1, \ldots, u_p, u_{p+1}\} = \mathcal{C}_0 \cup \{u_{p+1}\}$.
      iii. Dans le deuxième cas on voit que la famille $\mathcal{C}_1$ est libre
      En effet, s'il existe des réels r_i tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p+1} r_i u_i = 0$, nous avons en premier lieu $r_{p+1} = 0$, car, sinon, cela signifierait que $u_{p+1} = v_1$ est combinaison linéaire des vecteurs $\{u_1, \ldots, u_p\}$, ce qui est impossible car $u_{p+1} = v_1 \notin \text{Vect}(\mathcal{C}_0)$
      Donc, $r_{p+1} = 0$, et donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} r_i u_i = 0$, ce qui montre que $r_1 = r_2 = \ldots = r_p = 0$, car la famille $\mathcal{C}_0$ est une famille libre.

   Ainsi, la famille $\mathcal{C}_1$ est une famille libre

(b) Et on continue ainsi de suite. Nous aurons au plus q itérations, de telle sorte que $\mathcal{C}_q$ forme une base de E beginenumerate

(c) La famille $\mathcal{C}_q$ est libre par construction.

(d) De plus, la famille $\mathcal{C}_q$ engendre E, car, par construction de $\mathcal{C}_q$, $\text{vect}\left(\{v_1, \ldots, v_q\}\right) \subset \text{vect}\left(C_q\right)$. Comme $E = \text{vect}\left(\{v_1, \ldots, v_q\}\right)$, C_q est une base de E.

7.5.4 Lemme

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et Soient $x_1, \ldots, x_p$, p vecteurs de E et $y_1, \ldots, y_{p+1}$ des combinaisons linéaires de $x_1, \ldots, x_p$, alors les $y_1, \ldots, y_{p+1}$ sont linéairement dépendants

Démonstration

La démonstration se fait par récurrence sur p

1. Elle est vraie pour $p = 1$
   En effet, si $y_1 = \lambda_1 x_1$ et si $y_2 = \lambda_2 x_1$, alors, $\lambda_2 y_1 - \lambda_1 y_2 = 0$, ce qui montre que les deux vecteurs y_1 et y_2 sont linéairement dépendants.
2. Supposons la propriété vraie au rang p
3. Démontrons la propriété au rang $p+1$
   Soient $x_1, \ldots, x_{p+1}$ et $y_1, \ldots, y_{p+2}$ des familles de vecteurs tels que les vecteurs de la famille $y_1, \ldots, y_{p+2}$ soient combinaisons linéaires de $x_1, \ldots, x_{p+1}$. Alors :

$$\left\{\begin{array}{rl} y_1 = & a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,p+1}x_{p+1} \\ y_2 = & a_{2,1}x_1 + \ldots + a_{2,p+1}x_{p+1} \\ \cdots & \cdots\cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ y_{p+2} = & a_{p+2,1}x_1 + \ldots + a_{p+2,p+1}x_{p+1} \end{array}\right.$$

Où les $a_{i,j} \in \mathbb{R}$.

Si tous les $a_{i,j}$ sont nuls, alors les $y_1 = \ldots = y_{p+2} = \overrightarrow{0}$ et la famille $y_1, \ldots, y_{p+2}$ est bien liée.

Sinon, supposons qu'il existe un $a_{i,j}$ non nul, et supposons, pour simplifier, que $a_{1,1} \neq 0$, alors, en écrivant

$$x_1 = \frac{1}{a_{1,1}} y_1 - \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} x_1 - \ldots - \frac{a_{1,p+1}}{a_{1,1}} x_{p+1}$$

x_1 s'écrit comme combinaison linéaire de $y_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$

De la même manière,en recombinant dans le système, nous pouvons écrire

$$\begin{array}{rl} y_2 = & \beta_2 y_1 + \gamma_{2,2}x_2 + \ldots + \gamma_{2,p+1}x_{p+1} \\ y_3 = & \beta_3 y_1 + \gamma_{3,2}x_2 + \ldots + \gamma_{3,p+1}x_{p+1} \\ \cdots & \cdots\cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ y_{p+2} = & \beta_{p+2} y_1 + \gamma_{p+2,2}x_2 + \ldots + \gamma_{p+2,p+1}x_{p+1} \end{array}$$

Ce système étant équivalent à

$$\begin{array}{rl} y_2 - \beta_2 y_1 = & \gamma_{2,2}x_2 + \ldots + \gamma_{2,p+1}x_{p+1} \\ y_3 - \beta_3 y_1 = & \gamma_{3,2}x_2 + \ldots + \gamma_{3,p+1}x_{p+1} \\ \cdots & \cdots\cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ y_{p+2} - \beta_{p+2} y_1 = & \gamma_{p+2,2}x_2 + \ldots + \gamma_{p+2,p+1}x_{p+1} \end{array}$$

Nous avons donc $p+1$ vecteurs $y_2 - \beta_2 y_1, y_3 - \beta_2 y_1, \ldots, y_{p+2} - \beta_{p+2} y_1$ qui sont des combinaisons linéaires des p vecteurs $x_2, \ldots, x_{p+1}$.

D'après l'hypothèse de récurrence, les $p+1$ vecteurs $y_2 - \beta_2 y_1, y_3 - \beta_2 y_1, \ldots, y_{p+2} - \beta_{p+2} y_1$ sont linéairement dépendants, ce qui se traduit par :

$$\lambda_1 \left(y_2 - \beta_2 y_1\right) + \lambda_2 \left(y_3 - \beta_2 y_1\right) + \ldots + \lambda_{p+1} \left(y_{p+2} - \beta_{p+2} y_1\right) = \overrightarrow{0}$$

Où les λ_i ne sont pas tous nuls ; ceci donne, une fois cette expression réorganisée,

$$\lambda_1' y_2 + \lambda_2' y_3 + \ldots + \lambda_{p+1}' y_{p+2} + \lambda_{p+2}' y_1 = \overrightarrow{0}$$

Où les λ_i' ne sont pas tous nuls. Ainsi, les $y_1, \ldots, y_{p+2}$ sont linéairement dépendants.

7.5.5 Théorème et définition

1. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = \{e_1, .., e_n\}$ une base de E. Soit $m > n$. Alors, toute famille de m vecteurs de E est liée.
2. Dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre d'éléments appelé dimension du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et noté $\dim E$

Démonstration

1. Si $\mathcal{B} = \{e_1, .., e_n\}$ est une base de E, alors, pour $m > n$, toute famille de m vecteurs de E est liée.
   Nous allons utiliser le lemme 7.5.4
   Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots e_n\}$ une base de E, et $f_1, \ldots, f_m$, m vecteurs de E, où $m > n$.
   Les f_i où $i = 1 \ldots, m$ sont tous combinaison linéaire des $\{e_1, \ldots e_n\}$, et d'après le lemme précédent 7.5.4, sont tous linéairement dépendants.
2. Supposons deux bases de E, $\mathcal{B}_0 = \{e_1, .., e_n\}$ et $\mathcal{B}_1 = \{f_1, .., f_m\}$, avec $m > n$.
   Chacune des f_i est combinaison linéaire des $\{e_1, .., e_n\}$, et la famille $\{f_1, .., f_m\}$ est donc liée, ce qui est en contradiction avec le point de départ qui est que $\mathcal{B}_1$ est une base ; donc, $m \leqslant n$; de la même manière, on montre que $n \leqslant m$, et donc $m = n$

7.5.6 Proposition

Dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n :

1. Toute famille libre $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de n vecteurs de E est une base.
2. Toute famille génératrice $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de n vecteurs de E est une base.

Démonstration

1. Soit $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une famille de n vecteurs de E libre
   D'après le théorème de la base incomplète 7.5.3, la famille $\{u_1, \ldots, u_n\}$ peut être complétée en une base $\{u_1, \ldots, u_n \ldots u_{n+m}\}$ de E .
   Or toutes les bases de E ont exactement n éléments.
   Donc $m = 0$, c'est à dire $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est une base de E.
2. Soit $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une famille de n vecteurs de E génératrice.
   La famille $\{u_1, \ldots, u_n\}$ contient, d'après 7.5.2, une base de E.
   Comme toutes les bases de E ont le même nombre n d'éléments, c'est que cette base est $\{u_1, \ldots, u_n\}$.

Remarque 10 :

Cette proposition nous permet d'écrire que la dimension n d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel est **le nombre minimum de vecteurs générateurs, et le nombre maximum de vecteurs libres.**

Exercice 7 :

1. **Montrer que les 3 éléments de $\mathbb{R}^3$ $(1, a, b)$, $(0, 1, c)$ et $(0, 0, 1)$ forment une base quels que soient les réels a,b et c.**

Pour démontrer que c'est une base, il suffit de démontrer que ces 3 vecteurs forment un système libre.
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lambda\,(1,a,b) + \mu\,(0,1,c) + \gamma\,(0,0,1) = (0,0,0)$$

Cette équation se réduit à :

$$(\lambda, a\lambda + \mu, b\lambda + c\mu + \gamma) = (0,0,0)$$

Qui donne le système :

$$\begin{cases} \lambda = & 0 \\ a\lambda + \mu = & 0 \\ b\lambda + c\mu + \gamma & = 0 \end{cases}$$

D'où on tire $\lambda = \mu = \gamma = 0$. Les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont bien linéairement indépendants, dans un espace de dimension 3, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$

2. **Quelles sont les coordonnées du triplet $(1,3,5)$ dans cette base ?**
   Les coordonnées sont des nombres réels x, y et z tels que :

   $$x\,(1,a,b) + y\,(0,1,c) + z\,(0,0,1) = (1,3,5)$$

   Nous obtenons donc le système : Qui donne le système :

   $$\begin{cases} x = & 1 \\ ax + y = & 3 \\ bx + cy + z & = 0 \end{cases}$$

   D'où nous tirons $x = 1$, $y = 3 - a$ et $z = -b - c\,(3-a) = ac - 3c - b$
3. **Quel est le triplet qui a pour coordonnées $(1,3,5)$ dans cette base**
   Le triplet qui pour coordonnées $(1,3,5)$ s'écrit :

   $$1\,(1,a,b) + 3\,(0,1,c) + 5\,(0,0,1)$$

   C'est donc le triplet : $(1, a+3, b+3c+5)$

7.5.7 Proposition

1. Un sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie n est de dimension finie.
2. Si F est un sous-espace vectoriel de E, on a alors $\dim F \leqslant \dim E$.
3. Si $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.

Démonstration

On appelle $n = \dim E$ et soit F un sous-espace vectoriel de E

1. Toute famille libre finie de F est aussi une famille libre et finie de E et peut donc, par le théorème de la base incomplète, être complétée en une base de E.
   Elle a donc au plus n éléments d'après la proposition précédente.
   Choisissons parmi les familles finies libres de F une famille $\{u_1, \ldots, u_p\}$ ayant le nombre maximal d'éléments possible. On a $p \leqslant n$.
   Montrons que $\{u_1, \ldots, u_p\}$ est une base de F, et pour ce faire, on montre que $\text{Vect}\,\{u_1, \ldots, u_p\} = F$
   Si $\text{Vect}\,\{u_1, \ldots, u_p\} \neq F$, il existe un vecteur $u \in F$ n'appartenant pas à $\text{Vect}\,\{u_1, \ldots, u_p\}$.
   Alors $\{u_1, \ldots, u_p, u\}$ est une famille libre de $p+1$ vecteurs de F : contradiction avec le fait que p est le nombre maximal de vecteurs libres dans F.
   Donc $\{u_1, \ldots, u_p\}$ engendre F, et donc c'est une base de F et F est de dimension finie.
2. La proposition $\dim F \leqslant \dim E$ résulte directement de $\dim(F) = p$ et $p \leqslant n$.
3. Si $p = n$ et si F est strictement contenu dans E, il existe un vecteur $u \in E$ et non dans F et $\{u_1, \ldots, u_n, u\}$ est une famille libre de E ; donc $\dim(E) \geqslant n+1$: impossible.
   Donc, $F = E$

7.5.8 Proposition : dimension de la somme

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espace vectoriel de E. Nous avons :

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Démonstration

On considère donc E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On sait que d'après la proposition précédente que F, G et $F \cap G$ sont de dimension finie.

1. Soit $\mathcal{B}_0 = \{u_1, \ldots, u_k\}$ une base de $F \cap G$.
   On peut alors la compléter, d'une part en une base $\mathcal{C} = \{u_1, .., u_k, v_1, .., v_s\}$ de F, et d'autre part en une base $\mathcal{D} = \{u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_t\}$ de G.
2. Montrons que $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ est une base de $F + G$.
   Comme un vecteur de $F+G$ est la somme d'un élément de F et d'un élément de G , il est évident que $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ est une famille génératrice de $F + G$
3. Il reste à montrer que $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ est une famille libre
   On suppose :
   $$r_1u_1 + \ldots + r_ku_k + r_{k+1}v_1 + \ldots + r_{k+s}v_s + r_{k+s+1}w_1 + \ldots + r_{k+s+t}w_t = \overrightarrow{0}$$
   Il faut remarquer que si
   $$\overrightarrow{f} = r_1u_1 + \ldots + r_ku_k + r_{k+1}v_1 + \ldots + r_{k+s}v_s$$
   et si
   $$\overrightarrow{g} = r_{k+s+1}w_1 + \ldots + r_{k+s+t}w_t$$
   Nous avons $\overrightarrow{f} \in F$, $\overrightarrow{g} \in G$ et $\overrightarrow{f} = -\overrightarrow{g}$
   Ces deux vecteurs sont donc dans $F \cap G$,ce qui implique $r_{k+1} = \ldots = r_{k+s} = r_{k+s+1} = \ldots = r_{k+s+t} = 0$ car les vecteurs v_i et w_i ne sont pas dans $F \cap G$
   Puis, comme la famille $u_1, \ldots, u_k$ est libre on a : $r_1 = \ldots = r_k = 0$.
   Donc $\dim(F+G) = k + r + s$ avec $\dim(F) = k + s$, $\dim(G) = k + t$ et $\dim(F \cap G) = k$
   D'où le résultat.

7.5.9 Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie .
Un hyperplan d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n est un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$.

7.6 Quelques exercices complémentaires

7.6.1 Savoir calculer dans $\mathbb{R}^n$

Exercice 8 :

1. Etant donnés les couples $A = (-2, 3)$, $B = (-2, -1)$, $C = (-7, -4)$, déterminer le couple $X \in \mathbb{R}^2$ défini par

   (a) $X = 5A + B$ (b) $3X + 2A - B = 0$ (c) $7X + C - 2B = 0$

2. Etant donnés les couples $A = (1, 2)$, $B = (2, 3)$, déterminer les couples X et Y définis par
   $$\begin{cases} X + 4Y + 2A + B = & 0 \\ X - Y + A - 2B = & 0 \end{cases}$$

   Corrigé de l'exercice

Exercice 9 :

1. A et B étant des éléments de $\mathbb{R}^2$, dans chacun des cas suivants, montrer que l'implication suivante est vraie :
$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \, (\alpha A + \beta B = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0)$$
   (a) $A = (1, 2)$ et $B = (3, 4)$
   (b) $A = (0, 2)$ et $B = (3, 0)$
   (c) $A = (1, -1)$ et $B = (3, 3)$
   (d) $A = (1, -1)$ et $B = (-2, 3)$

2. Dans chacun des cas suivants, montrer qu'il existe des réels non nuls α et β tels que
$$\alpha A + \beta B = 0$$
   (a) $A = (1, 2)$ et $B = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$
   (b) $A = (0, 2)$ et $B = (0, 0)$
   (c) $A = (2, 0)$ et $B = (3, 0)$
   (d) $A = (1, -1)$ et $B = (-3, 3)$
   (e) $A = \left(\sqrt{2}, 2\right)$ et $B = \left(1, \sqrt{2}\right)$

Corrigé de l'exercice

7.6.2 Espaces vectoriels, sous espaces vectoriels

Exercice 10 :

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$

$$
\begin{aligned}
&A_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x + y = 0\right\}\\
&A_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x + y \geq 0\right\}\\
&A_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } xy = x^2\right\}\\
&A_4 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x = 0\right\}\\
&A_5 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2 + y^2 \leq 1\right\}\\
&A_6 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x = a + bety = a - b, \text{ avec } a \in \mathbb{R}et b \in \mathbb{R}\right\}\\
&A_7 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x = 2\right\}\\
&A_8 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \in \mathbb{Z} \text{ et } y \in \mathbb{Z}\right\}\\
&A_9 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x + y + z = 2\right\}\\
&A_{10} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } xyz = 0\right\}\\
&A_{11} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x + y + 2z = 0 \text{ et } x - y - 5z = 0\right\}\\
&A_{12} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } |x| = |y|\right\}\\
&A_{13} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } yz = 5\right\}\\
&A_{14} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x = a, y = 2a, z = 3a, a \in \mathbb{R}\right\}\\
&A_{15} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x = a - b + c, y = a + b - c, z = 2a + 3b \text{ avec } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}\right\}
\end{aligned}
$$

Exercice 11 :

On appelle $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications numériques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

1. Rappeler la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{F}$
2. Soit $N = \{f \in \mathcal{F} \text{ tel que } f(0) = 0\}$ Est ce que N est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$?
3. Même question pour $N^1 = \{f \in \mathcal{F} \text{ tel que } f(0) = 1\}$

Exercice 12 :

On appelle $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications numériques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathcal{F}$, lesquels forment des sous espaces vectoriels ?

1. $F_2 = \{f \in \mathcal{F} \text{ telle que } f \text{ est impaire }\}$
2. $F_3 = \{f \in \mathcal{F} \text{ telle que } \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x) - 3\}$
3. $F_4 = \{f \in \mathcal{F} \text{ telle que } \forall x \in \mathbb{R} f(x) \geq 0\}$
4. $F_5 = \{f \in \mathcal{F} \text{ telle que } f \text{ bornée }\}$

Exercice 13 :

$\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel . Soit $P = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $x_1 + \cdots + x_n = 0\}$. Est ce que P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$?

Exercice 14 :

$\mathbb{R}[X]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}[X]$, lesquels forment des sous espaces vectoriels ?

1. $G_1 = \{P \in \mathbb{R}[X]\text{tel que deg}P = 7\}$
2. $G_2 = \{P \in \mathbb{R}[X]\text{tel que deg}P \leq 3\}$
3. $G_3 = \{P \in \mathbb{R}[X]\text{tel que deg}P\text{est pair}\}$
4. $G_4 = \{P \in \mathbb{R}[X]\text{tel que }P\text{n'a pas de terme constant}\}$
5. $G_5 = \{P \in \mathbb{R}[X]\text{tel que }P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$

Exercice 15 :

Corrigé de l'exercice
$\mathbb{R}_n[X]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n . Soit $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $1 \leq \deg A \leq n$
Montrer que l'ensemble E des polynômes de $P \in \mathbb{R}_n[X]$ qui s'écrivent $P(X) = Q(X)A(X)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$

7.6.3 Combinaisons linéaires, sous-espace vectoriel engendré

Exercice 16 :

Corrigé de l'exercice
Dans $\mathbb{R}^3$ soit la famille $u = (1, 4, -3), v = (2, 5, 3), w = (3, 0, 27)$. Avons nous

1. $\text{Vect}(u, v, w) = \text{Vect}(u, v)$
2. $\text{Vect}(u, v, w) = \text{Vect}(u, w)$
3. $\text{Vect}(u, v, w) = \text{Vect}(v, w)$

Exercice 17 :

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u = (-2, 3, 7)$, $v = (1, -2, -3)$ et $w = (-1, 1, 6)$.
Montrer que $\text{Vect}(u, v, w) = \text{Vect}(u, v) = \text{Vect}(v, w) = \text{Vect}(u, w)$.

Exercice 18 :

Corrigé de l'exercice
Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $a = (1, 0, 1, 1)$, $b = (-1, -2, 3, -1)$, $c = (-5, -3, 1, -5)$, $d = (-1, -1, 1, -1)$ et $e = (4, 1, 2, 4)$. Montrer que $\text{Vect}(a, b, c) = \text{Vect}(d, e)$.

Exercice 19 :

1. Soient dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions numérique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, noté $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les fonctions $f_l(x) = e^x$, $f_2(x) = \sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $f_4(x) = \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $f_4(x) = e^{-x}$. Donnez une représentation plus simple de $\text{Vect}(f_l, f_2, f_3, f_4)$.
   Corrigé de l'exercice
2. Même question que précédemment, cette fois ci dans l'espace $\mathbb{R}[X]$ avec les polynômes $P_l(x) = 1 - x$, $P_2(x) = 1 - x^2$, $P_3(x) = x^2 - x$.
3. Même question avec les fonctions : $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \cos(x)\cos(2x)$, et $h(x) = \sin(x)\sin(2x)$

7.6.4 Familles libres, familles génératrices

Exercice 20 :

Corrigé de l'exercice

1. Les triplets $(1, 0, 1)$ et $(1, 1, 1)$ engendrent-ils $\mathbb{R}^3$; sont-ils libres dans $\mathbb{R}^3$?
2. Même question à propos de $(1, 2, 3)$,$(4, 5, 6)$ et $(7, 8, 9)$ dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 21 :

Corrigé de l'exercice

1. Montrer que $x = (2, 3, -1)$ et $y = (1, 1, -2)$ engendrent le même sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ que $u = (3, 7, 6)$ et $v = (5, 0, -25)$
2. Dans $\mathbb{R}^3$, soient $v_1 = (-1, 1, 2)$, $v_2 = (1, 2, 5)$, $v_3 = (3, 1, a)$, $v_4 = (2, 1, b)$. Trouver a et b pour que (v_1, v_2) engendrent le même espace que (v_3, v_4)

Exercice 22 :

Corrigé de l'exercice

1. On considère $C\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right)$, espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si $r \neq s$, alors les fonctions $f_r(x) = e^{rx}$ et $f_s(x) = e^{sx}$ sont linéairement indépendantes, et quel est l'ensemble engendré par les fonctions f_r et f_s
2. Même question avec $f(x) = |x|$ et $g(x) = \cos x$

7.6.5 Bases d'un espace vectoriel ou d'un sous-espace vectoriel

Exercice 23 :

Dans $\mathbb{R}^2$, parmi les paires d'éléments suivants, lesquels sont linéairement indépendants ? Quel est le sous-espace vectoriel $\operatorname{Vect}(u, v)$ engendré, est-il possible d'écrire $\overrightarrow{w}(2, -4)$ comme combinaison linéaire de u et v ?

1. $u = (0, 2)$, $v = (3, 0)$
2. $u = (-1, 2)$, $v = (0, 0)$
3. $u = (1, -1)$, $v = (2, 2)$

Exercice 24 :

Corrigé de l'exercice

1. Cet exercice se place dans $\mathbb{R}^2$ considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel
   Pour $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $v = (a', b') \in \mathbb{R}^2$, nous définissons le déterminant $\det(u, v)$ de ces deux vecteurs par :
   $$\det(u, v) = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$
   (a) Démontrez que $\det(u, v) = 0$ si et seulement si u et v sont colinéaires
   (b) Démontrez que $\det(u, v) = -\det(v, u)$
   (c) Démontrez que $\det(u + v, w) = \det(u, w) + \det(v, w)$
   (d) Démontrez que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(\lambda u, v) = \lambda \det(u, v)$
   (e) Démontrez que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(u, \lambda v) = \lambda \det(u, v)$
2. Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$, la famille $\{(m, 4), (1, m)\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^2$
3. (a) Vérifier que la famille $\{(1, 4), (1, 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$
   (b) Quel est le couple qui a pour coordonnées $(-1, 2)$ dans la base $\{(1, 4), (1, 1)\}$
   (c) Quelles sont les coordonnées du couple $(1, 5)$ dans cette base ?

Exercice 25 :

Corrigé de l'exercice Démontrer que $u = (1, 2, 3)$ et $v = (1, 1 - 4)$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Trouver un triplet w, qui avec les deux précédents forme une base de $\mathbb{R}^3$

Exercice 26 :

Corrigé de l'exercice
On considère le sous-ensemble $F \subset \mathbb{R}^3$ défini par $F = \left\{(a + 2b, 2a - b, 3b)\,;(a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base

Exercice 27 :

1. Déterminer le rang dans $\mathbb{R}^2$ de la famille $u = (3, 1)$ et $v = (-1, 5)$.
2. Le vecteur $w = (1, 0)$ appartient-il à $\text{Vect}(u, v)$?
3. Si oui l'exprimer comme combinaison linéaire de u et v.

Exercice 28 :

Corrigé de l'exercice

1. Déterminer dans $\mathbb{R}^3$ le rang de la famille $u = (-1, 1, -3)$, $v = (1, 2, 5)$, $w = (1, 7, 1)$.
2. Le vecteur $a = (1, 0, 0)$ appartient-il à $\text{Vect}(u, v, w)$? Si oui l'exprimer comme combinaison linéaire de u,v et w
3. Déterminer dans $\mathbb{R}^3$ le rang de la famille $=\mathcal{F} = \{a, b, c, d\}$ où $a = (1, 2, 3)$, $b = (3, 2, 1)$, $c = (3, 3, 3)$ et $d = (7, 0, -7)$
4. Déterminer dans $\mathbb{R}^4$ le rang de la famille $=\mathcal{F} = \{a, b, c, d\}$ où $a = (1, 1, 1, 2)$, $b = (2, 1, 0, 3)$, $c = (-1, 0, -1, 4)$ et $d = (-9, -2, 1, -1)$

Exercice 29 :

Corrigé de l'exercice

1. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $a = (2, 3, -1)$, $b = (1, -1, -2)$, $c = (3, 7, 0)$ et$d = (5, 0, -7)$. Montrer que $\text{Vect}(\{a, b\}) = \text{Vect}(\{c, d\})$.
2. Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $a = (1, 0, 1, 1)$, $b = (-1, -2, 3, -1)$, $c = (-5, -3, 1, -5)$, $d = (-1, -1, 1, -1)$ et $e = (4, 1, 2, 4)$. Montrer que $\text{Vect}(a, b, c) = \text{Vect}(d, e)$.

Exercice 30 :

Soient $u = (1, -1, 2)$, $v = (2, 1, 4)$ et $w = (3, 3, 6)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Ces vecteurs sont-ils linéairement dépendants ou indépendants ?
2. Sont-ils 2 à 2 colinéaires ?

Exercice 31 :

Corrigé de l'exercice
Construire une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, ensemble des triplets (x, y, z) vérifiant

1. $x = z - y$
2. $x + y + z = -x + 3y + 2z = 0$
3. $z = 0$

7.6.6 Miscelleanous

Exercice 32 :

Soit E l'ensemble des fonctions numériques d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$5f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0$$

Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Exercice 33 :

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\mathcal{B}_0 = \{i, j\}$

1. $m \in \mathbb{R}$ étant un paramètre réel, on considère les vecteurs :

$$\begin{cases} I = & (m-3)\,i + mj \\ J = & (m+1)\,i - j \end{cases}$$

Pour quelles valeurs de m la famille $\mathcal{F} = \{I, J\}$ est-elle libre ou liée ?

2. On suppose $m = 2$. Montrer que $\mathcal{F} = \{I, J\}$ est une base de V.
Soit $\vec{v}$ un vecteur quelconque de V de coordonnées (x, y) dans la base $\mathcal{B}_0 = \{i, j\}$ et de coordonnées (X, Y) dans la base $\mathcal{F} = \{I, J\}$. Calculer x et y en fonction de X et Y

Exercice 34 :

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, on considère les polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ indexés par le paramètre $m \in \mathbb{R}$ P_m et Q_m :

$$P_m(X) = (m-14)\,X^2 + (m-5)\,X + 3 \qquad Q_m(X) = 5X^2 - 2mX + m$$

Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$, le sous-espace vectoriel $\mathrm{vect}(\{P_m; Q_m\})$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est-il de dimension 2, de dimnsion 1 ?

Exercice 35 :

Voici 2 questions semblables. Seule une sera corrigée.

1. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3.
   (a) Démontrer que, pour tout vecteur $u \in V$, $v \in V$ et $w \in V$, nous avons l'équivalence :

   $$\{u, v, w\} \text{ libre } \Longleftrightarrow \{u, u+v, u+v+w\} \text{ libre}$$

   (b) Soit $A \in V$, le vecteur de coordonnées $(1, 3, 5)$ dans la base $\{u, v, w\}$. Quelles sont les coordonnées de A dans la base $\{u, u+v, u+v+w\}$
2. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3.
   (a) Démontrer que, pour tout vecteur $u \in V$, $v \in V$ et $w \in V$, nous avons l'équivalence :

   $$\{u, v, w\} \text{ libre } \Longleftrightarrow \{v+w, u+w, u+v\} \text{ libre}$$

   (b) Soit $A \in V$, le vecteur de coordonnées $(1, -2, 5)$ dans la base $\{u, v, w\}$. Quelles sont les coordonnées de A dans la base $\{v+w, u+w, u+v\}$

Exercice 36 :

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 rapporté à une base $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$

1. On considère les vecteurs :

$$\begin{cases} I = & i - j + 2k \\ J = & 2i + j - k \\ K = & 3i - j + 4k \end{cases}$$

Montrer que la famille $\{I, J, K\}$ est une base de V

2. Calculer les coordonnées du vecteur $v = i + j + k$ dans la base $\{I, J, K\}$

Exercice 37 :

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, on considère les polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ suivants :

$$F(X) = X + 1 \quad G(X) = X^2 + X - 1 \quad H(X) = X^2 - 2 \quad I(X) = X - 1$$

1. Montrer que la famille $\{F, G, H\}$ est une famille liée. Quel est le sous-espace vectoriel vect $(\{F, G, H\})$ engendré par la famille $\{F, G, H\}$
2. Montrer que la famille $\{G, H, I\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Calculer les coordonnées du polynôme $P(X) = 4X^2 + X - 3$ dans cette base

Exercice 38 :

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère le sous-espace vectoriel E des vecteurs de la forme $E = \left\{(x, y, z)_i n\mathbb{R}^3 \text{ tels que } x = 0\right\}$ et le sous-espace vectoriel F défini par : vect $(\{(1, 2, 3) ; (1, 3, 4)\})$

1. Déterminer $E \cap F$
2. Déterminer $E + F$

Exercice 39 :

Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}$-espace vectoriel , on considère E l'ensemble des triplets de la forme $(a - b, a, a + b)$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ ainsi que l'ensemble F des triplets (x, y, z) avec $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$ et tels que $x = y = z$

1. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$; en donner une base pour chacun d'eux
2. Déterminer $E \cap F$ et $E + F$

Exercice 40 :

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, on considère les ensembles suivants :

- $E = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X] \text{ tel que } P(X) = aX^2 + bX\right\}$
- $F = \left\{Q \in \mathbb{R}_2[X] \text{ tel que } Q(X) = \lambda X^2 + \mu X + \lambda\right\}$

1. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$; en donner une base pour chacun d'eux
2. Déterminer $E \cap F$ et $E + F$

Exercice 41 :

On considère $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, muni de l'addition des matrices et de la multiplication par un scalaire réel.

1. Démontrer qu'une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est donnée par :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Cette base est la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

2. On rappelle qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est symétrique si $A = A^T$ et antisymétrique si $-A = A^T$ où A^T est la matrice transposée.
   Montrer que, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:
   (a) Une matrice symétrique est du type $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$
   (b) Une matrice antisymétrique est du type $\begin{pmatrix} 0 & -\delta \\ \delta & 0 \end{pmatrix}$ avec $\delta \in \mathbb{R}$
3. On appelle $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques. Démontrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

4. On appelle $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices antisymétriques. Démontrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
5. Démontrer que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{S}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
6. A l'aide d'une base de $\mathcal{A}$ et d'une base de $\mathcal{S}$, donner une nouvelle base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

7.7 Quelques exercices corrigés

Comme souvent, tous les exercices présentés dans le cours ne sont pas corrigés

7.7.1 Savoir calculer dans $\mathbb{R}^n$

Exercice 1 :

Etant donnés les couples $A = (-2, 3, 7)$, $B = (-2, -1, 0)$, $C = (-7, -4, 5)$, déterminer le triplet X défini par

Voilà un exercice simple ; ce n'est que du calcul !

1. $X = 5A + B$

$$X = 5\,(-2, 3, 7) + (-2, -1, 0) = (-10, 15, 35) + (-2, -1, 0) = (-12, 14, 35)$$

Donc, $X = (-12, 14, 35)$

2. $3X + 2A - B = 0$

$$\begin{aligned} 3X + 2A - B = 0 \iff\ & 3X = B - 2A \\ \iff\ & X = -\frac{2}{3}A + \frac{1}{3}B \\ \iff\ & X = \frac{1}{3}(-2, -1, 0) - \frac{2}{3}(-2, 3, 7) \\ \iff\ & X = \left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{14}{3}\right) \\ \iff\ & X = \frac{1}{3}(1, -7, -14) \end{aligned}$$

Donc, $X = \dfrac{1}{3}(1, -7, -14)$

3. $7X + C - 2B = 0$

Exercice 8 :

Enoncé de l'exercice

Etant donnés les couples $A = (1, 2)$, $B = (2, 3)$, déterminer les couples X et Y définis par

$$\begin{cases} X + 4Y + 2A + B = & 0 \\ X - Y + A - 2B = & 0 \end{cases}$$

Il n'y a pas grande difficulté à résoudre ce système *(parce que c'en est un !)*
En multipliant par -1 la seconde équation, nous obtenons :

$$\begin{cases} X + 4Y + 2A + B = & 0 \\ -X + Y - A + 2B = & 0 \end{cases}$$

Et en additionnant : $5Y + A + 3B = 0 \iff Y = -\frac{1}{5}A - \frac{3}{5}B = -\frac{1}{5}(A + 3B) = -\frac{1}{5}(7, 11)$

Donc, $\boxed{Y = \left(\frac{-1}{5}, \frac{11}{5}\right)}$

De même, En multipliant par 4 la seconde équation, nous obtenons :

$$\begin{cases} X + 4Y + 2A + B = & 0 \\ 4X - 4Y + 4A - 8B = & 0 \end{cases}$$

Et en additionnant : $5X + 6A - 5B = 0 \iff X = -\frac{6}{5}A + B = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

Donc, $\boxed{X = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)}$

Exercice 9 :

Enoncé de l'exercice

Dans chacun des cas suivants, montrer qu'il existe des réels non nuls α et β tels que $\alpha A + \beta B = 0$

1. $A = (0, 2)$ **et** $B = (0, 0)$
   Soient α et β tels que $\alpha A + \beta B = 0$; alors :
   $\alpha A + \beta B = \alpha (0, 2) + \beta (0, 0) = (0, 2\alpha)$
   Ainsi, en posant $\alpha = 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$ quelconque, nous avons répondu à la question
2. $A = (1, -1)$ **et** $B = (-3, 3)$
   Soient α et β tels que $\alpha A + \beta B = 0$; alors :
   $\alpha A + \beta B = \alpha (1, -1) + \beta (-3, 3) = (\alpha - 3\beta, -\alpha + 3\beta)$
   α et β vérifient donc l'équation $\alpha - 3\beta = 0$
   Ainsi, en posant $\alpha = 3\beta$ et $\beta \in \mathbb{R}$ quelconque, on montre qu'il existe une infinité de couples (α, β) tels que $\alpha A + \beta B = 0$
3. $A = \left(\sqrt{2}, 2\right)$ **et** $B = \left(1, \sqrt{2}\right)$
   Soient α et β tels que $\alpha A + \beta B = 0$; alors :
   $\alpha A + \beta B = \alpha \left(\sqrt{2}, 2\right) + \beta \left(1, \sqrt{2}\right) = \left(\alpha\sqrt{2} + 2\beta, \alpha + \beta\sqrt{2}\right)$
   α et β vérifient donc le système d'équations $\left\{ \begin{array}{rl} \alpha\sqrt{2} + 2\beta = & 0 \\ \alpha + \beta\sqrt{2} = & 0 \end{array} \right.$
   On peut remarquer que, dans le système, en multipliant la seconde équation par $\sqrt{2}$, nous obtenons la première équation. Le système se réduit donc à une seule équation : $\alpha + \beta\sqrt{2} = 0$
   Ainsi, en posant $\alpha = -\beta\sqrt{2}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ quelconque, on montre qu'il existe une infinité de couples (α, β) tels que $\alpha A + \beta B = 0$

7.7.2 Sous-espaces vectoriels

Exercice 15 :

Enoncé de l'exercice

$\mathbb{R}_n [X]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n . Soit $A \in \mathbb{R}_n [X]$ tel que $1 \leq \deg A \leq n$

Montrer que l'ensemble E des polynômes de $P \in \mathbb{R}_n [X]$ qui s'écrivent $P (X) = Q (X) A (X)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n [X]$

Comme toujours, il y a deux étapes à cette démonstration :

1. On montre que $E \neq \emptyset$
   Le polynôme nul $\mathcal{O}$ est bien un élément de E ; en effet, pour tout $X \in \mathbb{R}$, $\mathcal{O} (X) = A (X) \times \mathcal{O} (X)$ où $A \in \mathbb{R}_n [X]$
2. On montre que E est stable par combinaison linéaire
   Soit $P \in E$, $R \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$, nous allons montrer que $\lambda P + \mu R \in E$
   - Comme $P \in E$, il existe $Q \in \mathbb{R}_n [X]$ tel que $P (X) = Q (X) A (X)$
   - De même, comme $R \in E$, il existe $Q_1 \in \mathbb{R}_n [X]$ tel que $R (X) = Q_1 (X) A (X)$
   - Alors,
   $$\begin{array}{rcl} (\lambda P + \mu R) (X) & = & (\lambda P) (X) + (\mu R) (X) \\ & = & \lambda P (X) + \mu R (X) \\ & = & \lambda Q (X) A (X) + \mu Q_1 (X) A (X) \\ & = & A (X) (\lambda Q (X) + \mu Q_1 (X)) \end{array}$$
     En posant $Q_2 (X) = \lambda Q (X) + \mu Q_1 (X)$, nous avons $(\lambda P + \mu R) (X) = Q_2 (X) A (X)$
     Ce qui montre que $\lambda P + \mu R \in E$

On vient donc de montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n [X]$

7.7.3 Combinaisons linéaires, sous-espace vectoriel engendré

Exercice 16 :

Enoncé de l'exercice

Dans $\mathbb{R}^3$ *soit la famille* $u = (1,4,-3)\,, v = (2,5,3)\,, w = (3,0,27)$. *Avons nous :*

1. $\mathrm{Vect}\,(u,v,w) = \mathrm{Vect}\,(u,v)$
2. $\mathrm{Vect}\,(u,v,w) = \mathrm{Vect}\,(u,w)$
3. $\mathrm{Vect}\,(u,v,w) = \mathrm{Vect}\,(v,w)$

Il faut donc se poser la question : Avons nous w combinaison linéaire de u et v ? Il faut donc trouver $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $w = au + bv$. Nous avons :

$$w = au + bv \iff \left\{\begin{array}{rl} a + 2b = & 3 \\ 4a + 5b = & 0 \\ -3a + 3b = & 27 \end{array}\right.$$

En résolvant le premier système $\left\{\begin{array}{rl} a + 2b = & 3 \\ 4a + 5b = & 0 \\ -3a + 3b = & 27 \end{array}\right.$, on trouve $a = -5$ et $b = +4$ qui vérifie aussi l'équation $-3a + 3b = 27$

Ce qui veut dire que $w = -5u + 4v \iff u = \dfrac{-1}{5}w + \dfrac{4}{5}v \iff v = \dfrac{1}{4}w + \dfrac{5}{4}u$

Nous avons donc bien $\mathrm{Vect}\,(u,v,w) = \mathrm{Vect}\,(u,v) = \mathrm{Vect}\,(u,w) = \mathrm{Vect}\,(v,w)$

Exercice 18 :

Enoncé de l'exercice

Dans $\mathbb{R}^4$ *, on pose* $a = (1,0,1,1)$, $b = (-1,-2,3,-1)$, $c = (-5,-3,1,-5)$, $d = (-1,-1,1,-1)$ *et* $e = (4,1,2,4)$. *Montrer que* $\mathrm{Vect}\,(a,b,c) = \mathrm{Vect}\,(d,e)$.

Il suffit de montrer que a, b et c sont combinaisons linéaire de d ete.

1. Montrons que a est combinaison linéaire de d et e

   Il faut trouver $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ tels que $a = xd + ye$

   $$a = xd + ye \iff \left\{\begin{array}{rl} -x + 4y = & -1 \\ -x + y = & 0 \\ x + 2y = & 1 \\ -x + 4y = & 1 \end{array}\right.$$

   En extrayant les deux premières lignes, nous obtenons :

   $$\left\{\begin{array}{rl} -x + 4y = & -1 \\ -x + y = & 0 \end{array}\right. \iff x = y = \frac{1}{3}$$

   Avec ces valeurs, x et y vérifient les deux dernières équations. Donc $a = \dfrac{1}{3}d + \dfrac{1}{3}e$

2. Montrons que b est combinaison linéaire de d et e

   Il faut trouver $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ tels que $b = xd + ye$

   $$b = xd + ye \iff \left\{\begin{array}{rl} -x + 4y = & -1 \\ -x + y = & -2 \\ x + 2y = & 3 \\ -x + 4y = & -1 \end{array}\right.$$

   En extrayant les deux premières lignes, nous obtenons :

   $$\left\{\begin{array}{rl} x + 4y = & -1 \\ -x + y = & -2 \end{array}\right. \iff x = \frac{7}{3} \text{ et } y = \frac{1}{3}$$

   Avec ces valeurs, x et y vérifient les deux dernières équations. Donc $b = \dfrac{7}{3}d + \dfrac{1}{3}e$

3. Montrons que c est combinaison linéaire de d et e
   Il faut trouver $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ tels que $c = xd + ye$

$$c = xd + ye \Longleftrightarrow \begin{cases} -x + 4y = & -5 \\ -x + y = & -3 \\ x + 2y = & 1 \\ -x + 4y = & -5 \end{cases}$$

   En extrayant les deux premières lignes, nous obtenons :

$$\begin{cases} -x + 4y = & -5 \\ -x + y = & -3 \end{cases} \Longleftrightarrow x = \frac{7}{3} \text{ et } y = \frac{-2}{3}$$

   Avec ces valeurs, x et y vérifient les deux dernières équations. Donc $c = \frac{7}{3}d + \frac{-2}{3}e$

Nous avons donc bien $\text{Vect}\,(a, b, c) = \text{Vect}\,(d, e)$

Exercice 19 :

Enoncé de l'exercice

1. *Donnez une représentation plus simple de* $\text{Vect}\,(P_l, P_2, P_3) \subset \mathbb{R}[X]$ *avec les polynômes* $P_l(x) = 1 - x$, $P_2(x) = 1 - x^2$, $P_3(x) = x^2 - x$.

   Il suffit de remarquer que $P_3 = P_1 - P_2$, et donc $\text{Vect}\,(P_l, P_2, P_3) = \text{Vect}\,(P_l, P_2)$
2. *Même question avec les fonctions :* $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \cos(x)\cos(2x)$, *et* $h(x) = \sin(x)\sin(2x)$

   Il faut utiliser les formules trigonométriques :

   — $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$

   — $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$

   Donc, $g(x) = \cos(x)\cos(2x) = \cos(x)\left(2\cos^2(x) - 1\right) = 2\cos^3(x) - \cos x$
   Et,

$$\begin{aligned} h(x) = & \sin(x)\sin(2x) \\ = & \sin(x)(2\sin x \cos x) \\ = & 2\sin^2 x \cos x \\ = & 2\left(1 - \cos^2 x\right)\cos x \\ = & 2\cos x - 2\cos^3 x \end{aligned}$$

   On voit tout de suite que $h = f - g$, et donc $\text{Vect}\,(f, g, h) = \text{Vect}\,(f, g)$

7.7.4 Familles libres, familles génératrices

Exercice 20 :

Enoncé de l'exercice

1. *Les triplets* $(1, 0, 1)$ *et* $(1, 1, 1)$ *engendrent-ils* $\mathbb{R}^3$ *; sont-ils libres dans* $\mathbb{R}^3$ *?*

   Comme $\mathbb{R}^3$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, la famille $\{(1, 0, 1)\,(1, 1, 1)\}$ ne peut pas engendrer $\mathbb{R}^3$, car il n'y a que deux vecteurs.
   Par contre, la famille $\{(1, 0, 1)\,(1, 1, 1)\}$ est, peut-être libre. Pour le voir, remarquons que les coordonnées ne sont pas proportionnelles. Donc, la famille $\{(1, 0, 1)\,(1, 1, 1)\}$ est bien une famille libre
2. *Même question à propos de* $(1, 2, 3)$,$(4, 5, 6)$ *et* $(7, 8, 9)$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *?*

   La famille $\{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)\}$ ne peut pas être libre, puisque

$$(4, 5, 6) = \frac{(1, 2, 3) + (7, 8, 9)}{2}$$

Exercice 21 :

Enoncé de l'exercice

1. *Montrer que $x = (2,3,-1)$ et $y = (1,1,-2)$ engendrent le même sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ que $u = (3,7,6)$ et $v = (5,0,-25)$*

   En fait, il suffit de montrer que u et v sont combinaisons linéaires de x et de y, et donc de trouver $a \in \mathbb{R}$, $a' \in \mathbb{R}$,$b \in \mathbb{R}$ et $b' \in \mathbb{R}$ tels que $u = ax + by$ et $v = a'x + b'y$

   — Trouvons donc a et b tels que $(3,7,6) = a\,(2,3,-1) + b\,(1,1,-2)$. Nous avons alors le système :

   $$\left\{\begin{array}{rl} 2a+b= & 3 \\ 3a+b= & 7 \\ -a-2b= & 6 \end{array}\right. \iff a=4 \quad b=-5$$

   Donc $u = 4x - 5y$

   — Trouvons donc a' et b' tels que $(5,0,-25) = a'\,(2,3,-1) + b'\,(1,1,-2)$. Nous avons alors le système :

   $$\left\{\begin{array}{rl} 2a'+b'= & 5 \\ 3a'+b'= & 0 \\ -a'-2b'= & -25 \end{array}\right. \iff a'=-5 \quad b=15$$

   u et v sont bien combinaisons linéaires de x et y, et nous avons : $\text{vect}\,(\{x,y\}) = \text{vect}\,(\{u,v\})$

2. *Dans $\mathbb{R}^3$, soient $v_1 = (-1,1,2)$, $v_2 = (1,2,5)$, $v_3 = (3,1,a)$, $v_4 = (2,1,b)$. Trouver a et b pour que (v_1,v_2) engendrent le même espace que (v_3,v_4)*

   Rien de nouveau sous le soleil!! On refait la même question!!

   — Recherchons λ et μ tels que $v_3 = \lambda v_1 + \mu v_2$. Nous avons alors le système :

   $$\left\{\begin{array}{rl} -\lambda+\mu= & 3 \\ \lambda+2\mu= & 1 \\ 2\lambda+5\mu= & a \end{array}\right. \iff \mu=\frac{4}{3} \quad \lambda=\frac{-5}{3}$$

   Donc $a = \dfrac{10}{3}$

   — De même, recherchons λ et μ tels que $v_4 = \lambda v_1 + \mu v_2$. Nous avons alors le système :

   $$\left\{\begin{array}{rl} -\lambda+\mu= & 2 \\ \lambda+2\mu= & 1 \\ 2\lambda+5\mu= & b \end{array}\right. \iff \mu=1 \quad \lambda=-1$$

   Donc $b = 3$

Exercice 22 :

Enoncé de l'exercice

1. *On considère $C\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right)$, espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si $r \neq s$, alors les fonctions $f_r(x) = e^{rx}$ et $f_s(x) = e^{sx}$ sont linéairement indépendantes, et quel est l'ensemble engendré par les fonctions f_r et f_s*

   Ces deux fonctions sont linéairement indépendantes, si et seulement si, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $\mu \in \mathbb{R}$, l'implication suivante est vraie :

   $$\lambda f_r + \mu f_s = \mathcal{O} \Longrightarrow \lambda = \mu = 0$$

   Où $\mathcal{O}$ désigne la fonction nulle.

   Soient donc $\lambda \in \mathbb{R}$ et$\mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda f_r + \mu f_s = \mathcal{O}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\lambda f_r(x) + \mu f_s(x) = 0$, c'est à dire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda e^{rx} + \mu e^{sx} = 0$. Comme c'est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est en particulier vrai pour $x = 0$ et $x = +1$, et nous avons alors le système d'équations :

   $$\left\{\begin{array}{rll} \lambda+\mu= & 0 & \text{pour } x=0 \\ \lambda e^r+\mu e^s= & 0 & \text{pour } x=1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} \lambda= & -\mu \\ \lambda\,(e^r-e^s)= & 0 \end{array}\right.$$

Comme, $r \neq s$, nous avons $e^r - e^s \neq 0$, donc $\lambda = 0$ et donc $\mu = 0$
Les fonctions $f_r(x) = e^{rx}$ et $f_s(x) = e^{sx}$ sont donc linéairement indépendantes et forment une base de l'espace vect $(\{f_r, f_s\})$ qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

2. *Même question avec $f(x) = |x|$ et $g(x) = \cos x$*

Nous recommençons le même travail!!
Ces deux fonctions sont linéairement indépendantes, si et seulement si, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $\mu \in \mathbb{R}$, l'implication suivante est vraie :

$$\lambda f + \mu g = \mathcal{O} \Longrightarrow \lambda = \mu = 0$$

Où $\mathcal{O}$ désigne la fonction nulle.
Soient donc $\lambda \in \mathbb{R}$ et$\mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda f + \mu g = \mathcal{O}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\lambda f(x) + \mu g(x) = 0$, c'est à dire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda |x| + \mu \cos x = 0$. Comme c'est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est en particulier vrai pour $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$, et nous avons alors le système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \mu & = & 0 & \text{pour } x = 0 \\ \lambda \times \dfrac{\pi}{2} & = & 0 & \text{pour } x = \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \mu & = & 0 \\ \lambda & = & 0 \end{array} \right.$$

Les fonctions $f(x) = |x|$ et $g(x) = \cos x$ sont donc linéairement indépendantes et forment une base de l'espace vect $(\{f, g\})$ qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

7.7.5 Bases d'un espace vectoriel ou d'un sous-espace vectoriel

Exercice 24 :

Enoncé de l'exercice

1. *Cet exercice se place dans $\mathbb{R}^2$ considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel Pour $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $v = (a', b') \in \mathbb{R}^2$, nous définissons le déterminant $\det(u, v)$ de ces deux vecteurs par :*

$$\det(u, v) = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

Démontrez que $\det(u, v) = 0$ si et seulement si u et v sont colinéaires

- **Supposons u et v colinéaires**
  Il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = \lambda u$, et si u est le couple $u = (x, y)$, v sera le couple $v = (\lambda x, \lambda y)$. Donc,
  $$\det(u, v) = \begin{vmatrix} x & \lambda x \\ y & \lambda y \end{vmatrix} = \lambda yx - \lambda xy = 0$$
- **Réciproquement, supposons** $\det(u, v) = 0$
  Si u est le couple $u = (a, b)$ et $v = (a', b')$ et sont tels que $\det(u, v) = ab' - a'b = 0$, nous avons alors $ab' = a'b$
  Nous sommes alors très tentés de dire qu'alors $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'}$, mais c'est aller vite en besogne car l'un des dénominateurs peut être nul. Il faut donc discuter suivant les différents cas
  (a) Supposons $a' = 0$
  Alors $ab' = 0$, et donc $a = 0$ ou $b' = 0$
  - Si $a = 0$, alors, les vecteurs u et v sont de la forme $u = (0, b)$ et $v = (0, b')$, et les vecteurs u et v sont bien colinéaires donc linéairement dépendants.
  - Si $b' = 0$, alors, les vecteurs u et v sont de la forme $u = (a, b)$ et $v = (0, 0)$, et les vecteurs u et v sont bien linéairement dépendants

  (b) Supposons $b' = 0$ Alors $a'b = 0$, et donc $a' = 0$ ou $b = 0$
  - Si $a' = 0$, alors, les vecteurs u et v sont de la forme $u = (a, b)$ et $v = (0, 0)$, et les vecteurs u et v sont bien linéairement dépendants.
  - Si $b = 0$, alors, les vecteurs u et v sont de la forme $u = (a, 0)$ et $v = (a', 0)$, et les vecteurs u et v sont colinéaires donc linéairement dépendants.

(c) Supposons $a' \neq 0$ et $b' \neq 0$

Alors $ab' = a'b$ est équivalent à $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = k$, et donc $a = ka'$ et $b = kb'$ et les vecteurs u et v sont de la forme $u = (ka', kb')$ et $v = (a', b')$, et les vecteurs u et v sont colinéaires donc linéairement dépendants.

Dans tous les cas, donc, si $\det(u, v) = 0$, alors u et v sont colinéaires

2. *Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$, la famille $\{(m, 4), (1, m)\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^2$*

Nous sommes dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Si nous montrons que la famille de 2 vecteurs $\{(m, 4), (1, m)\}$ est libre, nous aurons montré que c'est une base de $\mathbb{R}^2$

Pour montrer qu'elle est libre, on calcule le déterminant de ces deux vecteurs.

$$\det[(m, 4), (1, m)] = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 4 & m \end{vmatrix} = m^2 - 4$$

Donc, $\det[(m, 4), (1, m)] = 0$ si et seulement si $m = +2$ ou $m = -2$

En conclusion, la famille de vecteurs $\{(m, 4), (1, m)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $m \neq +2$ **et** $m \neq -2$

3. (a) *Vérifier que la famille $\{(1, 4), (1, 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$*

Pour le montrer, il suffit d'utiliser le déterminant

(b) *Quel est le couple qui a pour coordonnées $(-1, 2)$ dans la base $\{(1, 4), (1, 1)\}$*

Soit (x, y) ce couple. S'il a pour coordonnées (a, b) dans la base $\{(1, 4), (1, 1)\}$, alors

$$(x, y) = a(1, 4) + b(1, 1)$$

Donc, dans notre cas,

$$(x, y) = -1 \times (1, 4) + 2 \times (1, 1) = (3, -2)$$

(c) *Quelles sont les coordonnées du couple $(1, 5)$ dans cette base ?*

Il faut donc trouver $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que

$$(1, 5) = a(1, 4) + b(1, 1)$$

Nous obtenons alors le système

$$\left\{ \begin{array}{rl} a + b = & 1 \\ 4a + b = & 5 \end{array} \right. \iff a = \frac{4}{3} \text{ et } b = \frac{-1}{3}$$

Les coordonnées du couple $(1, 5)$ dans la base $\{(1, 4), (1, 1)\}$ sont donc $a = \dfrac{4}{3}$ et $b = \dfrac{-1}{3}$

Exercice 25 :

Enoncé de l'exercice

1. *Démontrer que $u = (1, 2, 3)$ et $v = (1, 1 - 4)$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$.*

Il est évident que ces deux vecteurs u et v forment une famille libre, puisque leurs coordonnées ne sont pas colinéaires.

2. *Trouver un triplet w, qui avec les deux précédents forme une base de $\mathbb{R}^3$*

Tout d'abord, il ne faut pas que w soit combinaison linéaire de u et v, c'est à dire que $w \notin \text{vect}(\{u, v\})$

En choisissant $w = (0, 0, 1)$, w n'est certainement pas combinaisons linéaire de $u$et v, et forme avec u et v, un système de rang 3 dans $\mathbb{R}^3$, donc une base de $\mathbb{R}^3$. Nous allons prouver, en utilisant le pivot de Gauss que nousavons affaire à une famille libre.

(a) Nous partons du tableau suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

(b) Nous faisons les combinaisons linéaires suivantes :

$$\begin{array}{rcl} C'_1 & = & C_1 \\ C'_2 & = & C_2 - C_1 \\ C'_3 & = & C_3 - C_1 \end{array} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

(c) Puis, la dernière combinaison linéaire :

$$\begin{array}{rcl} C''_1 & = & C'_1 \\ C''_2 & = & C'_2 \\ C''_3 & = & 2C'_3 - C'_2 \end{array} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -11 \end{pmatrix}$$

Nous arrivons à un système triangulaire qui montre que le rang est 3

Exercice 26 :

Corrigé de l'exercice

On considère le sous-ensemble $F \subset \mathbb{R}^3$ défini par $F = \left\{(a+2b, 2a-b, 3b)\,;(a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base

Soit $x \in F$ un élément de F ; il existe alors $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que

$$x = (a+2b, 2a-b, 3b)$$

A partir de là, nous pouvons écrire différemment x :

$$\begin{array}{rl} x = & (a+2b, 2a-b, 3b) \\ = & (a, 2a, 0) + (2b, b, 3b) \\ = & a\,(1,2,0) + b\,(2,1,3) \end{array}$$

Ce qui montre que $F = \text{vect}\left(\{(1,2,0),(2,1,3)\}\right)$. C'est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
Si la famille $\{(1,2,0),(2,1,3)\}$ est génératrice de F, en est-elle pour autant une base ? ? Il faut donc montrer qu'elle est libre. Or, les coordonnées de ces 2 triplets ne sont pas proportionnelles. Donc, une base de F est donc $\{(1,2,0),(2,1,3)\}$

Exercice 28 :

Enoncé de l'exercice

1. *Déterminer dans $\mathbb{R}^3$ le rang de la famille $u = (-1,1,-3)$, $v = (1,2,5)$, $w = (1,7,1)$.*

   Nous allons utiliser la méthode du pivot de Gauss.

   (a) Nous partons du tableau suivant *(qui est en fait, une matrice)*

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

   (b) Nous faisons les combinaisons linéaires entre colonnes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} C'_1 & = & C_1 \\ C'_2 & = & C_2 + C_1 \\ C'_3 & = & C_3 + C_1 \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

(c) Nous faisons, à nouveau, les combinaisons linéaires entre colonnes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} C_1'' & = & C_1' \\ C_2'' & = & C_2' \\ C_3'' & = & 3C_3' - 8C_2' \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & -22 \end{pmatrix}$$

Le système est triangulaire. La famille $\{u, v, w\}$ est de rang 3, dans un espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de dimension 3 ; c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$

2. *Le vecteur $a = (1, 0, 0)$ appartient-il à $\mathrm{Vect}(u, v, w)$? Si oui l'exprimer comme combinaison linéaire de u,v et w*

Comme nous venons de montrer, $\mathrm{Vect}(u, v, w) = \mathbb{R}^3$; donc, $a \in \mathrm{Vect}(u, v, w)$

Il existe donc $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}$ tels que $a = xu + yv + zw$, ce qui donne le système :

$$\left\{\begin{array}{rl} 1 = & -x + y + z \\ 0 = & x + 2y + 7z \\ 0 = & -3x + 5y + z \end{array}\right.$$

Nous allons résoudre ce système, en utilisant une méthode de Gauss, mais, cette fois-ci, en jouant sur les lignes.

$$\left\{\begin{array}{lcl} L_1' & = & L_1 \\ L_2' & = & L_2 + L_1 \\ L_3' & = & L_3 - 3L_1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rl} 1 = & -x + y + z \\ 1 = & 3y + 8z \\ -3 = & 2y - 2z \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} 1 = & -x + y + z \\ 1 = & 3y + 8z \\ -\dfrac{3}{2} = & y - z \end{array}\right.$$

Seconde combinaison linéaire entre les lignes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} L_1'' & = & L_1' \\ L_2'' & = & L_2' \\ L_3'' & = & 3L_3' - L_2' \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rl} 1 = & -x + y + z \\ 1 = & 3y + 8z \\ -\dfrac{11}{2} = & -11z \end{array}\right.$$

D'où nous tirons $z = \dfrac{1}{2}$, et, en remontant, $y = -1$ et $x = -\dfrac{3}{2}$

3. *Déterminer dans $\mathbb{R}^3$ le rang de la famille $=\mathcal{F} = \{a, b, c, d\}$ où $a = (1, 2, 3)$, $b = (3, 2, 1)$, $c = (3, 3, 3)$ et $d = (7, 0, -7)$*

Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, la famille $\{a, b, c, d\}$ ne peut pas être de rang 4 ; elle sera **au plus de rang 3**

Pour connaître son rang, nous utilisons le pivot de Gauss. On commence donc par construire un tableau :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & -7 \end{bmatrix}$$

(a) On fait une première combinaison linéaire entre colonnes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} C_1' & = & C_1 \\ C_2' & = & C_2 - 3C_1 \\ C_3' & = & C_3 - 3C_1 \\ C_4' & = & C_4 - 7C_1 \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -3 & -14 \\ 3 & -8 & -6 & -28 \end{bmatrix}$$

On peut déjà remarquer des similitudes entre C_2', C_3' et C_4'

(b) On fait une seconde combinaison linéaire entre colonnes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} C_1'' & = & C_1' \\ C_2'' & = & C_2' \\ C_3'' & = & 4C_3' - 3C_2' \\ C_4'' & = & 4C_4' - 14C_2' \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Clairement, le système est de rang 2

4. *Déterminer dans $\mathbb{R}^4$ le rang de la famille $\mathcal{F} = \{a, b, c, d\}$ où $a = (1, 1, 1, 2)$, $b = (2, 1, 0, 3)$, $c = (-1, 0, -1, 4)$ et $d = (-9, -2, 1, -1)$*

   Ici, nous avons 4 vecteurs pris dans $\mathbb{R}^4$; le système est peut-être de rang 4. La méthode de pivot de Gauss, déjà exposée devrait répondre à la question.

Exercice 29 :

Enoncé de l'exercice

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $a = (2, 3, -1)$, $b = (1, -1, -2)$, $c = (3, 7, 0)$ etd $= (5, 0, -7)$. Montrer que $\text{Vect}(\{a, b\}) = \text{Vect}(\{c, d\})$.

Pour répondre à cette question, il faut démontrer que $c \in \text{Vect}(\{a, b\})$ et $d \in \text{Vect}(\{a, b\})$, et, pour ce faire, il suffit de démontrer que c est combinaison linéaire de a et b, et de même pour d

1. **Montrons que c est combinaison linéaire de a et b**
   Pour cela, il faut montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$c = \lambda a + \mu b$$

   Nous arrivons alors à un système :

$$\begin{cases} 3 = & 2\lambda + \mu \\ 7 = & 3\lambda - \mu \\ 0 = & -\lambda - 2\mu \end{cases} \iff \begin{cases} 3 = & 2\lambda + \mu \\ 7 = & -7\mu \\ \lambda = & -2\mu \end{cases}$$

   D'où, d'après les deux dernières équations : $\mu = -1$, $\lambda = 2$, ce qui est compatible avec la première équation. Donc,

$$c = 2a - b$$

2. **Montrons que d est combinaison linéaire de a et b**
   Pour cela, il faut montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$d = \lambda a + \mu b$$

   Nous arrivons alors à un système :

$$\begin{cases} 5 = & 2\lambda + \mu \\ 0 = & 3\lambda - \mu \\ -7 = & -\lambda - 2\mu \end{cases} \iff \begin{cases} 5 = & 2\lambda + \mu \\ \mu = & 3\lambda \\ -7 = & -7\lambda \end{cases}$$

   D'où, d'après les deux dernières équations : $\lambda = 1$, $\mu = 3$, , ce qui est compatible avec la première équation. Donc,

$$c = a + 3b$$

Nous avons donc bien $\text{Vect}(\{a, b\}) = \text{Vect}(\{c, d\})$

Exercice 31 :

Enoncé de l'exercice

Construire une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, ensemble des triplets (x, y, z) vérifiant

1. $x = z - y$

   Voilà l'équation d'un plan. Un plan est un sous-espace vectoriel de dimension 2 ; une base de ce plan contient obligatoirement 2 vecteurs. L'énoncé nous demande donc de trouver une base de ce plan. Soit :

$$P = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x = z - y\right\}$$

   On peut définir autrement P :

$$P = \left\{(z - y, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\right\}$$

Donc,

$$u \in P \iff u = (z-y, y, z) = (z, 0, z) + (-y, y, 0) = z\,(1,0,1) + y\,(-1,1,0)$$

Les triplets $(1,0,1)$ et $(-1,1,0)$ engendrent clairement P ; leurs coordonnées n'étant pas proportionnelles, ils forment une famille libre, et donc une base de P.
Une base de P est donc $\{(1,0,1), (-1,1,0)\}$

2. $x+y+z = -x+3y+2z = 0$

Cette fois ci, c'est l'équation d'une droite *(intersection de 2 plans)*. Une base de cette droite, n'est constituée que d'un seul vecteur. Soit :

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x+y+z = -x+3y+2z = 0\right\}$$

Nous avons, en fait :

$$\left\{\begin{array}{rr} x+y+z = & 0 \\ -x+3y+2z = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rr} x+y = & -z \\ -x+3y = & -2z \end{array}\right.$$

D'où on tire $4y = -3z \iff y = \dfrac{-3}{4}z$ et $-4x = z \iff x = \dfrac{-1}{4}z$ On peut définir autrement D :

$$P = \left\{\left(\frac{-1}{4}z, \frac{-3}{4}z, z\right) \in \mathbb{R}^3 \text{ avec } z \in \mathbb{R}\right\}$$

Donc,

$$u \in D \iff u = \left(\frac{-1}{4}z, \frac{-3}{4}z, z\right) = z\left(\frac{-1}{4}, \frac{-3}{4}, 1\right)$$

Le triplet $\left(\dfrac{-1}{4}, \dfrac{-3}{4}, 1\right)$ engendre clairement D et forme une base de D.
Une autre base de D pourrait être $(1,3,-4)$

7.7.6 Miscelleanous

Exercice 32 :

Soit E l'ensemble des fonctions numériques d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$5f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0$$

Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

On appelle $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions numériques d'une variable réelle 2 fois différentiables. Il suffit de montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$; ce qui ne pose aucune difficulté, puisque la dérivation est linéaire.

Exercice 33 :

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\mathcal{B}_0 = \{i, j\}$

1. *$m \in \mathbb{R}$ étant un paramètre réel, on considère les vecteurs :*

$$\left\{\begin{array}{rl} I = & (m-3)\,i + mj \\ J = & (m+1)\,i - j \end{array}\right.$$

Pour quelles valeurs de m la famille $\mathcal{F} = \{I, J\}$ est-elle libre ou liée ?

Il suffit de calculer le déterminant de I et J. S'il est non nul, les 2 vecteurs sont linéairement indépendants, et dans V, $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, forment donc une base de V. Si le déterminant est nul, le système est lié.

$$\det(I,J) = \begin{vmatrix} m-3 & m \\ m+1 & -1 \end{vmatrix} = -(m-3) - m\,(m+1) = 3-m-m^2-m = -m^2-2m+3 = -(m-1)(m+3)$$

- Ainsi, $\det(I,J)=0$ si et seulement si $m=1$ ou $m=-3$, et à ce moment le système est lié
  - ▷ Si $m=1$, alors :
$$\begin{cases} I = & -2i+j \\ J = & 2i-j \end{cases}$$
    C'est à dire $I=-J$
  - ▷ Si $m=-3$, alors :
$$\begin{cases} I = & -6i-3j \\ J = & -2i-j \end{cases}$$
    C'est à dire $I=3J$
- Si $m\neq 1$ et $m\neq -3$, alors la famille $\mathcal{F}=\{I,J\}$ est une base de V

2. *On suppose $m=2$. Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur quelconque de V de coordonnées (x,y) dans la base $\mathcal{B}_0=\{i,j\}$ et de coordonnées (X,Y) dans la base $\mathcal{F}=\{I,J\}$. Calculer x et y en fonction de X et Y*

   Nous avons donc :
$$\begin{cases} I = & -i+2j \\ J = & 3i-j \end{cases}$$
   $\overrightarrow{v}$ s'écrit dans la base $\mathcal{F}=\{I,J\}$: $\overrightarrow{v}=XI+YJ$ et dans la base $\mathcal{B}_0=\{i,j\}$, $\overrightarrow{v}=xi+yj$.
   Nous avons, dans ce cas, $XI+YJ=xi+yj$, c'est à dire $X(-i+2j)+Y(3i-j)=xi+yj \iff (-X+3Y)i+(2X-Y)j=xi+yj$, d'où nous obtenons :
$$\begin{cases} x = & -X+3Y \\ y = & 2X-Y \end{cases} \iff \begin{cases} X = & \frac{1}{5}x+\frac{3}{5}y \\ Y = & \frac{2}{5}x+\frac{1}{5}y \end{cases}$$

   Pour aller plus loin
   Il est possible de regarder le problème d'un point de vue matriciel. Nous avons, en fait :
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$
   De telle sorte que
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
   Or, $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$
   Nous retrouvons bien les résultats établis dans la résolution.

Exercice 34 :

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, on considère les polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ indexés par le paramètre $m\in\mathbb{R}$ P_m et Q_m :
$$P_m(X)=(m-14)X^2+(m-5)X+3 \qquad Q_m(X)=5X^2-2mX+m$$
Pour quelles valeurs de $m\in\mathbb{R}$, le sous-espace vectoriel $\operatorname{vect}(\{P_m;Q_m\})$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est-il de dimension 2, de dimnsion 1 ?

D'autre part, nous avons $\dim\operatorname{vect}(\{P_m;Q_m\})\leqslant 2$. Si P_m et Q_m ne sont pas colinéaires, alors $\dim\operatorname{vect}(\{P_m;Q_m\})=2$; sinon, $\dim\operatorname{vect}(\{P_m;Q_m\})=1$.
Dans tous les cas, ni P_m, ni Q_m ne sont les polynômes nuls.
Les polynômes P_m et Q_m sont colinéaires s'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $P_m=\lambda Q_m$, ce qui veut dire qu'au niveau des coefficients, nous avons :
$$m-14=\lambda 5 \qquad m-5=-2\lambda m \qquad 3=\lambda m$$
Ce qui nous donne :
$3=\lambda m$, puis $m=5-2\lambda m=5-6=-1$ et $\lambda=3$
Ainsi :

- Si $m=-1$, les polynômes P_{-1} etQ_{-1} sont colinéaires et nous avons alors $\lambda=-3$ et $\dim \operatorname{vect}\left(\{P_{-1};Q_{-1}\}\right)=1$. Pour plus de précisions, nous avons :

$$P_{-1}(X)=-15X^2-6X+3 \qquad Q_{-1}(X)=5X^2+2X-1$$

- Si $m\neq -1$, nous avons $\dim \operatorname{vect}\left(\{P_m;Q_m\}\right)=2$

Exercice 35 :

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3.

1. *Démontrer que, pour tout vecteur $u\in V$, $v\in V$ et $w\in V$, nous avons l'équivalence :*

$$\{u,v,w\} \text{ libre } \Longleftrightarrow \{u,u+v,u+v+w\} \text{ libre}$$

- Supposons que la famille $\{u,v,w\}$ soit libre. Démontrons que la famille $\{u,u+v,u+v+w\}$ est libre.
Soient donc $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}$ et $\gamma\in\mathbb{R}$ tels que : $\alpha u+\beta(u+v)+\gamma(u+v+w)=\overrightarrow{0}$
Nous avons :

$$\alpha u+\beta(u+v)+\gamma(u+v+w)=\overrightarrow{0} \Longleftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma)u+(\beta+\gamma)v+\gamma w=\overrightarrow{0}$$

De l'indépendance de la famille $\{u,v,w\}$, nous avons :

$$\left\{\begin{array}{rl} \alpha+\beta+\gamma= & 0 \\ \beta+\gamma= & 0 \\ \gamma= & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$$

Ce qui montre que la famille $\{u,u+v,u+v+w\}$ est libre
- Réciproquement, supposons que la famille $\{u,u+v,u+v+w\}$ soit libre et démontrons que la famille $\{u,v,w\}$ est libre.
Pour nous simplifier la vie, nous posons :

$$X=u \qquad Y=u+v \qquad Z=u+v+w$$

Par hypothèse, la famille $\{X,Y,Z\}$ et nous avons :

$$u=X \qquad v=Y-X \qquad w=Z-Y$$

Soient donc $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}$ et $\gamma\in\mathbb{R}$ tels que : $\alpha u+\beta v+\gamma w=\overrightarrow{0}$. Alors, nous avons :

$$\alpha X+\beta(Y-X)+\gamma(Z-Y)=\overrightarrow{0} \Longleftrightarrow (\alpha-\beta)X+(\beta-\gamma)Y+\gamma Z=\overrightarrow{0}$$

De l'indépendance de la famille $\{X,Y,Z\}$, nous avons :

$$\left\{\begin{array}{rl} \alpha-\beta= & 0 \\ \beta-\gamma= & 0 \\ \gamma= & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$$

Ce qui montre que la famille $\{u,v,w\}$ est libre

2. *Soit $A\in V$, le vecteur de coordonnées $(1,3,5)$ dans la base $\{u,v,w\}$. Quelles sont les coordonnées de A dans la base $\{u,u+v,u+v+w\}$*

Nous avons $A=u+3v+5w$. Dans la question précédente, nous avons : $u=X$, $v=Y-X$, $w=Z-Y$, donc :

$$A=X+3(Y-X)+5(Z-Y) \Longleftrightarrow A=-2X-2Y+5Z$$

Les coordonnées de A dans la base $\{u,u+v,u+v+w\}$ sont donc $(-2,-2,5)$

Exercice 36 :

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 rapporté à une base $\mathcal{B}=\{i,j,k\}$

1. *On considère les vecteurs :*

$$\left\{\begin{array}{rl} I= & i-j+2k \\ J= & 2i+j-k \\ K= & 3i-j+4k \end{array}\right.$$

Montrer que la famille $\{I,J,K\}$ est une base de V

C'est très classique!! Soient $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}$ et $\gamma\in\mathbb{R}$ tels que $\alpha I+\beta J+\gamma K=\overrightarrow{0}$. Nous avons alors :

$\alpha(i-j+2k)+\beta(2i+j-k)+\gamma(3i-j+4k)=\overrightarrow{0}\iff(\alpha+2\beta+3\gamma)\,i+(-\alpha+\beta-\gamma)\,j+(-2\alpha-\beta+4\gamma)$

La famille $\mathcal{B}=\{i,j,k\}$ étant une base, nous avons donc le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rl} \alpha+2\beta+3\gamma= & 0 \\ -\alpha+\beta-\gamma= & 0 \\ -2\alpha-\beta+4\gamma= & 0 \end{array}\right.$$

C'est un système de Cramer dont nous pouvons calculer le déterminant : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ En combinant les lignes, nous obtenons :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 10 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}=24$$

Résultat que nous aurions pu obtenir en développant par rapport à la première ligne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}-2\times\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}+3\times\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=24$$

Le déterminant étant non nul, le système n'admet comme unique solution que : $\alpha=\beta=\gamma=0$
La famille $\{I,J,K\}$ est donc une base de V

2. *Calculer les coordonnées du vecteur $v=i+j+k$ dans la base $\{I,J,K\}$*

Nous avons toujours $v=i+j+k=XI+YJ+ZK\iff i+j+k=X(i-j+2k)+Y(2i+j-k)+Z(3i-j+4k)$ D'où nous obtenons :

$$i+j+k=(X+2Y+3Z)\,i+(-X+Y-Z)\,j+(2X-Y+4Z)\,k$$

De l'unicité de la décomposition d'un vecteur dans une base, nous obtenons le système :

$$\left\{\begin{array}{rl} X+2Y+3Z= & 1 \\ -X+Y-Z= & 1 \\ -2X-Y+4Z= & 1 \end{array}\right.$$

En combinant les lignes, nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{rl} X+2Y+3Z= & 1 \\ -X+Y-Z= & 1 \\ -2X-Y+4Z= & 1 \end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rl} X+2Y+3Z= & 1 \\ 3Y+2Z= & 2 \\ 3Y+10Z= & 3 \end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rl} X+2Y+3Z= & 1 \\ 3Y+2Z= & 2 \\ 8Z= & 1 \end{array}\right.$$

D'où $Z=\dfrac{1}{8}$, $Y=\dfrac{7}{12}$ et $X=\dfrac{-13}{24}$. Les coordonnées de v dans la base $\{I,J,K\}$ sont donc $\left(\dfrac{-13}{24},\dfrac{7}{12},\dfrac{1}{8}\right)$

Exercice 37 :

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, on considère les polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ suivants :

$$F(X) = X+1 \quad G(X) = X^2+X-1 \quad H(X) = X^2-2 \quad I(X) = X-1$$

1. *Montrer que la famille $\{F,G,H\}$ est une famille liée. Quel est le sous-espace vectoriel* $\operatorname{vect}(\{F,G,H\})$ *engendré par la famille $\{F,G,H\}$*
   - Il est assez facile de voir que $F(X) = G(X) - H(X)$; la famille $\{F,G,H\}$ est donc liée.
   - Les polynômes de $\operatorname{vect}(\{F,G,H\})$ sont tous de la forme $P = aG + bH$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ Et donc

     $$P \in \operatorname{vect}(\{F,G,H\}) \iff P(X) = aG(X)+bH(X) \iff P(X) = a\left(X^2+X-1\right)+b\left(X^2-2\right)$$

     Il est tout à fait possible de remanier $P(X) = a\left(X^2+X-1\right)+b\left(X^2-2\right)$. nous avons :

     $$\begin{aligned} P(X) = a\left(X^2+X-1\right)+b\left(X^2-2\right) &\iff P(X) = (a+b)X^2 + aX - (a+2b) \\ &\iff P(X) = AX^2 + AX + (2A-B) \\ &\iff P(X) = A\left(X^2+X+2\right) + B(X-1) \end{aligned}$$

2. *Montrer que la famille $\{G,H,I\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Calculer les coordonnées du polynôme $P(X) = 4X^2+X-3$ dans cette base*
   - On montre l'indépendance de la famille $\{G,H,I\}$; l'espace alors engendré par $\{G,H,I\}$ sera de dimension 3, et comme $\operatorname{vect}(\{G,H,I\}) \subset \mathbb{R}_2[X]$, nous avons $\operatorname{vect}(\{G,H,I\}) = \mathbb{R}_2[X]$, ce qui terminera de montrer que la famille $\{G,H,I\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$
     Il faut montrer que s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha F + \beta G + \gamma H = \mathcal{O}$ alors $\alpha = \beta = \gamma = 0$
     Soient donc $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha F + \beta G + \gamma H = \mathcal{O}$. Alors :

     $$\alpha\left(x^2+x-1\right)+\beta\left(x^2-2\right)+\gamma(x-1) = 0 \iff (\alpha+\beta)x^2 + (\alpha+\gamma)x + (-\alpha-2\beta-\gamma) = 0$$

     Nous obtenons alors le système :

     $$\left\{\begin{array}{rl} \alpha+\beta = & 0 \\ \alpha+\gamma = & 0 \\ -\alpha-2\beta-\gamma = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} \beta = & -\alpha \\ \gamma = & -\alpha \\ 2\alpha = & 0 \end{array}\right. \iff \alpha = \beta = \gamma = 0$$

     La famille $\{G,H,I\}$ est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$
   - A nouveau, il faut trouver $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha F + \beta G + \gamma H = P$. Nous aurons donc :

     $$(\alpha+\beta)x^2 + (\alpha+\gamma)x + (-\alpha-2\beta-\gamma) = 4x^2+x-3$$

     Nous obtenons alors le système :

     $$\left\{\begin{array}{rl} \alpha+\beta = & 4 \\ \alpha+\gamma = & 1 \\ -\alpha-2\beta-\gamma = & 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} \alpha+\beta = & 4 \\ -\beta+\gamma = & -3 \\ -\beta-\gamma = & 7 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} \alpha+\beta = & 4 \\ -\beta+\gamma = & -3 \\ -2\gamma = & 10 \end{array}\right.$$

     D'où, en remontant, $\gamma = -5$, $\beta = -2$ et $\alpha = 6$

   Les coordonnées du polynôme $P(X) = 4X^2+X-3$ dans la base $\{G,H,I\}$ sont donc $(6,-2,-5)$

Exercice 38 :

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère le sous-espace vectoriel E des vecteurs de la forme $E = \left\{(x,y,z)_i n\mathbb{R}^3 \text{ tels que } x = 0\right\}$ et le sous-espace vectoriel F défini par : $\operatorname{vect}(\{(1,2,3);(1,3,4)\})$

1. *Déterminer $E \cap F$*

   Soit $u \in F$;alors $u = \lambda(1,2,3) + \mu(1,3,4)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ Si $u \in E \cap F$, alors :

   $$\lambda + \mu = 0 \qquad 2\lambda + 3\mu = y \qquad 3\lambda + 4\mu = z$$

   D'où nous obtenons $y = z = \mu$, de telle sorte que $E \cap F = \text{vect}(\{(0,1,1)\}) = \{(0,\mu,\mu) \text{ avec } \mu \in \mathbb{R}\}$

2. *Déterminer $E + F$*

   Par définition de la somme de sous-espaces vectoriels , les vecteurs de $E+F$ sont la somme d'un vecteur de E et d'un vecteur de F, c'est à dire que si $u \in E+F$, alors

   $$u = y(0,1,0) + z(0,0,1) + \lambda(1,2,3) + \mu(1,3,4)$$

   La famille $\{(0,1,0),(0,0,1),(1,2,3),(1,3,4)\}$ est une famille liée, car :

   $$(1,3,4) = (1,2,3) + (0,1,0) + (0,0,1)$$

   De plus, la famille $\{(0,1,0),(0,0,1),(1,2,3)\}$ est libre, puisque si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ sont tels que :

   $$\alpha(0,1,0) + \beta(0,0,1) + \gamma(1,2,3) = (0,0,0)$$

   Nous avons :

   $$\left\{\begin{array}{rl} \gamma = & 0 \\ \alpha + 2\gamma = & 0 \\ \beta + 3\gamma = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

   Nous sommes dans $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 ; nous avons une famille libre $\{(0,1,0),(0,0,1),(1,2,3)\}$ de 3 vecteurs. Cette famille forme donc une base de $\mathbb{R}^3$, et nous pouvons donc conclure que $E + F = \mathbb{R}^3$

Exercice 39 :

Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}$-espace vectoriel , on considère E l'ensemble des triplets de la forme $(a-b, a, a+b)$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ ainsi que l'ensemble F des triplets (x,y,z) avec $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$ et tels que $x = y = z$

1. *Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$; en donner une base pour chacun d'eux*

   C'est assez simple.
   - ▷ Les triplets de E s'écrivent $a(1,1,1) + b(-1,0,1)$, de telle sorte que $E = \text{vect}(\{(1,1,1),(-1,0,1)\})$. C'est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
     Clairement, la famille $\{(1,1,1),(-1,0,1)\}$ est une famille libre et forme donc une base de E ; nous avons donc $\dim E = 2$
   - ▷ Les triplets de F s'écrivent $x(1,1,1)$ avec $x \in \mathbb{R}$, de telle sorte que $F = \text{vect}(\{(1,1,1)\})$. C'est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
     Clairement, le vecteur $\{(1,1,1)\}$ est une base et nous avons donc $\dim F = 1$

   Nous avons aussi $F \subset E$

2. *Déterminer $E \cap F$ et $E + F$*

   De la question précédente, nous tirons $E \cap F = F$ et $E + F = E$

Exercice 40 :

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, on considère les ensembles suivants :
- $E = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X] \text{ tel que } P(X) = aX^2 + bX\right\}$
- $F = \left\{Q \in \mathbb{R}_2[X] \text{ tel que } Q(X) = \lambda X^2 + \mu X + \lambda\right\}$

1. *Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$; en donner une base pour chacun d'eux*

   Appelons $\{e_0, e_1, e_2\}$, la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Alors, tout $P \in E$ s'écrit $P = ae_2 + be_1$ alors que tout $Q \in E$ s'écrit $Q = \lambda(e_2 + e_0) + \mu e_1$. Nous pouvons donc dire que :

- $E = \text{vect}(\{e_2, e_1\})$
- $F = \text{vect}(\{e_2 + e_0, e_1\})$

Ce sont donc des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$ de base, pour E, $\{e_2, e_1\}$, et pour F $\{e_2 + e_0, e_1\}$. Nous avons $\dim E = \dim F = 2$

2. *Déterminer $E \cap F$ et $E + F$*
   - Si $u \in E \cap F$, alors, $u(X) = aX^2 + bX = \lambda X^2 + \mu X + \lambda$, et donc, en identifiant :
   $$a = \lambda \qquad b = \mu \qquad \lambda = 0$$
   Et donc $u(x) = bx$. Nous avons donc $E \cap F = \text{vect}(\{e_1\})$
   - Si $P \in E + F$, alors $P(X) = aX^2 + bX + \lambda X^2 + \mu X + \lambda = (a + \lambda) X^2 + (b + \mu) X + \lambda$
   Donc $E + F = \mathbb{R}_2[X]$

Exercice 41 :

On considère $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, muni de l'addition des matrices et de la multiplication par un scalaire réel.

1. *Une matrice symétrique est du type $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$*

   Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Nous avons alors :
   $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$
   Dont on déduit $b = c$. D'où, une matrice symétrique est bien du type $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$

2. *Une matrice antisymétrique est du type $\begin{pmatrix} 0 & -\delta \\ \delta & 0 \end{pmatrix}$ avec $\delta \in \mathbb{R}$*

   Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Nous avons alors :
   $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -c \\ -b & -d \end{pmatrix}$$
   Dont on déduit
   $$a = -a \qquad b = -c \qquad d = -d$$
   D'où, $a = d = 0$ et une matrice antisymétrique est bien du type $\begin{pmatrix} 0 & -\delta \\ \delta & 0 \end{pmatrix}$ avec $\delta \in \mathbb{R}$

3. *$\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices antisymétriques sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*
   - Si $A \in \mathcal{S}$, alors $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} = \alpha E_{1,1} + \beta(E_{1,2} + E_{2,1}) + \gamma E_{2,2}$ Ainsi, $\mathcal{S} = \text{vect}(\{E_{1,1}, (E_{1,2} + E_{2,1}), E_{2,2}\})$ et $\mathcal{S}$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   D'autre part, $\{E_{1,1}, (E_{1,2} + E_{2,1}), E_{2,2}\}$ est clairement une famille libre et donc une base de $\mathcal{S}$; donc $\dim \mathcal{S} = 3$
   - Si $A \in \mathcal{A}$, alors $A = \begin{pmatrix} 0 & -\delta \\ \delta & 0 \end{pmatrix} = \delta(E_{2,1} - E_{1,2})$ Ainsi, $\mathcal{A} = \text{vect}(\{(E_{2,1} - E_{1,2})\})$ et $\mathcal{A}$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   D'autre part, $\dim \mathcal{A} = 1$

4. *$\mathcal{A}$ et $\mathcal{S}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*
   - Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; alors : $A = \dfrac{1}{2}(A + A^T) + \dfrac{1}{2}(A - A^T)$

◇ $A + A^T$ est une matrice symétrique puisque $\left(A + A^T\right)^T = A^T + \left(A^T\right)^T = A^T + A$

◇ $A - A^T$ est une matrice antisymétrique puisque $\left(A - A^T\right)^T = A^T - \left(A^T\right)^T = A^T - A = -\left(A - A^T\right)$

Donc, toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique, ce qui nous permet d'écrire que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{A} + \mathcal{S}$

- Démontrons que $\mathcal{A} \cap \mathcal{S} = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

  Soit donc $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$. Alors $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta \\ \delta & 0 \end{pmatrix}$. D'où :

$$\alpha = 0 \qquad \beta = \delta = -\delta \qquad \gamma = 0$$

  d'où $\beta = \delta = 0$ et A est donc la matrice nulle.

Ainsi $\mathcal{A}$ et $\mathcal{S}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et nous pouvons écrire $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{A} \oplus \mathcal{S}$

5. *A l'aide d'une base de $\mathcal{A}$ et d'une base de $\mathcal{S}$, donner une nouvelle base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*

   - Une base de $\mathcal{S}$ est donc $\{E_{1,1}, (E_{1,2} + E_{2,1}), E_{2,2}\}$
   - Une base de $\mathcal{A}$ est donc $\{(E_{2,1} - E_{1,2})\}$

   Une nouvelle base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est donc : $\{E_{1,1}, (E_{1,2} + E_{2,1}), (E_{2,1} - E_{1,2}), E_{2,2}\}$

Chapitre 8

Applications linéaires

8.1 Définitions et premières propriétés

8.1.1 Définition

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. On appelle application linéaire de E dans F la donnée d'une application $f : E \longrightarrow F$ telle que :

1. $\forall u \in E$, $\forall v \in E$, $f(u+v) = f(u) + f(v)$.
2. $\forall u \in E$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $f(au) = af(u)$.

Remarque 1 :

1. La définition 8.1.1 est équivalente à :

$$\boxed{(\forall u \in E), (\forall v \in E)(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R})(f(au+bv) = af(u) + bf(v))}$$

La démonstration en est simple.

Soient $u \in E$, $v \in E$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Comme E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel , $au \in E$ et $bv \in E$, et de la propriété d'application linéaire de f, nous avons :

$$f(au+bv) = f(au) + f(bv)$$

En itérant la propriété d'application linéaire , nous avons $f(au) = af(u)$ et $f(bv) = bf(v)$. D'où nous avons :

$$f(au+bv) = af(u) + bf(v)$$

2. On peut très bien généraliser cette définition :

$f : E \longrightarrow F$ est linéaire, si et seulement si, pour tout $\lambda_1 \in \mathbb{R}, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ et tout $u_1 \in E \ldots, u_n \in E$,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(u_i)$$

La démonstration se fait, facilement, par récurrence sur n

Exemple 1 :

Voici quelques exemples d'applications linéaires :

1. Les homothéties sont des applications linéaires

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $a \in \mathbb{R}$. On appelle homothétie de rapport a l'application h_a : $E \longrightarrow E$:

$$\begin{cases} h_a : E & \longrightarrow & E \\ \quad u : & \longmapsto & h_a(u) = au \end{cases}$$

Une homothétie est une application linéaire

En effet :

- Soient $u \in E$ et $v \in E$, nous avons :

$$h_a(u+v) = a(u+v) = au + av = h_a(u) + h_a(v)$$

- Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in E$,

$$h_a(\lambda u) = a(\lambda u) = \lambda(au) = \lambda h_a(u)$$

h_a est donc bien linéaire

(a) Si $a = 1$, alors, $h_1(u) = u$ et l'homothétie h_1 est l'application identique notée Id_E.

(b) Si $a = -1$, alors, $h_{-1}(u) = -u$ et l'homothétie h_{-1} est l'application $-\mathrm{Id}_E$ qui peut être vue comme une symétrie centrale.

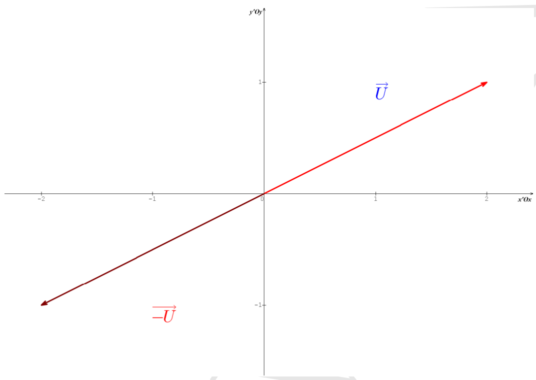


FIGURE 8.1 – Visualisation de l'homothétie de rapport -1

(c) Si $a = 0$, l'homothétie h_0 est l'application nulle souvent notée $\mathcal{O}_E$

2. L'application $t_{\overrightarrow{w}}$ de translation par un vecteur $\overrightarrow{w}$ non nul de E définie par $t_{\overrightarrow{w}}(u) = u + w$ **n'est pas une application linéaire .**

   <u>On choisit, pour le démontrer, de prendre un contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$.</u>
   On considère pour $\overrightarrow{w} = (1,1)$; alors,

$$t_{\overrightarrow{w}}[(x,y)] = (x,y) + (1,1) = (x+1, y+1)$$

   Il suffit, maintenant, de prendre des cas particuliers :

$$\begin{array}{l} t_{\overrightarrow{w}}[(1,0)] = (2,1) \\ t_{\overrightarrow{w}}[(0,1)] = (1,2) \\ t_{\overrightarrow{w}}[(1,0)] + t_{\overrightarrow{w}}[(0,1)] = (3,3) \\ t_{\overrightarrow{w}}[(1,0)+(0,1)] = t_{\overrightarrow{w}}[(1,1)] = (2,2) \end{array}$$

   Nous avons donc $t_{\overrightarrow{w}}[(1,0)] + t_{\overrightarrow{w}}[(0,1)] \neq t_{\overrightarrow{w}}[(1,0)+(0,1)]$ Et c'est donc fini ! !

3. Dans l'ensemble des polynômes $\mathbb{R}[X]$, l'application ϕ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \phi : \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \phi(P) = P(\alpha) \ \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

   est une application linéaire

   En effet, soient $P \in \mathbb{R}[X]$, $Q \in \mathbb{R}[X]$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$, alors,

$$\begin{array}{rcl} \phi(\lambda P + \mu Q) = & & (\lambda P + \mu Q)(\alpha) \\ & = & (\lambda P)(\alpha) + (\mu Q)(\alpha) \\ & = & \lambda P(\alpha) + \mu Q(\alpha) \\ & = & \lambda \phi(P) + \mu \phi(Q) \end{array}$$

   Ce qui montre que ϕ est bien une application linéaire

4. On appelle $\mathcal{C}^0([0,1])$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$; alors :
$$\left\{\begin{array}{rcl} \phi : \mathcal{C}^0([0,1]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \phi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt \end{array}\right.$$
est une application linéaire. C'est l'expression de la **linéarité de l'intégrale**.
5. Soit a un réel et $\mathcal{F}$, l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'application
$$\left\{\begin{array}{rcl} ev_a : \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & ev_a(f) = f(a) \end{array}\right.$$
appelée **évaluation de** f **en** a est une application linéaire. La démonstration de la linéarité de ev_a est semblable à celle de 3
6. Dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, espace des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, on considère l'application $D : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}(\mathbb{R})$ définie par $D(f) = f'$ où f' est la fonction dérivée de f
D est linéaire. C'est **l'expression de la linéarité de la dérivation.**
7. Soit $a \in \mathbb{R}$ un réel et $\mathcal{F}$, l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'application
$$\left\{\begin{array}{rcl} t_a : \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ f & \longmapsto & t_a(f) \end{array}\right.$$
où $t_a(f)$ est la fonction définie par $t_a(f)(x) = f(x+a)$ est une application linéaire. Le graphe de $t_a(f)$ est le translaté du graphe de f par le vecteur $(-a, 0)$.

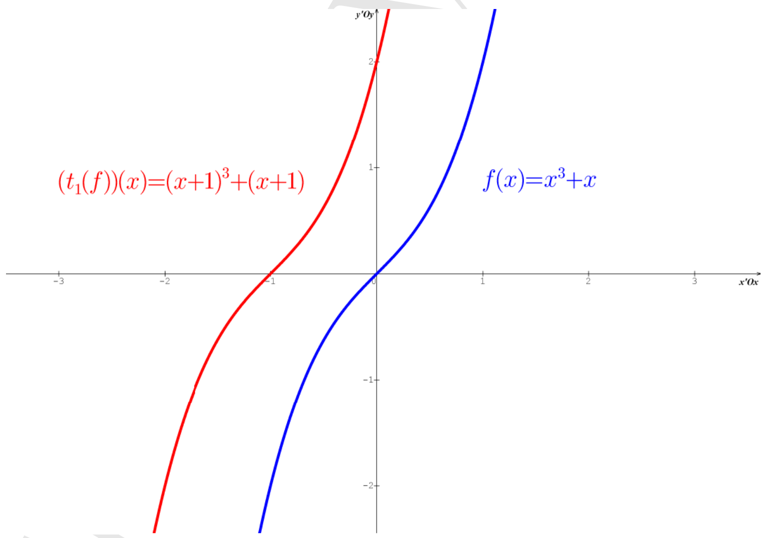


FIGURE 8.2 – Les graphes de la fonction $f(x) = x^3 + x$ et de sa translatée $t_1(f)$

Démontrons que t_a est une application linéaire.
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{F}$ et $g \in \mathcal{F}$; alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{array}{rcl} t_a(\lambda f + \mu g)(x) = & & (\lambda f + \mu g)(x+a) \\ & = & (\lambda f)(x+a) + (\mu g)(x+a) \\ & = & \lambda f(x+a) + \mu g(x+a) \\ & = & \lambda t_a(f)(x) + \mu t_a(g)(x) \\ & = & (\lambda t_a(f) + \mu t_a(g))(x) \end{array}$$
Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $t_a(\lambda f + \mu g)(x) = (\lambda t_a(f) + \mu t_a(g))(x)$, c'est à dire, qu'en termes de fonctions numérique,$t_a(\lambda f + \mu g) = \lambda t_a(f) + \mu t_a(g)$, ce qui montre que t_a est linéaire

8. Soit $a \in \mathbb{R}$ un réel. On appelle différence finie l'application linéaire définie dans $\mathcal{F}$ par $\Delta_a = t_a - Id$, c'est à dire :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Delta_a : \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ f & \longmapsto & \Delta_a(f) = t_a(f) - f \end{array} \right.$$
C'est à dire que $\Delta_a(f)$ est la fonction $\Delta_a(f)(x) = f(x+a) - f(x)$.
La démonstration de la linéarité pourra se faire, facilement, ultérieurement.
9. La **projection** $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} p : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & p[(x,y)] = (x,0) \end{array} \right.$$

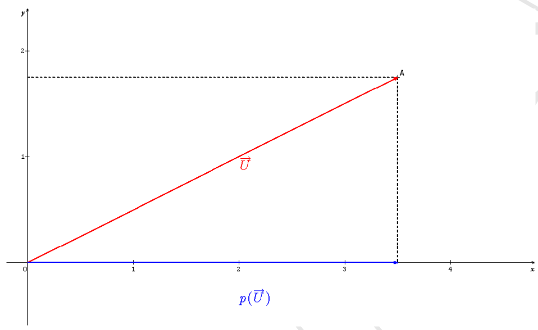


FIGURE 8.3 – La projection sur l'axe des abscisses parallèlement à l'axe des ordonnées

La projection est une application linéaire
10. La **symétrie** $s : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} s : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & s[(x,y)] = (x,-y) \end{array} \right.$$
La symétrie est une application linéaire

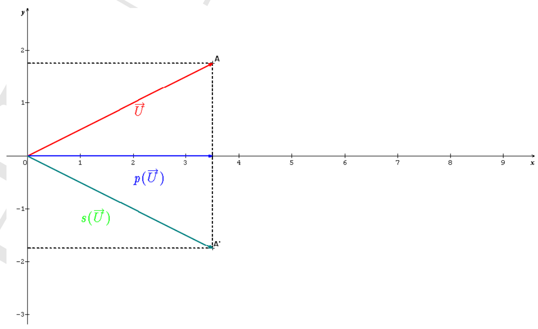


FIGURE 8.4 – La symétrie par rapport à l'axe des abscisses parallèlement à l'axe des ordonnées

Nous avons : $s(u) + u = 2p(u) \Longleftrightarrow s(u) = 2p(u) - u$.

Exercice 1 :

Démontrer que la projection
$$\left\{ \begin{array}{rcl} p : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & p[(x,y)] = (x,0) \end{array} \right.$$
est linéaire

Nous allons le démontrer en deux temps.

1. Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x',y') \in \mathbb{R}^2$, Alors :

$$\begin{aligned} p\left[(x,y)+(x',y')\right] &= p\left[(x+x',y+y')\right] \\ &= (x+x',0) \\ &= (x,0)+(x',0) \\ &= p\left[(x,y)\right]+p\left[(x',y')\right] \end{aligned}$$

2. Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, Alors :

$$\begin{aligned} p\left[\lambda(x,y)\right] &= p\left[(\lambda x,\lambda y)\right] \\ &= (\lambda x,0) \\ &= \lambda(x,0) \\ &= \lambda p\left[(x,y)\right] \end{aligned}$$

Ce qui montre que p est bien linéaire

Exercice 2 :

Corrigé de l'exercice

Parmi les applications suivantes, indiquer celles qui sont linéaires : on pose $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$

1. $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par : $(x,y,z) \mapsto (0, 2y-z, 0)$
2. $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par : $(x,y,z) \mapsto (x+2y+3z, 2yz, x+z)$
3. $\varphi_1 : E \to E$ définie par $f \mapsto 3f''+8f'+5f$
4. $\varphi_2 : E \to E$ définie par $f \mapsto f''-2xf'+5f$
5. $\varphi_3 : E \to E$ définie par $f \mapsto ff'$
6. $\varphi_4 : E \to E$ définie par $f \mapsto (x \mapsto f(x) - \int_0^x (x-t)\, f(t)\ dt)$.
7. $\varphi_5 : E \to E$ définie par $f \mapsto f(0)-2f(3)$

Exercice 3 :

Parmi les applications suivantes, indiquer celles qui sont linéaires.

1. $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par : $(x,y,z) \mapsto (x+2y+3z, 2y-z, x+z)$
2. $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par : $(x,y,z) \mapsto x+2y+3z$
3. $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par : $(x,y,z) \mapsto xyz$
4. $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $x \mapsto x^2+2x$.

Dans cet exercice, seules les deux premières applications sont linéaires. Les deux dernières ne le sont pas, du fait de la présence de carré ou de produit *(prendre des contre-exemples)*

8.1.2 Définition de forme linéaire

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel . On appelle forme linéaire toute application linéaire de E dans $\mathbb{R}$

Exemple 2 :

1. L'application $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par : $(x,y,z) \longrightarrow f_2((x,y,z)) = x+2y+3z$ est une forme linéaire
2. Pour $\mathcal{C}^0([0,1])$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$; alors l'application ϕ :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \phi : \mathcal{C}^0([0,1]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \phi(f) = \int_0^1 f(t)\ dt \end{array} \right.$$

est une forme linéaire.

3. Dans $\mathcal{F}$, l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'application

$$\left\{\begin{array}{rcl} ev_a : \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & ev_a(f) = f(a) \end{array}\right.$$

Est une forme linéaire.

8.1.3 Propriétés

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espace vectoriel . $\overrightarrow{0}_E$ est le vecteur nul de E, alors que $\overrightarrow{0}_F$ est le vecteur nul de F
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire, alors $f(\overrightarrow{0}_E) = \overrightarrow{0}_F$

Démonstration

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire, et $u \in E$. Alors, $f\left(\overrightarrow{0}_E\right) = f(0.u) = 0.f(u) = \overrightarrow{0}_F$

Remarque 2 :

1. Soit $\overrightarrow{w} \in E$ tel que $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}_E$. Alors, la translation $t_{\overrightarrow{w}}$ ne peut être linéaire puisque $t_{\overrightarrow{w}}\left(\overrightarrow{0}_E\right) = \overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}_E$
2. Une autre démonstration de 8.1.3 est la suivante :
   Soit $u \in E$. Alors :
   $$f(u) = f\left(u + \overrightarrow{0}_E\right) = f(u) + f\left(\overrightarrow{0}_E\right)$$
   Nous avons donc $f(u) = f(u) + f\left(\overrightarrow{0}_E\right)$ et donc $f(\overrightarrow{0}_E) = \overrightarrow{0}_F$

8.1.4 Proposition

La composée de deux application linéaires est linéaire.

Démonstration

Soient E, F et G, 3 $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f : E \longrightarrow F$ $g : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires.
Soient $x \in E$, $y \in E$ $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$; il faut démontrer que $g \circ f$ est linéaire.

$$\begin{array}{rl} g \circ f(ax + by) & = g[f(ax + by)] \text{ par définition de } \circ \\ & = g[af(x) + bf(y)] \text{ car } f \text{ est linéaire} \\ & = ag[f(x)] + bg[f(y)] \text{ car } g \text{ est linéaire} \\ & = ag \circ f(x) + bg \circ f(y) \end{array}$$

Ce que nous voulions.

8.1.5 Définition : somme d'applications linéaires.

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : E \longrightarrow F$ deux applications linéaires.
On définit leur somme $f + g : E \longrightarrow F$ en posant, pour tout $u \in E$

$$(f + g)(u) = f(u) + g(u)$$

.

8.1.6 Proposition

La somme de deux applications linéaires est linéaire.

Démonstration

Elle est simple et utilise la linéarité de f et de g. En effet, pour $u \in E$, $v \in E$ et $a \in \mathbb{R}$,

1. **Addition**

$$\begin{aligned}(f+g)(u+v) = & \ f(u+v)+g(u+v) \\ = & \ f(u)+f(v)+g(u)+g(v) \\ = & \ f(u)+g(u)+f(v)+g(v) \\ = & \ (f+g)(u)+(f+g)(v)\end{aligned}$$

2. **Multplicaton par un scalaire**

$$\begin{aligned}(f+g)(au) = & \ f(au)+g(au) \\ = & \ af(u)+ag(u) \\ = & \ a(f(u)+g(u)) \\ = & \ a(f+g)(u)\end{aligned}$$

Exemple 3 :

La différence finie définie ci-dessus dans $\mathcal{F}$ par $\Delta_a = t_a - Id$ est donc linéaire comme somme de 2 applications linéaires t_a et Id

8.1.7 Définition : produit d'une application linéaire par un scalaire.

On définit le produit d'une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ par un scalaire $a \in \mathbb{R}$ en posant

$$(af)(u) = af(u)$$

8.1.8 Proposition

Le produit d'une application linéaire par un scalaire est une application linéaire .

Démonstration

Nous utilisons une nouvelle fois la linéarité de f. En effet, pour $u \in E$, $v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

1. **Addition**

$$\begin{aligned}(af)(u+v) = & \ af(u+v) \\ = & \ a[f(u)+f(v)] \\ = & \ af(u)+af(v) \\ = & \ (af)(u)+(af)(v)\end{aligned}$$

2. **Multplicaton par un scalaire**

$$\begin{aligned}(af)(\lambda u) = & \ af(\lambda u) \\ = & \ a\lambda f(u) \\ = & \ \lambda[af(u)] \\ = & \ \lambda(af)(u)\end{aligned}$$

Donc (af) est une application linéaire

Exemple 4 :

La symétrie, définie par $s(u)+u = 2p(u) \iff s(u) = 2p(u)-u = (2p - \mathrm{Id}_E)(u)$ est donc une application linéaire

8.1.9 Proposition

Soient E et F 2 $\mathbb{R}$-espaces vectorielset $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire bijective
Alors, $f^{-1} : F \longrightarrow E$ est linéaire

Démonstration

Soient $y \in F$ et $z \in F$.
Il existe alors un unique $u \in E$ tel que $f(u) = y \iff u = f^{-1}(y)$. De même, il existe alors un unique $v \in E$ tel que $f(v) = z \iff v = f^{-1}(z)$.
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$; alors :

$$\begin{aligned} f^{-1}(\lambda y + \mu z) = & \; f^{-1}(\lambda f(u) + \mu f(v)) \\ = & \; f^{-1}(f(\lambda u + \mu v)) \text{ par linéarité de } f \\ = & \; \lambda f^{-1}(y) + \mu f^{-1}(z) \end{aligned}$$

f^{-1} est bien linéaire

Remarque 3 :

Nous reparlerons des applications linéaires bijectives dans les isomorphismes *(cf 8.5.1)*

8.1.10 Propriété et Définition : Espaces d'applications linéaires

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F a une structure d'espace vectoriel pour les opérations de somme et de produit par un scalaire définies ci-dessus.
Cet ensemble est appelé espace vectoriel des applications linéaires de E dans F.

Démonstration

La démonstration de ce résultat important est très simple ; nous ne la ferons pas dans sa totatlité

1. Tout d'abord, $(\mathcal{L}(E, F), +)$ est un groupe commutatif
   (a) En premier lieu, l'addition est une opération interne, d'après 8.1.6
   (b) Ensuite l'addition est associative : $f + (g + h) = (f + g) + h = f + g + h$ puisque pour tout $x \in E$:
   $$\begin{aligned} (f + (g + h))(x) = & \; f(x) + (g + h)(x) \\ = & \; f(x) + g(x) + h(x) \\ = & \; (f(x) + g(x)) + h(x) \\ = & \; (f + g)(x) + h(x) \\ = & \; ((f + g) + h)(x) \end{aligned}$$
   Ainsi, pour tout $x \in E$, nous avons $(f + (g + h))(x) = ((f + g) + h)(x)$, et donc, dans $\mathcal{L}(E, F)$, nous avons : $f + (g + h) = (f + g) + h = f + g + h$
   (c) L'addition est clairement commutative : pour tout $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et tout $g \in \mathcal{L}(E, F)$, nous avons $f + g = g + f$
   (d) L'aplication nulle $\mathcal{O}_{E,F}$ telle que, pour tout $u \in E$, $\mathcal{O}_{E,F}(u) = \overrightarrow{0}_F$ est l'élément neutre pour l'addition
   (e) Toute fonction $f \in \mathcal{L}(E, F)$ admet un élément symétrique dans $\mathcal{L}(E, F)$ qui est la fonction $-f$:
   $$\left\{ \begin{array}{rcl} -f : E & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & (-f)(u) = -f(u) \end{array} \right.$$
   $(\mathcal{L}(E, F), +)$ est donc bien un groupe commutatif
2. Propriétés de la multiplication par un scalaire réel
   On démontre facilement que :

(a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et tout $g \in \mathcal{L}(E,F)$, nous avons : $\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$
(b) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $\mu \in \mathbb{R}$ et tout $f \in \mathcal{L}(E,F)$, nous avons : $(\lambda+\mu) f = \lambda f + \mu f$
(c) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $\mu \in \mathbb{R}$ et tout $f \in \mathcal{L}(E,F)$, nous avons : $(\lambda \times \mu) f = \lambda \times (\mu f)$
(d) Pour tout $f \in \mathcal{L}(E,F)$, nous avons : $1 \times f = f$

8.1.11 Définition d'endomorphisme

On appelle endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, une application linéaire de E dans lui-même.
On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E.

Remarque 4 :

1. Nous avons $\mathcal{L}(E,E) = \mathcal{L}(E)$
2. D'après 8.1.10, $\mathcal{L}(E)$ est bien un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
3. Soient f et g deux endomorphismes de E. En général $g \circ f$ et $f \circ g$ ne sont pas égaux.
   Ainsi, dans $\mathcal{L}(E)$, nous n'avons pas forcément commutativité de la loi $\circ$.

Exemple 5 :

Voici des exemples illustrant la non-commutativité de la loi $\circ$

▷ $\left\{\begin{array}{lll} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = (-y,x) \end{array}\right.$

▷ $\left\{\begin{array}{lll} g : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & g(x,y) = (-x,y) \end{array}\right.$

▷ $\left\{\begin{array}{lll} h : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & h(x,y) = (-x,-y) \end{array}\right.$

Nous avons par exemple $h \circ f = f \circ h$, mais nous avons $f \circ g \neq g \circ f$. En effet,

- $h \circ f(x,y) = h(-y,x) = (y,-x)$ et $f \circ h(x,y) = f(-x,-y) = (y,-x)$
- $f \circ g(x,y) = f(-x,y) = (-y,-x)$ et $g \circ f(x,y) = g(-y,x) = (y,x)$

Nous avons, par contre, le résultat suivant :

8.1.12 Proposition

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathcal{L}(E)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des endomorphismes de E. Alors $\mathcal{L}(E)$, muni de l'addition des applications linéaires et de la composition des applications linéaires est un anneau non forcément commutatif, où la loi $\circ$ admet un élément neutre Id_E
On écrit donc que $(\mathcal{L}(E),+,\circ)$ est un anneau unitaire

Démonstration

1. D'après 8.1.10, $(\mathcal{L}(E),+)$ est un groupe commutatif
2. L'élément neutre pour la loi de composition $\circ$ et Id_E
3. La loi $\circ$ est distributive à droite et à gauche par rapport à l'addition. Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, tout $g \in \mathcal{L}(E)$ et tout $h \in \mathcal{L}(E)$, nous avons :

$$\left\{\begin{array}{l} h \circ (f+g) = h \circ f + h \circ g \\ (f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h \end{array}\right.$$

   Nous ne démontrerons que la distributivité à gauche
   Soient donc $f \in \mathcal{L}(E)$, $g \in \mathcal{L}(E)$ et $h \in \mathcal{L}(E)$; soit $u \in E$; alors :

$$\begin{array}{rcl} [h \circ (f+g)](u) = & & h[(f+g)(u)] \\ & = & h[f(u)+g(u)] \\ & = & h[f(u)] + h[g(u)] \text{ par linéarité de } h \\ & = & h \circ f(u) + h \circ g(u) \\ & = & (h \circ f + h \circ g)(u) \end{array}$$

Donc, pour tout $u \in E$, nous avons $[h \circ (f+g)](u) = (h \circ f + h \circ g)(u)$, c'est à dire que, dans $\mathcal{L}(E)$,nous avons $h \circ (f+g) = h \circ f + h \circ g$

Remarque 5 :

Nous venons de voir que $\mathcal{L}(E)$ est muni de 3 opérations :
- ▷ L'addition
- ▷ La multiplication par un scalaire
- ▷ La composition des applications

On avu qu'avec les deux premières,$\mathcal{L}(E)$ a une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel . Avec ces 3 opérations, $\mathcal{L}(E)$ a **une structure d'algèbre**

Exercice 4 :

1. Démontrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, tout $f \in \mathcal{L}(E)$ et tout $g \in \mathcal{L}(E)$, nous avons :
$$\lambda(g \circ f) = (\lambda g) \circ f = g \circ (\lambda f)$$
2. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et$g \in \mathcal{L}(E)$. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ $a_1 \in \mathbb{R}$ et $b_1 \in \mathbb{R}$
   (a) Calculer $(af + bg) \circ (a_1 f + b_1 g)$
   (b) Appliquer le résultat trouvé à :
   i. $a = b = a_1 = b_1 = 1$ ii. $a = a_1 = 1$ et $b = b_1 = -1$ iii. $a = b = a_1 = 1$ et $b_1 = -1$

Exercice 5 :

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel , $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Nous appelons E_λ l'ensemble suivant :
$$E_\lambda = \{u \in E \textit{ tels que } f(u) = \lambda u\}$$
Il faut montrer que E_λ est un sous-espace vectoriel de E

1. **<u>Résolution de l'exercice</u>**
   - ▷ Tout d'abord $E_\lambda \neq \emptyset$ puisque, comme $f\left(\overrightarrow{0}_E\right) = \overrightarrow{0}_E = \lambda \overrightarrow{0}_E$, nous avons $\overrightarrow{0}_E \in E_\lambda$
   - ▷ Soient $u \in E_\lambda$, $v \in E_\lambda$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Il faut montrer que $au + bv \in u \in E_\lambda$
   $$f(au+bv) = f(au) + f(bv) = af(u) + bf(v) = a \times \lambda u + b \times \lambda v = \lambda(au+bv)$$
   Et donc $au + bv \in u \in E_\lambda$

   Donc E_λ est un sous-espace vectoriel de E
2. **<u>Regardons quelques cas particuliers</u>**
   (a) Si $\lambda = 0$, alors $E_0 = \left\{u \in E \text{ tels que } f(u) = \overrightarrow{0}\right\} = f^{-1}\left(\left\{\overrightarrow{0}\right\}\right)$. On vient donc de montrer que l'ensemble des antécédents du vecteur nul forme un sous-espace vectoriel de E
   (b) Si $\lambda = 1$, alors $E_1 = \{u \in E \text{ tels que } f(u) = u\}$. On vient donc de montrer que l'ensemble des vecteurs invariants par f *(s'ils existent !)* forme un sous-espace vectoriel de E
   (c) Si $\lambda = -1$, alors $E_{-1} = \{u \in E \text{ tels que } f(u) = -u\}$. On vient donc de montrer que l'ensemble des vecteurs transformés en leur opposé par f *(s'ils existent !)* forme un sous-espace vectoriel de E

Exercice 6 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle $\mathrm{Com}(f)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$ qui commutent avec f

1. Démontrer que $\mathrm{Com}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$
2. Démontrer que $\mathrm{Com}(f)$ est un sous-anneau de $\mathcal{L}(E)$

Exercice 7 :

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel , $f \in \mathcal{L}(E)$ et $g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$
Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, nous avons $f^n \circ g^p = g^p \circ f^n$

8.2 Applications linéaires et bases

8.2.1 Proposition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. Soit F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel . Alors :

1. Toute application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est entièrement déterminée par la donnée de $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$
2. Pour toute famille $u_1, \ldots, u_n$ de n vecteurs de F, il existe une unique application linéaire $f : E \longrightarrow F$ telle que $f(e_i) = u_i$ pour $1 \leq i \leq n$

Remarque 6 :

Autrement dit :
Une aplication linéaire est donc entièrement déterminée par les images de ses vecteurs de base

Démonstration

1. Soit u un vecteur de E; alors, il s'écrit de façon unique : $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$

   Alors, nous avons, nécessairement $f(u) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i)$.

   La connaissance des $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ détermine donc complètement l'application linéaire f
2. Soit $u_1, \ldots, u_n$ n vecteurs de F, et nous définissons l'application f par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f : E & \longrightarrow & F \\ u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i & \longmapsto & f(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \end{array}\right.$$

   (a) Cette application est linéaire.
   En effet, soient $x \in E$, $y \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$.
   Alors $\lambda x + \mu y = \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) + \mu\left(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_1 + \mu y_i) e_i$. donc :

$$f(\lambda x + \mu y) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_1 + \mu y_i) u_i = \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i\right) + \mu\left(\sum_{i=1}^{n} y_i u_i\right) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

   (b) Démontrons l'unicité de cette fonction f
   Soit donc ϕ, une autre application linéaire $\Phi : E \longrightarrow F$ telle que $\Phi(e_i) = u_i$
   Démontrons que, pour tout $x \in E$, $\Phi(x) = f(x)$

$$\Phi(x) = \Phi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \Phi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i = f(x)$$

   Donc $\Phi = f$ et l'unicité est démontrée.

Remarque 7 :

Notons $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
La donnée de n vecteurs $\{u_1, \ldots, u_n\}$ d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E quelconque équivaut donc à la donnée d'une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to E$ telle que $L(e_i) = u_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$

Exercice 8 :

On note $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Existe-t-il un endomorphisme $g\ : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vérifiant les conditions suivantes :

1. Premier cas $g(e_1) = e_2 + e_3$, $g(e_2) = e_1$, $g(e_3) = e_2 - e_3$
2. Second cas $g(e_1 + e_2) = e_3$, $g(e_2 + e_3) = e_1$ et $g(e_3 - e_1) = e_2$

Résolution de cet exercice

1. Soit $g\ : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $g(e_1) = e_2 + e_3$, $g(e_2) = e_1$, $g(e_3) = e_2 - e_3$
   D'après le théorème ci-dessus, il existe bien une application linéaire $g\ : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $g(e_1) = e_2 + e_3$, $g(e_2) = e_1$, $g(e_3) = e_2 - e_3$.
   Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, alors, $(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$, et
   $$g[(x, y, z)] = xg(e_1) + yg(e_2) + zg(e_3)$$
   C'est à dire
   $$\begin{aligned} g[(x, y, z)] = &\ x(e_2 + e_3) + y(e_1) + z(e_2 - e_3) \\ = &\ ye_1 + (x + z)e_2 + (x - z)e_3 \end{aligned}$$
   Nous avons ainsi une définition analytique de g :
   $$\begin{cases} x' = & y \\ y' = & x + z \\ z' = & x - z \end{cases}$$

2. Soit maintenant, $g\ : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $g(e_1 + e_2) = e_3$, $g(e_2 + e_3) = e_1$ et $g(e_3 - e_1) = e_2$
   g étant linéaire, nous avons :
   $$\begin{cases} g(e_1) + g(e_2) = & e_3 \\ g(e_2) + g(e_3) = & e_1 \\ g(e_3) - g(e_1) = & e_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} g(e_1) + g(e_2) = & e_3 \\ g(e_2) + g(e_3) = & e_1 \\ g(e_3) = & g(e_1) + e_2 \end{cases}$$
   Ces ystème est donc équivalent à :
   $$\begin{cases} g(e_1) + g(e_2) = & e_3 \\ g(e_2) + g(e_1) + e_2 = & e_1 \\ g(e_3) = & g(e_1) + e_2 \end{cases}$$
   Qui conduit à :
   $$\begin{cases} g(e_1) + g(e_2) = & e_3 \\ g(e_2) + g(e_1) = & e_1 - e_2 \\ g(e_3) = & g(e_1) + e_2 \end{cases}$$
   Système qui est impossible puisque nous avons $g(e_1) + g(e_2) = e_3 = e_1 - e_2$, avec les vecteurs e_3 et $e_1 - e_2$ linéairement indépendants.
   Il n'y a donc pas d'endomorphisme $g\ : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vérifiant les conditions $g(e_1 + e_2) = e_3$, $g(e_2 + e_3) = e_1$ et $g(e_3 - e_1) = e_2$

8.3 Noyau et image d'une application linéaire

8.3.1 Proposition

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectorielset $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire . Soit $H \subset F$ un sous-espace vectoriel de F. Alors :

$$f^{-1}(H) = \{u \in E \text{ tels que } f(u) \in H\}$$

est un sous-espace vectoriel de E

Démonstration

1. Montrons tout d'abord que $f^{-1}(H) \neq \emptyset$

   En effet, H étant un sous-espace vectoriel de F, nous avons $\overrightarrow{0}_F \in H$, et comme $f\left(\overrightarrow{0}_E\right) = \overrightarrow{0}_F$, nous avons $\overrightarrow{0}_E \in f^{-1}(H)$ et donc $f^{-1}(H) \neq \emptyset$
2. Montrons que $f^{-1}(H)$ est stable par combinaison linéaire

   Soient $u \in f^{-1}(H)$, $v \in f^{-1}(H)$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Montrons que $au + bv \in f^{-1}(H)$
   Par hypothèse, nous avons $f(u) \in H$ et $f(v) \in H$, et comme H est un sous-espace vectoriel de F, nous avons $af(u) + bf(v) \in H$.
   De la linéarité d ef, nous tirons $af(u) + bf(v) = f(au + bv)$, et donc $f(au + bv) \in H$, c'est à dire $au + bv \in f^{-1}(H)$

Donc, $f^{-1}(H)$ est un sous-espace vectoriel de E

8.3.2 Définition

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectorielset $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire .
On appelle noyau de f noté $\ker f$ [a] l'ensemble des vecteurs de E dont l'image est le vecteur nul de F c'est à dire :

$$\ker f = \left\{u \in E / f(u) = \overrightarrow{0}_F\right\} = f^{-1}\left(\left\{\overrightarrow{0}_F\right\}\right)$$

a. De l'allemand kern : noyau

8.3.3 Proposition

$\ker f$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

Ce résultat peut être pris comme un cas particulier de 8.3.1 puisque $\left\{\overrightarrow{0}_F\right\}$ est un sous-espace vectoriel trivial de F.
Nous allons, cependant, refaire la démonstration classique.

1. Tout d'abord, nous avons $\ker f \neq \emptyset$

   En effet, comme $f\left(\overrightarrow{0}_E\right) = \overrightarrow{0}_F$, nous avons $\overrightarrow{0}_E \in \ker f$, et donc $\ker f \neq \emptyset$
2. Soient $x \in \ker f$, $y \in \ker f$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$; montrons que $\lambda x + \mu y \in \ker f$

   Il faut donc calculer $f(\lambda x + \mu y)$ et montrer que $f(\lambda x + \mu y) = \overrightarrow{0}_F$
   En utilisant la linéarité de f, il n'y a rien de plus simple, car $f(x) = f(y) = \overrightarrow{0}_F$

Remarque 8 :

Dans un exercice précédent 8.1.12, nous avons démontré le théorème dans le cas particulier des endomorphismes

Exemple 6 :

1. Revenons à l'exercice 8.2.1. Si $g\ :\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $g(e_1) = e_2+e_3$, $g(e_2) = e_1$, $g(e_3) = e_2-e_3$, alors si $g\left[(x,y,z)\right] = (x',y',z')$, nous avons :

$$\left\{\begin{array}{rl} x' = & y \\ y' = & x+z \\ z' = & x-z \end{array}\right.$$

Rechercher le noyau de g, c'est rechercher tous les triplets (x,y,z) tels que

$$g\left[(x,y,z)\right] = (x',y',z') = (0,0,0)$$

C'est à dire les triplets (x,y,z) qui vérifieront le système :

$$\left\{\begin{array}{rl} 0 = & y \\ 0 = & x+z \\ 0 = & x-z \end{array}\right.$$

Qui nous donne comme solution : $x=y=z=0$. Donc, $\ker g = \{(0,0,0)\}$

2. Dans $\mathbb{R}^2$, considérons l'application linéaire f suivante : $f:(x,y) \longmapsto (x+y, 2x-y)$.
Trouver $\ker f$, c'est trouver tous les antécédents du vecteur nul $(0,0)$ en résolvant le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{rl} x+y & = 0 \\ 2x-y & = 0 \end{array}\right.$$

Nous trouvons $x=y=0$ et donc $\ker f = \{(0,0)\}$

3. On se situe dans $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et on considère $\varphi_1 : E \longrightarrow E$ définie par $f \longmapsto 3f''+8f'+5f$
φ_1 est une application linéaire . Résoudre l'équation différentielle du second ordre

$$3f''+8f'+5f = 0$$

C'est trouver toutes les fonctions $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que $\varphi_1(f) = \mathcal{O}$; c'est rechercher le noyau de φ_1

4. Prenons l'ensemble $E = \mathbb{R}^\mathbb{N}$ des suites de nombres réels et considérons la relation :

$$u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = 0. \tag{8.1}$$

L'ensemble $\mathcal{S}$ des suites vérifiant (1) est le noyau $\ker(L)$ d'une application linéaire L définie par :

$$\begin{array}{rcl} L:\mathbb{R}^\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R}^\mathbb{N} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & L\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (u_{n+2}-u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

8.3.4 Proposition

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire .
f est injective si et seulement si $\ker f$ est réduit au vecteur nul, c'est à dire si et seulement si

$$\ker f = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$$

Démonstration

On rappelle qu'une application de A dans B **est injective** si et seulement si pour tout $x\in A$ et tout $x'\in A$, $x\neq x' \Rightarrow f(x)\neq f(x')$
En utilisant la contrapposée, nous avons : pour tout $x\in A$ et tout $x'\in A$ si $f(x) = f(x')$ alors $x = x'$

1. **Supposons f injective.**
   On sait déjà que $f(\overrightarrow{0}_E) = \overrightarrow{0}_F$; soit $x \in \ker f$ alors, $f(x) = \overrightarrow{0}_F$ et donc $f(x) = f(\overrightarrow{0}_E)$ et ainsi par l'injectivité de f : $x = \overrightarrow{0}_E$
   Finalement, $\ker f = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$
2. **Réciproquement, supposons que** $\ker f = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$**.**
   Soient $u \in E$ et $u' \in E$ tels que $f(u) = f(u')$. Par linéarité de f on a
   $$f(u - u') = 0$$
   et donc $u - u' \in \ker f$; comme $\ker f = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$, nous avons $u - u' = \overrightarrow{0}_E$ et $u = u'$.
   f est donc injective

8.3.5 Corollaire

Soit $f : E \to F$ une application linéaire injective. Alors l'image d'une famille libre $\{u_1, \dots, u_p\}$ de E, est une famille libre de F.

Démonstration

Soit $\{u_1, \dots, u_p\}$ une famille libre de E
Il faut donc montrer que la famille $\{f(u_1), \dots, f(u_p)\}$ est une famille libre de F.
Soient $a_1, \dots, a_p$ p réels tels que : $a_1 f(u_1) + \ldots + a_p f(u_p) = \overrightarrow{0}_F$
f étant linéaire on a : $f(a_1 u_1 + \ldots + a_p u_p) = \overrightarrow{0}_F$, ce qui veut dire que $a_1 u_1 + \ldots + a_p u_p \in \ker f$
Or, comme f est une application linéaire injective, $\ker f = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$
Donc $a_1 u_1 + \ldots + a_p u_p = \overrightarrow{0}_E$, la famille $\{u_1, \dots, u_p\}$ étant libre dans E, nous avons : $a_1 = \ldots = a_p = 0$
C'est donc que la famille $\{f(u_1), \dots, f(u_p)\}$ est une famille libre de F.
Ce que nous voulions

Remarque 9 :

Cette proposition est en particulier vraie pour une base : l'image d'une base de E par une application linéaire injective forme un système libre de F *(Mais, attention, ce n'est pas forcément une base de F)*

8.3.6 Définition : Image d'une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectorielset f une application linéaire de E dans F.
On appelle image de f notée $\operatorname{Im} f = f(E)$ l'ensembles des vecteurs de F images d'au moins un vecteur de E, c'est à dire :
$$\operatorname{Im} f = \{v \in F \text{ tels que } \exists u \in E \text{ tel que } f(u) = v\}$$

8.3.7 Proposition

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectorielset f une application linéaire de E dans F.
L'image par f d'un sous-espace vectoriel $G \subset E$ est un sous-espace vectoriel de F notée $f(G)$.
En particulier, $\operatorname{Im} f = f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration

Comme à chaque fois, il faut démontrer deux choses : d'abord que $f(G) \neq \emptyset$, puis, si v et v' sont deux vecteurs de $f(G)$ et a et b deux réels, $av + bv' \in f(G)$

1. Démontrons que $f(G) \neq \emptyset$
   En effet, $\overrightarrow{0}_F \in f(G)$ car $f\left(\overrightarrow{0}_E\right) = \overrightarrow{0}_F$, et $\overrightarrow{0}_E \in G$ puisque G est un sous-espace vectoriel de E, donc contient, en particulier $\overrightarrow{0}_E$

2. Soient v et v' deux vecteurs de $f(G)$ image de G par l'application linéaire f.
   Soient a et b deux réels.Il faut montrer que $av + bv' \in f(G)$.
   Par définition de $f(G)$, il existe des éléments u et u' de E tels que $f(u) = v$ et $f(u') = v'$.
   Donc, $av + bv' = af(u) + bf(u')$
   Par la linéarité de f, $af(u) + bf(u') = f(au + bu')$; comme G est un sous-espace vectoriel , $au + bu' \in G$, et donc $f(au + bu') \in f(G)$, et, par voie de conséquence, $av + bv' \in f(G)$

Donc, $f(G)$ est un sous-espace vectoriel d eF

8.3.8 Proposition

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectorielset f une application linéaire de E dans F.

1. Soit $\{u_1, \ldots, u_p\}$ une famille de vecteurs de E. alors :

$$f(\text{Vect}\{u_1, \ldots, u_p\}) = \text{Vect}(\{f(u_1), \ldots, f(u_p)\})$$

2. Soit $\{u_1, \ldots, u_p\}$ une famille de vecteurs générateurs de E, *(par exemple une base de E)* alors, $\text{Im} f$ est engendré par :$\{f(u_1), \ldots, f(u_p)\}$, c'est à dire :

$$\text{Im} f = \text{Vect}(\{f(u_1), \ldots, f(u_p)\})$$

Démonstration

1. Démontrons que $f(\text{Vect}\{u_1, \ldots, u_p\}) = \text{Vect}(\{f(u_1), \ldots, f(u_p)\})$

   (a) Nous démontrons dans un premier temps que $f(\text{Vect}\{u_1, \ldots, u_p\}) \subset \text{Vect}(\{f(u_1), \ldots, f(u_p)\})$
   Soit $v \in f(\text{Vect}\{u_1, \ldots, u_p\})$; alors, il existe $u \in \text{Vect}\{u_1, \ldots, u_p\}$ tel que $v = f(u)$
   Le vecteur u est de la forme $u = \sum_{i=1}^{p} a_i u_i$ où les $a_i \in \mathbb{R}$, et donc, v s'écrit sous la forme : $v = \sum_{i=1}^{p} a_i f(u_i)$, c'est à dire que $v \in \text{Vect}(\{f(u_1), \ldots, f(u_p)\})$.
   Nous avons donc $f(\text{Vect}\{u_1, \ldots, u_p\}) \subset \text{Vect}(\{f(u_1), \ldots, f(u_p)\})$

   (b) Démontrons, maintenant, que $\text{Vect}(\{f(u_1), \ldots, f(u_p)\}) \subset f(\text{Vect}\{u_1, \ldots, u_p\})$
   Réciproquement, donc, soit $v \in \text{Vect}(\{f(u_1), \ldots, f(u_p)\})$.
   Il existe donc $b_1, \ldots, b_p$ réels, tels que $v = \sum_{i=1}^{p} b_i f(u_i)$; de la linéarité de f, nous tirons que

$$v = f\left(\sum_{i=1}^{p} b_i u_i\right)$$

   Et, ainsi, on montre que $v \in f(\text{Vect}\{u_1, \ldots, u_p\})$, et on a donc

$$f(\text{Vect}\{u_1, \ldots, u_p\}) \supset \text{Vect}(\{f(u_1), \ldots, f(u_p)\})$$

   D'où nous avons bien l'égalité

$$f(\text{Vect}\{u_1, \ldots, u_p\}) = \text{Vect}(\{f(u_1), \ldots, f(u_p)\})$$

2. Soit $\{u_1, \ldots, u_p\}$ une famille de vecteurs générateurs de E et $v \in \text{Im} f$.
   Il faut montrer que v peut s'écrire comme combinaison linéaire des $\{f(u_1), \ldots, f(u_p)\}$
   Comme $v \in \text{Im} f$, il existe $x \in E$ tel que $v = f(x)$

Comme la famille $\{u_1,\ldots,u_p\}$ est génératrice de E, x peut s'écrire : $x=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i u_i$, de telle sorte que $v=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f(u_i)$.
v est bien combinaison linéaire des $\{f(u_1),\ldots,f(u_p)\}$ qui forment donc une famille génératrice de $\mathrm{Im} f$

Exercice 9 :

Corrigé de l'exercice
On note $\mathcal{B}_0=\{e_1,e_2,e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer l'image des vecteurs de cette base par l'applications f_1 de l'exercice 8.1.1 précédent : $f_1[(x,y,z)]=(0,2y-z,0)$; donner le noyau de f_1

Exercice 10 :

Décrire sous forme de Vect, en précisant leurs dimensions, le noyau et l'image de l'application linéaire $f\ :\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^5$ définie par

$$\begin{cases} f(e_1)=(1,1,1,2,5)\\ f(e_2)=(2,1,0,3,4)\\ f(e_3)=(-1,0,-1,4,7)\\ f(e_4)=(-9,-2,1,-1,9)\end{cases}$$

(Utilisez le pivot de Gauss).

Exercice 11 :

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 de base $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3,e_4)\}$ et F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 5, de base $\mathcal{C}=\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5\}$. Construire si cela est possible des application linéaire $f\ :E\to F$ vérifiant :

1. $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}\left(\{\varepsilon_2,\varepsilon_4\}\right)$
2. $\mathrm{Im}(f)=\left\{\overrightarrow{0}\right\}$
3. $\mathrm{Im}(f)=F$
4. $\ker(f)=\mathrm{Vect}\{e_2+e_3,e_4\}$ et $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}\left(\{\varepsilon_2,\varepsilon_3\}\right)$.

Exercice 12 :

On note $\mathbb{R}_4[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 4.La base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$ est donnée par $\{e_0,e_1,e_2,e_3,e_4\}$, où nous avons :

$$\begin{cases} e_0(X)=1\\ e_1(X)=X\\ e_2(X)=X^2\\ e_3(X)=X^3\\ e_4(X)=X^4\end{cases}$$

Soit $f\ :\mathbb{R}_4[X]\to\mathbb{R}_4[X]$ l'application linéaire définie par : $f(P)(X)=(X-1)P'(X)-P(X)$.

1. Calculer $f(ae_4+be_3+ce_2+de_1+ee_0)$
2. En déduire $\ker(f)$
3. L'équation $f(P)=Q$ a-t-elle toujours des solutions dans $\mathbb{R}_4[X]$ pour tout Q dans $\mathbb{R}_4[X]$?
4. calculer $f\left((x-1)^k\right)$ pour $k=0,1,2,3,4$.
5. En déduire une caractérisation des polynômes Q pour lesquels l'équation $f(P)=Q$ a des solutions.
6. Résoudre $(x-1)P'-P=x^2-2x+2$

8.4 Rang d'une application linéaire

8.4.1 Définition

Le rang d'une application linéaire est par définition la dimension de $\mathrm{Im} f$. On le note $\mathrm{rg}(f)$. Nous avons donc :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im} f)$$

Remarque 10 :

D'après la proposition 8.3.8, pour déterminer le rang d'une application linéaire il suffit donc de connaître une base $\{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$ de E et de calculer le rang de la famille $\{f(e_1), \ldots, f(e_p)\}$.

Exemple 7 :

Recherche du rang d'une application linéaire
On considère $\mathbb{R}^4$ muni de la base canonique $\mathcal{B}_0 = \{e_1, \ldots, e_4\}$ avec e_i défini par des coordonnées toutes nulles sauf la i-ème qui vaut 1, c'est à dire :

$$\begin{cases} e_1 & = (1,0,0,0) \\ e_2 & = (0,1,0,0) \\ e_3 & = (0,0,1,0) \\ e_4 & = (0,0,0,1) \end{cases}$$

Soit dans $\mathbb{R}^4$ l'endomorphisme f défini par : $f[(x,y,z,t)] = (y+z, x+z, 0, z+t)$

1. On peut remarquer que $f[(x,y,z,t)] = (y+z)\,e_1 + (x+z)\,e_2 + (z+t)\,e_4$, de telle sorte que nous nous apercevons que $\mathrm{Im} f$ est engendré par e_1, e_2 et e_4 qui sont linéairement indépendants. Le rang de f est donc de 3.
2. L'image par f des vecteurs de la base canonique est donnée par :

$$\begin{cases} f(e_1) & = (0,1,0,0) = e_2 \\ f(e_2) & = (1,0,0,0) = e_1 \\ f(e_3) & = (1,1,0,1) = e_1 + e_2 + e_4 \\ f(e_4) & = (0,0,0,1) = e_4 \end{cases}$$

Ce qui montre bien que le rang de f est 3

8.4.2 Proposition : le théorème du rang.

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension quelconque, finie ou non. Soit $f : E \to F$ une application linéaire .
Alors $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectorielsde dimension finie et :

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\ker(f)) = \dim(E)$$

Démonstration

Comme $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, alors $\ker(f)$ est de dimension finie et $\dim(\ker f) \leqslant \dim E$
Posons $\dim(E) = n$, et soit $\{u_1, \ldots, u_r\}$ une base de $\ker(f)$. Cette base peut être complétée par $n - r$ vecteurs qui formeront une base de E ; soit $\{u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n\}$ cette nouvelle base.
Montrons que $B = \{f(u_{r+1}), \ldots, f(u_n)\}$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
Comme $f(u_1) = f(u_2) = \ldots = f(u_r) = \overrightarrow{0}_F$, d'après 8.3.8, la famille B engendre forcément $\mathrm{Im}(f)$ et si nous démontrons que B est une famille libre, nous aurons terminé.
Supposons qu'il existe des coefficients $a_{r+1}, \ldots, a_n$ tels que : $a_{r+1} f(u_{r+1}) + \ldots + a_n f(u_n) = \overrightarrow{0}_F$.
Alors, de la linéarité de f, nous tirons :

$$f(a_{r+1} u_{r+1} + \ldots + a_n u_n) = \overrightarrow{0}_F$$

et donc $a_{r+1}u_{r+1} + \ldots + a_n u_n \in \ker(f)$
Ce vecteur étant dans $\ker(f)$ il peut s 'écrire comme combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_r$, c'est à dire

$$a_{r+1}u_{r+1} + \ldots + a_n u_n = a_1 u_1 + \ldots + a_r u_r$$

Or, $\{u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n\}$ étant une base, tous les coefficients de cette égalité sont nuls *(c'est une famille libre de E).*
Finalement B est une famille libre et B est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$ et a $n - r$ éléments d'ou le résultat final.

8.5 Isomorphismes

8.5.1 Définition

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Un isomorphisme est une application linéaire $f : E \longrightarrow F$ bijective.

Remarque 11 :

1. Que f soit bijective, veut dire que f est à la fois injective et surjective, c'est à dire si et seulement si $\ker f = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$ et $f(E) = F$
2. Si f est un isomorphisme, alors il existe une application linéaire $g : F \longrightarrow E$ inverse de f c'est à dire telle que :
$$g \circ f = Id_E \text{ et } fog = Id_F$$
g est l'inverse de f et est noté f^{-1}
3. On a démontré aussi en 8.1.9 que si $f : E \longrightarrow F$ est une application linéaire bijective, alors $f^{-1} : F \longrightarrow E$ est aussi une application linéaire bijective et donc un isomorphisme
4. Un isomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E dans lui-même est appelé **automorphisme** de E
5. L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathrm{GL}(E)$ et est appelé **groupe linéaire** de E
6. Les isomorphismes sont toujours intéressants car l'existence d'un isomorphisme entre deux espaces assure que les mêmes propriétés (relatives à la structure considérée) sont vérifiées par ces deux espaces

8.5.2 Proposition

La composée de deux isomorphismes est un isomorphisme, c'est à dire :
- ▷ Si $f : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme
- ▷ Si $g : F \longrightarrow G$ est un isomorphisme

Alors $gof : E \longrightarrow G$ est un isomorphisme

Démonstration

On a déjà démontré que la composition de deux application linéaire est une application linéaire , et on sait que la composition de deux bijections est une bijection.
En d'autres termes, c'est fini !!

Remarque 12 :

Le fait que $g \circ f$ soit un isomorphisme permet d'obtenir l'inverse de $g \circ f$ noté $(g \circ f)^{-1}$; nous avons : $(g \circ f)^{-1} : G \longrightarrow E$ et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

8.5.3 Corollaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel . Alors $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ est un groupe non forcément commutatif
C'est à dire

1. La composition de 2 automorphismes f et g, $f \circ g$ est un automorphisme
2. La loi $\circ$ est associative, c'est à dire : $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$
3. Il existe un élément neutre pour la loi $\circ$, c'est à dire l'élément Id_E tel que
$$f \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E \circ f = f$$
4. Pour chaque automorphisme f, il existe un automorphisme noté f^{-1} tel que
$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$$

8.5.4 Un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$: le groupe des homothéties

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

1. Une homothétie de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ est une application h_k définie par :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} h_k : E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & h_k(u) = ku \end{array} \right.$$
2. On appelle $\mathcal{H}$ l'ensemble des homothéties de E. Alors $\mathcal{H}$ muni de la composition des applications $\circ$ est un sous-groupe commutatif de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$

Démonstration

1. Nous avons déjà vu qu'une homothétie était une application linéaire
2. Il est clair que $\mathcal{H}$ est non vide puisque $h_1 = \mathrm{Id}_E \in \mathcal{H}$
3. Une homothétie de rapport non nul est une bijection
   - ▷ Une homothétie est injective ; en effet, si $u \in \ker h_k$, alors $h_k(u) = ku = \overrightarrow{0}$; comme $k \neq 0$, nous avons $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, et donc h_k est injective
   - ▷ Une homothétie est surjective ; en effet, pour tout $v \in E$, il existe $u \in E$ tel que $v = h_k(u)$; il suffit de prendre $u = \frac{1}{k}v$ et nous avons :
$$h_k(u) = h_k\left(\frac{1}{k}v\right) = k \times \frac{1}{k}v = v$$
   - ▷ Une homothétie est donc une bijection puisqu'elle est à la fois injective et surjective. Son application réciproque est donnée par :
$$(h_k)^{-1} = h_{\frac{1}{k}} = h_{k^{-1}}$$
4. Si je compose 2 homothéties, j'obtiens à nouveau une homothétie. En effet, soient h_{k_1} et h_{k_2} 2 homothéties de rapport non nul. Alors, pour tout $u \in E$:
$$h_{k_1} \circ h_{k_2}(u) = h_{k_1}[h_{k_2}(u)] = h_{k_1}[k_2 u] = k_1 [k_2 u] = k_1 \times k_2 u = h_{k_1 \times k_2}(u)$$
Ainsi, $h_{k_1} \circ h_{k_2} = h_{k_1 \times k_2}$ et la composition de 2 homothéties est une homothétie

Remarque 13 :

Il est possible de créer un isomorphisme de groupe entre $(\mathbb{R}^*, \times)$ et $(\mathcal{H}, \circ)$; il suffit de poser :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ k & \longmapsto & \varphi(k) = h_k \end{array} \right.$$

Exercice 13 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

- ▷ On dit qu'un ensemble Δ est une droite vectorielle s'il admet une base formée d'un seul vecteur *(Autrement dit :* $\dim \Delta = 1$*)*.
- ▷ Un sous-espace vectoriel A de E est dit invariant par f si et seulement si $f(A) \subset a$

1. Montrer que toute homothétie vectorielle de E laisse invariantes toutes les droites vectorielles de E
2. Réciproquemnt, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E qui laisse toutes les droites vectorielles de E invariantes. Soient $v \in E$ et $v' \in E$. Si Δ_v est la droite engendrée par v, Δ_v est invariante par f, et il existe donc $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(v) = kv$. De même, il existe $k' \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(v') = k'v'$
   (a) On suppose la famille $\{v, v'\}$ liée ; montrer que $k = k'$
   (b) On suppose la famille $\{v, v'\}$ libre ; il existe donc $k'' \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(v + v') = k''(v + v')$; montrer que $k = k' = k''$
   (c) En déduire que f est une homothétie vectorielle

On vient de montrer qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est une homothétie si et seulement si f laisse les droites vectorielles invariantes

Exercice 14 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel . Montrer qu'une homothétie $h \in \mathcal{L}(E)$ commute avec tout endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$, c'est à dire que :

$$(\forall f \in \mathcal{L}(E))\,(f \circ h = h \circ f)$$

Exercice 15 :

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui associe à tout élément $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ l'élément $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{cases} x' = & y + z \\ y' = & z + x \\ z' = & x + y \end{cases}$$

1. Trouver le noyau de f ; en déduire que f est bijective
2. Montrer que la restriction de f à la droite d'équation $x = y = z$ est une homothétie
3. Montrer que la restriction de f au plan d'équation $x + y + z = 0$ est une homothétie

8.5.5 Théorème

Soient E et F, 2 $\mathbb{R}$-espaces vectorielsde dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. Alors :
f est bijective si et seulement si $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ est une base de F

Démonstration

1. On suppose f bijective
   - ▷ Si f est bijective, f est aussi surjective et donc $\mathrm{Im} f = F$ et $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ est une famille génératrice de F
   - ▷ Si f est bijective, f est aussi injective et la famille $\{e_1, \ldots, e_n\}$ étant une base de E est une famille libre et donc $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ est une famille libre

   Comme $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ est une famille libre et génératice de F, c'est une base de F
2. Réciproquement, supposons que $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ est une base de F
   Alors, $\dim F = \dim E$ et $\mathrm{Im} f = F$, ce qui veut dire que f est surjective.
   d'autre part, d'après le théorème du rang 8.4.2 $\dim \ker f = 0$ et donc f est injective.
   f est donc bijective, et c'est un isomorphisme.

8.5.6 Proposition

Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectorielsde même dimension n et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire

1. Si f est injective, alors f est un isomorphisme.
2. Si f est surjective, alors f est un isomorphisme.

Démonstration

1. **Supposons f injective**
   Alors, si f est injective, on a $\ker(f) = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$, et donc par le théorème de la dimension8.4.2 :
   $$\dim(\mathrm{Im}(f)) = n = \dim(F)$$
   Donc $\mathrm{Im}(f) = F$, donc f est bien surjective, donc bijective, et est finalement un isomorphisme
2. **Supposons f surjective**
   Alors, si f est surjective, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = n = \dim(F)$, donc d'après 8.4.2 $\dim(\ker(f)) = 0$, et $\ker(f) = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$, et donc f est injective,

8.5.7 Proposition : *(classification des $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie)*

1. Deux $\mathbb{R}$-espaces vectorielsde dimension finie sont isomorphes si et seulement si il ont la même dimension.
2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, alors il est isomorphe à $\mathbb{R}^n$.

Démonstration

1. **Supposons que E et F soient isomorphes**
   Alors, il existe $f : E \longrightarrow F$ qui soit un isomorphisme
   Comme f est injective $\ker(f) = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\}$ et comme f est surjective $\mathrm{Im}(f) = F$.
   Le théorème de la dimension 8.4.2 donne donc
   $$\dim\ker(f) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E)$$
   C'est à dire $\dim(E) = \dim(F)$
2. **Réciproquement, supposons** $\dim(E) = \dim(F)$
   Notons n la dimension de E et de F. Soient $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E et $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ une base de F.
   Il existe une unique application linéaire $f : E \longrightarrow F$ telle que $f(e_i) = \varepsilon_i$.
   Donc $\mathrm{Im} f$ est engendrée par les vecteurs de base de F donc f est surjective c'est donc un isomorphisme de E dans F
3. Que E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n soit isomorphe à $\mathbb{R}^n$. est une conséquence immédiate des résultats précédents.

Remarque 14 :

Les propriétés d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n sont donc celles de $\mathbb{R}^n$, et donc ne nécessitent pas d'étude supplémentaires.

Exercice 16 :

On note toujours $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on définit l'endomorphisme $f\ : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ par :

$$\left\{ \begin{array}{l} f\left(e_1\right) = 3e_1 + 4e_2 - 2e_3 \\ f\left(e_2\right) = -e_1 - e_2 + e_3 \\ f\left(e_3\right) = e_1 + 2e_2 \end{array} \right.$$

et on pose $g = f - Id_{\mathbb{R}^3}$.

1. Calculer $f(x, y, z)$ et $g(x, y, z)$.
2. Donnez le rang de f et g. *(utilisez le pivot de Gauss).*
3. Déterminer les noyaux et images de f et de g et les comparer.
4. Trouver une base $B_1 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $f\left(\varepsilon_1\right) = \overrightarrow{0}$, $f\left(\varepsilon_2\right) = \varepsilon_2$, $f\left(\varepsilon_3\right) = \varepsilon_3$.

8.6 Matrices et applications linéaires

Introduction

Dans cete partie E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension p et F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.
On note $B = \{e_1, \ldots, e_p)\}$ une base de E, et $C = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ une base de F.
On a vu qu'une application linéaire f de E dans F est entièrement détrerminée par l'image de ses vecteurs de base, c'est à dire totalement caractérisée par les vecteurs $\{f\left(e_1\right), \ldots, f\left(e_n\right)\}$.
Ces vecteurs $f\left(e_j\right)$ sont parfaitement définis par leurs coordonnées dans la base C.
La notation de ces coordonnées nécessite un double indice : on note $a_{i,j}$ la $i$ème coordonnée dans la base C de l'image $f(e_j)$ du $j$ème vecteur de la base B.
Nous avons donc, pour tout $j = 1, \ldots, p$

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j}\varepsilon_i$$

8.6.1 Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension p et F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. On note $B = \{e_1, \ldots, e_p)\}$ une base de E, et $C = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ une base de F.

Soit f une application linéaire de E dans F telle que pour tout $j = 1, \ldots, p$, $f(e_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\varepsilon_i$

On appelle matrice de l'application linéaire f, relativement aux bases B et C, la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}\left(\mathbb{R}\right)$:

$$\mathcal{M}\left(f\right)_{B,C} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & & \cdots & \cdots & a_{1,p-1} & a_{1,p} \\ \vdots & & & \cdots & & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & & \ddots & \cdots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & & & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Remarque 15 :

1. On écrit le plus souvent : $\mathcal{M}\left(f\right)_{B,C} = \left(\left(a_{i,j}\right)_{\substack{i=1\ldots n \\ j=1\ldots p}}\right)$, et s'il n'y a pas d'ambiguité, $\mathcal{M}\left(f\right)$ seulement
2. La j-ième colonne de la matrice est formée des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $C = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$
3. Lorsqu'on lit la matrice d'une application linéaire :
   - **Le nombre de colonnes** donne la dimension de l'espace de départ
   - **Le nombre de lignes** donne la dimension de l'espace d'arrivée

4. Soit $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et $C = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Considérons $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} f(e_1) = 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ f(e_2) = -3\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ f(e_3) = 4\varepsilon_1 + 5\varepsilon_2 \end{array}\right.$$

Alors, f a pour matrice, relativement aux bases B et C :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Cette matrice dépend évidemment des bases B et C ; d'où, parfois, la nécessité de préciser les bases

5. Soit $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et $C = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Considérons $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire définie par :

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = & 3x + 4y - 5z \\ y' = & 5x + 4y \end{array}\right.$$

Quelle est la matrice de f relativement aux bases canoniques ?

Ce n'est pas très sorcier :
- ▷ $f(e_1) = f(1, 0, 0) = (3, 5)$
- ▷ $f(e_2) = f(0, 1, 0) = (4, 4)$
- ▷ $f(e_3) = f(0, 0, 1) = (-5, 0)$

Donc, $\mathcal{M}(f)_{B,C} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

6. La matrice d'une application linéaire dans une base B et C change lorsque l'on change l'ordre des vecteurs dans les bases B et C
Par exemple en reprenant l'exemple précédent, si l'on prend $B' = \{e_2, e_3, e_1)\}$ et $C' = \{\varepsilon_2, \varepsilon_1\}$ la matrice de l'application linéaire devient :

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Il y a une question intéressante à se poser : celle du lien entre les matrices d'une même application linéaire dans les différentes bases.

7. E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 et de base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$; soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f\left(\overrightarrow{i}\right) = \overrightarrow{j}$ et $f\left(\overrightarrow{j}\right) = \overrightarrow{i}$; alors, la matrice de f dans la base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$ est donnée par

$$\mathcal{M}(f)_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $e_1 = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $e_2 = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$; $\{e_1, e_2\}$ forme aussi une base de E [1], et

$$\mathcal{M}(f)_{\{e_1, e_2\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En effet
- $f(e_1) = f\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right) = f\left(\overrightarrow{i}\right) + f\left(\overrightarrow{j}\right) = \overrightarrow{j} + \overrightarrow{i} = e_1$
- $f(e_2) = f\left(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}\right) = f\left(\overrightarrow{i}\right) - f\left(\overrightarrow{j}\right) = \overrightarrow{j} - \overrightarrow{i} = -e_2$

8. Soit u un vecteur de E. u définit une application linéaire $L_u : \mathbb{R} \longrightarrow E$ telle que $L_u(1) = u$.
La base canonique de $\mathbb{R}$ est donnée par le nombre 1, et si U est la matrice de L_u dans les bases canoniques $U = M(L_u)_{can,B}$ est la matrice formée par les coordonnées de u appelées $(u_1, \ldots, u_p)$ de u dans la base B.

1. A démontrer !!

9. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et h_k une homothétie vectorielle de rapport k ; alors, la matrice de h_k est donnée par :

$$\mathcal{M}(h_k) = \begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & k & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix} = k\mathrm{I}_n$$

8.6.2 Théorème

Soit f une application linéaire de E vers F c'est à dire $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle $\mathcal{M}(f)_{B,C}$ la matrice de f dans les bases B et C ; on note : $\mathcal{M}(f)_{B,C} = \left((a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}\right)$.

Soit $u \in E$, un vecteur de coordonnées $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{p-1} \\ u_p \end{pmatrix}$

Alors, les coordonnées de $v = f(u)$ sont données par $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{p-1} \\ v_p \end{pmatrix}$ où $v_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}u_j$

Remarque 16 :

En fait, pour reprendre le calcul matriciel (c.f.6.2.7), nous avons :

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{p-1} \\ v_p \end{pmatrix} = \mathcal{M}(f)_{B,C} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{p-1} \\ u_p \end{pmatrix}$$

Démonstration

Si $u = \sum_{j=1}^{p} u_j e_j$, par la linéarité de f, nous avons : $f(u) = \sum_{j=1}^{p} u_j f(e_j)$, c'est à dire, en lisant la matrice *(en utilisant les colonnes de la matrice)* :

$$f(u) = \sum_{j=1}^{p} u_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\varepsilon_i\right) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} u_j a_{i,j}\varepsilon_i$$

Ce qui donne, en réorganisant les indices,

$$f(u) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} u_j a_{i,j}\varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} u_j a_{i,j}\right)\varepsilon_i$$

D'où le résultat.

Exemple 8 :

Reprenons l'exemple 4 pour lequel $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a pour matrice, relativement aux bases B et C :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Quelle est l'image du vecteur de coordonnées $(2, 3, -1)$?
Il faut donc faire le calcul matriciel :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de l'mage du vecteur $(2, 3, -1)$ sont donc, après calcul : $(-9, -4)$

8.6.3 Proposition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension p et F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. On note $B = \{e_1, \ldots, e_p)\}$ une base de E, et $C = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ une base de F.$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients réelles. Alors
L'application

$$\begin{cases} \varphi : \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \\ \qquad f & \longmapsto & \varphi(f) = \mathcal{M}(f)_{B,C} \end{cases}$$

est bijective

Démonstration

1. **On démontre que l'application est injective**
   Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(E, F)$, et on suppose que $\varphi(f) = \varphi(g)$, c'est à dire que f et g ont la même matrice dans les bases B et C.
   D'après la définition de la matrice d'une application linéaire, ceci veut donc dire que, pour tout $j = 1, \ldots, p$ $f(e_j) = g(e_j)$, ce qui entraîne que, pour tout $u \in E$, $f(u) = g(u)$ et donc $f = g$
2. **On démontre que l'application est surjective**
   Soit $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ où $A = \left((a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}\right)$
   Alors, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $u(e_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_i$ a pour matrice A

Remarque 17 :

L'affirmation : « **Une application linéaire est entièrement déterminée par la donnée des images de ses vecteurs de base** » , prend ici, tout son sens

8.6.4 Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$;on appelle rang de A la dimension de l'image de l' application linéaire associée.

Remarque 18 :

Commentaires

1. Si $A = \mathcal{M}(f)_{B,C}$, alors le rang de A est $\dim(\mathrm{Im} f)$
2. Le rang d'une matrice A est aussi le nombre maximum de colonnes linéairement indépendantes
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ Quel est le rang de A ?

Appelons C_1, C_2 et C_3 les différentes colonnes de la matrice. Nous avons $C_2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_3)$.
Le rang de la matrice A n'est sûrement pas 3 ! !
On vérifie facilement que si nous extrayons de cette matrice 2 colonnes, ces 2 colonnes sont linéairement indépendantes. Le rang de la matrice A est donc 2

8.7 Opérations sur les matrices, opérations sur les applications linéaires

8.7.1 Matrice de la somme

Soient f et g deux applications linéaires de E dans F de matrices respectives $\mathcal{M}(f)$ et $\mathcal{M}(g)$ dans les mêmes bases B et C.
La matrice de l'application linéaire $f+g$ est la matrice $\mathcal{M}(f+g) = \mathcal{M}(f)+\mathcal{M}(g)$, c'est à dire, en revenant aux notations de 8.6.3,

$$\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$$

Démonstration

Pour tout vecteur $u \in E$, $(f+g)(u) = f(u) + g(u)$.
En particulier pour les vecteurs de base, nous avons : $(f+g)(e_j) = f(e_j) + g(e_j)$
Si $\mathcal{M}(f) = \left((\alpha_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}\right)$ et $\mathcal{M}(g) = \left((\beta_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}\right)$

$$(f+g)(e_j) = f(e_j) + g(e_j) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{ij} + \beta_{ij})\,\varepsilon_i$$

Et donc $\mathcal{M}(f+g)_{B,C} = \left((\alpha_{ij} + \beta_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}\right) = \mathcal{M}(f) + \mathcal{M}(g)$

8.7.2 Produit par un scalaire.

La matrice de l'application linéaire λf est $\lambda\mathcal{M}(f)$.
$\lambda\mathcal{M}(f)$ est la matrice dont les colonnes sont celles de $\mathcal{M}(f)$ multipliées par λ, et, en revenant à 8.6.3,

$$\varphi(\lambda f) = \lambda\varphi(f)$$

Démonstration

La démonstration est évidente, car : $(\lambda f)(e_j) = \lambda f(e_j) = f(\lambda e_j)$.

8.7.3 Proposition

Nous savons que $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension np.
De même,$\mathcal{L}(E,F)$, ensemble des applications linéaires de E dans F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel .
Alors, l'application $\varphi : \mathcal{L}(E,F) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration

Cet énoncé peut constituer une synthèse de ce qui a été vu ci-dessus.
Qui dit « isomorphisme d'espaces vectoriels », dit application linéaire bijective.

- **La linéarité est évidente** car nous avons montré en 8.7.1 que pour tout $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et tout $g \in \mathcal{L}(E,F)$,

$$\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$$

et nous venons de montrer en 8.7.2 que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, et tout $f \in \mathcal{L}(E,F)$,

$$\varphi(\lambda f) = \lambda\varphi(f)$$

- Pour démontrer que c'est une bijection Il suffit de revenir à 8.6.3

Remarque 19 :

La précédente proposition montre que l'espace d'applications linéaires $\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie np

Exemple 9 :

Soient E et F 2 $\mathbb{R}$-espaces vectorielsmuni de leur base canonique respective. On suppose que $\dim E = 3$ et $\dim F = 2$.
Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : E \longrightarrow F$ 2 application linéaire de matrice respective dans les bases canoniques :

$$\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \qquad \mathcal{M}(g) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \end{pmatrix}$$

Alors :

1. La matrice de $f + g$ est donnée par : $\mathcal{M}(f + g) = \begin{pmatrix} a + a_1 & b + b_1 & c + c_1 \\ d + d_1 & e + e_1 & f + f_1 \end{pmatrix}$
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice de λf est donnée par : $\mathcal{M}(\lambda f) = \lambda \mathcal{M}(f) \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ \lambda d & \lambda e & \lambda f \end{pmatrix}$

8.8 Matrice de la composée de deux applications linéaires

Problème posé

Soient E, F et G, 3 $\mathbb{R}$-espaces vectorielsde dimension finie. On suppose :
- E $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension m et de base $B = \{e_1, \dots, e_m\}$
- F $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et de base $C = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$
- G $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension p et de base $D = \{\eta_1, \dots, \eta_p\}$,

On considère les application linéaire $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$. On considère les matrices de f et g notée, dans les différentes bases par : $\mathcal{M}(f)_{B,C} = \left((r_{j,k})_{\substack{i=1,..,n \\ k=1,..,m}} \right)$ et $\mathcal{M}(g)_{C,D} = \left((s_{i,j})_{\substack{i=1,..,p \\ j=1,..,n}} \right)$
Nous avons $g \circ f$ qui est une application linéaire de E dans G, qui admet donc une matrice à p lignes et m colonnes $\mathcal{M}(g \circ f)_{B,D} = \left((t_{ik})_{\substack{i=1,..,p \\ k=1,..,m}} \right)$
La question que nous nous posons est celle du lien entre $\mathcal{M}(g \circ f)_{B,D}$, $\mathcal{M}(f)_{B,C}$ et $\mathcal{M}(g)_{C,D}$.

8.8.1 Théorème

La matrice de $g \circ f$ est le produit de la matrice de g par la matrice de f,c'est à dire :

$$\mathcal{M}(g \circ f)_{B,D} = \mathcal{M}(g)_{C,D} \times \mathcal{M}(f)_{B,C}$$

Démonstration

Le problème consiste donc à connaître la j-ème colonne de la matrice de $g \circ f$, c'est à dire qu'il faut connaître les coordonnées de $g \circ f(e_j)$ dans la base $D = \{\eta_1, \dots, \eta_p\}$

$$\begin{aligned} g\circ f(e_j) &= g[f(e_j)] \\ &= g\left[\sum_{i=1}^{n} r_{i,j}\varepsilon_i\right] \text{ par définition de la matrice } \mathcal{M}(g)_{C,D} \\ &= \sum_{i=1}^{n} r_{i,j}\, g(\varepsilon_i) \text{ par linéarité de } g \\ &= \sum_{i=1}^{n} r_{i,j}\left[\sum_{k}^{p} s_{k,i}\eta_k\right] \text{ par définition de la matrice } \mathcal{M}(f)_{B,C} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k}^{p} r_{i,j}s_{k,i}\eta_k\right) \\ &= \sum_{k}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} s_{k,i}r_{i,j}\right)\eta_k \text{ en permutant les signes } \sum \end{aligned}$$

Ce qui montre que le terme de la ligne k de la colonne j est donné par : $\sum_{i=1}^{n} s_{k,i}r_{i,j}$ qui est le terme de la igne k et de la colonne j du produit matriciel $\mathcal{M}(g)_{C,D}\times\mathcal{M}(f)_{B,C}$

Remarque 20 :

1. Il faut donc faire très attention au sens!!
2. On comprend mieux la cohérence due aux dimensions des $\mathbb{R}$-espaces vectorielsqui montre que la multiplication ne peut pas, sauf exception, être comutative : le produit de $\mathcal{M}(f)_{B,C}$ par $\mathcal{M}(g)_{C,D}$ ainsi défini, impose que le nombre de colonnes de $\mathcal{M}(g)_{C,D}$ est égal au nombre de lignes de $\mathcal{M}(f)_{B,C}$
3. En reprenant l'application

$$\begin{cases} \varphi:\mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \varphi(f)=\mathcal{M}(f)_{B,C} \end{cases}$$

nous avons $\varphi(f\circ g)=\varphi(f)\times\varphi(g)$, ce qui montre que φ est un homomorphisme d'anneau

8.8.2 Propriété

On appelle I_n la matrice identité d'ordre n

1. Pour toute matrice ayant n colonnes on a $M\mathrm{I}_n=M$
2. Pour toute matrice ayant n lignes on a $\mathrm{I}_nM=M$

Démonstration

Ce résultat est intéressant ; il lie théorie ensembliste et calcul matriciel.

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension p et $f:E\longrightarrow F$ une application linéaire ; nous avons $f\circ\mathrm{Id}_E=f$.
   Comme $\mathcal{M}(\mathrm{Id}_E)=I_n$,et si $M=\mathcal{M}(f)$, M a donc n colonnes, en utilisant l'isomorphisme défini en 8.6.3, nous avons le résultat,
2. De même si cette fois ci, f va de F dans E,et si $M=\mathcal{M}(f)$, M a cette fois ci n lignes, et, toujours en utilisant 8.6.3, nous avons le résultat.

8.8.3 Similitude des propriétés entre application linéaire et matrices

1. Quand les produits ont un sens, pour toutes matrices A, B, C on a $(AB)C = A(BC)$
2. Quand les produits ont un sens on a :

$$A.(B+C) = AB + AC$$
$$(B+C).A = BA + CA$$
$$A.(aB) = aAB \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

Démonstration

Ces propriétés se déduisent immédiatement des relations correspondantes pour les application linéaire , par l'isomorphisme d'anneau φ entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

8.8.4 Matrice de l'application linéaire inverse

Soit $f : E \longrightarrow E$ un automorphisme de $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, c'est à dire $f \in \mathrm{GL}(E)$ et B une base de E. Alors,

$$\mathcal{M}\left(f^{-1}\right)_B = \left((\mathcal{M}(f))_B\right)^{-1}$$

Démonstration

En effet $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$.
En reprenant 8.6.3, nous avons

$$\varphi\left(f \circ f^{-1}\right) = \varphi\left(f^{-1} \circ f\right) = \mathrm{I}_n$$

Comme φ est un homomorphisme d'anneau,nous avons $\varphi\left(f \circ f^{-1}\right) = \varphi(f) \times \varphi\left(f^{-1}\right) = \mathrm{I}_n$; ce qui termine de montrer que $\varphi\left(f^{-1}\right) = \varphi(f)^{-1}$.
Ce que nous voulions

Remarque 21 :

1. **Toutes les matrices carrées ne sont pas inversibles.**
   En effet si on considère l'application linéaire f associée à une matrice carrée d'ordre n A, il est nécessaire et suffisant que f soit bijective, c'est à dire que f soit injective ou surjective, c'est à dire encore que le noyau de f soit réduit au vecteur nul ou que son image soit $\mathbb{R}^n$, ou autrement dit que le rang de f que l'on soit n
2. Le résultat, montré pour $\varphi : \varphi\left(f^{-1}\right) = \varphi(f)^{-1}$ est vrai pour tous les homomorphismes d'anneaux, pourvu que f soit inversible.

Exercice 17 :

Dans le cas d'une matrice diagonale, c'est à dire d'une matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, avec $a_{i,j} = 0$ pour tout $i \neq j$, donnez une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible et en calculer l'inverse.

8.9 Changement de base.

On sait que la matrice d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ dépend des bases choisies ; la question que nous pouvons nous poser est celle du lien entre ces matrices d'une même application linéaire exprimées dans des bases différentes
Nous allons commencer par un exemple

8.9.1 Etude d'un exemple

On considère $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $B_0 = \{i, j\}$ et $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$ telle que :

$$\left\{\begin{array}{rl} f(i) = & j \\ f(j) = & i \end{array}\right.$$

La matrice de f, dans la base B_0 est donc $\mathcal{M}(f)_{B_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

On considère une autre base de $\mathbb{R}^2$, la base $B_1 = \{u, v\}$ où $u = i + j$ et $v = i - j$. Il est facile de vérifier que c'est bien une base.

Nous avons

- $f(u) = f(i + j) = f(i) + f(j) = j + i = u$
- $f(v) = f(i - j) = f(i) - f(j) = j - i = -v$

D'où la matrice de f dans B_1 est $\mathcal{M}(f)_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ On cherche donc le lien entre $\mathcal{M}(f)_{B_0}$ et $\mathcal{M}(f)_{B_1}$

1. Dans un premier temps, nous considérons l'application identique dans $\mathbb{R}^2$, pour lequel on « dédouble »$\mathbb{R}^2$, en le considérant sous 2 bases différentes : d'une part $\left(\mathbb{R}^2, B_1\right)$ et d'autre part $\left(\mathbb{R}^2, B_0\right)$, c'est à dire :
$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} : \left(\mathbb{R}^2, B_1\right) & \longrightarrow & \left(\mathbb{R}^2, B_0\right) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}(u) = u \\ v & \longmapsto & \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}(u) = v \end{array}\right.$$
On appelle P la matrice de $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ de $\left(\mathbb{R}^2, B_1\right)$ dans $\left(\mathbb{R}^2, B_0\right)$, c'est à dire que $P = \mathcal{M}\left(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2};\right)_{B_1 \to B_0}$
Les colonnes de P sont donc constituées des coordonnées de u et v dans la base B_0, c'est à dire qu'il faut exprimer u et v en fonction de i et j, ce qui nous est donné par l'énoncé :
Nous avons donc : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
2. Dans un second temps, on considère la même application identique dans $\mathbb{R}^2$, pour lequel on « dédouble » toujours $\mathbb{R}^2$, en le considérant sous 2 bases différentes : $\left(\mathbb{R}^2, B_1\right)$ et $\left(\mathbb{R}^2, B_0\right)$, c'est à dire :
$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} : \left(\mathbb{R}^2, B_0\right) & \longrightarrow & \left(\mathbb{R}^2, B_1\right) \\ i & \longmapsto & \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}(i) = i \\ j & \longmapsto & \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}(j) = j \end{array}\right.$$
De même, nous appelons Q la matrice de $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ de $\left(\mathbb{R}^2, B_0\right)$ dans $\left(\mathbb{R}^2, B_1\right)$, c'est à dire que $Q = \mathcal{M}\left(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2};\right)_{B_0 \to B_1}$; les colonnes de Q sont donc constituées des coordonnées de i et j dans la base B_1, c'est à dire qu'il faut exprimer i et j en fonction de u et v ; un rapide calcul nous montre que :
$$\left\{\begin{array}{rl} u = & i + j \\ v = & i - j \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} i = & \dfrac{1}{2}(u + v) \\ j = & \dfrac{1}{2}(u - v) \end{array}\right.$$
Nous avons donc : $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}P$
3. On peut remarquer que $Q = P^{-1}$, mais est-ce surprenant ? ?

Utilité de P et de P^{-1}

Soit $X \in \mathbb{R}^2$; alors, dans la base canonique B_0, si $X = (x, y)$, nous avons $X = xi + yj$, et dans la base B_1, nous avons $X = au + bv$, et comme c'est le même vecteur, nous avons : $xi + yj = au + bv$, c'est à dire, en remplaçant, u et v par leur expression en fonction de i et j, nous avons :

$$X = xi + yj = a(i + j) + b(i - j) = (a + b)i + (a - b)j$$

En vertu de l'unicité de la décomposition d'un vecteur dans une base, nous avons

$$\left\{\begin{array}{l} x = a + b \\ y = a - b \end{array}\right.$$

Nous avons donc, matriciellement :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathcal{M}\left(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}\right)_{B_1 \to B_0} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

C'est à dire que, connaissant les coordonnées $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ de X dans la base B_1, il est donc possible de connaître les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du même vecteur X dans la base B_0, uniquement grâce au calcul matriciel.
De la même manière, nous aurions

$$\begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix} = \mathcal{M}\left(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}\right)_{B_0 \to B_1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Lien entre $\mathcal{M}(f)_{B_0}$ et $\mathcal{M}(f)_{B_1}$

Nous connaissons $\mathcal{M}(f)_{B_0}$, et nous souhaitons connaître $\mathcal{M}(f)_{B_1}$.
Or, $\mathcal{M}(f)_{B_1}$ est la matrice de l'application $f_{\{\mathbb{R}^2, B_1\} \longrightarrow \{\mathbb{R}^2, B_1\}}$
Or,

$$f_{\{\mathbb{R}^2, B_1\} \to \{\mathbb{R}^2, B_1\}} = \mathrm{Id}_{\{\mathbb{R}^2, B_0\} \to \{\mathbb{R}^2, B_1\}} \circ f_{\{\mathbb{R}^2, B_0\} \to \{\mathbb{R}^2, B_0\}} \circ \mathrm{Id}_{\{\mathbb{R}^2, B_1\} \to \{\mathbb{R}^2, B_0\}}$$

En schématisant :

$$\{\mathbb{R}^2, B_1\} \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}} \{\mathbb{R}^2, B_0\} \xrightarrow{f} \{\mathbb{R}^2, B_0\} \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}} \{\mathbb{R}^2, B_1\}$$

Ce qui se traduit matriciellement par :

$$\mathcal{M}(f)_{B_1} = \mathcal{M}\left(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}\right)_{B_0 \to B_1} \times \mathcal{M}(f)_{B_0} \times \mathcal{M}\left(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}\right)_{B_1 \to B_0}$$

Autrement dit :

$$\mathcal{M}(f)_{B_1} = P^{-1} \times \mathcal{M}(f)_{B_0} \times P$$

Ce qui, tous calculs faits donne $\mathcal{M}(f)_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Ce que nous savions déjà !!

8.9.2 Généralisation

8.9.3 Position du problème

Nous nous plaçons maintenant dans $\mathbb{R}^n$. Soit un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$, dont les coordonnées dans la base canonique $can = \{e_1, \ldots, e_n\}$ sont $(u_1, \ldots, u_n)$, c'est à dire que :

$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$$

On se donne une nouvelle base de $\mathbb{R}^n$ $B = \{V_1, \ldots, V_n\}$ et on cherche à calculer les coordonnées de u dans cette nouvelle base.
On note $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ les coordonnées de u dans cette nouvelle base.

Nouvelle base, nouvelles coordonnées

Par définition des coordonnées de u dans la base B, nous avons :

$$u = \alpha_1 V_1 + \cdots + \alpha_n V_n$$

Nous notons v_{ij} la $j - ieme$ coordonnée du vecteur V_i dans la base canonique can, c'est à dire :

$$V_i = \sum_{j=1}^{n} v_{ij} e_j$$

On obtient :

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i V_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{n} v_{ij} e_j \right)$$

C'est à dire, en permutant les signes somme :

$$u = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_{ij} \right) e_j$$

De l'unicité de la décomposition d'un vecteur dans une base, nous obtenons :

$$u_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_{ij}$$

On a donc obtenu les coordonnées de u dans la base canonique en fonction de celles de u dans la base $B = \{V_1, \ldots, V_n\}$.
De plus en remarquant qu'en posant P la matrice dont la $i_e me$ colonne sont les coordonnées de V_i dans la base canonique can, cad :

$$P = \left((v_{ji})_{\substack{1\leq j\leq n \\ 1\leq i\leq n}} \right)$$

On obtient la formule de changement de base :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ & & & & \\ & & \ddots & & \\ v_{n1} & v_{n2} & & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

P est la matrice de passage de $B = \{V_1, \ldots, V_n\}$ vers la base canonique can qui donne les coordonnées d'un vecteur dans la base canonique, connaissant les coordonnées de ce vecteur dans la base $B = \{V_1, \ldots, V_n\}$.
Et si vous admettez que P est bien inversible, alors

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Vous admettrez aussi que P^{-1} est en fait la matrice dont la $i-eme$ colonne est formée par les coordonnées de e_i dans la base $B = \{V_1, \ldots, V_n\}$, et c'est la matrice de passage de la base canonique can vers la base $B = \{V_1, \ldots, V_n\}$.

Remarque 22 :

Si la matrice A d'un endomorphisme f vous est donnée dans une base B, que vous notez P la matrice de passage de la base B' dans la base B, et A' la matrice de f dans la base B' on a la formule :
$A = PA'P^{-1}$ ou bien : $A' = P^{-1}AP$.

8.9.4 Définition

On dit que les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables si et seulement si il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que :

$$A = PBP^{-1}$$

Exercice 18 :

On considère $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrée à coefficients dans $\mathbb{R}$
Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère la relation suivante :

$$A\mathcal{R}A' \iff \exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ inversible telle que } A = P^{-1}A'P$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

8.10 Matrices et applications linéaires : exercices

8.10.1 Applications linéaires et matrices

Exercice 19 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 rapporté à une base $\mathcal{B} = \left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ et F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 rapporté à une base $\mathcal{C} = \left\{\overrightarrow{e}, \overrightarrow{f}\right\}$
f et g étant deux applications linéaires de E dans F de matrices respectives :

$$\mathcal{M}(f)\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{M}(g)\begin{pmatrix} 0 & -5 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Définir analytiquement les applications suivantes :

1. $f + g$
2. $f - g$
3. $2f - 3g$
4. $-f + 2g$
5. $5f - g$
6. $af + bg$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

Exercice 20 :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, définie par $\left\{\begin{array}{l} x' = 2x + 3y - 5z \\ y' = -x + 2z \end{array}\right.$
Donner la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$

Exercice 21 :

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Pour chacune des matrices ci-dessus, donner les caractéristiques de l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ associée : images des vecteurs de la base canonique, image d'un vecteur quelconque *(définition analytique).*
2. Peut-on former les produits ABC, CBA, BAC ? Si oui les calculer de deux façons pour revérifier l'associativité du produit de matrices.

Exercice 22 :

Déterminer, relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$, la matrice de l'application linéaire T, qui aux vecteurs $u = (1, -1)$ et $v = (2, -3)$, fait correspondre $T(u) = (-1, -2, 5)$ et $T(v) = (0, 5, 4)$

Exercice 23 :

Dans $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, on considère les matrices suivantes :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que la famille $(E_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ 1 \leqslant j \leqslant 2}}$ forme une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$
2. Plus généralement, chercher une base de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

Exercice 24 :

E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 rapporté à une base $\mathcal{B} = \left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$. On désigne par E^* l'ensemble des formes linéaires sur E. Soit $u \in E$ de coordonnées (x, y, z)

1. Démontrer que tout $f \in E^*$ est de la forme :

$$f(u) = ax + by + cz \text{ où } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \text{ et } c \in \mathbb{R}$$

2. Pour $f \in E^*$, démontrer que $\dim \ker f \geqslant 2$
3. Trouver une base de E^* et en déduire la dimension

Exercice 25 :

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 rapporté à une base $\mathcal{B} = \left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$. Trouver une forme linéaire $f \in E^*$ telle que $f\left(\overrightarrow{i}\right) = 2$ et $f\left(\overrightarrow{j}\right) = -1$
   Déterminer le noyau et l'image de f
2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 rapporté à une base $\mathcal{B} = \left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$. Trouver une forme linéaire $f \in E^*$ telle que $f\left(\overrightarrow{i}\right) = 2$, $f\left(\overrightarrow{j}\right) = -1$ et $f\left(\overrightarrow{k}\right) = 1$
   Déterminer le noyau et l'image de f

Exercice 26 :

Soit $\mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique, et U, l'application linéaire qui à (x, y, z) fait correspondre $(y + z, z + x, x + y)$. Ecrire la matrice de U, et vérifier que U est un isomorphisme.

Exercice 27 :

$\mathbb{R}_4[X]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des pôlynomes de degré inférieur ou égal à 4 ; Soit $\varphi : \mathbb{R}_4[X] \longrightarrow \mathbb{R}_4[X]$ définie par $\varphi(P) = P'$. Donner la matrice A de φ dans la base $\left\{1, X, \dfrac{X^2}{2!}, \dfrac{X^3}{3!}, \dfrac{X^4}{4!}\right\}$; Calculer A^5

Exercice 28 :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer le noyau et l'image de f

Exercice 29 :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Déterminer $\ker(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ et une base de chacun de ces sous espaces vectoriels

Exercice 30 :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer le noyau et l'image de f . En déduire l'existence d'une infinité de bases dans lesquelles la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 31 :

Soit $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une application linéaire de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Donnez le rang de f, ainsi qu'une base de $\mathrm{Im} f$
2. Quelle est la dimension du noyau de f, et en donner une base

Exercice 32 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f et g 2 endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$

1. Démontrer que $g(\ker f) \subset \ker f$ et que $g(\mathrm{Im} f) \subset \mathrm{Im} f$
2. E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 rapporté à une base $\mathcal{B} = \left\{ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j} \right\}$; f et g 2 endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$ de matrices respectives :

$$\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{M}(g) = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Démontrer que $f \circ g = g \circ f$ et vérifier les résultats de la question précédente

Exercice 33 :

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$. On note $f^2 = f \circ f$

1. Démontrer que $\ker f \cap \mathrm{Im} f = f\left(\ker f^2\right)$
2. Dans cette question, on suppose $\dim E = 2$. vérifier la question précédente dans les cas où la matrice de f est donnée par :

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $C = \begin{pmatrix} -12 & --18 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$

Exercice 34 :

Dans $\mathbb{R}^3$, caractériser , relativement à la base canonique, les matrices des endomorphismes ayant pour image le plan $x + y + z = 0$, et pour noyau la droite $x = y = z$

Exercice 35 :

1. **Endomorphisme nilpotent : étude d'un cas particulier**
   On considère l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$ et on note $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique. On construit une application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\begin{cases} f(e_1) & = e_2 + e_3 \\ f(e_2) & = -e_1 + e_3 \\ f(e_3) & = \dfrac{1}{2}(e_1 + e_2) \end{cases}$$

   (a) On appelle A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_0$; déterminer A
   (b) Pour $u = (x, y, z)$, donner les coordonnées (x', y', z') de $f(u)$ en fonction de celles de u
   (c) Déterminer le noyau de f et en donner une base.
   (d) Déterminer l'image de f et en donner une base.
   (e) Calculez A^3
2. **Endomorphisme nilpotent : cas général**
   Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n
   Un endomorphisme u est dit nilpotent d'indice $k (k \in \mathbb{N}^*)$ si et seulement si $u^k = 0$ et $u^{k-1} \neq 0$
   (a) Montrer que si u est un endomorphisme nilpotent d'indice k, et x un vecteur tel que $u^{k-1}(x) \neq 0$, alors les vecteurs $\{x, u(x), \dots, u^{k-1}(x)\}$ sont linéairement indépendants ; en déduire que l'indice d'un endomorphisme nilpotent est au plus égal à n .
   (b) Montrer que, par rapport à une base convenablement choisie de E, la matrice d'un endomorphisme nilpotent d'indice n est

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (c) Déterminer la matrice inverse de $Id - U$

Exercice 36 :

Soit $\mathcal{M}'$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On considère les matrices :

$$\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous notons $\mathcal{M}'$ l'ensemble

$$\mathcal{M}' = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ telles que } M = \alpha \mathrm{I}_2 + \beta E_{1,2} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \beta \in \mathbb{R}\}$$

1. Démontrer que $\mathcal{M}'$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}'$ dont on donnera une base.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}'$, avec $A = \alpha \mathrm{I}_2 + \beta E_{1,2}$ calculer A^n
3. On considère la suite $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

   (a) Calculer x_n et y_n en fonction de n
   (b) On suppose donc $A = \alpha \mathrm{I}_2 + \beta E_{1,2}$ et $|\alpha| < 1$. Donner $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n$

8.10.2 Isomorphismes d'espaces vectoriels

Exercice 37 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 muni d'une base $\mathcal{B} = \{u, v\}$. A tout $m \in \mathbb{R}$, nous associons un endomorphisme $f_m \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$\begin{cases} f_m(u) = & (1+m)\,u - v \\ f_m(v) = & 3u + (1-m)\,v \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ les endomorphismes f_m ne sont-ils pas bijectifs ?
2. Déterminer, pour chacune des applications linéaires correspondant à ces valeurs, le noyau et l'image de f_m

Exercice 38 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel . On note Id_E l'endomorphisme identique de E et $\mathcal{O}_E$ l'endomorphisme nul de E.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 = f \circ f = \mathcal{O}_E$
   (a) Démontrer que les endomorphismes $\mathrm{Id}_E - f$ et $\mathrm{Id}_E + f$ sont bijectifs
   (b) Exprimer $(\mathrm{Id}_E - f)^{-1}$ et $(\mathrm{Id}_E + f)^{-1}$
2. **Application**
   L'objet de cette question est de vérifier le résultat précédent dans le cas d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 2 muni d'une base $\{i, j\}$ et d'une application linéaire de E dont la matrice dans la base $\{i, j\}$ est donnée successivement par :

(a) $\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 39 :

Soit E et F 2 $\mathbb{R}$-espaces vectorielset f un <u>isomorphisme</u> de E sur F

1. $\overrightarrow{D}$ est une droite de E ; démontrer que $f\left(\overrightarrow{D}\right)$ est une droite de F
2. $\overrightarrow{P}$ est un plan de E ; démontrer que $f\left(\overrightarrow{P}\right)$ est un plan de F

Exercice 40 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = \{u, v, w\}$. A tout $m \in \mathbb{R}$, nous associons un endomorphisme $f_m \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice est donnée par :

$$A_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les nombres $m \in \mathbb{R}$ pour lesquels f_m est un automorphisme de E
2. Déterminer le noyau et l'image de f_m lorsque f_m n'est pas une bijection

Exercice 41 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel . On note Id_E l'endomorphisme identique de E et $\mathcal{O}_E$ l'endomorphisme nul de E.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f \neq \mathcal{O}_E$ et $f^2 = f \circ f = \mathcal{O}_E$.
A tout nombre réel $m \in \mathbb{R}$, on associe l'endomorphisme $f_m = \mathrm{Id}_E + mf$, et on désigne par $\mathcal{G}$ l'ensemble des endomorphismes f_m ainsi obtenus

1. $\mathcal{G}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$
2. Démontrer que pour tout $m \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{R}$, $f_m \circ f_n = f_{m+n}$
3. Démontrer que $\mathcal{G}$ est un sous-groupe commutatif de $\mathrm{GL}(E)$

Exercice 42 :

$\mathbb{R}_2[X]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. A tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ on peut associer $P' \in \mathbb{R}_2[X]$ qui est le polynôme dérivé de P.

1. $m \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$ étant 2 nombres réels, démontrer que l'application $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par :
$$\begin{cases} f : \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ \quad P & \longmapsto & f(P) = P + (mX + p)P' \end{cases}$$
est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$
2. Pour quelles valeurs de m et p, f n'est-elle pas un automorphisme ?
3. Déterminer le noyau et l'image de f lorsque f n'est pas un automorphisme

Exercice 43 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 *(c'est donc un plan vectoriel)* rapporté à une base $\mathcal{B} = \{i, j\}$. On considère les 6 endomorphismes de E, Id_E, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 dont les matrices dans la base $\mathcal{B} = \{i, j\}$ sont :

1. $\mathcal{M}(\mathrm{Id}_E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\mathcal{M}(f_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
3. $\mathcal{M}(f_2) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
4. $\mathcal{M}(f_3) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
5. $\mathcal{M}(f_4) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$
6. $\mathcal{M}(f_5) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

Démontrer que $\{\mathrm{Id}_E, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$. En donner la table de composition ; est-ce un sous-groupe commutatif ?

Exercice 44 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ; nous avons déjà démontré qu'une homothétie vectorielle de E commutait avec tout endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$. Nous allons en étudier la réciproque dans un espace de dimension 2.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\mathcal{B} = \{i, j\}$. Soit Φ un endomorphisme de E, c'est à dire $\Phi \in \mathcal{L}(E)$, qui commute avec tout endomorphisme de E, c'est à dire :
$$(\forall f \in \mathcal{L}(E))\,(f \circ \Phi = \Phi \circ f)$$
En utilisant le calcul matriciel, démontrer que Φ est une homothétie de E

Exercice 45 :

$\mathbb{R}_2[X]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. A tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ on peut associer $P' \in \mathbb{R}_2[X]$ qui est le polynôme dérivé de P et $P'' \in \mathbb{R}_2[X]$ qui est le polynôme dérivé seconde de P

Pour $m \in \mathbb{R}$ on considère l'application $f_m : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par :
$$\begin{cases} f : \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ \quad P & \longmapsto & f(P) = X^2P'' + (X+3)P' + mP \end{cases}$$

1. Démontrer que f_m est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$
2. Donner la matrice de f_m dans la base $\{1, X, X^2\}$ qui est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$
3. Pour quelles valeurs de m f_m n'est pas un automorphisme ?
4. Déterminer le noyau et l'image de f lorsque f_m n'est pas un automorphisme
5. On suppose $m = -1$. Déterminer les nombre $\lambda \in \mathbb{R}$, pour lesquels il existe au moins un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $f(P) = \lambda P$

8.10.3 Matrices et changement de base

Exercice 46 :

Soit T l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice par rapport aux bases (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ et (f_1, f_2) de $\mathbb{R}^2$ est : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

1. On prend, dans $\mathbb{R}^3$ la nouvelle base : $\begin{cases} e'_1 = e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_1 + e_3 \\ e'_3 = e_1 + e_2 \end{cases}$

   Ecrire la matrice de T quand on rapporte $\mathbb{R}^3$ à cette nouvelle base
2. On prend, dans $\mathbb{R}^2$ la nouvelle base : $\begin{cases} f'_1 = \dfrac{1}{2}(f_1 + f_2) \\ f'_2 = \dfrac{1}{2}(f_1 - f_2) \end{cases}$

   Ecrire la matrice de T par rapport aux bases (e'_1, e'_2, e'_3) et (f'_1, f'_2)

Exercice 47 :

Dans $\mathbb{R}^2$, muni de sa base canonique $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on considère les vecteurs $e = (3, 5)$ et $f = (4, 7)$. Ecrire la matrice de passage de la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ à la base (e, f) ; en déduire les composantes de $v = (11, 13)$ dans la base (e, f)

Exercice 48 :

Soit $\mathbb{R}^2$, muni de sa base canonique $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, et $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ la matrice de l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dans cette base.
Soient $e = (5, 7)$ et $f = (3, 4)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Quelle est la matrice de φ dans la base (e, f) ?

Exercice 49 :

Soit $\mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$
On définit une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$\begin{cases} f(i) = 3i + 4j - 2k \\ f(j) = -i - j + k \\ f(k) = i + 2j \end{cases}$$

1. Déterminer la matrice A de f
2. Montrer que le noyau $\ker f$ de f est de dimension 1 .
3. Déterminer un vecteur qui engendre $\ker f$; quelle est la dimension de Imf
4. Calculer A^2, et montrer que pour tout vecteur $v \in Imf$, on a $f(v) = v$
5. Soit $H = \left\{v \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } f(v) = v\right\}$; monter que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, donner sa dimension, et en déduire que $\mathrm{Im} f = H$
6. Donner une base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ de R^3 telle que $\varepsilon_1 \in \ker f$, et ε_2 et ε_3 dans Imf. Ecrire la matrice de f dans cette base.

Exercice 50 :

Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, dont la matrice par rapport à la base canonique $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ de $\mathbb{R}^3$ est : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Vérifier qu'il existe un seul $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = u - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ ne soit pas un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^3$. Déterminer λ et une base de $\ker v$
2. Montrer que $v^2 = 0$; montrer que $\{i, v(i), k\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

Exercice 51 :

$\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique notée *can* et soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, de matrice dans la base canonique *can* :

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 10 \\ -5 & 2 & -5 \\ -12 & 6 & -13 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les vecteurs $u = (2,-1,-2)$, $v = (1,0,-1)$ et $w = (-2,1,3)$ forment une base B de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer les matrices de passage $P = \mathcal{M}(\mathrm{Id})_{(B,can)}$ et $Q = \mathcal{M}(\mathrm{Id})_{(can,B)}$.
3. Calculer la matrice de f dans la base B.

Exercice 52 :

$\mathbb{R}_4[X]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des pôlynomes de degré inférieur ou égal à 4 et on note $D\ : \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R}_4[X]$ l'application définie par $D(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.

1. Déterminer la matrice A de D dans la base canonique $\{1, X, X^2, X^3, X^4\}$.
2. Déterminer la matrice A' de D dans la base $\{1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2), X(X-1)(X-2)(X-3)\}$
3. Déterminer les matrices de passage entre ces deux bases de $\mathbb{R}^4[X]$.
4. Quelle relation existe t-il entre les matrices A et A' ?

Exercice 53 :

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on appelle $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique.
On considère la base $\mathcal{B}_1 = \{u, v, w\}$ où nous avons défini les vecteurs u, v, et w par :

$$\begin{cases} u = & e_1 + e_2 + e_3 \\ v = & e_2 \\ w = & e_3 \end{cases}$$

1. Ecrire P, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}_1$, et Q, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_0$
2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_0$ est donnée par :

$$\mathcal{M}(f)_{\mathcal{B}_0} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Donnez $\mathcal{M}(f)_{\mathcal{B}_1}$, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_1$

8.11 Projections et symétries

8.11.1 Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F et G 2 sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, c'est à dire que $E = F \oplus G$
Tout vecteur $u \in E$ s'écrit de manière unique :

$$u = u_F + u_G \text{ où } u_F \in F \text{ et } u_G \in G$$

On appelle projection de E sur F parallèlement à G, l'application p définie par :

$$\begin{cases} p : E & \longrightarrow & E \\ u = u_F + u_G & \longmapsto & p(u) = u_F \end{cases}$$

Remarque 23 :

1. p est aussi appelé **projecteur** et G est aussi appelé la **direction** de la projection
2. Représentation d'une projection dans la figure 8.5

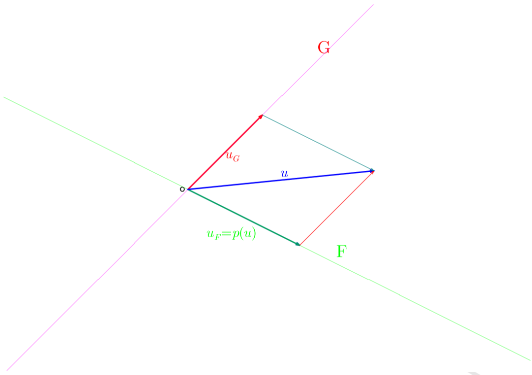


FIGURE 8.5 – Une visualisation de la projection vectorielle

8.11.2 Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F et G 2 sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, c'est à dire que $E = F \oplus G$
Soit p la projection sur F parallèlement à G. Alors :

1. p est un endomorphisme de E, c'est à dire que $p \in \mathcal{L}(E)$
2. p est tel que $p \circ p = p^2 = p$
3. $\ker p = G$
4. $\mathrm{Im} p = F$
5. L'ensemble des vecteurs invariants par p est F

Démonstration

1. p est une application linéaire
   Soient $u \in E$ et $v \in E$; soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$
   - ▷ Alors $u = u_F + u_G$ et $v = v_F + v_G$ et donc $p(u) = u_F$ et $p(v) = v_F$
   - ▷ De plus, $\alpha u = \alpha u_F + \alpha u_G$ et $\beta v = \beta v_F + \beta v_G$ de telle sorte que $p(\alpha u) = \alpha u_F = \alpha p(u)$ tout comme $p(\beta v) = \beta v_F = \beta p(v)$
   - ▷ Donc comme $\alpha u + \beta v = \alpha u_F + \alpha u_G + \beta v_F + \beta v_G = \alpha u_F + \beta v_F + \alpha u_G + \beta v_G$
     De la structure de sous-espace vectoriel de F et G, nous avons $\alpha u_F + \beta v_F \in F$ et $\alpha u_G + \beta v_G \in G$ et donc :
     $$p(\alpha u + \beta v) = \alpha u_F + \beta v_F = \alpha p(u) + \beta p(v)$$

   p est donc une application linéaire
2. p est tel que $p \circ p = p^2 = p$
   Soit $u \in F$; alors $u = u_F + u_G$ et $p(u) = u_F = u_F + \overrightarrow{0}_G$.
   Donc $p^2(u) = p(p(u)) = p(u_F) = u_F = p(u)$
   Ainsi, $p \circ p = p^2 = p$
3. Nous avons $\ker p = G$
   - ▷ Tout d'abord, il est évident que $G \subset \ker p$ puisque si $v \in G$, alors $v = \overrightarrow{0}_F + v$ et donc $p(v) = \overrightarrow{0}$; ainsi, $v \in \ker p$
   - ▷ Réciproquement, soit $x \in \ker p$. Alors, comme $x = x_F + x_G = p(x) + x_g = x_g$, ce qui veut dire que $x \in G$ et donc, $\ker p \subset G$

Donc $\ker p = G$

4. Nous avons $\text{Im}p = F$
   - ▷ Soit $u \in E$, alors $u = u_F + u_G$ et $p(u) = u_F$, donc $p(u) \in F$, ce qui veut dire que $\text{Im}p \subset F$
   - ▷ Soit $x \in F$; alors, x est l'image de tout vecteur $u \in E$, s'écrivant $u = x + u_G$ où $u_G \in G$ est un vecteur quelconque de G ; et nous avons $p(u) = x$ et donc $x \in \text{Im}p$ et donc $F \subset \text{Im}p$
5. L'ensemble des vecteurs invariants par p est F

   Soit $u \in E$ un vecteur invariant par p, c'est à dire que $p(u) = u$

   Comme $u = u_F + u_G$, que $p(u) = u_F = u$, alors $u \in F$; donc l'ensemble des vecteurs invariants est inclus dans F.

   Réciproquement, si $x \in F$, alors $x = x + \overrightarrow{0}$ et $p(x) = x$ et donc, F est inclus dans l'ensemble des vecteurs invariants.

   D'où l'ensemble des vecteurs invariants par p est F

8.11.3 Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel . On appelle projecteur tout endomorphisme $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p^2 = p$
Un projecteur de E est une projection de E sur $\text{Im}p$ parallèlement à $\ker p$

Démonstration

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p^2 = p$

1. Tout d'abord, $E = \text{Im}p + \ker p$

   En effet, soit $u \in E$; alors, $u = p(u) + (u - p(u))$.

   Nous avons, bien entendu, $p(u) \in \text{Im}p$. Démontrons que $u - p(u) \in \ker p$

   $p(u - p(u)) = p(u) - p^2(u)$; comme $p^2 = p$, nous avons :

$$p(u - p(u)) = p(u) - p^2(u) = p(u) - p(u) = \overrightarrow{0}$$

   Ainsi, $u - p(u) \in \ker p$.

   Ainsi, tout $u \in E$ peut s'écrire comme somme d'un vecteur de $\text{Im}p$ et d'un vecteur de $\ker p$; donc $E = \text{Im}p + \ker p$

2. Montrons maintenant que $\text{Im}p \cap \ker p = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$

   Si nous montrons que $\text{Im}p \cap \ker p = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, nous aurons aussi démontré l'unicité de la décomposition d'un vecteur $u \in E$ comme somme d'un vecteur de $\text{Im}p$ et d'un vecteur de $\ker p$; nous aurons donc $E = \text{Im}p \oplus \ker p$

   Soit donc $v \in \text{Im}p \cap \ker p$

   Alors, puisque $v \in \text{Im}p$, il existe $x \in E$ tel que $p(x) = v$. De même, comme $v \in \ker p$, $p(v) = \overrightarrow{0}$.

   Comme $p^2 = p$, nous avons :

$$v = p(x) = p^2(x) = p(p(x)) = p(v) = \overrightarrow{0}$$

   D'où $\text{Im}p \cap \ker p = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ et $E = \text{Im}p \oplus \ker p$

3. Comme tout $u \in E$ peut s'écrire de manière unique $u = p(u) + (u - p(u))$, p est une projection de E sur $\text{Im}p$ parallèlement à $\ker p$

Exercice 54 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 rapporté à une base $\{i, j, k\}$. On considère l'application linéaire de E dans E de matrice :

$$\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que f est une projection vectorielle*
2. *Trouver les 2 sous-espaces vectoriels qui la caractérisent*

Corrigé de l'exercice

1. Montrer que f est une projection vectorielle
   Il suffit d'utiliser le calcul matriciel et de montrer que $\mathcal{M}(f) \times \mathcal{M}(f) = \mathcal{M}(f)$
2. Trouver les 2 sous-espaces vectoriels qui la caractérisent
   (a) **Recherche du noyau** $\ker f$
   La définition analytique de f est donnée par le calcul matriciel. Si $u \in E$ a pour coordonnées (x, y, z) et celles de $f(u)$,(x', y', z'), nous avons :

$$\left\{\begin{array}{rl} x' = & \frac{5}{6}x - \frac{1}{6}y - \frac{1}{6}z \\ y' = & -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \\ z' = & -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \end{array}\right.$$

   Et $u \in \ker f \iff f(u) = \overrightarrow{0}$ et nous avons le système :

$$\left\{\begin{array}{rl} \frac{5}{6}x - \frac{1}{6}y - \frac{1}{6}z = & 0 \\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z = & 0 \\ -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} 5x - y - z = & 0 \\ -x + 2y - z = & 0 \\ -x - y + z = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rl} 5x - y - (x+y) = & 0 \\ -x + 2y - (x+y) = & 0 \\ z = & x + y \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rl} 4x - 2y = & 0 \\ -2x + y = & 0 \\ z = & x + y \end{array}\right.$$

   $\ker f$ est donc la droite d'équation

$$\left\{\begin{array}{rl} 2x - y = & 0 \\ z = & x + y \end{array}\right.$$

   $\ker f$ admet donc pour vecteur directeur *(ou base)* le vecteur $u = (1, 2, 3)$
   (b) **Recherche de l'image de f** $\operatorname{Im} f$
   ▷ Du théorème aux dimensions $\dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f = \dim E$, comme $\dim \ker f = 1$;, nous avons $\dim \operatorname{Im} f = 2$
   Nous avons $\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}(\{f(i), f(j), f(k)\})$, il suffit d'extraire de cette famille, 2 vecteurs linéairement indépendants pour en définir une base.
   Or, $f(i) = \left(\frac{5}{6}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ et $f(j) = \left(-\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right)$. Si ces 2 vecteurs sont colinéaires, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(i) = \alpha f(j)$, c'est à dire que nous aurions :

$$\left\{\begin{array}{rl} \frac{5}{6} = & \alpha \times -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} = & \alpha \times \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & \alpha \times -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

   Ce qui est impossible. La famille $\{f(i), f(j)\}$ est donc libre et forme une base de $\operatorname{Im} f$

▷ Une autre façon de voir les choses est de considérer la définition analytique de f

$$\begin{cases} x' = & \frac{5}{6}x - \frac{1}{6}y - \frac{1}{6}z \\ y' = & -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \\ z' = & -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \end{cases}$$

Et de remarquer que $6x' + 6y' + 6z' = 0 \Longleftrightarrow x' + y' + z' = 0$. Ainsi, $\mathrm{Im} f$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$ dont la famille $\{f(i), f(j)\}$ forme une base *(Mais, ce n'est pas la seule !!)*

8.11.4 Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F et G 2 sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, c'est à dire que $E = F \oplus G$
Tout vecteur $u \in E$ s'écrit de manière unique :

$$u = u_F + u_G \text{ où } u_F \in F \text{ et } u_G \in G$$

On appelle symétrie vectorielle par rapport à F et parallèlement à G, l'application σ définie par :

$$\begin{cases} \sigma : E & \longrightarrow & E \\ u = u_F + u_G & \longmapsto & \sigma(u) = u_F - u_G \end{cases}$$

Remarque 24 :

Représentation d'une symétrie dans la figure 8.6

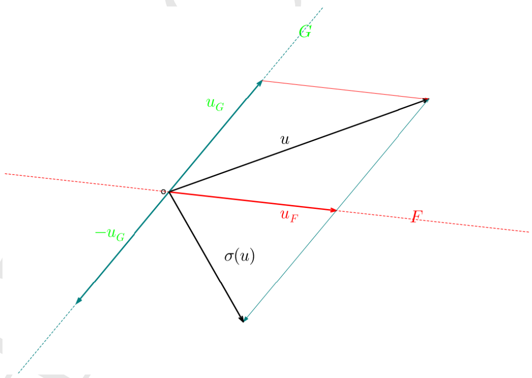


FIGURE 8.6 – Une visualisation de la symétrie vectorielle

8.11.5 Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F et G 2 sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, c'est à dire que $E = F \oplus G$
Soit σ la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Alors :

1. Si p est la projection sur F parallèlement à G, alors $\sigma = 2p - \mathrm{Id}_E$
2. σ est un endomorphisme de E, c'est à dire que $\sigma \in \mathcal{L}(E)$
3. σ est un automorphisme involutif, c'est à dire que $\sigma \circ \sigma = \sigma^2 = \mathrm{Id}_E$ et σ est bijectif (c'est à dire $\sigma \in \mathrm{GL}(E)$)
4. L'ensemble des vecteurs invariants par σ est F
5. L'ensemble des vecteurs $u \in E$ tels que $\sigma(u) = -u$ est G

Démonstration

La démonstration de ce théorème sera moins géométrique que 8.11.2 mais, nous utoiliserons les calculs dans $\mathcal{L}(E)$

1. Nous avons $\sigma = 2p - \mathrm{Id}_E$
   Soit $u \in E$. Nous pouvons alors écrire $u = p(u) + (u - p(u))$, avec $p(u) \in F$ et $(u - p(u)) \in G$.
   De là, nous avons $\sigma(u) = p(u) - (u - p(u)) = 2p(u) - u = (2p - \mathrm{Id}_E)(u)$
   Nous avons donc bien $\sigma = 2p - \mathrm{Id}_E$
2. Comme $\mathcal{L}(E)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel , nous avons $2p - \mathrm{Id}_E \in \mathcal{L}(E)$ et donc $\sigma \in \mathcal{L}(E)$
3. D'autre part, $\sigma^2 = \sigma \circ \sigma = (2p - \mathrm{Id}_E) \circ (2p - \mathrm{Id}_E) = 4p^2 - 2p - 2p + \mathrm{Id}_E$. Comme $p^2 = p$, nous avons $\sigma^2 = \sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}_E$
4. Comme $\sigma^2 = \mathrm{Id}_E$, σ est bijectif et $\sigma^{-1} = \sigma$. Donc, $\sigma \in \mathrm{GL}(E)$
5. D'autre part, pour tout $u \in E$,
$$\sigma(u) = u \Longleftrightarrow 2p(u) - u = u \Longleftrightarrow p(u) = u \Longleftrightarrow u \in F$$
   L'ensemble des vecteurs invariants par σ est F
6. Et, pour tout $u \in E$,
$$\sigma(u) = -u \Longleftrightarrow 2p(u) - u = -u \Longleftrightarrow p(u) = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow u \in G$$
   L'ensemble des vecteurs $u \in E$ tels que $\sigma(u) = -u$ est G

8.11.6 Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel . Tout automorphisme involutif $\mathcal{S}$ de E est une symétrie vectorielle par rapport à $\mathcal{V}$ parallèlement à $\mathcal{V}_1$ où :

- ▷ $\mathcal{V}$ est le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants par $\mathcal{S}$
- ▷ $\mathcal{V}_1$ est le sous-espace vectoriel des vecteurs transformés en leur opposé par $\mathcal{S}$

Démonstration

Soit $\mathcal{S}$ un automorphisme involutif de E.

1. $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}_1$ sont des sous-espaces vectoriels de E
   Il y a de multiples façons de démontrer ce résultat. Nous en choisissons un parmi d'autres!!
   - Nous avons :
   $$\mathcal{V} = \{u \in E \text{ tels que } \mathcal{S}(u) = u\} = \left\{u \in E \text{ tels que } \mathcal{S}(u) - u = \overrightarrow{0}\right\} = \left\{u \in E \text{ tels que } (\mathcal{S} - \mathrm{Id}_E)(u) = \overrightarrow{0}\right\} =$$
   $\mathcal{V}$ est donc le noyau de $\mathcal{S} - \mathrm{Id}_E$; c'est donc un sous-espace vectoriel de E
   - On démontrerait de même que $\mathcal{V}_1$ est le noyau de $\mathcal{S} + \mathrm{Id}_E$; c'est donc aussi un sous-espace vectoriel de E
2. E est somme directe de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}_1$
   - Nous montrons que $E = \mathcal{V} + \mathcal{V}_1$
   Soit $u \in E$
   Nous avons $u = \dfrac{1}{2}(u + \mathcal{S}(u)) + \dfrac{1}{2}(u - \mathcal{S}(u))$
     * Nous avons $u + \mathcal{S}(u) \in \mathcal{V}$
     En effet, $\mathcal{S}(u + \mathcal{S}(u)) = \mathcal{S}(u) + \mathcal{S}^2(u) = \mathcal{S}(u) + u$; donc $u + \mathcal{S}(u) \in \mathcal{V}$ et donc $\dfrac{1}{2}(u + \mathcal{S}(u)) \in \mathcal{V}$
     * On démontrerait de la même manière que $\dfrac{1}{2}(u - \mathcal{S}(u)) \in \mathcal{V}_1$
   - Montrons que $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}_1 = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$
   Soit donc $v \in \mathcal{V} \cap \mathcal{V}_1$; alors $\mathcal{S}(v) = v = -v \Longrightarrow v = \overrightarrow{0}$
   E est donc somme directe de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}_1$ et donc $E = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}_1$
3. Ainsi $\mathcal{S}$ est la symétrie par rapport à $\mathcal{V}$ et parallèlement à $\mathcal{V}_1$

Exercice 55 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 rapporté à une base $\{i, j, k\}$.Définir la symétrie σ par rapport au plan Π d'équation $x + y + z = 0$ et parallèlement à la droite vectorielle Δ d'équation $x = -y = \dfrac{z}{2}$

Corrigé de l'exercice

Soit $u \in E$. On pose $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\sigma(u) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

- ▷ Nous avons $\sigma(u) + u \in \Pi$ et donc $(x' + x) + (y' + y) + (z' + z) = 0$
- ▷ D'autre part, si $v = u - \sigma(u)$, alors $\sigma(v) = -v$ et donc $v \in \Delta$. Comme $v = \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \\ z - z' \end{pmatrix}$,

  nous avons :$x - x' = -y + y' = \dfrac{z - z'}{2}$, ce qui donne, en fait, 2 équations :

$$\begin{cases} x - x' = & -y + y' \\ -y + y' = & \dfrac{z - z'}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x' + y' = & x + y \\ 2y' + z' = & 2y + z \end{cases}$$

- ▷ Nous obtenons donc un système de 3 équations à 3 inconnues x', y' et z' :

$$\begin{cases} x' + y' + z' = & -x - y - z \\ x' + y' = & x + y \\ 2y' + z' = & 2y + z \end{cases}$$

  D'où nous tirons :

$$\begin{cases} x' = & -y - z \\ y' = & x + 2y + z \\ z' = & -2x - 2y - z \end{cases}$$

Il est tout à fait poussible de donner la matrice de σ dans la base $\{i, j, k\}$:

$$\mathcal{M}(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Et, par calcul, on montre facilement que $\mathcal{M}^2(\sigma) = \mathcal{M}(\sigma) \times \mathcal{M}(\sigma) = \mathrm{I}_3$

8.11.7 Exercices

Exercice 56 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\{i, j\}$.
Dans chacune des questions qui suivent, D et Δ sont des droites vectorielles de E telles que $D \cap \Delta = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.
p est la projection sur D parallèlement à Δ.

1. Définir analytiquement p lorsque chacune des droites est définie par une équation cartésienne :

   (a) $D : x = 0$ et $\Delta : x + 2y = 0$

   (b) $D : x = 0$ et $\Delta : ax + by = 0$

   (c) $D : x + y = 0$ et $\Delta : 2x + 3y = 0$

   (d) $D : ax + by = 0$ et $\Delta : \alpha x + \beta y = 0$

2. Définir analytiquement p lorsque D est définie par une équation cartésienne et Δ par l'une de ses bases u :

   (a) $D : 2x + 3y = 0$ et $\Delta : u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (b) $D : x + 2y = 0$ et $\Delta : u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

   (c) $D : x = 0$ et $\Delta : u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   (d) $D : ax + by = 0$ et $\Delta : u = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

3. Définir analytiquement p lorsque D est définie par l'une de ses bases u et Δ par l'une de ses bases v :

   (a) $D:\ u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\Delta:\ v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (b) $D:\ u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\Delta:\ v = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

   (c) $D:\ u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\Delta:\ v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

   (d) $D:\ u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\Delta:\ v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

Exercice 57 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\{i, j\}$. $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme dont la matrice dans la base $\{i, j\}$ est A. Démontrer, dans chacun des cas suivants que f est une projection sur une droite D parallèlement à une droite Δ. On déterminera une base ou une équation cartésienne de D et Δ

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} a & a-1 \\ -a & 1-a \end{pmatrix}$

Exercice 58 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\{i, j\}$. $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme dont la matrice dans la base $\{i, j\}$ est :

$$\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que f est une projection sur une droite D parallèlement à une droite Δ si et seulement si :
$$a + d = 1 \text{ et } ad = bc$$
2. Démontrer que f est une symétrie par rapport à une droite D parallèlement à une droite Δ si et seulement si :
$$a + d = 0 \text{ et } ad - bc = 1$$
3. Trouver a et b de telle sorte que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & b \end{pmatrix}$ soit :

   (a) La matrice d'une projection *(on donnera alors les caractéristiques de cette projection)*

   (b) La matrice d'une symétrie *(on donnera alors les caractéristiques de cette symétrie)*

Exercice 59 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, rapporté à une base $\{i, j, k\}$.
Soit D une droite vectorielle de E et Π un plan de E tels que $D \cap \Pi = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. p est la projection sur D parallèlement à Π.
Définir analytiquement p lorsque D est définie par l'une de ses bases u et Π par une équation cartésienne :

1. $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\Pi:\ z = 0$
2. $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\Pi:\ ax + by + cz = 0$
3. $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\Pi:\ -x + 2y + z = 0$
4. $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\Pi:\ z = 0$

Exercice 60 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, rapporté à une base $\{i, j, k\}$. $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme dont la matrice dans la base $\{i, j, k\}$ est A. Démontrer que f est une projection sur une droite vectorielle D parallèlement à un plan vectoriel Π. On déterminera une base ou une équation cartésienne de D et Π

1. $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -4 & 8 & 4 \\ 5 & -10 & -5 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 61 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, rapporté à une base $\{i, j, k\}$. $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme dont la matrice dans la base $\{i, j, k\}$ est A. Démontrer que f est une projection sur un plan vectoriel Π parallèlement à une droite vectorielle D. On déterminera une base ou une équation cartésienne de D et Π

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 4 & -7 & -4 \\ -5 & 10 & 6 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 62 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\{i, j\}$. $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme dont la matrice dans la base $\{i, j\}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que f est un projecteur
2. Déterminer l'image et le noyau de f
3. Démontrer qu'il existe au moins une base $\{u, v\}$ de E dans laquelle la matrice de f soit

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 63 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\{i, j\}$. $_{D}elta$ et Δ' sont les droites vectorielles d'équation :

$$\Delta : \ y = 2x \qquad \Delta' : \ y = -3x$$

1. La symétrie $\mathcal{S}$ par rapport à Δ de direction *(ou parallèlement à)* Δ' associe à tout vecteur $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ le vecteur $\mathcal{S}(u) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

   Calculer x' et y' en fonction de x et y
2. La symétrie $\mathcal{T}$ par rapport à Δ' de direction Δ associe à tout vecteur $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ le vecteur $\mathcal{T}(u) = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$

   Calculer x'' et y'' en fonction de x et y
3. Définir l'application $\mathcal{T} \circ \mathcal{S}$

Exercice 64 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, rapporté à une base $\{i, j, k\}$. $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme dont la matrice dans la base $\{i, j, k\}$ est :

$$\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme involutif
2. Démontrer que l'ensemble des vecteurs invariants par f est un plan vectoriel Π dont on donnera une base $\{u, v\}$.
3. Démontrer que l'ensemble des vecteurs $x \in E$ tels que $f(x) = -x$ est une droite vectorielle D dont on donnera une base $\{w\}$.
4. Démontrer que $\{u, v, w\}$ est une base de E. Quelle est la matrice de f dans cette base ?

Exercice 65 :

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, nous définissons E_λ par :

$$E_\lambda = \{x \in E \text{ tels que } f(x) = \lambda x\}$$

   (a) Démontrer que si $f \circ f = f$, alors $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$
   (b) Démontrer que si f est involutive, alors $\lambda = -1$ ou $\lambda = 1$
   (c) Démontrer que si f est involutive, et $\lambda \neq -1$ et $\lambda \neq 1$, alors $E_\lambda = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$
2. Soit E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\{i, j\}$. $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme dont la matrice dans la base $\{i, j\}$ est :

$$\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

   (a) Démontrer que f est un automorphisme involutif de E
   (b) Déterminer E_1 et E_{-1} en donnant une base pour chacun d'eux.
   (c) Démontrer que E_1 et E_{-1} sont supplémentaires ; en déduire une nouvelle base de E et donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 66 :

Soit E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\{i, j\}$.
On considère la famille $\mathcal{F}$ d'endomorphismes f_m de E de matrice $\mathcal{M}(f_m) = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$ où $m \in \mathbb{R}$

1. Déterminer l'ensemble des valeurs de $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles f_m n'est pas un automorphisme de E
2. Déterminer noyau et image de chacun des endomorphismes de $\mathcal{F}$ qui ne sont pas des automorphismes
3. Déterminer et reconnaître tous les automorphismes de la famille $\mathcal{F}$ qui sont involutifs.

8.12 Problèmes de synthèse

Exercice 67 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\{i, j\}$. $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme dont la matrice dans la base $\{i, j\}$ est :

$$\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} 2m & \dfrac{5}{16}(m-1) \\ m-1 & m+1 \end{pmatrix} \text{ avec } m \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer, en fonction des valeurs de $m \in \mathbb{R}$, le noyau et l'image de f
2. Existe-t-il des valeurs de $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles :
   (a) f est une homthétie vectorielle
   (b) f est une projection vectorielle
   (c) f est une symétrie vectorielle
   Les caractériser quand elles existent

Exercice 68 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\{i, j\}$. $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme dont la matrice dans la base $\{i, j\}$ est :

$$\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{pmatrix}$$

Où $\lambda \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$ ou $b \neq 0$

1. Déterminer le noyau et l'image de f. A quelle condition avons nous $\mathrm{Im} f = \ker f$?
2. On suppose $\mathrm{Im} f \neq \ker f$
   - (a) En prenant pour nouvelle base $\{I, J\}$ où $I \in \mathrm{Im} f$ et $J \in \ker f$, trouver la matrice de f dans la base $\{I, J\}$
   - (b) Montrer que f est la composée de 2 applications linéaires simples que l'on définira.
3. On suppose cette fois ci que $\mathrm{Im} f = \ker f$
   - (a) Montrer que $b \neq 0$ et que $\{bi - aj, j\}$ est une base de E
   - (b) Quelle est la matrice de f dans cette base ?
   - (c) Que pouvons-nous dire de $f \circ f$?

Exercice 69 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel . On appelle Id_E l'application identique de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E

1. Démontrer que f est un projecteur si et seulement si $(f - \mathrm{Id}_E)$ en est un
2. Démontrer que, si f est un projecteur, alors $\ker(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) = \ker f$
3. Vérifier ces résultats dans les cas suivants :
   - (a) E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\{i, j\}$. $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme dont la matrice dans la base $\{i, j\}$ est :

$$\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

   - (b) E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, rapporté à une base $\{i, j, k\}$. $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme dont la matrice dans la base $\{i, j, k\}$ est :

$$\mathcal{M}(f) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 70 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel . On appelle Id_E l'application identique de E et $\mathcal{O}_E$ l'endomorphisme nul de E. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E, nous désignons par :

$$f^0 = \mathrm{Id}_E \quad f^2 = f \circ f \quad f^3 = f \circ f^2 \quad \cdots \quad f^n = f \circ f^{n-1}$$

1. Soient f et g 2 projecteurs de E
   - (a) Démontrer que si $f \circ g + g \circ f = \mathcal{O}_E$, alors $f \circ g = g \circ f = \mathcal{O}_E$
   - (b) A quelle condition nécessaire et suffisante $f + g$ est-il un projecteur ? Déterminer alors $\mathrm{Im}(f + g)$ et $\ker(f + g)$
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant l'égalité :

$$(f - a\mathrm{Id}_E) \circ (f - b\mathrm{Id}_E) = \mathcal{O}_E$$

   où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq b$

(a) Démontrer que $p = \dfrac{1}{b-a}(f - a\mathrm{Id}_E)$ et $q = \dfrac{1}{a-b}(f - b\mathrm{Id}_E)$ sont des projecteurs.

(b) Exprimer f comme combinaison linéaire de p et q

(c) Calculer f^n pour $n \in \mathbb{N}^*$

(d) Démontrer que si $ab \neq 0$, alors f est bijective. Exprimer alors f^{-1} en fonction de p et q

3. Dans cette partie, on suppose que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, rapporté à une base $\{i, j, k\}$ et que la matrice de $f \in \mathcal{L}(E)$ dans la base $\{i, j, k\}$ est :

$$\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ \dfrac{1}{m} & 0 & m \\ \dfrac{1}{m^2} & \dfrac{1}{m} & 0 \end{pmatrix} \text{ où } m \in \mathbb{R}^*$$

(a) Trouver $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $(f - a\mathrm{Id}_E) \circ (f - b\mathrm{Id}_E) = \mathcal{O}_E$

(b) En déduire la matrice de f^n pour $n \in \mathbb{N}^*$, puis celle de f^{-1}

Exercice 71 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\{i, j\}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice, dans la base $\{i, j\}$:

$$\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ où } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}$$

1. Nous définissons les endomorphismes f^2, f^3,…, f^n par :

$$f^0 = \mathrm{Id}_E \quad f^2 = f \circ f \quad f^3 = f \circ f^2 \quad \cdots \quad f^n = f \circ f^{n-1}$$

Calculer, par récurennce, la matrice de f^n

2. Soit $u_0 \in E$; pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous posons $u_n = f^n(u_0)$. Exprimer les coordonnées (x_n, y_n) en fonction de l'entier $n \in \mathbb{N}$ et de x_0 et y_0

3. On considère les suites numériques $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} a_0 = -2 \\ b_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_n = \dfrac{1}{2} a_{n-1} + 2b_{n-1} \\ b_n = -\dfrac{1}{2} b_{n-1} \end{cases}$$

Exprimer a_n et b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$

Exercice 72 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\{i, j\}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice, dans la base $\{i, j\}$:

$$\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Trouver l'ensemble F des vecteurs $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $f(u) = \lambda u$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ à déterminer

2. Vérifier que $I = i - j$ et $J = i + j$ sont 2 vecteurs de F et qu'ils déterminent une base de E

3. (a) Calculer A' la matrice de f dans la base $\{I, J\}$

(b) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}

(c) Démontrer que $\mathcal{M}(f) = PA'P^{-1}$

(d) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{M}(f))^n = PA'^nP^{-1}$

4. (a) Démontrer que $\mathcal{M}(f)$ et A' son inversibles

(b) On pose :
- $A^0 = A'^0 = \mathrm{Id}_E$
- Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \geqslant 0$:

$$\mathcal{M}(f)^n = \left(\mathcal{M}(f)^{-1}\right)^{-n} \qquad A'^n = \left(A'^{-1}\right)^{-n}$$

Démontrer que nous avons $(\mathcal{M}(f))^n = PA'^nP^{-1}$ pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$

(c) Pour $n \in \mathbb{Z}$, calculer A'^n et en déduire $\left(\mathcal{M}(f)^{-1}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$

Exercice 73 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\{i, j\}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice, dans la base $\{i, j\}$:

$$\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que, s'il existe un nombre $\lambda \in \mathbb{R}$ et un vecteur $u \in E$, non nul, tel que $f(u) = \lambda u$, alors λ est racine du polynôme P :

$$P(X) = X^2 - (a+d)X + (ad - bc)$$

2. Réciproquement, démontrez que si $\lambda \in \mathbb{R}$ est racine du polynôme P, alors il existe au moins un vecteur non nul $u \in E$ tel que $f(u) = \lambda u$
3. On suppose que, dans cette question, le polynôme P a 2 racines réelles λ_1 et λ_2
   (a) Démontrer que toute famille de vecteurs non nuls $\{u_1, u_2\}$ tels que $f(u_1) = \lambda_1 u_1$ et $f(u_2) = \lambda_2 u_2$ forme une base de E
   (b) Quelle est alors la matrice A de f dans la base $\{u_1, u_2\}$?
   (c) Nous nous intéressons au cas où $\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$
      i. Déterminer λ_1, λ_2,u_1 et u_2 et A' la matrice de f dans la base $\{u_1, u_2\}$.
      ii. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer A'^n puis $(\mathcal{M}(f))^n$
4. On suppose, dans cette question que P admet une racine double λ
   (a) Démontrer qu'il existe une famille de vecteurs non nuls $\{u_1, u_2\}$ de E dans laquelle la matrice de f est du type $B = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n lorsque $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 74 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, rapporté à une base $\{i, j\}$. L'objet de cet exercice est d'étudier les applications linéaires $f \in \mathcal{L}(E)$ telles que $f^3 = \mathrm{Id}_E$
Soit donc $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = \mathrm{Id}_E$

1. Démontrer que f est un automorphisme *(Donc $f \in \mathrm{GL}(E)$)*
2. Soit $u \in E$, non nul tel que $f(u) = u$
   (a) Soit $v \in E$ tel que la famille $\{u, v\}$ soit une base de E. Nous posons $f(v) = \lambda u + \mu v$. Ecrire $f^2(v)$ dans la base $\{u, v\}$
   (b) Démontrer que s'il existe $u \in E$, non nul tel que $f(u) = u$, alors $f = \mathrm{Id}_E$
3. On suppose, dans cette question $f \neq \mathrm{Id}_E$
   (a) Montrer que si $u \in E$, non nul, alors, la famille $\{u, f(u)\}$ forme une base de E
   (b) En déduire quela matrice de f dans la base $\{u, f(u)\}$ est du type $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$
   (c) Montrer que nous avons nécessairement $a = b = -1$

Exercice 75 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel . On désigne par Id_E l'application identique de E et par $\mathcal{O}_E$ l'application linéaire nulle de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel que :

$$10f^2 - 7f - 3\mathrm{Id}_E = \mathcal{O}_E \tag{8.2}$$

1. Montrer que f est un automorphisme de E et calculer f^{-1}
2. Démontrer que la famille $\{f;\mathrm{Id}_E\}$ est une famille libre du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ si et seulement si :
$$f \neq \mathrm{Id}_E \text{ et } f \neq -\frac{3}{10}\mathrm{Id}_E$$
3. On appelle $\mathcal{E}$ l'ensemble des combinaisons linéaires de f et Id_E. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-anneau, commutatif et unitaire de $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$
4. Trouver tous les éléments de $\mathcal{E}$ qui sont des projecteurs.
   On trouvera, en plus de Id_E et $\mathcal{O}_E$ 2 autres endomorphismes qui sont des projecteurs ; Soient p et q ces projecteurs.
   (a) Exprimer p et q en fonction de f etId_E
   (b) Démontrer que $p \circ q = q \circ p = \mathcal{O}_E$
5. Dans cette question, on suppose que $\dim E = 2$
   (a) Montrer que l'endomorphisme f de matrice dans une base de E : $A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$ vérifie la relation 8.2
   (b) Déterminer, par leur matrice, les endomorphismes p et q
   (c) Trouver noyau et image de p et q

8.13 Quelques corrections d'exercices

Exercice 2 :

Enoncé de l'exercice

Parmi les applications suivantes, indiquer celles qui sont linéaires : on pose $E = \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

1. $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *définie par :* $(x, y, z) \mapsto (0, 2y - z, 0)$

   f_1 est une application linéaire

2. $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *définie par :* $(x, y, z) \mapsto (x + 2y + 3z, 2yz, x + z)$

   On remarque que dans la seconde composante il y a le produit $2yz$. f_2 n'est donc pas linéaire. Pour le montrer, il suffit de prendre un contre-exemple. Calculez, par exemple, $f\left[(0,0,1) + (0,1,0)\right]$ et $f\left[(0,0,1)\right] + f\left[(0,1,0)\right]$

3. $\varphi_1 : E \to E$ *définie par* $f \mapsto 3f'' + 8f' + 5f$

   φ_1 est linéaire, parce que la dérivation est linéaire.

4. $\varphi_3 : E \to E$ *définie par* $f \mapsto ff'$

   Cette application est-elle linéaire ? ? Regardons, par exemple ce qui se passe avec la somme des fonctions :

   $$\varphi_3 (f + g) = (f + g) (f + g)' = (f + g) (f' + g') = ff' + fg' + g'f + gg' = ff' + gg' + (fg)'$$

   En choisissant $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$, nous obtenons :

   $$\varphi_3 (f + g) (x) = 2x^3 + x + 3x^2$$

   Alors que

   $$\varphi_3 (f) (x) + \varphi_3 (g) (x) = 2x^3 + x$$

   Nous avons

   $$\varphi_3 (f + g) \neq \varphi_3 (f) + \varphi_3 (g)$$

   φ_3 n'est donc pas linéaire.

5. $\varphi_4 : E \to E$ *définie par* $f \mapsto \left(x \mapsto f(x) - \displaystyle\int_0^x (x - t) f(t)\, dt\right).$

   φ_4 est linéaire, parce que l'intégration est linéaire.

Exercice 3 :

Enoncé de l'exercice

On note $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer l'image des vecteurs de cette base par l'applications f_1 de l'exercice 8.1.1 précédent

   Par convention, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_1 = (0, 0, 1)$

   Donc, $f_1 (e_1) = (0, 0, 0)$, $f_1 (e_2) = (0, 2, 0)$ et $f_1 (e_3) = (0, -1, 0)$

   On peut d'ores et déjà remarquer que $f_1 (e_2) = -2f_1 (e_3)$. Comme $\mathrm{Im} f_1 = \mathrm{vect}\left(\{f_1 (e_1), f_1 (e_2), f_1 (e_3)\}\right)$, nous avons $\mathrm{Im} f_1$ engendré par le seul vecteur $f(e_2) = (0, 2, 0)$.

   Donc, $\dim \mathrm{Im} f_1 = 1$, et, d'après le théorème du rang, nous avons $\dim \ker f_1 = 2$

2. Donner le noyau de f_1

   Il y a deux façons de déterminer le noyau : la méthode analytique, et une méthode de pivot de Gauss

   La méthode analytique Elle consiste à utiliser les coordonnées images. Ici :

   $$f_1 (x, y, z) = (0, 0, 0) \Longleftrightarrow (0, 2y - z, 0) = (0, 0, 0) \Longleftrightarrow 2y - z = 0$$

   Donc, $\ker f_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } z = 2y\right\}$, c'est à dire, écrit autrement, $\ker f_1 = \left\{(x, y, 2y) \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } y\right.$

   Comme $(x, y, 2y) = x (1, 0, 0) + y (0, 1, 2)$, on peut dire que $\ker f_1 = \mathrm{vect}\left(\{(1, 0, 0), (0, 1, 2)\}\right)$

   Comme les deux triplets $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 2)$ sont linéairement indépendants, ils forment aussi une base de $\ker f_1$, et on retrouve ainsi $\dim \ker f_1 = 2$

Méthode de pivot de Gauss On crée donc un tableau, dans lequel les colonnes sont les coordonnées de $f_1(e_1)$, $f_1(e_2)$ et $f_1(e_3)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous faisons les modifications suivantes sur les colonnes :

$$\begin{array}{l} C_1' = C_1 \\ C_2' = C_2 \\ C_3' = 2C_3 + C_2 \end{array}$$

D'où nous obtenons un nouveau tableau :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Qui montre que le système est de rang 1, que $\mathrm{Im} f_1$ est engendré par $f_1(e_2)$.
De $C_3' = 2C_3 + C_2 = 0$, on tire

$$f_1(e_2) + 2f_1(e_3) = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow f_1(e_2 + 2e_3) = \overrightarrow{0}$$

Ce qui montre que $\ker f_1$ est engendré par les deux vecteurs e_1 et $e_2 + 2e_3$ engendrent $\ker f_1$

Chapitre 9

Les nombres complexes

Il y a plusieurs façons de définir les nombres complexes ; la construction proposée ici est intéressante puisqu'elle est proche de la géométrie plane et des transformations géométriques.
Les nombres complexes se retrouvent partout, et même en analyse

Les nombres remarquables sont de sortie en discothèque. e et π s'amusent comme des fous, mais i reste scotché au bar. e va alors voir i et lui dit : « Allez, viens dans $\mathbb{C}$! »

9.1 Une construction des nombres complexes

Dans ce paragraphe, nous considérons $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, anneau des matrices carrées d'ordre 2, à coefficients réels

9.1.1 Définition et théorème

On appelle $\mathbb{C}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.
Alors, $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif.
$\mathbb{C}$ est appelé corps des nombres complexes

Démonstration

Nous savons que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire ; c'est cette propriété que nous allons réutiliser car $\mathbb{C} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

1. Montrons que $(\mathbb{C}, +)$ est un groupe abélien
   Nous allons démontrer que $\mathbb{C}$ est un sous-groupe du groupe abélien $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$
   - ⊵ Premièrement, $\mathbb{C} \neq \emptyset$ puisque la matrice nulle $\mathcal{O}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est dans $\mathbb{C}$
   - ⊵ En second lieu, soient $A \in \mathbb{C}$ et $A_1 \in \mathbb{C}$, et montrons que $A - A_1 \in \mathbb{C}$
     Posons $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a_1 \in \mathbb{R}$ et $b_1 \in \mathbb{R}$. Alors :

$$A - A_1 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - a_1 & -b + b_1 \\ b - b_1 & a - a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - a_1 & -(b - b_1) \\ b - b_1 & a - a_1 \end{pmatrix}$$

     La matrice $A - A_1$ est donc du type $A - A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ et est donc un élément de $\mathbb{C}$
     Ainsi, $(\mathbb{C}, +)$ est un sous-groupe du groupe abélien $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$.
2. Montrons que $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe abélien

- $\trianglerighteq$ Tout d'abord, l'élément neutre pour la multiplication des matrices $\mathrm{Id}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est dans $\mathbb{C}^*$
- $\trianglerighteq$ Il faut montrer que la multiplication des matrices est interne. Comme tout à l'heure, posons $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a_1 \in \mathbb{R}$ et $b_1 \in \mathbb{R}$. Alors :

$$A \times A_1 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1 - bb_1 & -ab_1 - ba_1 \\ ba_1 + ab_1 & -bb_1 + aa_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1 - bb_1 & -(ba_1 + ab_1) \\ ba_1 + ab_1 & aa_1 - bb_1 \end{pmatrix}$$

  La matrice $A \times A_1$ est donc du type $A \times A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ et est donc un élément de $\mathbb{C}^*$
- $\trianglerighteq$ Il faut maintenant montrer que si $A \in \mathbb{C}$, alors A^{-1} existe et $A^{-1} \in \mathbb{C}$

  Rappel : comment calculer l'inverse d'une matrice 2×2 ?
  Si $X = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, alors X est inversible si et seulement si $\det X = ad - bc \neq 0$ et $X^{-1} = \dfrac{1}{\det X} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

  Soit $A \in \mathbb{C}^*$, alors $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $\det A = a^2 + b^2$ et $\det A = 0$ si et seulement si $a = b = 0$.
  Or, comme $A \in \mathbb{C}^*$, $A \neq \mathcal{O}$ et donc A est inversible.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{a^2+b^2} & \dfrac{b}{a^2+b^2} \\ \dfrac{-b}{a^2+b^2} & \dfrac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$$

  Nous avons bien A^{-1} qui exiqte et $A^{-1} \in \mathbb{C}$

3. La multiplication des matrices est, par définition, distributive par rapport à l'addition des matrices.

$(\mathbb{C}, +, \times)$ est donc un corps commutatif.

9.1.2 Proposition

Soit $S \subset \mathbb{C}$, l'ensemble suivant : $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ où } a \in \mathbb{R} \right\}$
Alors, $(S, +, \times)$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, isomorphe à $\mathbb{R}$

Démonstration

1. Nous montrons que $(S, +)$ est un groupe abélien
   - $\trianglerighteq$ Tout d'abord, $S \neq \emptyset$ puisque $\mathcal{O}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$
   - $\trianglerighteq$ Soient $A \in S$ et $B \in S$, et montrons que $A - B \in S$
     Posons $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Alors :

$$A - B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$$

     La matrice $A - B \in S$ Ainsi, $(S, +)$ est un groupe abélien .
2. Nous montrons que $(S^*, \times)$ est un groupe abélien
   - $\trianglerighteq$ Tout d'abord, $S^* \neq \emptyset$ puisque $\mathrm{Id}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in S^*$
   - $\trianglerighteq$ Soient $A \in S$ et $B \in S$, et montrons que $A \times B^{-1} \in S$

Posons $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}^*$. Alors $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$

et :

$$A \times B^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{b} & 0 \\ 0 & \frac{a}{b} \end{pmatrix}$$

La matrice $A \times B^{-1} \in S$ Ainsi, $(S^*, \times)$ est un groupe abélien .

Ainsi, $(S, +, \times)$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$

3. Montrons que $(S, +, \times)$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ est isomorphe à $(\mathbb{R}, +, \times)$

Il suffit de créer une application $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow S$ et de démontrer que c'est un isomorphisme de corps ; cette application est évidente :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R} & \longrightarrow & S \\ a & \longmapsto & \varphi(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \end{array}$$

⊵ Nous avons clairement, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$, $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$; φ est donc un homomorphisme de groupe additif

⊵ De la même manière, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$, $\varphi(ab) = \varphi(a) \times \varphi(b)$; φ est donc un homomorphisme de groupe multiplicatif

⊵ De plus, $\ker \varphi = \{0\}$, donc φ est injective

⊵ De même, φ est surjective.

On en conclue que φ est un isomorphisme de corps.

Remarque 1 :

Remarque très importante :

S isomorphe à $\mathbb{R}$ signifie que S et $\mathbb{R}$ ont même structure. On identifie S à $\mathbb{R}$ en posant $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a$

Nous avons, en particulier $\mathrm{Id}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$ et $\mathcal{O}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

Grâve à cet identification, nous avons $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

9.1.3 Théorème

$\mathbb{C}$, muni de l'addition des nombres complexes et de la multiplication par un nombre réel est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 dont une base est $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Démonstration

1. Nous savons déjà que $(\mathbb{C}, +)$ est un groupe abélien
2. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

   Alors $z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\lambda z = \lambda \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & -\lambda b \\ \lambda b & \lambda a \end{pmatrix}$$

   Nous avons bien $\lambda z \in \mathbb{C}$
3. La multiplication par un nombre réel vérifie clairement les axiômes de $\mathbb{R}$-espace vectoriel

   (a) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $1.z = z$

   (b) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, tout $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, $\lambda(\lambda_1 z) = (\lambda \lambda_1) z$

(c) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, tout $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, $(\lambda + \lambda_1) z = \lambda z + \lambda_1 z$

(d) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $z_1 \in \mathbb{C}$, $\lambda (z + z_1) = \lambda z + \lambda z_1$

4. Base et dimension de $\mathbb{C}$

 ⊵ La famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une famille génératrice ; en effet, pour toute matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ de $\mathbb{C}$, nous avons : :

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

 ⊵ La famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une famille libre, puisque :

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow a = b = 0$$

 ⊵ Donc, la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\mathbb{C}$, et donc $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

Remarque 2 :

Nous aurions pu aussi démontrer que $\mathbb{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Remarque 3 :

Remarque très importante

1. De la même manière que nous avons identifié la matrice $\mathrm{Id}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ au nombre réel 1, nous posons $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de telle sorte que tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ s'écrive $z = a + ib$
2. La famille $\{1, i\}$ est la base canonique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$
3. Comme $\{1, i\}$ est la base canonique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, pour tout nombre complexe $z = a+bi$ et $z' = a' + b'i$, nous avons :

$$z = z' \Longleftrightarrow a + bi = a' + b'i \Longleftrightarrow a = a' \text{ et } b = b'$$

9.1.4 Proposition

Nous avons $i^2 = -1$

Démonstration

Il suffit d'utiliser le calcul matriciel :

$$i^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

9.1.5 Synthèse

On appelle nombre complexe, un nombre de la forme $z = a + bi$ où $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$
$\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes ; $\mathbb{C}$ est un ensemble contenant l'ensemble des nombres réels : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
a est la partie réelle de z, tandis que b est la partie imaginaire de z
On note $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$

Remarque 4 :

1. Si la partie réelle est nulle, z est dit imaginaire pur.Les imaginaires purs sont de la forme $z = \lambda i$ où $\lambda \in \mathbb{R}$
2. Si la partie imaginaire est nulle, z est simplement dit réel.
3. $z = a + bi$ est dit forme algébrique des nombres complexes

9.1.6 Règles de calcul dans $\mathbb{C}$

Voici, énoncées, les règles de calcul élémentaire dans $\mathbb{C}$; c'est la synthèse de ce qui a été étudié ci-dessus

1. $i^2 = -1$
2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$, nous avons : $a \times (bi) = (ab)\, i$
3. Règle d'addition : $(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')\, i$
4. Règle de multiplication :
$$(a + bi) \times (a' + b'i) = aa' + ab'i + bia' + bb'i^2 = (aa' - bb') + i\,(ab' + ba')$$
5. Pour $z \neq 0$,
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{(a - bi)}{(a + bi)\,(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$
6. $z = a + bi = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$

Exemple 1 :

En utilisant les règles énoncées ci-dessus :

1. Mettre sous la forme $a + ib$ les nombres complexes suivants
   (a) $\dfrac{1}{1 + 3i}$
   Résolution
   Pour résoudre une telle question, il faut utiliser une expression appelée *conjuguée*[1]. Le conjugué de $1 + 3i$ est $1 - 3i$, donc :
   $$\frac{1}{1 + 3i} = \frac{1 - 3i}{(1 + 3i)\,(1 - 3i)} \overset{\text{identité remarquable}}{=} \frac{1 - 3i}{\left(1^2 - (3i)^2\right)} = \frac{1 - 3i}{(1 - 9i^2)} = \frac{1 - 3i}{10} = \frac{1}{10} - \frac{3i}{10}$$
   (b) $\dfrac{3 + 4i}{3 - 4i}$
   Résolution
   La méthode sera la même :
   $$\frac{3 + 4i}{3 - 4i} = \frac{(3 + 4i)^2}{(3 - 4i)\,(3 + 4i)} = \frac{(3 + 4i)^2}{3^2 - 16i^2} = \frac{(3 + 4i)^2}{25} = \frac{1}{25}\left(9 + 16i^2 + 24i\right) = \frac{-7}{25} + \frac{24i}{25}$$
   (c) $\dfrac{\cos\theta + i\sin\theta}{1 + i\tan\theta}$ pour $\theta \in \left]\dfrac{-\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$
   Résolution
   La méthode est la même, sauf qu'ici, il faut connaître, en plus, ses formules trigonométriques ! !....Mais, c'est très soft ! !
   $$\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{1 + i\tan\theta} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{1 + i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta}} = \cos\theta\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta$$
   Donc, $\dfrac{\cos\theta + i\sin\theta}{1 + i\tan\theta} = \cos\theta$

1. Très semblable à la notion de conjugué vu avec les racines carrées. Un paragraphe sera consacré au conjugué des nombres complexes

Remarque 5 :

1. Toutes les règles de calcul concernant l'addition et la multiplication s'appliquent à $\mathbb{C}$ comme à $\mathbb{R}$
2. La formule du binôme de Newton est en particulier valable :

$$\boxed{(z_1+z_2)^n=\sum_{p=0}^{n}C_n^p\,(z_1)^p\,(z_2)^{n-p}=\binom{n}{p}z_1^p z_2^{n-p}}$$

Exercice 1 :

1. Calculer de 2 manières différentes $(1+i)^8$; en déduire une expression de $S_1=2-C_8^2+C_8^4-C_8^6$ et de $S_2=C_8^1-C_8^3+C_8^5-C_8^7$
2. Soient $z_1=1-i$ et $z_2=1+i$; montrer que tout $z\in\mathbb{C}$ peut s'écrire sous la forme $z=\alpha z_1+\beta z_2$ où $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\beta\in\mathbb{R}$
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2=a$ où $a\in\mathbb{R}$
4. Trouver dans $\mathbb{C}$, les complexes z et z' tels que :

$$\left\{\begin{array}{rl} iz-3z'= & -2i\\ (1+3i)\,z+2iz'= & -1+3i\end{array}\right.$$

Remarque 6 :

Il n'existe pas dans $\mathbb{C}$ de relation d'ordre total compatible avec l'addition et la multiplication.

En effet,
Considérons le nombre complexe i et son carré i^2.
Alors, $i^2\geqslant 0$ *(parce que c'est un carré)*. Or $i^2=-1$ et $-1\leqslant 0$.
Il y a donc contradiction.

9.2 Nombres complexes et géométrie

9.2.1 Point image, affixe d'un point

On appelle P le plan affine. Rapportons ce plan à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$
Tout point M du plan, peut être repéré par ses coordonnées x et y. Nous avons,

$$\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{u}+y\overrightarrow{v}$$

1. On considère l'application

$$\left\{\begin{array}{lcl}\mathbb{C} & \xrightarrow{M} & P\\ z & \xrightarrow{M} & M\,(z)=(\mathrm{Re}\,(z)\,,\mathrm{Im}\,(z))\end{array}\right.$$

   On dit que M est le point-image de z
2. Réciproquement, pour tout point $M\,(a,b)$ du plan, on fait correspondre un seul nombre complexe $z=a+bi$.
   On dit alors, que z est l'affixe de M
3. Les nombres réels ont pour image les points situés sur l'axe $(O,\vec{u})$ Cet axe est appelé axe des réels

Exemple 2 :

1. L'image du réel 1 est le point (1,0)
2. Les imaginaires purs ont pour image l'axe $y'Oy$ privé de O.L'axe $(O,\vec{v})$ est appelé axe des imaginaires purs.
   Par exemple : le point $B\,(0,1)$ est l'image du nombre complexe i

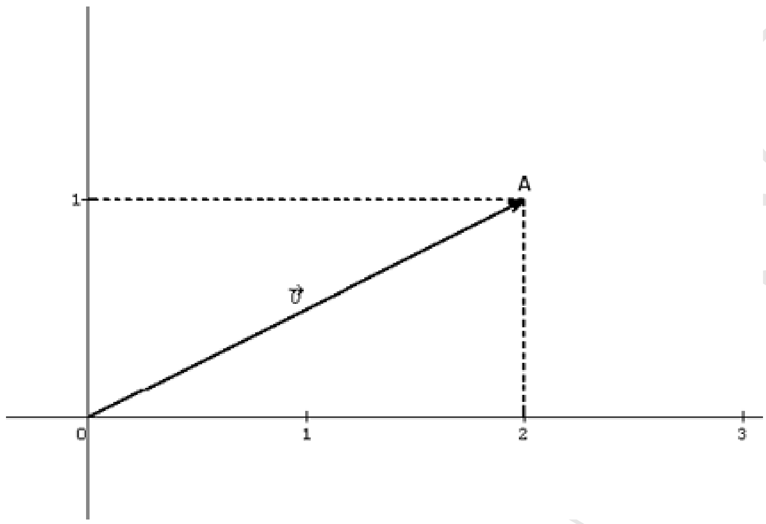


FIGURE 9.1 – Le point A d'affixe $z = 2 + i$ et le vecteur d'affixe $z = 2 + i$

9.2.2 Vecteur image, affixe d'un vecteur

1. On appelle $\vec{P}$ le plan vectoriel dont $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une base orthonormée. Au nombre complexe z, on fait correspondre le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(z) \\ \mathrm{Im}(z) \end{pmatrix}$. On dit que $\vec{u}$ est le vecteur-image de z
2. Réciproquement, tout vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est l'image d'un nombre complexe unique $z = a + bi$
   z est l'affixe de $\vec{u}$

Exercice 2 :

1. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont 2 vecteurs d'affixes respectives z et z', rechercher l'affixe de $\vec{u} + \vec{v}$
2. Si z est l'affixe de M, z' celui de M', quel est l'affixe de $\overrightarrow{MM'}$? Quel est l'affixe du milieu I du segment $[MM']$

9.3 Conjugué d'un nombre complexe, module d'un nombre complexe

Le lien entre géométrie et nombre complexe nous conduit, naturellement, à d'autres notions qui auront beaucoup d'importance.

9.3.1 Définition de conjugué

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe ; on appelle conjugué de z le nombre $\overline{z} = a - ib$

Remarque 7 :

1. Si z est l'affixe de M, le conjugué de z est l'affixe de $S(M)$, symétrique de M par rapport à l'axe $(O, \vec{u})$
2. Si $z = a + bi$, alors $z\overline{z} = a^2 + b^2$

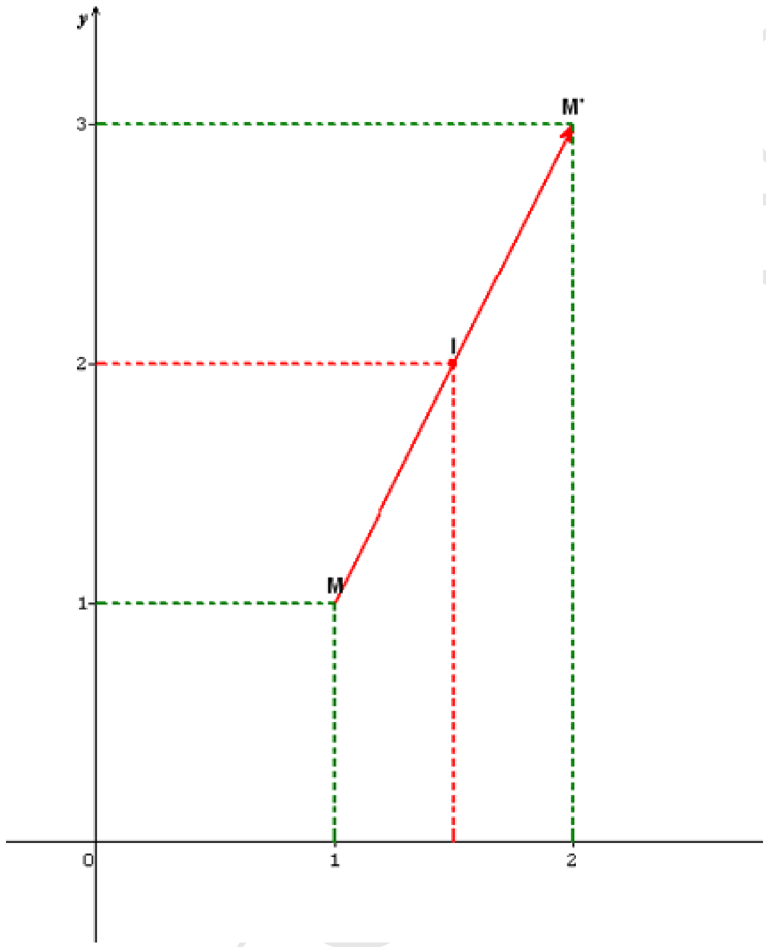


FIGURE 9.2 – Le vecteur $M\vec{M}'$ d'affixe $z_{M'} - z_M$, ainsi que I milieu du segment $[MM']$ d'affixe $z_I = \dfrac{z_M + z_{M'}}{2}$

9.3.2 Propriétés du conjugué

1. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
2. $\overline{\overline{z}} = z$
3. $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
4. $z = -\overline{z} \Leftrightarrow z = \lambda i$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ ou, ce qui est équivalent,$z = -\overline{z}$ si et seulement si z est un imaginaire pur.
5. $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
6. $(\forall z \in \mathbb{C}^*)(\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}})$

Démonstration

Je ne fais pas toutes les démonstrations, car certaines sont bien évidentes

1. Montrons que $z = -\overline{z} \Leftrightarrow z = \lambda i$
   - ▷ Si $z = \lambda i$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\overline{z} = -\lambda i = -z$
   - ▷ Réciproquement, si $z = -\overline{z}$, en passant à la forme algébrique, nous avons $x+iy = -x+iy \Longleftrightarrow 2x = 0 \Longleftrightarrow x = 0$, et donc $z = iy$ et z est imaginaire pur.

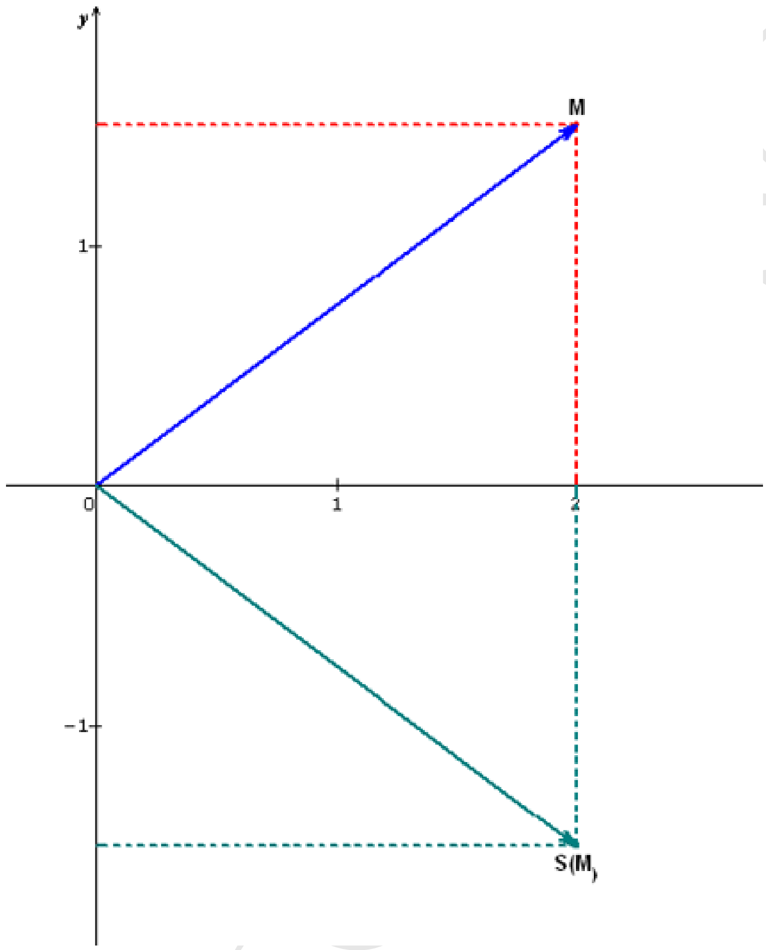


Figure 9.3 – Visualisation géométrique du conjugué dans $\mathbb{C}$

On montre de la même manière que $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

2. Montrer que $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$ est essentiellement calculatoire, en passant par la forme algébrique des nombres complexes.

3. Montrons que $(\forall z \in \mathbb{C}^*) \left(\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}\right)$

   Nous le faisons en utilisant la forme algébrique des nombres complexes. Si $z = x + iy$, alors :
   - ▷ $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{x+iy}\right)} = \overline{\left(\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right)} = \frac{x+iy}{x^2+y^2}$
   - ▷ $\frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{x-iy} = \frac{x+iy}{x^2+y^2}$

Remarque 8 :

L'application

$$\delta : \begin{cases} \mathbb{C} & \xrightarrow{\delta} & \mathbb{C} \\ z & \xrightarrow{\delta} & \delta(z) = \overline{z} \end{cases}$$

est un isomorphisme de corps

En effet
- ▷ Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $z' \in \mathbb{C}$, nous avons $\delta(z+z') = \delta(z) + \delta(z')$ et $\delta(zz') = \delta(z)\,\delta(z')$
- ▷ De plus $z \in \ker \delta$ si et seulement si $\delta(z) = 0$, c'est à dire si et seulement si $a - ib = 0 \Longleftrightarrow a = 0$ et $b = 0$

Exercice 3 :

Montrer que les seules bijections $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$, laissant chaque réel invariant et telles que

$$(\forall z\in\mathbb{C})\,(\forall z'\in\mathbb{C})\,(f(z+z')=f(z)+f(z')\text{ et }f(zz')=f(z)f(z')$$

sont toutes de la forme $f(z)=\overline{z}$ ou $f=Id_{\mathbb{C}}$
(C'est une question difficile !)

Exercice 4 :

1. Soit P un polynôme à coefficients réels, c'est à dire que $P(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$ où $a_k\in\mathbb{R}$. Montrer que si z_0 est racine, il en est de même de $\overline{z_0}$
2. *Application*
   Soit $j=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; vérifier que $j^2=\overline{j}$, puis que j est racine de $Q(x)=1+x+x^2$. En déduire une factorisation de $Q(x)$, puis que $j^3=1$

9.3.3 Définition de module d'un nombre complxe

Soit $z\in\mathbb{C}$
On appelle module du nombre complexe z, le réel positif $|z|$ tel que $\boxed{|z|=\sqrt{z\overline{z}}}$

Remarque 9 :

1. Si $z=x+iy$, alors, $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$
2. $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ n'est autre que la distance de l'origine à l'image M de z : $|z|=OM$. C'est aussi la norme du vecteur $\vec{u}$ dont z est l'affixe : $|z|=\|\vec{u}\|$
3. Le module d'un nombre réel, n'est autre que sa valeur absolue

9.3.4 Propriétés du module d'un nombre complexe

1. $(\forall z\in\mathbb{C})\,(|\mathrm{Re}\,(z)|\leqslant|z|)$ et $(|\mathrm{Im}\,(z)|\leqslant|z|)$
2. $(\forall z\in\mathbb{C})\,(|z|=0\Leftrightarrow z=0)$
3. $(\forall z\in\mathbb{C})(|z|=|-z|)$ et $(|z|=|\overline{z}|)$
4. $(\forall z\in\mathbb{C})\,(\forall z'\in\mathbb{C})\,(|zz'|=|z|\,|z'|)$

Démonstration

Nous ne démontrons que les points qui pourraient poser une difficulté (toute relative !!)

1. Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $z=x+iy$; alors, $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$; comme $x^2\leqslant x^2+y^2$, nous avons $\sqrt{x^2}\leqslant\sqrt{x^2+y^2}$, c'est à dire $|x|\leqslant|z|$, c'est à dire $|\mathrm{Re}\,(z)|\leqslant|z|$.
   On démontrerait de la même manière que $|\mathrm{Im}\,(z)|\leqslant|z|$
2. Démontrons que $(\forall z\in\mathbb{C})\,(|z|=0\Leftrightarrow z=0)$
   - ▷ Si $z=0$, bien entendu que $|z|=0$
   - ▷ Réciproquement, supposons que $|z|=0$; alors $x^2+y^2=0$, et donc $x=y=0$ et donc $z=0$

Exercice 5 :

Démontrer les équivalences suivantes, vraies pour tout nombre complexe $z\in\mathbb{C}$:

1. $(|\mathrm{Re}\,(z)| = |z|) \Longleftrightarrow (z \in \mathbb{R})$
2. $(\mathrm{Re}\,(z) = |z|) \Longleftrightarrow (z \in \mathbb{R}^+)$

9.3.5 Inégalité triangulaire

Pour tout $(z \in \mathbb{C})$ et tout $(z' \in \mathbb{C})$, nous avons $\boxed{|z+z'| \leqslant |z| + |z'|}$

Démonstration

L'ensemble des nombres complexes étant identifié au plan (on parle aussi, parfois, de plan complexe), l'intuition géométrique doit jouer son rôle. Un schéma, même s'il n'est pas une démonstration, peut être d'une grande aide ; l'idée de base étant que module et norme jouent le meme rôle

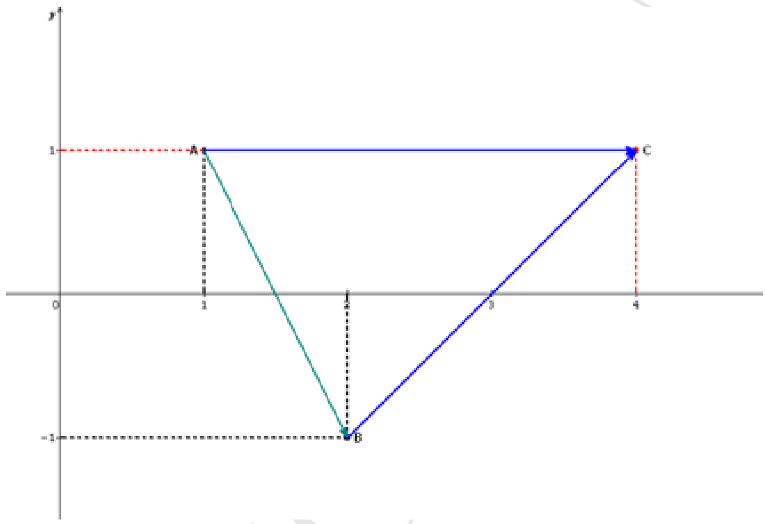


Figure 9.4 – Visualisation géométrique de l'inégalité triangulaire

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $z' \in \mathbb{C}$, nous avons :

$$\begin{array}{rcl} |z+z'|^2 & = & (z+z')\,\overline{(z+z')} \text{ par définition du module} \\ & = & (z+z')\left(\bar{z}+\overline{z'}\right) \\ & = & z\bar{z} + z\overline{z'} + z'\bar{z} + z'\overline{z'} \\ & = & |z|^2 + |z'|^2 + \left(z\overline{z'} + z'\bar{z}\right) \end{array}$$

Or, on peut remarquer que $(z\bar{z'} + z'\bar{z}) = 2\,\mathrm{Re}(z\bar{z'})$ et comme, $2\,\mathrm{Re}(z\overline{z'}) \leqslant 2|z\overline{z'}|$, que $2|z\overline{z'}| = 2|z||\overline{z'}| = 2|z||z'|$, nous avons :

$$|z+z'|^2 \leqslant |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'|$$

C'est à dire

$$|z+z'|^2 \leqslant (|z| + |z'|)^2$$

D'où le résultat.

Remarque 10 :

1. On peut généraliser le résultat : pour tout $z_1, z_2, \ldots, z_n$ dans $\mathbb{C}$ nous avons :

$$|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \ldots |z_n| \Leftrightarrow \left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |z_i|$$

2. On peut remarquer que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $|z^p| = |z|^p$ *(se démontre par récurrence)*

9.3.6 Inégalité triangulaire : cas d'égalité

Pour tout $(z \in \mathbb{C})$ et tout $(z' \in \mathbb{C})$, nous avons

$$|z+z'| = |z| + |z'| \text{ si et seulement si il existe } \lambda > 0 \text{ tel que } z = \lambda z'$$

Démonstration

Nous venons de montrer, dans 9.3.5, que :

$$|z+z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\operatorname{Re}\left(z\bar{z}'\right)$$

De $|z+z'| = |z| + |z'|$, en élevant au carré, nous obtenons :

$$|z+z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\left|z\bar{z}'\right|$$

Et, en utilisant l'égalité, nous avons :

$$2\operatorname{Re}\left(z\bar{z}'\right) = 2\left|z\bar{z}'\right| \Longleftrightarrow \operatorname{Re}\left(z\bar{z}'\right) = \left|z\bar{z}'\right| \Longleftrightarrow z\bar{z}' \in \mathbb{R}^+$$

Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $\alpha = z\bar{z}'$

→ Si $z' = 0$, alors, bien sûr, $|z+z'| = |z| + |z'|$

→ Supposons $z' \neq 0$, alors :

$$z = \frac{\alpha}{\bar{z}'} = \frac{\alpha z'}{z'\bar{z}'} = \frac{\alpha z'}{|z'|^2} = \frac{\alpha}{|z'|^2} z' = \lambda z'$$

Où $\lambda = \dfrac{\alpha}{|z'|^2} \in \mathbb{R}^+$

Il est clair que, réciproquement, si $z = \lambda z'$ avec $\lambda > 0$, nous avons $|z+z'| = |z| + |z'|$

QED

Exercice 6 :

1. Montrer que $(\forall z \in \mathbb{C})\,(\forall z' \in \mathbb{C})\,(||z| - |z'|| \leqslant |z - z'|)$
2. Montrer que $(\forall z \in \mathbb{C}^*)\left(\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}\right)$
3. Montrer que $(|z| = 1) \Leftrightarrow \left(\bar{z} = \dfrac{1}{z}\right)$

Exercice 7 :

Trouver $z \in \mathbb{C}$ tel que z, $\dfrac{1}{z}$ et $z-1$ aient même module.

Exercice 8 :

Montrer que pour tout complexe Z, il existe un élément $w = a + ib$ (avec a et b entiers relatifs) tel que $|Z - w| < 1$

Exercice 9 :

Montrer que si $|u| = 1$, alors $\dfrac{z - u\bar{z}}{1-u} \in \mathbb{R}$

9.4 Résolution de l'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$

L'objet de cette partie est de résoudre dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ où $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$
Il peut se poser une question forte, dans ce paragraphe : les nombres complexes ont-ils tous une *(ou deux)* racine carrée ? La réponse est positive et est dans le théorème fondamental de l'Algèbre. Ici, ce n'est pas la question ; cf 9.4.2

9.4.1 Résolution de l'équation $z^2 = 1 + i$

C'est une équation du second degré particulière ; c'est, en fait, la recherche des racines carrées de $1 + i$

1. Si z_0 est une racine de $1 + i$, alors, $z_0^2 = 1 + i$, et on peut écrire $|z_0^2| = |z_0|^2 = |1 + i|$
2. Si $z_0 = x_0 + iy_0$, alors $|z_0|^2 = x_0^2 + y_0^2$ et $z_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + 2ix_0y_0$
3. Nous obtenons donc le système suivant :

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = & \sqrt{2} \\ x_0^2 - y_0^2 = & 1 \\ 2x_0y_0 = & 1 \end{cases}$$

   D'où nous tirons : $x_0 = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}$ ou $x_0 = -\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}$ et $y_0 = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$ ou $y_0 = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$
4. L'identité $2x_0y_0 = 1$ nous impose x_0 et y_0 de même signe ;
5. D'où $z_0 = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$ ou bien $z_0 = -\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$

9.4.2 Résolution de $az^2 + bz + c = 0$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$

On utilise la « forme canonique des lycées » de $az^2 + bz + c$ avec $a \neq 0$:

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

Si ω est une racine carrée de $b^2 - 4ac$, le polynôme du second degré devient :

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\omega^2}{4a^2}\right] = a\left[z + \frac{b}{2a} - \frac{\omega}{2a}\right]\left[z + \frac{b}{2a} - \frac{\omega}{2a}\right]$$

L'équation a donc 2 solutions : $z' = \dfrac{-b-\omega}{2a}$ et $z'' = \dfrac{-b+\omega}{2a}$. On a, évidemment, si $b^2 - 4ac = 0$, alors $z' = z''$

Remarque 11 :

On remarque que l'important, dans un polynôme du second degré, est le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$
La résolution d'une équation du second degré, même dans $\mathbb{C}$, commence donc par le calcul du discrimant ; l'algorithme se succède ensuite comme dans $\mathbb{R}$, sauf que même si Δ est négatif, il y a toujours deux racines.
La difficulté supplémentaire sera de rechercher une racine carrée d'un nombre complexe.

Remarque 12 :

En effectuant la somme et le produit des racines z' et z'', nous obtenons :

$$\begin{cases} z' + z'' = & -\dfrac{b}{a} \\ z'z'' = & \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Réciproquement, si a, b et c sont 3 nombres complexes tels que $a \neq 0$, et u_1, u_2 tels que :

$$\begin{cases} u_1 + u_2 = & -\dfrac{b}{a} \\ u_1 u_2 = & \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

alors, u_1 et u_2 sont solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$
Donc, résoudre dans $\mathbb{C}$, le système

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = & S \\ z_1 z_2 = & P \end{cases}$$

revient donc à résoudre l'équation du second degré dans $\mathbb{C}$ $az^2 - Sz + P = 0$

Exercice 10 :

Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

1. $z^2 - 2z\cos\varphi + 1 = 0$
2. $3x^2 + 2x + 2 = 0$
3. $z^2 - (3 + 2i)\,z - 1 + 3i = 0$
4. $(1 - i)z^2 - (6 - 4i)z - 7i = 0$
5. $z^4 + z^2 + 1 = 0$
6. $iz^3 + (1 - 2i)\,z^2 - (1 + i)\,z - 2\,(1 - i) = 0$ sachant qu'elle admet une racine réelle

Remarque 13 :

Il faut savoir que, dans $\mathbb{C}$, tout polynôme de degré n a exactement n racines *(C'est le théorème de D'Alembert)*. Mais, c'est dans cet exposé, hors de propos.

9.5 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

9.5.1 Argument d'un nombre complexe

Exercice 11 :

1. Soit $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| = 1\}$. Montrer que pour tout nombre z_1, z_2, z_3 de $\mathcal{U}$ nous avons : $z_1 z_2 \in U$, $\overline{z_1} \in \mathcal{U}$, et $\dfrac{1}{z_1} \in \mathcal{U}$. Montrer que $(\mathcal{U}, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}, \times)$
2. Soit M, un point situé sur le cercle unité, de coordonnées (a, b) ; Donner a et b en fonction d'une mesure θ de l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$; en déduire l'affixe de M.
3. Réciproquement, soit $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$; à quelles conditions z est-elle l'affixe de M ?

9.5.2 Définition

On appelle argumentd'un nombre complexe de module 1 tout réel θ tel que $z = \cos\theta + i\sin\theta$
L'ensemble des arguments de z est l'ensemble des mesures, en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right)$ où M est l'image de z dans un repère orthonormal direct

Remarque 14 :

1. Un argument est donc défini à $2k\pi$ près
2. Tout argument de z, noté $\arg(z)$, est congru à θ modulo 2π

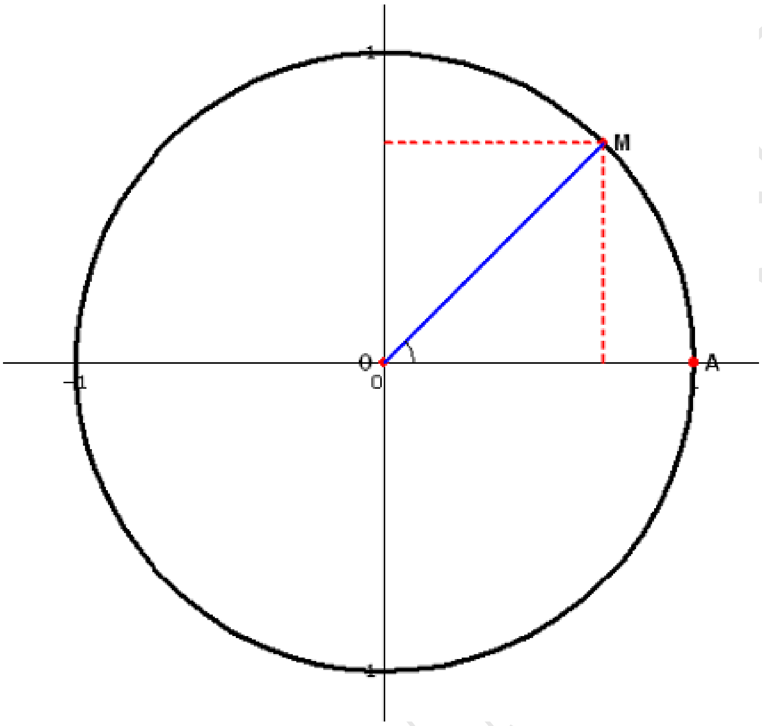


FIGURE 9.5 – Visualisation géométrique du cercle unité

Exemple 3 :

1. Quel est l'argument de $j = \dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$?

   Nous devons avoir $\cos\theta = \dfrac{-1}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $\theta = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

2. Si $|z| = 1$, quel est l'argument de $\overline{z}$?

   Voilà une question qui pourrait être une question de cours !!
   Si $z = \cos\theta + i\sin\theta$, alors $\overline{z} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$. L'argument de $\overline{z}$ est donc $-\theta + 2k\pi$

9.5.3 Propriété

Soient z et z' deux nombres complexes de module 1. Alors $\boxed{\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]}$

Démonstration

On écrit $z = \cos\theta + i\sin\theta$ et $z' = \cos\theta' + i\sin\theta'$. Alors :

$$zz' = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')$$

Nous utilisons ensuite, les formules d'addition de la trigonométrie et nous avons alors le résultat cherché

9.5.4 Propriété

Si $|z| = 1$ alors $\arg(\dfrac{1}{z}) \equiv \arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$

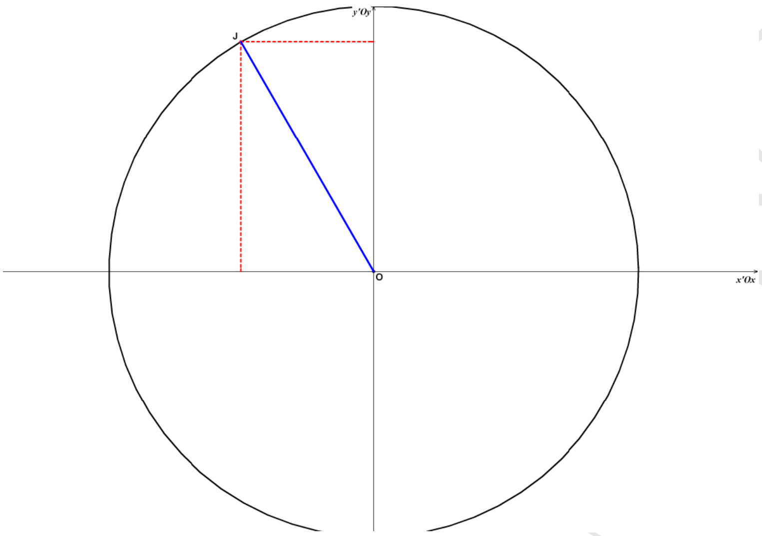


FIGURE 9.6 – Visualisation géométrique d'une racine cubique de 1 : $j = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Démonstration

Si $|z| = 1$;, alors $\frac{1}{z} = \overline{z}$ et comme $\arg(\overline{z}) \equiv\equiv -\arg(z)[2\pi]$, nous avons bien $\arg(\frac{1}{z}) \equiv \arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$

9.5.5 Formule de De Moivre

Nous avons, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\boxed{((\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta)}$$

Remarque 15 :

Voici une formule essentielle, très utile pour connaître presque toutes les formules de trigonométrie.

Démonstration

1. **Supposons** $n \in \mathbb{N}$

   La démonstration se fait par une récurrence simple, en utilisant les formules d'addition.

   Vérifions pour $n = 0$ Nous avons $(\cos\theta + i\sin\theta)^0 = 1$ et $\cos 0\theta + i\sin 0\theta = 1$

   La formule est donc vraie pour $n = 0$

   Supposons la formule vraie à l'ordre n c'est à dire que $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

   Démontrons la formule à l'ordre $n+1$ Nous avons :

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^{n+1} &= (\cos\theta + i\sin\theta)^n \times (\cos\theta + i\sin\theta)\\ &= (\cos n\theta + i\sin n\theta) \times (\cos\theta + i\sin\theta)\\ &= \cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta + i(\cos n\theta\sin\theta + \sin n\theta\cos\theta)\end{aligned}$$

   Or, par les formules d'addition, nous avons : $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

   Donc : $\cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta = \cos(n+1)\theta$ et $\cos n\theta\sin\theta + \sin n\theta\cos\theta = \sin(n+1)\theta$

   D'où $(\cos\theta + i\sin\theta)^{n+1} = \cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta$

   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta)$

2. **Supposons $n \in \mathbb{Z}$ et supposons n négatif** ; il existe alors $n' \in \mathbb{N}$ tel que $n = -n'$. Donc, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^{-n'}$
   Or, $(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n'} = \dfrac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^{n'}}$.
   Par la formule de De Moivre démontrée lorsque $n' \in \mathbb{N}$, nous avons :
   $$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n'} = \frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^{n'}} = \frac{1}{\cos n'\theta + i\sin n'\theta}$$
   Or, si $|z| = 1$, nous avons $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$ et donc $\dfrac{1}{\cos n'\theta + i\sin n'\theta} = \cos n'\theta - i\sin n'\theta$
   De la parité de cos, nous avons $\cos n'\theta = \cos -n'\theta$ et de l'imparité de sin, nous avons $-i\sin n'\theta = i\sin -n'\theta$, de telle sorte que :
   $$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^{-n'} = \cos n'\theta - i\sin n'\theta = \cos -n'\theta + i\sin -n'\theta = \cos n\theta + i\sin n\theta$$
   Ce que nous voulions

Exemple 4 :

1. 1 est le nombre complexe de module 1 et d'argument $2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
2. La forme trigonométrique de i est donc $i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$
   D'où $i^n = \left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)^n = \cos\dfrac{n\pi}{2} + i\sin\dfrac{n\pi}{2}$
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\cos\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right)\right)^n = \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi) = 1$; c'est la forme trigonométrique des racines n-ièmes de 1

9.5.6 Proposition

On appelle $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$ le cercle unité. Alors, $(\forall z \in \mathbb{C})\,(\exists z_0 \in \mathcal{U})\,(z = z_0 \times |z|)$

Démonstration

— Si $z = 0$, tous les éléments de $\mathcal{U}$ conviennent
— Si $z \neq 0$, alors, $|z| > 0$ et $z = \dfrac{z}{|z|} \times |z|$. En posant $z_0 = \dfrac{z}{|z|}$, $z_0 \in \mathcal{U}$ et on a le résultat

Remarque 16 :

Il existe donc $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $z_0 = \cos\theta_0 + i\sin\theta_0$.

9.5.7 Définition

Le réel θ_0 est appelé Argument de z
L'écriture $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ est l'écriture trigonométrique de z
L'argument de z est toujours défini à $2k\pi$ près

9.5.8 Proposition

2 nombres complexes $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = |z'|\left(\cos\theta' + i\sin\theta'\right)$ sont égaux, si et seulement si,
$$|z| = |z'| = 0 \text{ ou } \begin{cases} |z| = |z'| \\ \text{et} \\ \theta \equiv \theta'\,[2\pi] \end{cases}$$

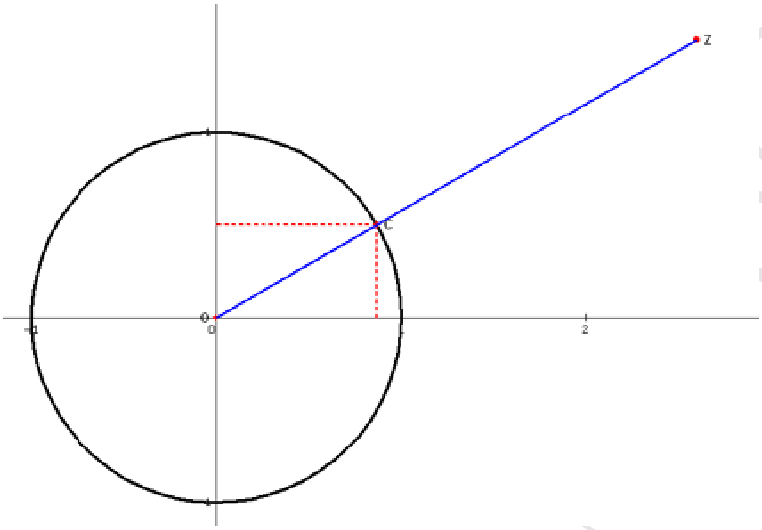


FIGURE 9.7 – Quelle interprétation géométrique pouvons nous donner ?

9.5.9 Recherche de la forme trigonométrique d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul, alors $z = |z|\,(\frac{a}{|z|} + i\frac{b}{|z|})$

Donc $\boxed{\cos(\arg z) = \frac{a}{|z|}}$ et $\boxed{\sin(\arg z) = \frac{b}{|z|}}$

Exemple 5 :

Donner la forme trigonométrique de $z = -1 + i\sqrt{3}$

On regarde d'abord le module !

$$\left|-1 + i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

Donc, $\left(-1 + i\sqrt{3}\right) = 2\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, d'où on, tire que $\begin{cases} \cos\left(\arg\left(z\right)\right) = \frac{-1}{2} \\ \sin\left(\arg\left(z\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Donc, $\arg\left(z\right) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$, et la forme trigonométrique de $z = (-1 + i\sqrt{3})$ est

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

On peut même écrire l'égalité : $-1 + i\sqrt{3} = 2(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}))$

Exercice 12 :

Mettre sous forme trigonométrique les complexes suivants :

1. $z_1 = 1 + i$
2. $z_2 = -1 - i$
3. $z_3 = \sin\theta + i\cos\theta$
4. $z_4 = \frac{-\sqrt{2}}{1+i}$
5. $z_5 = \frac{3}{1-i}$

9.5.10 Propriétés

Pour tout nombre complexe z et z' non nuls

1. $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$
2. $(\forall n \in \mathbb{N})\ (\arg(z^n) \equiv n \arg(z)\ [2\pi])$
3. $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$
4. $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$

Démonstration

Les démonstrations sont simples et laissées à faire seuls. Cependant, il faut remarquer que la proposition est établie pour tout nombre complexe non nul, et de module quelconque (et non plus 1)

9.5.11 Généralisation

Pour tout nombre complexe z et z' non nuls

1. $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$
2. $(\forall n \in \mathbb{N})\ \left(\arg\left(\frac{1}{z^n}\right) \equiv -n \arg(z)\ [2\pi]\right)$
3. $(\forall p \in \mathbb{Z})\ (\arg(z^p) \equiv p \arg(z)\ [2\pi])$

Remarque 17 :

— Tout d'abord, il est intéressant de remarquer que la notion d'argument d'un nombre complexe, "marche" un peu comme le logarithme chez les réels. Rien d'étonnant à cela, puisque, avec les arguments des complexes, on "touche du doigt" la théorie du logarithme des nombres complexes

— Interprétation géométrique de la multiplication
Elle correspond, en fait, géometriquement, à une rotation composée d'une homothétie, c'est à dire,une similitude directe

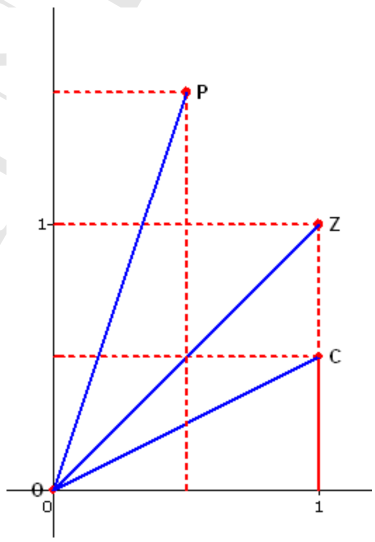


FIGURE 9.8 – La multiplication de z_C affixe du point C par z_Z affixe du point Z donne le complexe z_P affixe du point P

9.6 Racines n-ième d'un nombre complexe

9.6.1 Présentation par un cas particulier

On veut rechercher les racines 4es de $16(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$
Comment s'y prendre ?
Soit $\alpha=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$, une racine 4es de $16(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$
Ceci veut donc dire que $\alpha^4=16(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$, et, par la formule de De Moivre,

$$\rho^4\left(\cos 4\theta+i\sin 4\theta\right)=16\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

D'où

$$\begin{cases}\rho^4=16\\ 4\theta\equiv\frac{\pi}{3}\,[2\pi]\end{cases}$$

Comme, $\rho>0$, nous avons l'équivalence $\rho^4=16\Leftrightarrow\rho=2$ et

$$4\theta\equiv\frac{\pi}{3}\,[2\pi]\Leftrightarrow 4\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ où } k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2} \text{ où } k\in\mathbb{Z}$$

On obtient ainsi 4 racines 4es, distinctes, fonction des valeurs de k

$$\begin{cases}\alpha_0=2\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right) & \text{pour } k=0, k=4,\dots,k=4p & \text{c'est à dire } k\equiv 0\,[4]\\ \alpha_1=2\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right) & \text{pour } k=1, k=5,\dots,k=4p+1 & \text{c'est à dire } k\equiv 1\,[4]\\ \alpha_2=2\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\right) & \text{pour } k=2, k=6,\dots,k=3p+2 & \text{c'est à dire } k\equiv 2\,[4]\\ \alpha_3=2\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right) & \text{pour } k=3, k=7,\dots,k=4p+3 & \text{c'est à dire } k\equiv 3\,[4]\end{cases}$$

9.6.2 Théorème

Soit $Z\in\mathbb{C}$ tel que $Z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ avec $r>0$ et $\alpha\in\mathbb{R}$ alors :
$Z\in\mathbb{C}$ admet n racines n-ièmes distinctes ; elles sont de la forme :

$$\boxed{z_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right)}$$

où $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$

Démonstration

La démonstration n'est pas difficile, et généralise seulement ce qui a été fait dans la présentation 9.6.1
Il faut déterminer $z\in\mathbb{C}$ tel que $z^n=Z$
Or, $z=\rho\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$, et donc,

$$z^n=\rho^n\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^n=\rho^n\left(\cos n\theta+i\sin n\theta\right)$$

De là, nous déduisons que :

$$\begin{cases}\rho^n=r\\ n\theta=\alpha+2k\pi\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}\rho=\sqrt[n]{r}\\ \theta=\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\end{cases}\quad\text{avec } \rho>0 \text{ et } r>0$$

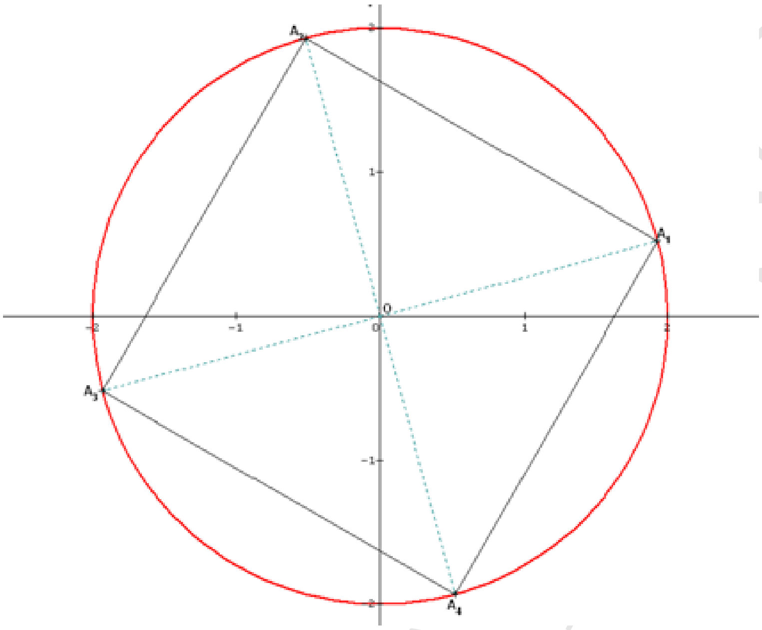


FIGURE 9.9 – Représentation des 4 racines quatrièmes de $16(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$; ce sont le sommets d'un carré

Exemple 6 :

1. Recherche des racines cubiques de 1 et de $1+i$
   (a) On écrit 1 sous forme trigonométrique : $1=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi$.
   Si $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ est une racine cubique de 1, alors $z^3=\rho^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)=1$ et donc ;
$$\begin{cases}\rho^3=1\\ 3\theta=2k\pi\end{cases}\iff\begin{cases}\rho^3=1\\ \theta=\dfrac{2k\pi}{3}\end{cases}$$
   Il existe donc 3 racines cubiques de 1 :
$$\begin{cases}z_0=\cos 0+i\sin 0=1\\ z_1=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{-1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=j\\ z_2=\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}=\dfrac{-1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\bar{j}\end{cases}$$
   (b) A nouveau, nous écrivons $1+i$ sous forme trigonométrique : $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.
   Si $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ est une racine cubique de $1+i$, alors $z^3=\rho^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)=1$ et donc ;
$$\begin{cases}\rho^3=\sqrt{2}\\ 3\theta=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\end{cases}\iff\begin{cases}\rho=\sqrt[6]{2}\\ \theta=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2k\pi}{3}\end{cases}$$
   Il existe donc 3 racines cubiques de $1+i$:
$$\begin{cases}z_0=\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\\ z_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{11\pi}{12}+i\sin\dfrac{11\pi}{12}\right)\\ z_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{4\pi}{3}\right)\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{19\pi}{12}+i\sin\dfrac{19\pi}{12}\right)\end{cases}$$

2. Recherche des racines carrées de i et de $-i$

   (a) On écrit i sous forme trigonométrique : $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$.
   Si $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ est une racine carrée de i, alors $z^2 = \rho^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = i$ et donc;
   $$\begin{cases} \rho^2 = 1 \\ 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$
   Il existe donc 2 racines carrées de i :
   $$\begin{cases} z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \\ z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = -z_0 \end{cases}$$

   (b) On écrit $-i$ sous forme trigonométrique : $-i = \cos\frac{-\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi}{2}$.
   Si $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ est une racine carrée de $-i$, alors $z^2 = \rho^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = -i$ et donc;
   $$\begin{cases} \rho^2 = 1 \\ 2\theta = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{-\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$
   Il existe donc 2 racines carrées de $-i$:
   $$\begin{cases} z_0 = \cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) \\ z_1 = \cos\left(\frac{-\pi}{4} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4} + \pi\right) = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = -z_0 \end{cases}$$

3. De quelle forme sont les racines n-ièmes de 1 ? On écrit 1 sous forme trigonométrique : $1 = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi$.
   Si $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ est une racine n-ièmes de 1, alors $z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = 1$ et donc;
   $$\begin{cases} \rho^n = 1 \\ n\theta = 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$
   Il existe donc n racines n-ièmes de 1; elles sont toutes de la forme $\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ avec $k = 0 \cdots n-1$

9.6.3 Théorème

Soit $z \in \mathbb{C}$. Soient ω_k où $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ les n racines n-ièmes de 1. Alors
Pour obtenir toutes les racines n-ièmes de z, il suffit d'en connaître une seule Z_0 et de multiplier Z_0 par tous les ω_k
Autrement dit :
$$\boxed{\forall k \in [0, n-1] \cap \mathbb{N}\ Z_k = Z_0 \times \omega_k}$$

Démonstration

Soit Z_0 une racine n-ième de z et Z_k, une autre racine de z.
Alors, $(Z_0)^n = z$ et $(Z_k)^n = z$. Donc, $\left(\frac{Z_0}{Z_k}\right)^n = 1$, et ce qui veut dire que $\frac{Z_0}{Z_k}$ est une racine n-ièmes de 1
Donc, $\frac{Z_k}{Z_0} = \omega_k \Rightarrow Z_k = \omega_k Z_0$

Exemple 7 :

Donner les racines cubiques de -8
Une racine cubique de -8 est -2 ; les racines cubiques de 1 sont 1, j et $j^2 = \overline{j}$
Les racines cubiques de -8 sont donc :

$$\begin{cases} Z_0 = -2 \\ Z_1 = -2j = -2(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 - i\sqrt{3} \\ Z_2 = -2\overline{j} = 1 + i\sqrt{3} \end{cases}$$

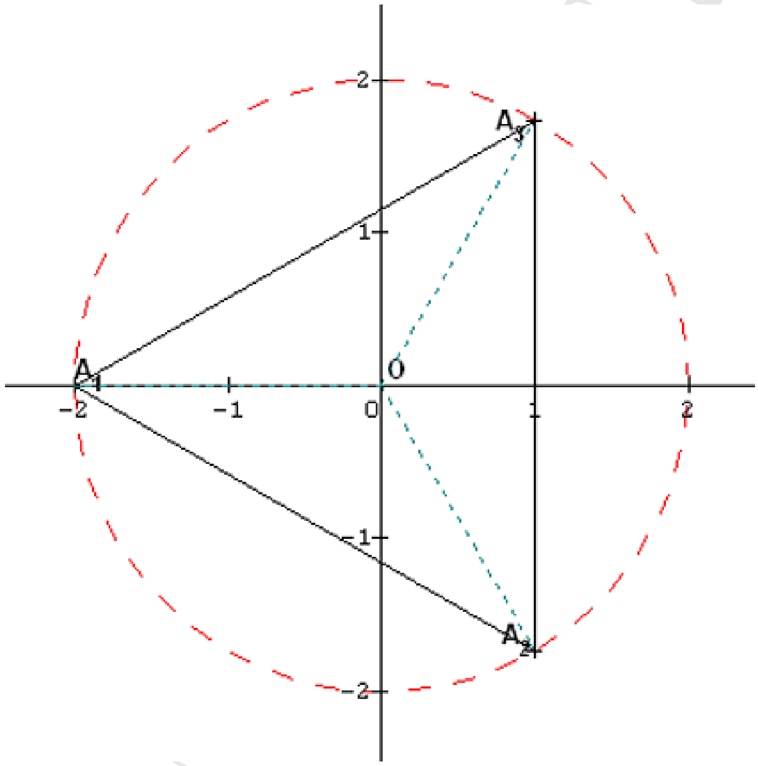


FIGURE 9.10 – Représentation des 3 racines cubiques de 8

9.7 L'exponentielle complexe

9.7.1 Définition de l'exponentielle complexe de module 1

Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose :

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

9.7.2 Conséquences immédiates

1. Nombres particuliers :

   (a) $e^0 = 1$ (b) $e^{i\pi} = -1$ (c) $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ (d) $e^{\frac{2i\pi}{3}} = j$

2. $\overline{e^{it}} = e^{-it} = \dfrac{1}{e^{it}}$
3. $(\forall t \in \mathbb{R})(|e^{it}| = 1)$
4. Nous avons les formules d'Euler : $\cos t = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}$ et $\sin t = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$

9.7.3 Formule de De Moivre

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $t' \in \mathbb{R}$, nous avons :
$$e^{i(t+t')} = \left(e^{it}\right)\left(e^{it'}\right)$$
2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, nous avons $\left(\left(e^{it}\right)^k = e^{ikt}\right)$
3. Conséquence : $(\forall z \in \mathbb{C}) \left(z = |z|\, e^{i \arg(z)}\right)$

9.7.4 Théorème

1. $e^{it} = e^{it'}$ si et seulement si $t - t' = 2k\pi$
2. De manière équivalente, $e^{it} = e^{it'}$ si et seulement si $t - t' \equiv 0\,[2k\pi]$

9.7.5 Forme des racines n-ièmes de 1

Les racines n- iè mes de 1 s'écrivent : $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ où $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

9.7.6 Linéarisation de polynômes trigonométriques

Qu'est ce que linéariser un polynôme trigonométrique ? ?

Considérons, par exemple, la fonction $f(x) = \cos^3 x$. Comment faire pour trouver une expression plus simple, permettant, par exemple, de calculer facilement une primitive de cette fonction. Certes, les formules trigonométriques sont d'une aide certaine, mais, si nous avons des degrés plus importants, sont elles facilement manipulables ?

Linéariser

Linéariser une expression du type $\sin^n x$ ou $\cos^n x$, c'est trouver des constantes A_k, $k = 0, \ldots, n$, et B_k, $k = 0, \ldots, n$ telles que $\sin^n x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (A_k \cos kx + B_k \sin kx)$ ou $\cos^n x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (A_k \cos kx + B_k \sin kx)$.

L'outil le plus important à utiliser seront **d'abord les formules d'Euler** :
Nous avons, si $z = e^{it}$, $z + \dfrac{1}{z} = \cos t$ et $z - \dfrac{1}{z} = \sin t$, de telle sorte qu'en utilisant les formules de Moivre, $\cos nt = \dfrac{1}{2}\left(z^n + \dfrac{1}{z^n}\right)$ et $\sin nt = \dfrac{1}{2i}\left(z^n - \dfrac{1}{z^n}\right)$

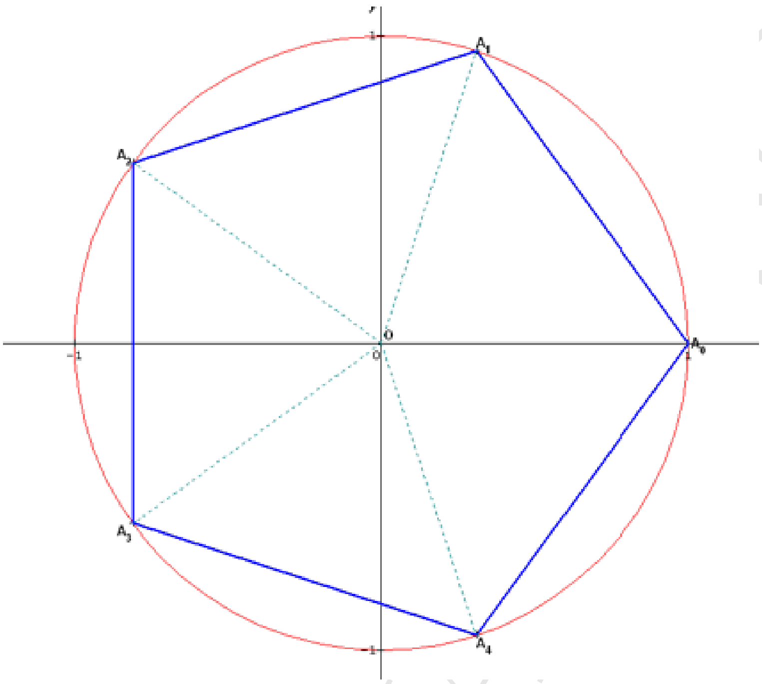


FIGURE 9.11 – Les images des racines 5-ièmes de 1 sont les sommets d'un pentagone

Exemple 8 :

Linéarisons $f(x) = \cos^3 x$

Commençons par écrire $\cos^3 x = \left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)^3$. Nous avons alors,

$$\cos^3 x = \frac{1}{8}\left(z^3 + \left(\frac{1}{z}\right)^3 + 3z^2\frac{1}{z} + 3z\frac{1}{z^2}\right)$$

Ce qui nous permet d'écrire tout de suite :

$$\cos^3 x = \frac{1}{8}\left(z^3 + \frac{1}{z^3} + 3\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)$$

c'est à dire,

$$\cos^3 x = \frac{1}{8}(2\cos 3x + 6\cos x)$$

Ce qui nous permet d'écrire : $\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$
Ce que nous voulions

Exemple 9 :

Application importante :

Calculer $D_n(t) = \sum_{k=-n}^{k=n} e^{ikt}$

Cette expression $D_n(t)$ s'appelle **le noyau de Dirichlet**.
Tout d'abord,

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{k=n} e^{ikt} = \sum_{k=0}^{n} e^{ikt} + \sum_{k=1}^{n} e^{-ikt}$$

Et nous calculons les différentes sommes, comme sommes de termes de suites géométriques.

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikt} = \frac{1-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}} \text{ et } \sum_{k=1}^{n} e^{-ikt} = \frac{e^{-it}\left(1-e^{-int}\right)}{1-e^{-it}}$$

De telle sorte que :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} e^{ikt} + \sum_{k=1}^{n} e^{-ikt} &= \frac{1-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}} + \frac{e^{-it}\left(1-e^{-int}\right)}{1-e^{-it}} \\ &= \frac{\left(1-e^{-it}\right)\left(1-e^{i(n+1)t}\right) + e^{-it}\left(1-e^{it}\right)\left(1-e^{-int}\right)}{\left|1-e^{t}\right|^2} \\ &= \frac{\left(e^{int}+e^{-int}\right) - \left(e^{i(n+1)t}+e^{-i(n+1)t}\right)}{2-2\cos t} \\ &= \frac{2\cos nt - 2\cos(n+1)t}{2-2\cos t} \\ &= \frac{\cos nt - \cos(n+1)t}{1-\cos t}\end{aligned}$$

Des différentes formules trigonométriques, nous tirons :

$$\begin{cases} \cos nt - \cos(n+1)t = -2\sin\left(\dfrac{nt-(n+1)t}{2}\right)\sin\left(\dfrac{nt+(n+1)t}{2}\right) = -2\sin\left(\dfrac{-t}{2}\right)\sin\left(\dfrac{(2n+1)t}{2}\right) \\ 1-\cos t = 2\sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right) \end{cases}$$

D'où on tire donc $\boxed{D_n(t) = \dfrac{\sin\left(\dfrac{(2n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}}$

9.8 Exercices complémentaires sur les nombres complexes

9.8.1 Construction des nombres complexes

Exercice 13 :

Voilà un exercice qui ne pose aucune difficulté et qui est très proche des définitions d'espace vectoriel, d'anneau ou de corps (certaines questions sont réellement des enfonçages de portes ouvertes !!). L'intérêt de cet exercice est de montrer qu'il existe d'autres possibilités de construction de l'ensemble $\mathbb{C}$

1. A tout élément $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, nous associons la matrice $M(x,y) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} x & -y \\ 2y & x-2y \end{pmatrix}$$

   On appelle $\mathfrak{M}(2,-2)$ l'ensemble des matrices $M(x,y)$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$
   (a) Démontrer que $\mathfrak{M}(2,-2)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En donner une base simple et préciser sa dimension
   (b) Démontrer que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathfrak{M}(2,-2)$ est isomorphe à $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$
   (c) Démontrer que, muni de l'addition et de la multiplication des matrices, $\mathfrak{M}(p,q)$ a une structure de corps commutatif
   (d) Trouver un élément $A \in \mathfrak{M}(2,-2)$ tel que $A^2 = -\mathrm{Id}_2$
2. Pour $p \in \mathbb{R}^*$ et $q \in \mathbb{R}^*$ fixés, on considère cette fois ci, l'ensemble $\mathfrak{M}(p,q)$ des matrices $M(a,b) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définies par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ qb & a+pb \end{pmatrix} \text{ avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}$$

(a) Démontrer que $\mathfrak{M}(p,q)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En donner une base simple et préciser sa dimension

(b) Démontrer que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathfrak{M}(p,q)$ est isomorphe à $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

(c) Démontrer que, muni de l'addition et de la multiplication des matrices, $\mathfrak{M}(p,q)$ est un anneau commutatif et unitaire

(d) Démontrer que si $p^2-4q<0$, alors $\mathfrak{M}(p,q)$ a une structure de corps

9.8.2 Nombres complexes : calculs élémentaires

Exercice 14 :

Mettre sous la forme $a+bi$ les nombres complexes suivants :

1. $\dfrac{1+3i}{2-i}$
2. $\dfrac{3+i}{3-i}+\dfrac{2+i}{2-i}$

Exercice 15 :

Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'expression $(1+i)^n+(1-i)^n$ est un nombre réel, alors que l'expression $(1+i)^n-(1-i)^n$ est un imaginaire pur

Exercice 16 :

p et q étant 2 nombres complexes tel que $|p|\neq 1$, résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z définie par : $z=p\overline{z}+q$

Exercice 17 :

Trouver les nombres complexes $z\in\mathbb{C}^*$ tels que $\dfrac{1+z}{z}$ soit réel *(On pourrait poser la même question pour « imaginaire pur »)*

Exercice 18 :

Dans l'ensemble des nombres complexes, on pose $z_0=\dfrac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}$

1. Exprimer z_0 sous la forme $a+ib$ où a et b sont des réels
2. Calculer z_0^2 et z_0^3 puis, z_0^{15}
3. Montrer que pour tout entier naturel n : $z_0^{3n+2}=-2^{3n+1}(1+i\sqrt{3})$
4. **Application :** calculer z_0^{20}

Exercice 19 :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante :$z^2+2z+4=0$
2. On note z_A et z_B les deux racines de cette équation, z_A étant la racine dont la partie imaginaire est positive, et z_B l'autre; calculer $|z_A|$ et $|z_B|$
3. Le plan est repéré par un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. Nous appelons A, le point d'affixe z_A, B le point d'affixe z_B et C le point d'affixe $z_C=2$. Calculer $|z_A-z_B|$, $|z_B-z_C|$, $|z_C-z_A|$. En déduire la nature du triangle ABC

Exercice 20 :

Trouver les racines carrées de $4ab+2\left(a^2-b^2\right)i$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$

Exercice 21 :

Résoudre les équations suivantes :

1. $x^2 - (5-14i)\,x - 2\,(5i+12) = 0$
2. $x^2 - 2\left(1+ia^2\right)x + \left(1-a^4\right) = 0$ avec $a \in \mathbb{R}$

Exercice 22 :

a étant réel et b complexe, résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ $z^2 - 2abz + b^2 = 0$

Exercice 23 :

Déterminer les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $x^2 - 6\,(1-i)\,x - 12i = 0$
Montrer que les images des solutions de cette équation dans le plan complexe sont alignées avec l'origine

Exercice 24 :

Trouver l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\dfrac{z+2i}{z-4i} \in \mathbb{R}$

Exercice 25 :

Pour $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$, on considère les nombres complexes suivants :

$$X = \frac{z+z'}{1+zz'} \qquad Y = i\frac{z'-z}{1+zz'} \qquad Z = \frac{1-zz'}{1+zz'}$$

1. Démontrer que $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$
2. Démontrer que X, Y et Z sont réels si et seulement si $z' = \overline{z}$

Exercice 26 :

Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\left|\dfrac{1+\lambda i}{1-\lambda i}\right| = 1$.Etudier la réciproque

Exercice 27 :

1. Déterminer le module et l'argument de $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = 1 - i$ et $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$. En déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$
2. En exprimant de 2 manières différentes les racines carrées de $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{i}{\sqrt{2}}$, calculer $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8}$

Exercice 28 :

Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 1 + i\tan(\theta)$ avec $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$
2. $z_2 = \dfrac{1+\cos\theta + i\sin\theta}{1-\cos\theta + i\sin\theta}$ avec $\theta \neq 2k\pi$
3. $z_3 = 1 + \cos\theta + i\sin(\theta)$

Exercice 29 :

1. Démontrer que $(\forall z \in \mathbb{C})(\forall z' \in \mathbb{C})$, $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$
2. Si $u^2 = zz'$ montrer que : $|z| + |z'| = \left|\dfrac{z+z'}{2} - u\right| + \left|\dfrac{z+z'}{2} + u\right|$

9.8.3 Exponentielle complexe

Exercice 30 :

Soit $\alpha = e^{i\frac{2\pi}{7}}$. On pose $S = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4$ et $T = \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6$
Calculer $S + T$ et ST. En déduire S et T

Exercice 31 :

Soit $z_0 = \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$. On pose $a = z_0 + z_0^4$ et $b = z_0^2 + z_0^3$.

1. Montrer que a et b sont les racines de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$. En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$
2. On désigne par A, B et I les points d'affixe a,b et i. démontrer que le cercke de diamètre $[A, B]$ pase par I

Exercice 32 :

1. Montrer que Si $z \neq 1$ alors,$1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} = \dfrac{z^n - 1}{z - 1}$.
2. En déduire la somme des racines *n-ièmes* de 1
3. Si $P(z) = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n$, comment factoriser P ?

Exercice 33 :

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. On appelle ω une racine n-ième de 1, différente de 1. Evaluer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,\omega^k$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,\omega^{kp}$ où $p \in \mathbb{Z}$ est fixé
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}\omega^k$

Exercice 34 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0$

Exercice 35 :

1. Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\rho > 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \rho^k \cos(\alpha + k\beta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \rho^k \sin(\alpha + k\beta)$
2. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a
$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) = 0$$

Exercice 36 :

On désigne par α et $\overline{\alpha}$ les racines de l'équation $x^2 - 2x + 2 = 0$

1. Ecrire α^n et $\overline{\alpha}^n$ sous forme trigonométrique, et sous forme algébrique
2. Calculer $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \left(\alpha^k + \overline{\alpha}^k\right)$

Exercice 37 :

α et β étant réels, trouver le module et l'argument de $\dfrac{e^{i\alpha} + e^{i\beta}}{1 + e^{i(\alpha+\beta)}}$

Exercice 38 :

Déterminer l'ensemble $\left\{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \left(\sqrt{3} + i\right)^n \in \mathbb{R}^-\right\}$

Exercice 39 :

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha^5 = 1$ et $\alpha \neq 1$. Montrer que

$$\left(\alpha^2+\alpha+1\right)\left(\alpha^3+\alpha+1\right)\left(\alpha^4+\alpha+1\right) = \alpha\left(\alpha+1\right)$$

Exercice 40 :

On note $\alpha = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la partie imaginaire de $\left(1+\alpha+\alpha^2\right)^n$

9.8.4 Miscelleanous

Autrement dit : des exercices en vrac !!

Exercice 41 :

Soit φ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définie par : $\varphi(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$
Quel est l'ensemble des complexes tels que

1. $|\varphi(z)| = 1$
2. $|\varphi(z)| < 1$
3. $|\varphi(z)| = k$ où $k \neq 1$ et $k \geqslant 0$

Exercice 42 :

Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe de module r et d'argument θ

1. Calculer $|1+z|$ en fonction de r et de θ
2. En déduire $\left|1+z^2\right|$ en fonction de r et de θ

Exercice 43 :

Soit l'équation :

$$z^3-(6+3i)z^2+(9+12i)z-9(2+3i)=0 \tag{9.1}$$

1. Montrer que l'équation (9.1) admet une solution imaginaire pure unique notée z_1. Calculer z_1
2. Déterminer les 2 autres solutions z_2 et z_3
3. On désigne M_1, M_2 et M_3 les solutions de (9.1) dans un repère orthonormé. Montrer que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral

Exercice 44 :

Soit f l'application définie sur $\mathbb{C}\setminus\{i\}$ par : $f(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$

1. Déterminer les points fixes de f, c'est à dire les éléments $z \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) = z$
2. f est-elle bijective ? Et si oui, déterminer f^{-1}, sa bijection réciproque

Exercice 45 :

Soit f l'application définie sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ par : $f(z) = \dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$

1. Déterminer les points fixes de f, c'est à dire les éléments $z \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) = z$
2. f est-elle injective ? Est-elle surjective ?

Exercice 46 :

Pour $a \neq k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, calculer $\dfrac{\sin na}{(\sin a)^n}$ en fonction de $\cot a$

Exercice 47 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(X) = X^2 - 2X\cos\dfrac{k\pi}{n} + 1$
   Chercher les racines, éventuellement complexes, de P
2. Soit $Q(X) = X^{2n} - 1$
   Chercher les racines de Q. En déduire que :
$$Q(X) = \left(X^2 - 1\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2 - 2X\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)$$
3. Démontrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2 - 2X\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right) = 1 + X^2 + X^4 + \cdots + X^{2j} + \cdots + X^{2n-2}$
4. Démontrer que $n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} 4\sin^2\frac{k\pi}{2n}$
5. Démontrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$

Exercice 48 :

Dans tout le problème, nous appelons $E = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } \operatorname{Im}(z) > 0\}$ et $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| = 1\}$

1. Démontrer que $(\mathcal{U}, \times)$ est un groupe commutatif
2. Pour $u \in \mathcal{U}$ avec $u = a + ib$ ($a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$), nous définissons l'application f_u de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par :
$$\left\{\begin{array}{rcl} f_u : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f_u(z) = \dfrac{az - b}{bz + a} \end{array}\right.$$
   (a) Démontrer que, pour tout $u \in \mathcal{U}$, f_u est définie sur E en entier et que f_u est une bijection de E sur E
   (b) Démontrer que, pour tout $u \in \mathcal{U}$,, il existe un élément $z_0 \in E$ qui soit invariant par f_u
3. On désigne par $\mathcal{B}$ l'ensemble des bijections f_u, autrement dit : $\mathcal{B} = \{f_u \text{ où } u \in \mathcal{U}\}$
   (a) On considère l'application g de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{B}$ définie par :
$$\left\{\begin{array}{rcl} g : \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{B} \\ u & \longmapsto & g(u) = f_u \end{array}\right.$$
   Quelles sont les conditions sur $u \in \mathcal{U}$ et $v \in \mathcal{U}$ pour que $g(u) = g(v)$?
   (b) Préciser $(f_u)^{-1}$ et montrer que $(f_u)^{-1} \in \mathcal{B}$
   (c) Soit $u \in \mathcal{U}$ fixé. Trouver $v \in \mathcal{U}$ tel que $g(v) = (f_u)^{-1}$
   (d) Montrer que l'identité de E, notée Id_E est un élément de $\mathcal{B}$ et quels sont les éléments $u \in \mathcal{U}$ tels que $g(u) = \mathrm{Id}_E$
   (e) Soient $u \in \mathcal{U}$ et $v \in \mathcal{U}$. Montrer que $f_u \circ f_v$ est un élément de $\mathcal{B}$
   (f) En déduire la structure de l'ensemble $(\mathcal{B}, \circ)$
   (g) Démontrer que $g : (\mathcal{U}, \times) \longrightarrow (\mathcal{B}, \circ)$ est un homomorphisme de groupe. Est-ce un isomorphisme ?
4. Dans cette question, nous nous plaçons dans le cas particulier où $u = i$
   (a) On appelle $\Gamma = \left\{z = e^{i\theta} \text{ où } \theta \in]0; \pi[\right\}$. Quelle est l'image de Γ par f_i ?
   (b) Soit $\theta_0 \in]0; \pi[$ fixé. On appelle $D(\theta_0) = \left\{\lambda e^{i\theta_0} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}^{*+}\right\}$. Donner l'image de $D(\theta_0)$ par f_i

Exercice 49 :

Dans ce problème, on considère le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 de base $\{1, i\}$
On désignera par $\mathcal{L}(\mathbb{C})$ l'ensemble des applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et par $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ l'ensemble de tous les couples (s, t) de nombres complexes.
À tout couple $(s, t) \in \mathbb{C}^2$, on désignera par $f_{(s,t)}$ l'application suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_{(s,t)} : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f_{(s,t)}(z) = sz + t\overline{z} \end{array} \right.$$

1. Montrer que, pour tout couple $(s, t) \in \mathbb{C}^2$, $f_{(s,t)} \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$ c'est à dire que pour tout $(s, t) \in \mathbb{C}^2$, $f_{(s,t)}$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire.
2. Réciproquement, démontrer que si $g \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$, il existe couple unique $(s, t) \in \mathbb{C}^2$ pour lequel nous avons $g = f_{(s,t)}$

   Nous venons de montrer que toutes les applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ sont du type $f_{(s,t)}(z) = sz + t\overline{z}$

3. Calculer s et t en fonction de $g(1)$ et $g(i)$. On dira alors que le couple $(s, t) \in \mathbb{C}^2$ représente g.
4. Pour $s \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{C}$, $u \in \mathbb{C}$ et $v \in \mathbb{C}$, démontrer qu'il existe donc un couple unique $(p, q) \in \mathbb{C}^2$ tel que $f_{(s,t)} \circ f_{(u,v)} = f_{(p,q)}$.
   Calculer p et q en fonction de s, t, u et v.
5. Déterminer tous les couples $(s, t) \in \mathbb{C}^2$ pour lesquels l'application $f_{(s,t)}$ est involutive.
6. Montrer que l'application $f_{(s,t)}$ est bijective si et seulement si $|s| \neq |t|$
7. Trouver $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\left(f_{(s,t)}\right)^{-1} = f_{(x,y)}$

9.9 Quelques exercices corrigés

9.9.1 Nombres complexes : calculs élémentaires

Exercice 1 :

1. *Calculer de 2 manières différentes* $(1+i)^8$ *; en déduire une expression de* $S_1 = 2 - C_8^2 + C_8^4 - C_8^6$ *et de* $S_2 = C_8^1 - C_8^3 + C_8^5 - C_8^7$

   Calculons d'abord $(1+i)^8$

   ▷ Nous avons $(1+i)^8 = \left((1+i)^2\right)^4$. Or, $(1+i)^2 = 1 + i^2 + 2i = 2i$, de telle sorte que $(1+i)^8 = 2^4 i^4 = 16$

   ▷ Cette fois ci, nous utilisons le binôme de Newton pour calculer $(1+i)^8$

   $$(1+i)^8 = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} i^k$$

   Il faut, ici, mettre de côté les termes de rang pair et les termes de rang impair ; en effet : $i^{2k} = (-1)^k$ et $i^{2k+1} = i\,(-1)^k$. D'où, nous avons :

   $$(1+i)^8 = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} i^k = \left(1 - C_8^2 + C_8^4 - C_8^6 + 1\right) + i\left(C_8^1 - C_8^3 + C_8^5 - C_8^7\right)$$

   En identifiant partie réelle et partie imaginaire, nous obtenons :

   $$\begin{aligned} 2 - C_8^2 + C_8^4 - C_8^6 &= \ 16 \\ C_8^1 - C_8^3 + C_8^5 - C_8^7 &= \ 0 \end{aligned}$$

2. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $z^2 = a$ *où* $a \in \mathbb{R}$

   Nous allons regarder 2 situations :

   ▷ Si $a > 0$
   Alors, c'est une situation des plus classiques : $z = \sqrt{a}$ ou $z = -\sqrt{a}$; nous avons alors $z \in \mathbb{R}$

   ▷ Si $a < 0$
   Alors, $z^2 = a \iff z^2 = i^2(-a)$ et nous avons $-a > 0$. Nous avons, à nouveau 2 racines : $z = i\sqrt{-a}$ ou $z = -i\sqrt{-a}$; cette fois ci, z est imaginaire pur.

3. *Trouver dans* $\mathbb{C}$*, les complexes* z *et* z' *tels que :*

   $$\left\{ \begin{aligned} iz - 3z' &= \ -2i \\ (1+3i)\,z + 2iz' &= \ -1+3i \end{aligned} \right.$$

   En utilisant toute méthode que vous voulez *(substitution, addition, méthode de Cramer)*, on trouve $z = 1$ et $z' = i$

Exercice 3 :

Montrer que les seules bijections $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$*, laissant chaque réel invariant et telles que*

$$(\forall z \in \mathbb{C})\,(\forall z' \in \mathbb{C})\,(f(z+z') = f(z) + f(z') \text{ et } f(zz') = f(z)f(z'))$$

sont toutes de la forme $f(z) = \overline{z}$ *ou* $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$

▷ Une telle application est entièrement déterminée par $f(i)$
En effet, soit $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Alors :

$$f(z) = f(a+ib) = f(a) + f(ib) = f(a) + f(i)\,f(i)$$

Comme f laisse chaque réel invariant, nous avons $f(a) = a$ et $f(b) = b$, et donc $f(z) = a + bf(i)$

▷ Posons $f(i) = x_0 + iy_0$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$
Nous avons $1 = f(1) = f(-i^2) = f(i \times -i) = f(i) \times f(-i) = f(i) \times f(-1) \times f(i) = -(f(i))^2$
C'est à dire que $(f(i))^2 = -1$. Donc $(x_0 + iy_0)^2 = -1$. Développons et nous avons :

$$(x_0 + iy_0)^2 = x_0^2 - y_0^2 + 2ix_0y_0 = -1$$

En identifiant partie réelle et partie imaginaire, nous obtenons :

$$\begin{cases} x_0^2 - y_0^2 = & -1 \\ 2x_0y_0 = & 0 \end{cases}$$

De $x_0y_0 = 0$, nous tirons $x_0 = 0$ ou $y_0 = 0$. Si $y_0 = 0$, alors $x_0^2 = -1$, ce qui est impossible. Donc, seul $x_0 = 0$, et si $x_0 = 0$ nous avons $y_0 = 1$ ou $y_0 = -1$ D'où nous tirons 2 solutions : $(x_0, y_0) = (0, +1)$ ou $(x_0, y_0) = (0, -1)$

▷ Ainsi, nous avons $f(i) = i$ ou $f(i) = -i$
- ⋆ Si $f(i) = i$ alors $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$
- ⋆ Si $f(i) = -i$ alors $f(z) = \overline{z}$

Remarque
Il existe une autre application f telle que $f(z + z') = f(z) + f(z')$ et $f(zz') = f(z) f(z')$, c'est l'application nulle $\mathcal{O}$ qui, à tout $z \in \mathbb{C}$, fait correspondre $\mathcal{O}(z) = 0$; mais, ce n'est pas une bijection

Exercice 4 :

1. *Soit P un polynôme à coefficients réels, c'est à dire que $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ où $a_k \in \mathbb{R}$. Montrer que si z_0 est racine, il en est de même de $\overline{z_0}$*

   Nous avons donc $P(z_0) = 0$ et donc, en passant au conjugué, $\overline{P(z_0)} = 0$. Or, c'est quoi $\overline{P(z_0)}$?

   $$\overline{P(z_0)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z_0^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z_0^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\,\overline{z_0^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z_0^k} = P(\overline{z_0})$$

   Or, comme $\overline{P(z_0)} = 0$, nous avons aussi $P(\overline{z_0}) = 0$, et donc $\overline{z_0}$ est aussi racine de P
   Nous venons de montrer 2 choses :
   - ▷ Que si un polynome P est à coefficients réels, alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$
   - ▷ Que si un polynome P est à coefficients réels, si $z_0 \in \mathbb{C}$ est racine de P, alors $\overline{z_0}$ est aussi racine de P

2. *Soit $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; vérifier que $j^2 = \overline{j}$, puis que j est racine de $Q(x) = 1 + x + x^2$. En déduire une factorisation de $Q(x)$, puis que $j^3 = 1$*

   Le calcul montre que $j^2 = \overline{j}$.
   Comme le polynôme $Q(x) = 1 + x + x^2$ est à coefficients réels, alors, si u est racine de Q, $\overline{u}$ l'est aussi. par calcul, nous avons :

   $$1 + j + j^2 = 1 + j + \overline{j} = 1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

   Ainsi j et donc $\overline{j}$ sont rracines de Q
   De $1 + j + j^2 = 0$, nous tirons $j^2 = -1 - j$, puis, en multipliant par j, $j^3 = -j - j^2 = 1$. j apparaît donc comme une racine cubique de 1

Exercice 6 :

Trouver $z \in \mathbb{C}$ tel que z, $\frac{1}{z}$ et $z - 1$ aient même module.

On pose donc $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

- ▷ De la première égalité $|z| = \left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$, nous tirons $|z|^2 = 1$ et donc $|z| = 1$, c'est à dire $x^2 + y^2 = 1$
- ▷ De la seconde égalité $|z| = |z-1|$, nous tirons

$$x^2 + y^2 = (x-1)^2 + y^2 \iff x^2 = (x-1)^2 \iff -2x + 1 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$$

Et de $x^2 + y^2 = 1$, nous tirons $y^2 = \dfrac{3}{4}$, c'est à dire $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $y = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$.

Il existe donc 2 nombres complexes z tels que $|z| = \left|\dfrac{1}{z}\right| = |z-1|$; ce sont $z_0 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\overline{z_0}$

Exercice 7 :

Montrer que pour tout complexe Z, il existe un élément $w = a + ib$ (avec a et b entiers relatifs) tel que $|Z - w| < 1$

En posant $Z = x + iy$ et $[t] =$ (entier le plus proche de t) [2], alors, $|t - [t]| \leqslant \dfrac{1}{2}$

Soit $w = [x] + i[y]$; alors, $|Z - w|^2 = |(x - [x]) + i\,(y - [y])|^2 = (x - [x])^2 + (y - [y])^2 \leqslant \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$

Nous avons donc $|Z - w| \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$

Exercice 8 :

Montrer que si $|u| = 1$, alors $\dfrac{z - u\overline{z}}{1-u} \in \mathbb{R}$

Il faut commencer par remarquer que si $|u| = 1$, alors $\overline{u} = \dfrac{1}{u}$

Posons $Z = \dfrac{z - u\overline{z}}{1-u}$; il faut donc montrer que $\overline{Z} = Z$

$$\overline{Z} = \frac{\overline{z} - \overline{u}z}{1 - \overline{u}} = \frac{\overline{z} - \frac{1}{u}z}{1 - \frac{1}{u}} = \frac{\frac{u\overline{z} - u}{u}}{\frac{u-1}{u}} = \frac{u\overline{z} - u}{u-1} = \frac{z - u\overline{z}}{1-u} = Z$$

Ce que nous voulions.

Exercice 9 :

Il faut faire cet exercice à fond, pour acquérir une dextérité dans les calculs

Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :

1. $z^2 - 2z\cos\varphi + 1 = 0$

   Remarquons que les coefficients étant réels, si z_0 est racine, alors $\overline{z_0}$ l'est aussi.
   - ⊴ On calcule donc le discriminant $\Delta = 4\cos^2\varphi - 4 = 4\left(\cos^2\varphi - 1\right) = -4\sin^2\varphi$
     Nous avons donc $\Delta \leqslant 0$ et une racine carrée de Δ est $\omega = 2i\sin\varphi$
   - ⊴ Les racines de cette équation sont donc $z_0 = \dfrac{2\cos\varphi + 2i\sin\varphi}{2} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ et $\overline{z_0} = \cos\varphi - i\sin\varphi$
2. $3x^2 + 2x + 2 = 0$

   Polynôme à coefficients réels de discriminant $\Delta = -20$; une racine carrée de Δ est donc $\omega = 2i\sqrt{5}$.
   Il y a donc 2 racines $x_0 = \dfrac{-2 + 2i\sqrt{5}}{6} = \dfrac{-1 + i\sqrt{5}}{3}$ et $\overline{x_0} = \dfrac{-1 - i\sqrt{5}}{3}$
3. $z^2 - (3 + 2i)\,z - 1 + 3i = 0$

   Cette fois ci, ce n'est pas un polynôme à coefficients réels.

2. Ne pas confondre "Entier le plus proche de t" et la partie entière de t

⊴ Calculons le discriminant :

$$\Delta = (3+2i)^2 - 4(3i-1) = 9$$

Δ admet donc 2 racines $\omega = 3$ et $\omega = -3$

⊴ La première racine est donc $z_1 = \dfrac{3+2i+3}{2} = 3+i$ et la seconde $z_2 = \dfrac{3+2i-3}{2} = i$

4. $(1-i)z^2 - (6-4i)z - 7i = 0$

⊴ Calculons le discriminant :

$$\Delta = (6-4i)^2 + 28i(1-i) = 48 - 20i = 4(12-5i)$$

⊴ Recherchons les racines carrées de Δ

Soit $\omega = x+iy$ l'une des 2 racines *(l'autre étant $-\omega$)*. Alors :

⋆ $\omega^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = \Delta$ et $|\omega|^2 = x^2 + y^2 = |\Delta|$

Comme $|\Delta|^2 = 16\left[(12)^2 + (5)^2\right] = 16 \times 169 = 4^2 \times (13)^2$, nous avons $|\Delta| = 4 \times 13 = 52$

⋆ Nous avons donc le système à résoudre :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= 48 \\ x^2 + y^2 &= 52 \\ 2xy &= -20 \end{cases}$$

D'où nous tirons $2x^2 = 100$ et $2y^2 = 4$ d'où $x = \pm 5\sqrt{2}$ et $y = \pm\sqrt{2}$

⋆ L'égalité $2xy = -20$ nous assure que x et y sont de signe contraire d'où nous obtenons commes racine : $\omega = 5\sqrt{2} - i\sqrt{2} = \sqrt{2}(5-i)$

⊴ les racines de l'équation sont donc :

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{6-4i+\left(5\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)}{2(1-i)} = \dfrac{\left(6-4i+\left(5\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)\right)(1+i)}{4} = \dfrac{\left(5+2\sqrt{2}\right)+i\left(1+3\sqrt{2}\right)}{2} \\ z_2 = \dfrac{6-4i-\sqrt{2}(5-i)}{2(1-i)} = \dfrac{\left(6-4i-\sqrt{2}(5-i)\right)(1+i)}{4} = \dfrac{\left(5-3\sqrt{2}\right)+i\left(1-2\sqrt{2}\right)}{2} \end{cases}$$

5. $z^4 + z^2 + 1 = 0$

Première remarque : c'est que $z^4 + z^2 + 1$ est un polynôme à coefficients réels, et que si z_0 en est la racine, il en est de même de $\overline{z_0}$

⊴ Faisons le changement de variables $Z = z^2$; l'équation devient $Z^2+Z+1 = 0$ dont les solutions sont $Z_1 = j$ et $Z_2 = j^2 = \overline{j}$

⊴ Il s'agit, maintenant, de résoudre les équations $z^2 = j$ et $z^2 = \overline{j}$

⋆ Résolvons $z^2 = j$

Posons $z = x+iy$; alors $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ et donc, nous avons le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = & \dfrac{-1}{2} \\ x^2 + y^2 = & 1 \\ 2xy = & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

D'où $2x^2 = \dfrac{-1}{2}$ et donc $x^2 = \dfrac{1}{4}$ et $x = \pm\dfrac{1}{2}$. De même, $y^2 = \dfrac{3}{4}$ et $y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

De $2xy > 0$, nous tirons $z = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z = \dfrac{-1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

⋆ Résolvons maintenant $z^2 = \overline{j}$

Posons $z = x+iy$; alors $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ et donc, nous avons le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = & \dfrac{-1}{2} \\ x^2 + y^2 = & 1 \\ 2xy = & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

D'où $2x^2 = \dfrac{-1}{2}$ et donc $x^2 = \dfrac{1}{4}$ et $x = \pm\dfrac{1}{2}$. De même, $y^2 = \dfrac{3}{4}$ et $y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

De $2xy < 0$, nous tirons $z = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z = \dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\trianglelefteq$ Les racines de $z^4 + z^2 + 1$ sont donc :

$$z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad z_2 = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad z_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad z_4 = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

On peut remarquer que $z_3 = \overline{z_1}$ et que $z_4 = \overline{z_2}$
Nous avons alors la factorisation $z^4 + z^2 + 1 = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$

Une question complémentaire aurait pu être : factoriser $z^4 + z^2 + 1$ en 2 polynômes du second degré

6. $iz^3 + (1-2i)z^2 - (1+i)z - 2(1-i) = 0$ *sachant qu'elle admet une racine réelle*

Soit x_0 la racine réelle de l'équation $iz^3 + (1-2i)z^2 - (1+i)z - 2(1-i) = 0$; alors, nous avons :

$$ix_0^3 + (1-2i)x_0^2 - (1+i)x_0 - 2(1-i) = 0 \Longleftrightarrow \left(x_0^2 - x_0 - 2\right) + i\left(x_0^3 - 2x_0^2 - x_0 + 2\right) = 0$$

Pour qu'un nombre complexe soit nul, il faut et il suffit que la parie réelle soit nulle et que la partie imaginaire soit nulle. Nous avons alors le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0^2 - x_0 - 2 = 0 \\ x_0^3 - 2x_0^2 - x_0 + 2 = 0 \end{array} \right.$$

Il est assez facile de résoudre l'équation du second degré $x_0^2 - x_0 - 2 = 0$ qui a pour soutions $x_0 = 2$ ou $x_0 = -1$. Il faut maintenant que ces solutions soient aussi solutions de l'équation $x_0^3 - 2x_0^2 - x_0 + 2 = 0$
On vérifie, facilement, que ces 2 réels annulent $x_0^3 - 2x_0^2 - x_0 + 2$ et donc que le polynôme $iz^3 + (1-2i)z^2 - (1+i)z - 2(1-i)$ admet en fait 2 racines réelles et qu'il se factorise se factorise par le polynôme $z^2 - z - 2$. Il faut donc trouver $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que

$$iz^3 + (1-2i)z^2 - (1+i)z - 2(1-i) = \left(z^2 - z - 2\right)(az + b)$$

On trouve facilement que $a = i$ et que $b = 1 - i$, et nous avons :

$$iz^3 + (1-2i)z^2 - (1+i)z - 2(1-i) = \left(z^2 - z - 2\right)(iz + 1 - i)$$

Les racines de ce polynômes sont donc : $z_1 = 2$, $z_2 = -1$ et $z_3 = -(1+i)$

Exercice 11 :

Mettre sous forme trigonométrique les complexes suivants :

1. $z_1 = 1 + i$

Nous avons $|z_1| = \sqrt{2}$ et donc $z_1 = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Nous avons donc $\cos(\arg z) = \sin(\arg z) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ D'où $\arg z \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$

La forme trigonométrique de z_1 est donc : $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

2. $z_2 = -1 - i$

Nous avons $|z_2| = \sqrt{2}$ et donc $z_2 = \sqrt{2}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

Nous avons donc $\cos(\arg z) = \sin(\arg z) = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$ D'où $\arg z \equiv \dfrac{5\pi}{4}\ [2\pi]$

La forme trigonométrique de z_2 est donc : $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)\right)$

3. $z_3 = \sin\theta + i\cos\theta$

   Il n'y a pas de souci, ici : $|z_3| = 1$.....Mais, rien n'est simple!! Sauf que, si vous connaissez bien les formules trigonométriques, vous avez : $\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ et $\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$.

   Donc, $z_3 = \sin\theta + i\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ qui est la forme trigonométrique de z_3

4. $z_4 = \dfrac{-\sqrt{2}}{1+i}$

   Tout d'abord, $|z_4| = \dfrac{\sqrt{2}}{|1+i|} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$

   D'autre part, $z_4 = \dfrac{-\sqrt{2}}{1+i} = \dfrac{-\sqrt{2}\,(1-i)}{2} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Et doonc, $z_4 = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

   Nous avons donc $\cos(\arg z) = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\arg z) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ D'où $\arg z \equiv \dfrac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

   La forme trigonométrique de z_4 est donc : $z_4 = \cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$

5. $z_5 = \dfrac{3}{1-i}$

   Nous avons $z_5 = \dfrac{3}{1-i} = \dfrac{3\,(1+i)}{2} = \dfrac{3}{2} \times \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{3}{\sqrt{2}} \times \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

   Nous avons donc $\cos(\arg z) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\arg z) = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$ D'où $\arg z \equiv \dfrac{7\pi}{4}\ [2\pi]$

   La forme trigonométrique de z_5 est donc : $z_5 = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\dfrac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)\right)$

Exercice 12 :

1. *A tout élément $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, nous associons la matrice $M(x,y) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :*

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} x & -y \\ 2y & x-2y \end{pmatrix}$$

   On appelle $\mathfrak{M}(2,-2)$ l'ensemble des matrices $M(x,y)$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

   (a) *Démontrer que $\mathfrak{M}(2,-2)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En donner une base simple et préciser sa dimension*

   Cette question est d'un classique confondant.

   ▷ Premièrement, $\mathfrak{M}(2,-2) \neq \emptyset$

   En effet, $M(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{O}_2$, la matrice nulle est dans $\mathfrak{M}(2,-2)$

   ▷ En second lieu, $\mathfrak{M}(2,-2)$ est stable par combinaison linéaire

   Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $M(x,y) \in \mathfrak{M}(2,-2)$ et $M(x_1,y_1) \in \mathfrak{M}(2,-2)$. Alors :

$$\begin{aligned}
\lambda M(x,y) + \mu M(x_1,y_1) &= \lambda \begin{pmatrix} x & -y \\ 2y & x-2y \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ 2y_1 & x_1-2y_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda x + \mu x_1 & -\lambda y - \mu y_1 \\ 2\lambda y + 2\mu y_1 & \lambda x - 2\lambda y + \mu x_1 - 2\mu y_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda x + \mu x_1 & -\lambda y - \mu y_1 \\ 2(\lambda y + \mu y_1) & (\lambda x + \mu x_1) - 2(\lambda y - \mu y_1) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

   La matrice $\lambda M(x,y) + \mu M(x_1,y_1)$ est bien du type $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ 2\beta & \alpha - 2\beta \end{pmatrix}$ avec $\alpha = \lambda x + \mu x_1$ et $\beta = \lambda y + \mu y_1$.

   Donc $\lambda M(x,y) + \mu M(x_1,y_1) \in \mathfrak{M}(2,-2)$ et $\mathfrak{M}(2,-2)$ est donc stable par combinaison linéaire.

Ainsi, $\mathfrak{M}(2,-2)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

- Nous avons $M(x,y) = \begin{pmatrix} x & -y \\ 2y & x-2y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

  On vient de montrer que la famille de matrices $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\right\}$ est une famille génératrice de $\mathfrak{M}(2,-2)$
- Est ce que la famille $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\right\}$ est une famille libre de $\mathfrak{M}(2,-2)$?

  Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que $x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \mathcal{O}_2$; alors $x = 0$ et $y = 0$; c'est donc une famille libre de $\mathfrak{M}(2,-2)$
- La famille $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\right\}$ est donc une base de $\mathfrak{M}(2,-2)$.

Ainsi $\dim \mathfrak{M}(2,-2) = 2$

(b) *Démontrer que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathfrak{M}(2,-2)$ est isomorphe à $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$*

L'endomorphisme Φ à créer entre $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et $\mathfrak{M}(2,-2)$ est facile à faire :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathfrak{M}(2,-2) \\ (x,y) & \longmapsto & \Phi[(x,y)] = M(x,y) \end{array}\right.$$

On montre très facilement que Φ est linéaire et que $\ker\Phi = \{\mathcal{O}_2\}$. Φ est donc un isomorphisme entre $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et $\mathfrak{M}(2,-2)$.

$\mathfrak{M}(2,-2)$ est donc isomorphe à $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

(c) *Démontrer que, muni de l'addition et de la multiplication des matrices, $\mathfrak{M}(2,-2)$ a une structure de corps commutatif*

- La multiplication des matrices est distributive par rapport à l'addition des matrices ; elle le sera, en particulier dans $\mathfrak{M}(2,-2)$
- On sait déjà que $(\mathfrak{M}(2,-2),+)$ est un groupe abélien
- Démontrons que $(\mathfrak{M}(2,-2)\setminus\{\mathcal{O}_2\},\times)$ est aussi un groupe abélien
  - ⋆ Tout d'abord, $\mathrm{Id}_2 = M(1,0) \in \mathfrak{M}(2,-2)$, et donc $\mathfrak{M}(2,-2) \neq \emptyset$
  - ⋆ Est-ce que $M(x,y) \in \mathfrak{M}(2,-2)\setminus\{\mathcal{O}_2\}$ est une matrice inversible ?

    Il faut, pour cela, calculer $\det M(x,y)$ et démontrer qu'il est non nul. Or,

    $$\det M(x,y) = x(x-2y) + 2y^2 = x^2 - 2xy + y^2 + y^2 = (x-y)^2 + y^2$$

    Ainsi,

    $$\det M(x,y) = 0 \Longleftrightarrow (x-y)^2 + y^2 = 0 \Longleftrightarrow (x-y)^2 = y^2 = 0 \Longleftrightarrow y = 0 \text{ et } x = 0$$

    Donc, toute matrice $M(x,y) \in \mathfrak{M}(2,-2)\setminus\{\mathcal{O}_2\}$ est inversible.

    Par calcul, nous avons : $[M(x,y)]^{-1} = \dfrac{1}{\det M(x,y)} M(x-2y,-y)$
  - ⋆ La multiplication des matrices est interne

    Toujours par calcul, nous démontrons que $M(x,y)\times M(x_1,y_1) = M(xx_1 - 2yy_1, yx_1 + y_1x - 2yy_1)$ et que ce résultat montre que la multiplication est commutative.

  $\mathfrak{M}(2,-2)$ a donc une structure de corps commutatif

(d) *Trouver un élément $A \in \mathfrak{M}(2,-2)$ tel que $A^2 = -\mathrm{Id}_2$*

Il faut donc trouver $A = M(x,y)$ telle que $A^2 = -\mathrm{Id}_2 = M(-1,0)$. Or,

$$A^2 = M(x,y)\times M(x,y) = M\left(x^2 - 2y^2, 2xy - 2y^2\right)$$

Nous devons donc résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rl} x^2 - 2y^2 = & -1 \\ 2xy - 2y^2 = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x^2 - 2y^2 = & -1 \\ xy - y^2 = & 0 \end{array}\right.$$

- ▷ Si $y = 0$, alors, $x^2 = -1$, ce qui est impossible
- ▷ Supposons $y \neq 0$, alors, l'équation $xy = y^2$ nous donne $x = y$, et dans la première équation, nous obtenons $x^2 = 1$ et donc $x = \pm 1$.
  Nous obtenons alors 2 matrices solutions $M(1,1)$ et $M(-1,-1) = -M(1,1)$.
  Il existe donc deux matrices $A \in \mathfrak{M}(2,-2)$ tel que $A^2 = -\mathrm{Id}_2$, l'une étant l'opposée de l'autre.

2. *Pour $p \in \mathbb{R}^*$ et $q \in \mathbb{R}^*$ fixés, on considère cette fois ci, l'ensemble $\mathfrak{M}(p,q)$ des matrices $M(a,b) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définies par :*

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ qb & a+pb \end{pmatrix} \text{ avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}$$

(a) *Démontrer que $\mathfrak{M}(p,q)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En donner une base simple et préciser sa dimension*

- ▷ Premièrement $\mathfrak{M}(p,q) \neq \emptyset$ puisque $\mathcal{O}_2 = M(0,0)$ est un élépent de $\mathfrak{M}(p,q)$
- ▷ Montrons que $\mathfrak{M}(p,q)$ est stable par combinaison linéaire.
  Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $M(a,b) \in \mathfrak{M}(p,q)$ et $M(a_1,b_1) \in \mathfrak{M}(p,q)$. Alors :

$$\begin{aligned}
\lambda M(a,b) + \mu M(a_1,b_1) &= \lambda \begin{pmatrix} a & -b \\ qb & a+pb \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ qb_1 & a_1+pb_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda a + \mu a_1 & -\lambda b - \mu b_1 \\ q\lambda b + q\mu b_1 & \lambda a + p\lambda b + \mu a_1 + p\mu y_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda a + \mu a_1 & -\lambda b - \mu b_1 \\ q(\lambda b + \mu b_1) & (\lambda a + \mu a_1) + p(\lambda b - \mu b_1) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

  La matrice $\lambda M(a,b) + \mu M(a_1,b_1)$ est bien du type $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ q\beta & \alpha + p\beta \end{pmatrix}$ avec $\alpha = \lambda a + \mu a_1$ et $\beta = \lambda b + \mu b_1$.
  Donc $\lambda M(a,b) + \mu M(a_1,b_1) \in \mathfrak{M}(p,q)$ et $\mathfrak{M}(p,q)$ est donc stable par combinaison linéaire.
- ▷

Ainsi, $\mathfrak{M}(p,q)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

- ▷ Toute matrice $M(a,b) \in \mathfrak{M}(p,q)$ peut s'écire :

$$M(a,b) = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q & p \end{pmatrix}$$

  Ainsi, la famille de matrices $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q & p \end{pmatrix} \right\}$ est-elle une famille génératrice de $\mathfrak{M}(p,q)$
- ▷ On démontre facilement que $M(a,b) = \mathcal{O}_2$ si et seulement si $a = b = 0$ et donc, la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q & p \end{pmatrix} \right\}$ est une famille libre qui forme une base de $\mathfrak{M}(p,q)$
- ▷ Donc $\dim \mathfrak{M}(p,q) = 2$

(b) *Démontrer que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathfrak{M}(p,q)$ est isomorphe à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$*

L'endomorphisme Φ à créer entre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $\mathfrak{M}(2,-2)$ est tout aussi facile à faire :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathfrak{M}(p,q) \\ (a,b) & \longmapsto & \Phi[(a,b)] = M(a,b) \end{array} \right.$$

On montre très facilement que Φ est linéaire et que $\ker \Phi = \{\mathcal{O}_2\}$. Φ est donc un isomorphisme entre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $\mathfrak{M}(p,q)$.
$\mathfrak{M}(p,q)$ est donc isomorphe à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

(c) *Démontrer que, muni de l'addition et de la multiplication des matrices, $\mathfrak{M}(p,q)$ est un anneau commutatif et unitaire*

- ▷ On sait déjà que la multiplication des matrices est distributive par rapport à l'addition des matrices
- ▷ On sait aussi que $(\mathfrak{M}(p,q),+)$ est un groupe abélien
- ▷ Il faut maintenant montrer que la multiplication des matrices dans $\mathfrak{M}(p,q)$ est interne, commutative et admet une unité
  - ⋆ Nous avons $M(1,0) = \mathrm{Id}_2 \in \mathfrak{M}(p,q)$; la multiplication des matrices admet donc un neutre dans $\mathfrak{M}(p,q)$
  - ⋆ Montrons qu'elle est interne
    Tous calculs effectués, nous avons : $M(a,b)\times M(a_1,b_1) = M(aa_1 - qbb_1, ba_1 + b_1a + pbb_1)$
    Ces calculs montrent que la multiplication est interne et commutative

$\mathfrak{M}(p,q)$ est donc un anneau commutatif et unitaire

(d) *Démontrer que si $p^2 - 4q < 0$, alors $\mathfrak{M}(p,q)$ a une structure de corps*

Il suffit d'étudier les cas *(en fait les valeurs de p et q)* où toutes les matrices de $\mathfrak{M}(p,q)\setminus\{\mathcal{O}_2\}$ sont inversibles.
Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Or :

$$\det M(a,b) = \begin{vmatrix} a & -b \\ qb & a+pb \end{vmatrix} = a^2 + pba + qb^2$$

La symétrie en a et b est remarquable. Appelons $P_b(a)$ le ploynôme du second degré $P_b(a) = a^2 + pba + qb^2$ et cherchons les valeurs qui annulent ce polynôme.
Traditionnellement, le discriminant est $\Delta = p^2b^2 - 4qb^2 = b^2\left(p^2 - 4q\right)$. Δ est du signe de $p^2 - 4q$. Ainsi,

- ▷ Si $p^2 - 4q < 0$, il n'y a aucune racine et donc si $M(a,b) \in \mathfrak{M}(p,q)\setminus\{\mathcal{O}_2\}$ alors $\det M(a,b) \neq 0$ et toutes les matrices de $\mathfrak{M}(p,q)\setminus\{\mathcal{O}_2\}$ sont inversibles et $\mathfrak{M}(p,q)$ a une structure de corps
- ▷ Si $p^2 - 4q = 0$, il existe une racine double $a = -\dfrac{pb}{2}$ et donc les matrices $M\left(-\dfrac{pb}{2}, b\right) = bM\left(-\dfrac{p}{2}, 1\right)$ ne sont pas inversibles et, sous l'hypothèse $p^2 - 4q = 0$ $\mathfrak{M}(p,q)$ n'est pas un corps [3]
- ▷ Si $p^2 - 4q > 0$, le raisonnement est le même puisque le polynôme P_b a deux racines.

Ainsi, si $p^2 - 4q < 0$, alors $\mathfrak{M}(p,q)$ a une structure de corps

Exercice 13 :

Mettre sous la forme $a+bi$ le nombre complexe $\dfrac{3+i}{3-i} + \dfrac{2+i}{2-i}$

En fait, il faut mettre sous forme algébrique un nombre de la forme $z = \dfrac{a}{\overline{a}} + \dfrac{b}{\overline{b}}$
Nous avons donc :

$$z = \frac{a}{\overline{a}} + \frac{b}{\overline{b}} = \frac{a^2}{|a|^2} + \frac{b^2}{|b|^2} = \frac{a^2|b|^2 + b^2|a|^2}{|a|^2|b|^2} = \frac{ab\left(a\overline{b} + b\overline{a}\right)}{|a|^2|b|^2}$$

Nous avons $\dfrac{\left(a\overline{b} + b\overline{a}\right)}{|a|^2|b|^2} \in \mathbb{R}$; le reste découle d'un calcul
Nous avons donc : $\dfrac{3+i}{3-i} + \dfrac{2+i}{2-i} = \dfrac{7}{25}(7+5i)$

Exercice 14 :

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression $(1+i)^n + (1-i)^n$ est un nombre réel, alors que l'expression $(1+i)^n - (1-i)^n$ est un imaginaire pur

Nous avons, si $z = x + iy$, alors $z + \overline{z}$ réel et $z - \overline{z}$ imaginaire pur.
Soit $u = 1 + i$, alors $\overline{u} = 1 - i$ et $\overline{u^n} = \overline{(1+i)^n}$. Or, $\overline{u^n} = \overline{u}^n$ et donc $\overline{(1+i)^n} = (1-i)^n$, de telle sorte que :

3. L'ensemble des matrices non inversibles de $\mathfrak{M}\left(2\sqrt{q}, q\right)$ ou $\mathfrak{M}\left(-2\sqrt{q}, q\right)$, avec $q > 0$, forme un sous-espace vectoriel de dimension 1

▷ $(1+i)^n + (1-i)^n = u^n + \overline{u^n}$ et donc $(1+i)^n + (1-i)^n$ est un nombre réel
▷ $(1+i)^n - (1-i)^n = u^n - \overline{u^n}$ et donc $(1+i)^n - (1-i)^n$ est un imaginaire pur

Exercice 15 :

p et q étant 2 nombres complexes tel que $|p| \neq 1$, résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z définie par : $z = p\overline{z} + q$

De l'égalité $z = p\overline{z} + q$, nous tirons $\overline{z} = \overline{p}z + \overline{q}$, et donc :

$$z = p\overline{z} + q \Longleftrightarrow z = p\left(\overline{p}z + \overline{q}\right) + q \Longleftrightarrow z = |p|^2 z + p\overline{q} + q$$

D'où, nous tirons $z = \dfrac{p\overline{q} + q}{1 - |p|^2}$

Il est clair que si $|p| = 1$, il n'y a pas de solutions

Exercice 16 :

Trouver les nombres complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que $\dfrac{1+z}{z}$ soit réel

Si nous appelons $Z = \dfrac{1+z}{z}$, nous avons $Z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $Z = \overline{Z}$

$\overline{Z} = \dfrac{1+\overline{z}}{\overline{z}}$ et nous avons

$$Z = \overline{Z} \Longleftrightarrow \frac{1+z}{z} = \frac{1+\overline{z}}{\overline{z}} \Longleftrightarrow \overline{z} + |z|^2 = z + |z|^2 \Longleftrightarrow z = \overline{z}$$

Ainsi, pour que $\dfrac{1+z}{z}$ soit réel, il faut et il suffit que $z \in \mathbb{R}^*$

Exercice 17 :

Dans l'ensemble des nombres complexes, on pose $z_0 = \dfrac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}$

1. *Exprimer z_0 sous la forme $a+ib$ où a et b sont des réels*

   Classiquement

$$z_0 = \frac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}} = z_0 = \frac{\left(5+3i\sqrt{3}\right)\left(1+2i\sqrt{3}\right)}{13} = \frac{-13+13i\sqrt{3}}{13} = -1+i\sqrt{3}$$

2. *Calculer z_0^2 et z_0^3 puis, z_0^{15}*

   ▷ Il y a plusieurs façons de calculer z_0^2 : de manière algébrique ou en utilisant la forme trigonométrique

   ⋆ Trivialement, $z_0^2 = \left(-1+i\sqrt{3}\right)^2 = -2-2i\sqrt{3} = -2\left(1+i\sqrt{3}\right)$

   ⋆ En utilisant la forme trigonométrique. Nous avons $|z_0| = \sqrt{1+3} = 2$ et donc

$$z_0 = 2\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2j$$

   Où j est la racine cubique de -1 d'où $z_0^2 = 2^2 j^2 = 4\overline{j}$

   ▷ Le calcul de z_0^3 est donc évident : $z_0^3 = 2^3 j^3 = 8$

   ▷ Et $z_0^{15} = \left(z_0^3\right)^5 = 8^5$

3. *Montrer que pour tout entier naturel n : $z_0^{3n+2} = -2^{3n+1}(1+i\sqrt{3})$*

   Nous avons, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$z_0^{3n+2} = z_0^{3n} \times z_0^2 = \left(z_0^3\right)^n \times (2j)^2 = \left(2^3\right)^n \times \left(2^2\overline{j}\right) = 2^{3n+2}\overline{j} = 2^{3n+2}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2^{3n+1}\left(1+i\sqrt{3}\right)$$

4. *Application : calculer z_0^{20}*

   Nous avons $20 = 3 \times 6 + 2$; il suffit donc de remplacer, dans la question précédente n par 6, et nous trouvons :
$$z_0^{20} = -2^{19}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$$

Exercice 18 :

1. *Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante :$z^2 + 2z + 4 = 0$*

   Première remarque : ce coefficent étant à coefficients réels, s'il existe des racines complexes, elles seront forcément conjuguées.
   On calcule donc le discriminant $\Delta = 4 - 4 \times 4 = -12 = 4 \times 3 \times i^2$
   La première racine est donc $z_1 = \dfrac{-2 + 2i\sqrt{3}}{2} = -1 + i\sqrt{3}$ et la seconce $z_2 = \overline{z_1}$
2. *On note z_A et z_B les deux racines de cette équation, z_A étant la racine dont la partie imaginaire est positive, et z_B l'autre ; calculer $|z_A|$ et $|z_B|$*

   Nous avons donc $z_A = -1 + i\sqrt{3}$ et, clairement, $|z_A| = 2$, et comme $z_B = \overline{z_A}$, nous avons $|z_B| = |z_A| = 2$
3. *Le plan est repéré par un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Nous appelons A, le point d'affixe z_A, B le point d'affixe z_B et C le point d'affixe $z_C = 2$. Calculer $|z_A - z_B|$, $|z_B - z_C|$, $|z_C - z_A|$. En déduire la nature du triangle ABC*

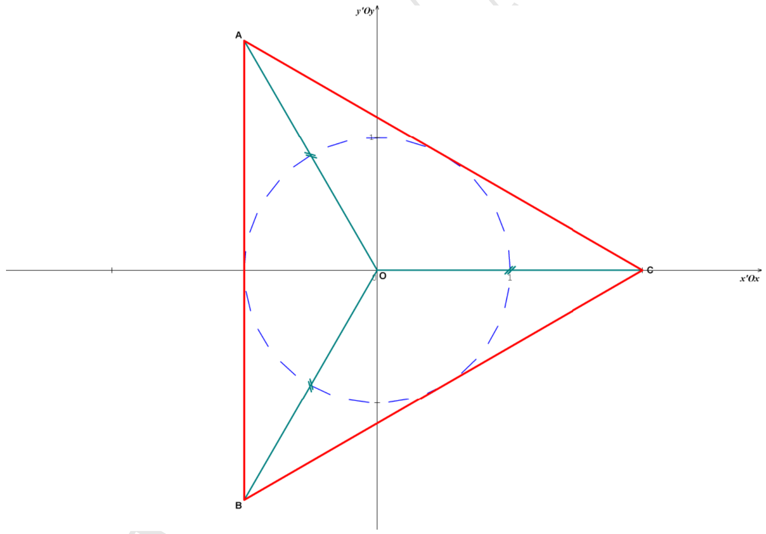


FIGURE 9.12 – Les images des affixes z_A, z_B et z_C

   Nous avons $z_A - z_B = -1 + i\sqrt{3} - \left(-1 - i\sqrt{3}\right) = 2i\sqrt{3}$ et donc $|z_A - z_B| = 2\sqrt{3}$.
   De même, $z_B - z_C = -1 - i\sqrt{3} - 2 = -3 - i\sqrt{3}$ et $|z_B - z_C| = \sqrt{(-3)^2 + 3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
   Et, pour terminer $z_C - z_A = 2 - \left(-1 + i\sqrt{3}\right) = 3 - i\sqrt{3}$, et, bien évidemment, $|z_C - z_A| = 2\sqrt{3}$
   L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$ et $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB = |z_B - z_A| = 2\sqrt{3}$. De la même manière, $AC = |z_C - z_A| = 2\sqrt{3}$ et $BC = |z_C - z_B| = 2\sqrt{3}$.
   Nous avons $AB = AC = BC$ et le triangle ABC est équilatéral

Exercice 22 :

Déterminer les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $x^2 - 6(1 - i)x - 12i = 0$ Montrer que les images des solutions de cette équation dans le plan complexe sont alignées avec l'origine

1. Résolution de l'équation $x^2 - 6(1-i)x - 12i = 0$
   Nous commençons par calculer le discriminant Δ

$$\Delta = 36(1-i)^2 - 4 \times -12i = 36(1-1-2i) + 48i = -24i$$

   ⋆ Recherchons les racines carrée de Δ
   Soit $\omega = x + iy$ une telle racine. Alors, $\Delta = \omega^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = -24i$ et $|\Delta| = |\omega^2| = x^2 + y^2 = 24$. Nous avons alors le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = & 0 \\ 2xy = & -24 \\ x^2 + y^2 = & 24 \end{cases}$$

   D'où nous tirons $x = \pm 2\sqrt{3}$ et $y = \pm 2\sqrt{3}$. De l'équation $2xy = -24$, on tire que x et y sont de signe contraire. D'où $\omega = 2\sqrt{3} - 2i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}(1-i)$
   ⋆ Les racines de l'équation sont donc données par

$$x_1 = \frac{6(1-i) + 2\sqrt{3}(1-i)}{2} = 3(1-i) + \sqrt{3}(1-i) = (1-i)\left(3+\sqrt{3}\right)$$

   et$x_2 = (1-i)\left(3-\sqrt{3}\right)$

2. On montre que les images des solutions de cette équation dans le plan complexe sont alignées avec l'origine
   Soit A le point d'affixe $x_1 = (1-i)\left(3+\sqrt{3}\right)$ et B le point d'affixe $x_2 = (1-i)\left(3-\sqrt{3}\right)$. Il faut montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{OB} = \lambda\overrightarrow{OA}$, et en passant aux affixes, montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x_2 = \lambda x_1$. Or, $\dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{\left(3-\sqrt{3}\right)}{\left(3+\sqrt{3}\right)} = 2 - \sqrt{3}$
   Les points O, A et B sont alignés

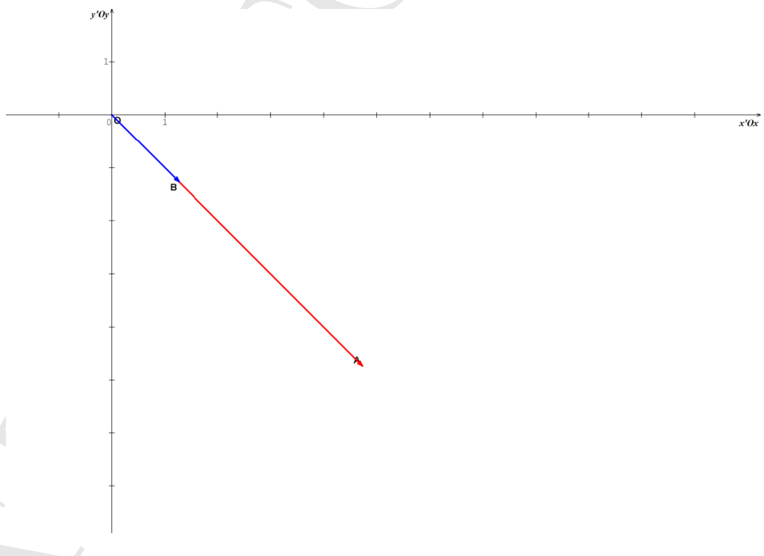


FIGURE 9.13 –

Exercice 23 :

Trouver l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\dfrac{z+2i}{z-4i} \in \mathbb{R}$

Il faut donc trouver les $z \in \mathbb{C}$ tels que $\overline{\dfrac{z+2i}{z-4i}} = \dfrac{z+2i}{z-4i}$

Or, $\overline{\dfrac{z+2i}{z-4i}}=\dfrac{\overline{z}-2i}{\overline{z}+4i}$, et donc

$$\overline{\frac{z+2i}{z-4i}}=\frac{z+2i}{z-4i}\iff\frac{z+2i}{z-4i}=\frac{\overline{z}-2i}{\overline{z}+4i}$$

Et nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{z+2i}{z-4i}=\frac{\overline{z}-2i}{\overline{z}+4i} &\iff (z+2i)\left(\overline{z}+4i\right)=\left(\overline{z}-2i\right)(z-4i)\\
&\iff |z|^2+4iz+2i\overline{z}-8=|z|^2-4i\overline{z}-2iz-8\\
&\iff 4iz+2i\overline{z}=-4i\overline{z}-2iz\\
&\iff 2z+\overline{z}=-2\overline{z}-z\\
&\iff 3z+3\overline{z}=0\\
&\iff \overline{z}=-z
\end{aligned}$$

z est donc imaginaire pur.
Ainsi, l'ensemble des $z\in\mathbb{C}$ tels que $\dfrac{z+2i}{z-4i}\in\mathbb{R}$ est l'ensemble des imaginaires purs.

Exercice 25 :

Montrer que si $\lambda\in\mathbb{R}$ alors $\left|\dfrac{1+\lambda i}{1-\lambda i}\right|=1$.Etudier la réciproque

Il est parfaitement clair que si $\lambda\in\mathbb{R}$ alors $\left|\dfrac{1+\lambda i}{1-\lambda i}\right|=\left|\dfrac{u}{\overline{u}}\right|=1$

Réciproquement, soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $\left|\dfrac{1+zi}{1-zi}\right|=1$. Alors :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1+zi}{1-zi}\right|=1 &\iff \left(\frac{1+zi}{1-zi}\right)\overline{\left(\frac{1+zi}{1-zi}\right)}=1\\
&\iff \left(\frac{1+zi}{1-zi}\right)\left(\frac{\overline{1+zi}}{\overline{1-zi}}\right)=1\\
&\iff \left(\frac{1+zi}{1-zi}\right)\left(\frac{1+\overline{zi}}{1-\overline{zi}}\right)=1\\
&\iff \left(\frac{1+zi}{1-zi}\right)\left(\frac{1+\overline{z}\,\overline{i}}{1-\overline{z}\,\overline{i}}\right)=1\\
&\iff \left(\frac{1+zi}{1-zi}\right)\left(\frac{1-i\overline{z}}{1+i\overline{z}}\right)=1\\
&\iff \frac{(1+zi)\left(1-i\overline{z}\right)}{(1-zi)\left(1+i\overline{z}\right)}=1\\
&\iff (1+zi)\left(1-i\overline{z}\right)=(1-zi)\left(1+i\overline{z}\right)\\
&\iff 1-i\overline{z}+iz+|z|^2=1+i\overline{z}-iz+|z|^2\\
&\iff z=\overline{z}
\end{aligned}$$

Et donc $z\in\mathbb{R}$. Nous pouvons donc écrire que $\left|\dfrac{1+\lambda i}{1-\lambda i}\right|=1$ si et seulement si $\lambda\in\mathbb{R}$

Exercice 26 :

1. *Déterminer le module et l'argument de $z_1=\sqrt{3}+i$, $z_2=1-i$ et $z_3=\dfrac{z_1}{z_2}$. En déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$*

   ▷ Si $z_1=\sqrt{3}+i$, nous avons $|z_1|=\sqrt{3+1}=2$ d'où $z_1=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}\right)$

   Il faut trouver $\theta\in[0;2\pi[$ tel que $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$, et on trouve $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ *(modulo 2π)*

   Nous avons donc $z_1=2e^{\frac{i\pi}{6}}$

▷ Si $z_2 = 1 - i$, nous avons $|z_2| = \sqrt{2}$ d'où $z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Il faut trouver $\theta \in [0; 2\pi[$ tel que $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, et on trouve $\theta = -\frac{\pi}{4}$ *(modulo 2π)*

Nous avons donc $z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}}$

▷ Nous avons $z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{\frac{i\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{6}+\frac{i\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{12}}$, c'est à dire que $z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$

▷ Nous avons aussi

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3}+i}{1-i} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} + i\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)\right)$$

▷ De là, nous déduisons que $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$. $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}$ et des formules de trigonométrie *(qui sont, en fait, des formules de symétrie)*$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ et $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Ainsi, $\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) = \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

De même, $\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) = \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

2. *En exprimant de 2 manières différentes les racines carrées de $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$, calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$*

Si l'énoncé dit : « de deux manières », ceci sous-entend avec la méthode algébrique et la méthode trigonométrique.

▷ Tout d'abord, $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, et il est connu que $1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$; ainsi, $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} = e^{\frac{i\pi}{4}}$

▷ De telle sorte qu'une racine carrée de $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ est $\omega_1 = e^{\frac{i\pi}{8}}$, et l'autre, $\omega_2 = -\omega_1 = -e^{\frac{i\pi}{8}} = e^{\frac{i\pi}{8}+i\pi} = e^{\frac{9i\pi}{8}}$

▷ La méthode algébrique consiste à prendre $\omega = x + iy$ une racine carrée de $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$. Nous avons alors le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = & \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2xy = & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x^2 + y^2 = & 1 \end{cases}$$

En additionnant, nous obtenons : $2x^2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \iff x^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ d'où

$$x = \pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

De même, nous obtenons : $2y^2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \iff y^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ d'où $y = \pm\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

De l'égalité $2xy = \frac{\sqrt{2}}{2}$, nous voyons que x et y sont de même signe. Nous obtenons donc 2 racines :

⋆ Une première racine $\omega_1 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

⋆ Et une seconde racoine $\omega_2 = -\omega_1$

▷ De là, nous tirons que $\cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Exercice 27 :

Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 1 + i\tan(\theta)$ *avec* $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

   Nous avons $|z_1|^2 = |1+i\tan(\theta)|^2 = 1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ et donc $|z_1| = \dfrac{1}{\cos\theta}$ *(nous avons* $\cos\theta > 0$ *puisque* $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$*)*

   Donc $z_1 = \dfrac{1}{\cos\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)$

   C'est la forme trigonométrique de z_1

2. $z_2 = \dfrac{1+\cos\theta + i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta}$ *avec* $\theta \neq 2k\pi$

   On tente de mettre z_2 sous forme algébrique :

$$z_2 = \frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta} = \frac{[1+\cos\theta+i\sin\theta]}{[1-\cos\theta+i\sin\theta]} \times \frac{[1-\cos\theta-i\sin\theta]}{[1-\cos\theta-i\sin\theta]}$$

   Appelons $N(\theta) = [1+\cos\theta+i\sin\theta]\times[1-\cos\theta-i\sin\theta]$ et $D(\theta) = [1-\cos\theta+i\sin\theta]\times[1-\cos\theta-i\sin\theta]$

   ▷ Calculons $D(\theta)$

$$\begin{aligned} D(\theta) = &\ [1-\cos\theta+i\sin\theta]\times[1-\cos\theta-i\sin\theta] \\ = &\ (1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta \\ = &\ 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta \\ = &\ 2 - 2\cos\theta \\ = &\ 2(1-\cos\theta) \end{aligned}$$

   Des formules trigonométriques *(arc double ou arc moitié)* :

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

   nous tirons $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$ et donc $1 - \cos\theta = 2\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

   D'où $D(\theta) = 4\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

   ▷ Calculons $N(\theta)$

$$\begin{aligned} N(\theta) = &\ [1+\cos\theta+i\sin\theta]\times[1-\cos\theta-i\sin\theta] \\ = &\ (1+\cos\theta)(1-\cos\theta) - i\sin\theta(1+\cos\theta) + i\sin\theta(1-\cos\theta) + \sin^2\theta \\ = &\ 1 - \cos^2\theta - i\sin\theta - i\sin\theta\cos\theta + i\sin\theta - i\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta \\ = &\ 2\sin^2\theta - 2i\sin\theta\cos\theta \\ = &\ 2\sin\theta(\sin\theta - i\cos\theta) \end{aligned}$$

   Donc, $N(\theta) = 2\sin\theta(\sin\theta - i\cos\theta)$

   Des formules trigonométriques $\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos\theta$ et $\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\theta$, nous tirons $N(\theta) = 2\sin\theta\left(\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

   D'où $z_2 = \dfrac{N(\theta)}{D(\theta)} = \dfrac{2\sin\theta}{4\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}\left(\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

   De la formule $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, nous obtenons $\sin\theta = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$ et donc $z_3 = \left(\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)\left(e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}\right)$

   ▷ D'où :

⋆ Si $0 < \theta \leqslant \pi$, alors $0 < \frac{\theta}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$ et donc $\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \geqslant 0$ et donc, $|z_2| = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$

La forme trigonométrique de z_2 est donc $z_2 = \left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)\left(e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}\right)$

⋆ Si $\pi < \theta < 2\pi$, alors $\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \pi$ et donc $\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \leqslant 0$. Et nous avons $|z_2| = -\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$

D'où

$$z_2 = -\left|\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right| e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)} = \left|\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right| e^{i\pi}e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)} = \left|\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right| e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$$

Et la forme trigonométrique de z_2 est donc $z_2 = \left|\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right| e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$

⋆ Si $2\pi < \theta \leqslant 3\pi$, alors $\pi < \frac{\theta}{2} \leqslant \frac{3\pi}{2}$ et donc $\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \geqslant 0$, parce que $\cos\frac{\theta}{2} \leqslant 0$ et $\sin\frac{\theta}{2} \leqslant 0$

Nous avons donc $|z_2| = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$

D'où nous obtenons la forme trigonométrique de z_2

$$z_2 = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$$

⋆ Si $3\pi < \theta < 4\pi$, alors $\frac{3\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < 2\pi$ et donc $\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \leqslant 0$. Et nous avons $|z_2| = -\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$

D'où

$$z_2 = -\left|\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right| e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)} = \left|\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right| e^{i\pi}e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)} = \left|\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right| e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$$

Et la forme trigonométrique de z_2 est donc $z_2 = \left|\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right| e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$

3. $z_3 = 1 + \cos\theta + i\sin(\theta)$

Des formules d'arc double *(ou d'arc moitié)*, nous avons :

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Longleftrightarrow 1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$$

Nous avons donc :

$$z_3 = 1 + \cos\theta + i\sin(\theta) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

▷ Si $-\pi \leqslant \theta \leqslant +\pi$ alors $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\theta}{2} \leqslant +\frac{\pi}{2}$ et donc $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \geqslant 0$

D'où la forme trigonométrique de z_3 est $z_3 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$

▷ Si $\pi \leqslant \theta \leqslant 3\pi$ alors $\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\theta}{2} \leqslant \frac{3\pi}{2}$ et donc $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \leqslant 0$ et $|z_3| = -2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $z_3 = -\left|2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| e^{i\pi}e^{i\frac{\theta}{2}}$

D'où la forme trigonométrique de z_3 est $z_3 = 2\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}$

Exercice 28 :

1. *Démontrer que* $(\forall z \in \mathbb{C})(\forall z' \in \mathbb{C})$, $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$

Il suffit d'écrire que $|z+z'|^2 = (z+z')\left(\overline{z}+\overline{z'}\right)$ et $|z-z'|^2 = (z-z')\left(\overline{z}-\overline{z'}\right)$, puis de faire les calculs. Simple donc !*(C'est, en fait, la formule du parallélogramme vue dans le chapitre du produit scalaire)*

2. *Si $u^2 = zz'$ montrer que : $|z| + |z'| = \left|\frac{z+z'}{2} - u\right| + \left|\frac{z+z'}{2} + u\right|$*

   ▷ Dans un premier temps, nous élevons $\left|\frac{z+z'}{2} - u\right| + \left|\frac{z+z'}{2} + u\right|$ au carré.
   Tout d'abord :
   $$\left(\left|\frac{z+z'}{2} - u\right| + \left|\frac{z+z'}{2} + u\right|\right)^2 = \left|\frac{z+z'}{2} - u\right|^2 + \left|\frac{z+z'}{2} + u\right|^2 + 2\left|\frac{z+z'}{2} - u\right|\left|\frac{z+z'}{2} + u\right|$$
   En posant $Z = \frac{z+z'}{2}$, nous avons $\left|\frac{z+z'}{2} - u\right|^2 + \left|\frac{z+z'}{2} + u\right|^2 = |Z-u|^2 + |Z+u|^2$, et d'après la question précédente nous pouvons écrire $|Z-u|^2 + |Z+u|^2 = 2\left(|Z|^2 + |u|^2\right)$, de telle sorte que :
   $$\left|\frac{z+z'}{2} - u\right|^2 + \left|\frac{z+z'}{2} + u\right|^2 + 2\left|\frac{z+z'}{2} - u\right|\left|\frac{z+z'}{2} + u\right| = 2\left(\left|\frac{z+z'}{2}\right|^2 + |u|^2\right) + 2\left|\frac{z+z'}{2} - u\right|\left|\frac{z+z'}{2} + u\right|$$

   ▷ Nous avons :
   - ⋆ $\left|\frac{z+z'}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}|z+z'|^2$
   - ⋆ $|u|^2 = |u^2| = |zz'| = |z|\,|z'|$
   - ⋆ $$\begin{aligned} 2\left|\frac{z+z'}{2} - u\right|\left|\frac{z+z'}{2} + u\right| &= 2\left|\left(\frac{z+z'}{2}\right)^2 - u^2\right| \\ &= 2\left|\frac{(z+z')^2 - 4u^2}{4}\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|(z-z')^2\right| \\ &= \frac{1}{2}|z-z'|^2 \end{aligned}$$

   ▷ En faisant la synthèse, nous avons :
   $$\left(\left|\frac{z+z'}{2} - u\right| + \left|\frac{z+z'}{2} + u\right|\right)^2 = \frac{1}{2}|z+z'|^2 + 2|z|\,|z'| + \frac{1}{2}|z-z'|^2 = \frac{1}{2}\left(|z+z'|^2 + |z-z'|^2\right) + 2|z|\,|z'|$$
   Toujours d'après la question précédente, nous avons $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$ et donc
   $$\left(\left|\frac{z+z'}{2} - u\right| + \left|\frac{z+z'}{2} + u\right|\right)^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2|z|\,|z'| = (|z| + |z'|)^2$$
   C'est à dire, comme les expressions sont toutes positives : $|z| + |z'| = \left|\frac{z+z'}{2} - u\right| + \left|\frac{z+z'}{2} + u\right|$

9.9.2 Nombres complexes : l'exponentielle complexe

Exercice 29 :

Soit $\alpha = e^{i\frac{2\pi}{7}}$. On pose $S = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4$ et $T = \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6$ Calculer $S+T$ et ST. En déduire S et T

Il faut d'abord remarquer que $\alpha^7 = \left(e^{i\frac{2\pi}{7}}\right)^7 = e^{2i\pi} = 1$

▷ Tout d'abord, $S + T = \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6 = \alpha\left(1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5\right)$
Or : $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 = \frac{1-\alpha^6}{1-\alpha}$ et $S + T = \alpha \times \frac{1-\alpha^6}{1-\alpha} = \frac{\alpha - \alpha^7}{1-\alpha}$
D'où, $S + T = \frac{\alpha - 1}{1-\alpha} = -1$

▷ Maintenant, $ST = \left(\alpha + \alpha^2 + \alpha^4\right)\left(\alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6\right) = 3 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6 = 2$

▷ Ainsi, il nous est possible de calculer S et T : S et T sont solutions de l'équation du second degré :

$$Xr - (S+T)X + ST = 0 \Longleftrightarrow X^2 + X + 2 = 0$$

Le discriminant de cette équation est donné par $\Delta = 1 - 4 \times 2 = -7$, et les racines de cette équation sont donc :

$$X_1 = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} \qquad X_2 = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$$

▷ Maintenant qui de X_1 ou de X_2 est S ou T ?
Il faut s'intéresser à la partie imaginaire. La partie imaginaire de S est donnée par :

$$\mathrm{Im}(S) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$$

Nous avons, clairement, $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) > 0$, $\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) > 0$ et $\sin\left(\frac{8\pi}{7})\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$, de telle sorte que :

$$\mathrm{Im}(S) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

D'autre part, nous avons $\frac{\pi}{7} < \frac{2\pi}{7} < \frac{\pi}{2}$ et donc $0 < \sin\frac{\pi}{7} < \sin\frac{2\pi}{7} < 1$ et donc, $\sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} > 0$ et nous avons $\mathrm{Im}(S) > 0$. D'où :

$$S = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} \qquad T = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$$

Remarque
Comme $|\alpha| = 1$ et que $\alpha^7 = 1$, nous avons $\alpha^6 = \alpha^{-1} = \overline{\alpha}$, $\alpha^5 = \left(\alpha^2\right)^{-1} = \overline{\alpha^2}$ et $\alpha^3 = \left(\alpha^4\right)^{-1} = \overline{\alpha^4}$, de telle sorte que $S = \overline{T}$ et que donc $S + T = 2\mathrm{Re}(S)$ et $ST = |ST|^2$

Exercice 31 :

1. *Montrer que Si $z \neq 1$ alors,$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1}$. En déduire la somme des racines n-ièmes de 1*

   En nous intéressant à la somme des termes d'une suite géométrique, nous avons,pour tout $z \neq 1$

   $$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1}$$

   Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$; alors, toutes les racines n-*ièmes* de 1 sont du type $\omega^k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k = 0, \cdots, n-1$. Donc $1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1}$ représente la somme des n racines n-*ièmes* de 1. Ainsi

   $$1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = \frac{1 - 1}{\omega - 1} = 0$$

   La somme des racines n-*ièmes* de 1 est donc nulle.

2. *Si $P(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$, comment factoriser P ?*

   Tout d'abord, comme $P(1) = n + 1$, $z = 1$ n'est pas racine de P, et donc, pour $z \neq 1$, nous avons $P(z) = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}$

   Ainsi, $P(z) = 0 \Longleftrightarrow \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} = 0$; les racines de P sont donc toutes les racines $n+1$-*ièmes* de 1 sauf 1. D'où la factorisation de P est donc :

   $$P(z) = \prod_{k=1}^{n}\left(z - e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}\right)$$

Exercice 32 :

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. On appelle ω une racine n-ième de 1 différente de 1. Evaluer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,\omega^k$

   Partant de l'expression $P(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$, nous pouvons en considérer la dérivée

   $$P'(z) = \sum_{k=0}^{n} kz^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} kz^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,z^k$$

   D'autre part, nous avons :

   $$P'(z) = \left(\frac{z^{n+1}-1}{z-1}\right)' = \frac{(n+1)\,z^n\,(z-1) - \left(z^{n+1}-1\right)}{(z-1)^2}$$

   Ainsi :

   $$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,\omega^k = P'(\omega) = \frac{(n+1)\,\omega^n\,(\omega-1) - \left(\omega^{n+1}-1\right)}{(\omega-1)^2}$$

   Comme $\omega^n = 1$, nous avons :

   $$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,\omega^k = \frac{(n+1)(\omega-1) - (\omega-1)}{(\omega-1)^2} = \frac{n}{\omega-1}$$

   Donc, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,\omega^k = \frac{n}{\omega-1}$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,\omega^{kp}$ *où $p \in \mathbb{Z}$ est fixé*

   Cette fois-ci, nous avons $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,\omega^{kp} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,(\omega^p)^k = P'(\omega^p)$

   De l'étude que nous venons de faire, nous avons : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,\omega^{kp} = \frac{(n+1)\,(\omega^p)^n\,(\omega^p-1) - \left((\omega^p)^{n+1}-1\right)}{(\omega^p-1)^2}$

   De $(\omega^p)^n = 1$, nous tirons $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,\omega^{kp} = \frac{n}{\omega^p-1}$

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\omega^k$

   Clairement, nous avons $(1+\omega)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\omega^k$; donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\omega^k = (1+\omega)^n - \omega^n = (1+\omega)^n - 1$

Exercice 33 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0$

On peut remarquer que $z \neq 1$ et $z \neq -1$, sinon, il est impossible de résoudre cette équation.
On fait un changement de variable $X = \dfrac{z+1}{z-1} \iff z = \dfrac{X+1}{X-1}$ et nous avons donc $X \neq 0$. L'équation devient alors : $X^3 + \dfrac{1}{X^3} = 0 \iff \dfrac{X^6+1}{X^3} = 0$

Donc $\dfrac{X^6+1}{X^3}=0 \iff X^6=-1 \iff X^6=e^{i\pi}$.
En posant $X=e^{i\theta}$, puisque $|X|=1$, nous avons $e^{6i\theta}=e^{i\pi}$ et donc $6\theta=\pi+2k\pi \iff \theta=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{3}$
Nous obtenons donc 6 valeurs X_k avec $X_k=e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right)}$ avec $k=0,\cdots,5$. Il existe donc 6 solutions à l'équation $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^3+\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^3=0$, elles sont toutes du type :

$$z_k=\frac{X_k+1}{X_k-1}=\frac{e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right)}+1}{e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right)}-1}=\frac{e^{i\frac{ki\pi}{3}}+e^{\frac{i\pi}{6}}}{e^{i\frac{ki\pi}{3}}-e^{\frac{i\pi}{6}}} \text{ avec } k=0,\cdots,5$$

Exercice 34 :

1. *Pour $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $\rho>0$ et pour $n\in\mathbb{N}$, calculer $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\rho^k\cos(\alpha+k\beta)$ et $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\rho^k\sin(\alpha+k\beta)$*

   Voici une question très calculatoire, même assez fastidieuse ! ! Mais, il faut le faire ! !

   ▷ Pour commencer, appelons $C=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\rho^k\cos(\alpha+k\beta)$ et $S=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\rho^k\sin(\alpha+k\beta)$. Alors :

$$\begin{aligned}
C+iS &= \sum_{k=0}^{n-1}\rho^k\cos(\alpha+k\beta)+i\sum_{k=0}^{n-1}\rho^k\sin(\alpha+k\beta)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\rho^k\cos(\alpha+k\beta)+i\rho^k\sin(\alpha+k\beta)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\rho^k\left(\cos(\alpha+k\beta)+i\sin(\alpha+k\beta)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\rho^k e^{i(\alpha+k\beta)}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\rho^k e^{i\alpha}e^{ik\beta}\\
&= e^{i\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}\rho^k e^{ik\beta}\\
&= e^{i\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\rho e^{i\beta}\right)^k\\
&= e^{i\alpha}\left(\frac{1-\rho^n e^{in\beta}}{1-\rho e^{i\beta}}\right)
\end{aligned}$$

   ▷ Nous avons $\dfrac{1-\rho^n e^{in\beta}}{1-\rho e^{i\beta}}=\dfrac{\left(1-\rho^n e^{in\beta}\right)\left(1-\rho e^{-i\beta}\right)}{\rho^2-2\rho\cos\beta+1}$. Nous avons donc :

$$e^{i\alpha}\left(\frac{1-\rho^n e^{in\beta}}{1-\rho e^{i\beta}}\right)=\frac{e^{i\alpha}\left(1-\rho^n e^{in\beta}\right)\left(1-\rho e^{-i\beta}\right)}{\rho^2-2\rho\cos\beta+1}$$

   Le dénominateur étant réel, nous allons nous intéresser au numérateur

   ▷ Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
e^{i\alpha}\left(1-\rho^n e^{in\beta}\right)\left(1-\rho e^{-i\beta}\right) &= e^{i\alpha}\left(1-\rho e^{-i\beta}-\rho^n e^{in\beta}+\rho^{n+1}e^{i(n-1)\beta}\right)\\
&= e^{i\alpha}-\rho e^{i(\alpha-\beta)}-\rho^n e^{i(\alpha+n\beta)}+\rho^{n+1}e^{i(\alpha+(n-1)\beta)}\\
&= \cos\alpha+i\sin\alpha-\rho\cos(\alpha-\beta)-i\rho\sin(\alpha-\beta)-\rho^n\cos(\alpha+n\beta)\\
&\quad -i\rho^n\sin(\alpha+n\beta)+\rho^{n+1}\cos(\alpha+(n-1)\beta)+i\rho^{n+1}\sin(\alpha+(n-1)\beta)\\
&= \left(\cos\alpha-\rho\cos(\alpha-\beta)-\rho^n\cos(\alpha+n\beta)+\rho^{n+1}\cos(\alpha+(n-1)\beta)\right)\\
&\quad +i\left(\sin\alpha-\rho\sin(\alpha-\beta)-\rho^n\sin(\alpha+n\beta)+\rho^{n+1}\sin(\alpha+(n-1)\beta)\right)
\end{aligned}$$

▷ D'où, en identifiants parties réelles et imaginaires :

- $C = \dfrac{\cos\alpha - \rho\cos(\alpha-\beta) - \rho^n\cos(\alpha+n\beta) + \rho^{n+1}\cos(\alpha+(n-1)\beta)}{\rho^2 - 2\rho\cos\beta + 1}$
- $S = \dfrac{\sin\alpha - \rho\sin(\alpha-\beta) - \rho^n\sin(\alpha+n\beta) + \rho^{n+1}\sin(\alpha+(n-1)\beta)}{\rho^2 - 2\rho\cos\beta + 1}$

2. *Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) = 0$*

   Cette question est l'application de la question ci-dessus, avec $\alpha = \theta$, $\beta = \dfrac{2\pi}{n}$ et $\rho = 1$.

   Nous avons donc :

   ▷ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) = \frac{\cos\theta - \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{n}\right) - \cos(\theta+2\pi) + \cos\left(\theta + (n-1)\frac{2\pi}{n}\right)}{2 - 2\cos\frac{2\pi}{n}}$

   Comme $\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$ et $\cos\left(\theta + (n-1)\dfrac{2\pi}{n}\right) = \cos\left(\theta + 2\pi - \dfrac{2\pi}{n}\right) = \cos\left(\theta - \dfrac{2\pi}{n}\right)$

   De là, nous déduisons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) = 0$

   ▷ De la même manière, nous démontrerions que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) = 0$

Exercice 35 :

On désigne par α et $\overline{\alpha}$ les racines de l'équation $x^2 - 2x + 2 = 0$

Tout d'abord, c'est une équation du second degré à coefficients réels, et donc les racines sont conjuguées. Ainsi, si α est racine de l'équation $x^2 - 2x + 2 = 0$, $\overline{\alpha}$ l'est aussi. On trouve très facilement :

$$\alpha = 1 + i \text{ et donc } \overline{\alpha} = 1 - i$$

Sous forme trigonométrique, $\alpha = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$ et donc $\overline{\alpha} = \sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}}$

1. *Ecrire α^n et $\overline{\alpha}^n$ sous forme trigonométrique, et sous forme algébrique*

   ▷ Forme trigonométrique

   Cela ne pose pas de difficultés : $\alpha^n = \left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^n = \left(2^{\frac{1}{2}}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^n = 2^{\frac{n}{2}}e^{\frac{in\pi}{4}}$, et donc $\overline{\alpha}^n = 2^{\frac{n}{2}}e^{\frac{-in\pi}{4}}$

   ▷ Forme algébrique

   ⋆ $\displaystyle(1+i)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}i^k = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2k}i^{2k} + \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2k+1}i^{2k+1} = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k\binom{n}{2k} + i\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k\binom{n}{2k+1}$

   où $[\bullet]$ désigne la partie entière.

   ⋆ Et donc $\displaystyle(1-i)^n = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k\binom{n}{2k} - i\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k\binom{n}{2k+1}$

2. *Calculer $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(\alpha^k + \overline{\alpha}^k\right)$*

   ▷ Tout d'abord, $\alpha^k + \overline{\alpha}^k = 2^{\frac{k}{2}}e^{\frac{ik\pi}{4}} + 2^{\frac{k}{2}}e^{\frac{-ik\pi}{4}} = 2^{\frac{k}{2}} \times 2\cos\dfrac{k\pi}{4}$

   ▷ Et donc, pour $n = 0$, nous avons $\displaystyle\prod_{k=0}^{0}\left(\alpha^k + \overline{\alpha}^k\right) = 2^0 \times 2\cos 0 = 2$

   ▷ Pour $n = 1$, nous avons $\displaystyle\prod_{k=0}^{1}\left(\alpha^k + \overline{\alpha}^k\right) = \left(2^0 \times 2\cos 0\right)\times\left(2^{\frac{1}{2}} \times 2\cos\frac{\pi}{4}\right) = 2\times\left(\sqrt{2} \times 2\cos\frac{\pi}{4}\right) =$ $2 \times 2 = 4$

   ▷ Pour $n = 2$, nous avons $\displaystyle\prod_{k=0}^{2}\left(\alpha^k + \overline{\alpha}^k\right) = \left(2^0 \times 2\cos 0\right) \times \left(2^{\frac{1}{2}} \times 2\cos\frac{\pi}{4}\right) \times \left(2^{\frac{2}{2}} \times 2\cos\frac{2\pi}{4}\right)$

   Or, $\cos\dfrac{2\pi}{4} = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$; et donc $\displaystyle\prod_{k=0}^{2}\left(\alpha^k + \overline{\alpha}^k\right) = 0$

▷ Ainsi, pour $n \geqslant 2$, nous avons $\prod_{k=0}^{n}\left(\alpha^k+\overline{\alpha}^k\right)=0$

Exercice 36 :

α et β étant réels, trouver le module et l'argument de $\dfrac{e^{i\alpha}+e^{i\beta}}{1+e^{i(\alpha+\beta)}}$

Nous utilisons la quantité conjuguée de $1+e^{i(\alpha+\beta)}$:

$$\begin{aligned}\frac{e^{i\alpha}+e^{i\beta}}{1+e^{i(\alpha+\beta)}} &= \frac{\left(1+e^{-i(\alpha+\beta)}\right)\left(e^{i\alpha}+e^{i\beta}\right)}{1+e^{-i(\alpha+\beta)}1+e^{i(\alpha+\beta)}}\\ &= \frac{e^{i\alpha}+e^{i\beta}+e^{-i\alpha}+e^{-i\beta}}{1+e^{-i(\alpha+\beta)}+1+e^{i(\alpha+\beta)}}\\ &= \frac{2\cos\alpha+2\cos\beta}{2+2\cos(\alpha+\beta)}\\ &= \frac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos(\alpha+\beta)}\end{aligned}$$

Le nombre $1+e^{i(\alpha+\beta)}$ est donc réel. Son argument est $2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ et son module est $\left|\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos(\alpha+\beta)}\right|$

Exercice 37 :

Déterminer l'ensemble $\left\{n\in\mathbb{N} \text{ tel que } \left(\sqrt{3}+i\right)^n\in\mathbb{R}^-\right\}$

▷ Tout d'abord, écrivons $\sqrt{3}+i$ sous sa forme trigonométrique.
Nous avons $\left|\sqrt{3}+i\right|=2$ et donc $\sqrt{3}+i=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2}\right)$

Nous avons donc, si θ est l'argument de $\sqrt{3}+i$, $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$, c'est à dire :

$$\theta=\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z}$$

Donc, nous avons : $\sqrt{3}+i=2e^{\frac{i\pi}{6}}$

▷ D'où, $\left(\sqrt{3}+i\right)^n=2^n e^{\frac{in\pi}{6}}$

▷ Donc $\left(\sqrt{3}+i\right)^n\in\mathbb{R}^-$ si et seulement si $\dfrac{in\pi}{6}=\pi+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$, c'est à dire si $n=6+12k$ avec $k\in\mathbb{Z}$

En conclusion, $\left(\sqrt{3}+i\right)^n\in\mathbb{R}^-$ si et seulement si $n\equiv 6\,[12]$

Exercice 38 :

Soit $\alpha\in\mathbb{C}$ tel que $\alpha^5=1$ et $\alpha\neq 1$. Montrer que $\left(\alpha^2+\alpha+1\right)\left(\alpha^3+\alpha+1\right)\left(\alpha^4+\alpha+1\right)=\alpha(\alpha+1)$

Tout d'abord, il est bon de remarque que α est une racine cinquième de 1 et que nous avons :

$$1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=0$$

Pour résoudre l'exercice, nous allons, très simplement, développer. Commençons par les deux premières parenthèses :

$$\begin{aligned}\left(\alpha^2+\alpha+1\right)\left(\alpha^3+\alpha+1\right) &= \alpha^5+\alpha^3+\alpha^2+\alpha^4+\alpha^2+\alpha+\alpha^3+\alpha+1\\ &= \left(1+\alpha^3+\alpha^2+\alpha^4\right)+\left(\alpha^2+\alpha+\alpha^3+\alpha+1\right)\\ &= -\alpha+\left(\alpha^2+2\alpha+\alpha^3+1\right)\\ &= 1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3\\ &= -\alpha^4\end{aligned}$$

Continuons :

$$\begin{aligned}\left(\alpha^2+\alpha+1\right)\left(\alpha^3+\alpha+1\right)\left(\alpha^4+\alpha+1\right) &= -\alpha^4\left(\alpha^4+\alpha+1\right)\\ &= -\alpha^8-\alpha^5-\alpha^4\\ &= -\alpha^3-1-\alpha^4\\ &= \alpha+\alpha^2\\ &= \alpha\left(1+\alpha\right)\end{aligned}$$

Ce que nous voulions

Exercice 39 :

On note $\alpha = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la partie imaginaire de $\left(1+\alpha+\alpha^2\right)^n$

Il nous faut remarquer que $\alpha^5 = 1$ et que, comme tout à l'heure, nous avons $1+\alpha+\alpha^2 = -\alpha^3-\alpha^4$, de telle sorte que :

$$\left(1+\alpha+\alpha^2\right)^n = \left(-\alpha^3\right)^n\left(1+\alpha\right)^n = \left(-1\right)^n\alpha^{3n}\left(1+\alpha\right)^n$$

- ▷ Regardons de manière plus précise $1+\alpha$.
  Nous avons $1+\alpha = 1+e^{\frac{2i\pi}{5}} = \left(1+\cos\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\frac{2\pi}{5}$
  Or, des identités $1+\cos 2x = 2\cos^2 x$ et $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, nous avons :

$$\left(1+\cos\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\frac{2\pi}{5} = 2\cos^2\frac{\pi}{5}+2i\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5} = 2\cos\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right) = 2\cos\frac{\pi}{5}e^{\frac{i\pi}{5}}$$

- ▷ Donc :

$$\begin{aligned}\left(1+\alpha+\alpha^2\right)^n &= \left(-1\right)^n\alpha^{3n}\left(1+\alpha\right)^n\\ &= \left(-1\right)^n e^{\frac{6in\pi}{5}}\left(2^n\cos^n\frac{\pi}{5}\right)e^{\frac{in\pi}{5}}\\ &= \left(-1\right)^n 2^n\cos^n\frac{\pi}{5}e^{\frac{7in\pi}{5}}\\ &= \left(-1\right)^n 2^n\cos^n\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{7n\pi}{5}+i\sin\frac{7n\pi}{5}\right)\end{aligned}$$

- ▷ Ainsi, la partie imaginaire de $\left(1+\alpha+\alpha^2\right)^n$ est donc $\left(-1\right)^n 2^n\cos^n\frac{\pi}{5}\sin\frac{7n\pi}{5}$, tout comme la partie réelle est $\left(-1\right)^n 2^n\cos^n\frac{\pi}{5}\cos\frac{7n\pi}{5}$

9.9.3 Miscelleanous

Exercice 40 :

Soit φ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définie par : $\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}$. Quel est l'ensemble des complexes tels que :

1. $|\varphi(z)| = 1$

   Il faut donc trouver $z \in \mathbb{C}$ tels que $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1 \iff |z+i| = |z-i|$

   En identifiant le plan à $\mathbb{C}$ et en posant A le point d'affixe i, B le point d'affixe $-i$, rechercher les complexes z tels que $|z+i| = |z-i|$, c'est rechercher les points M d'affixe z tels que $MA = MB$; c'est à dire que l'ensemble des points M du plan est la médiatrice du segment $[A; B]$, c'est à dire l'axe des réels ; cf figure 9.14
2. $|\varphi(z)| < 1$

   Il faut donc trouver $z \in \mathbb{C}$ tels que $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| < 1 \iff |z-i| < |z+i|$

   En identifiant le plan à $\mathbb{C}$ et en posant A le point d'affixe i, B le point d'affixe $-i$, rechercher les complexes z tels que $|z-i| < |z+i|$, c'est rechercher les points M d'affixe z tels que $MA < MB$; c'est à dire que l'ensemble des points M du demi-plan des points d'ordonnée strictement positive ; cf figure 9.15

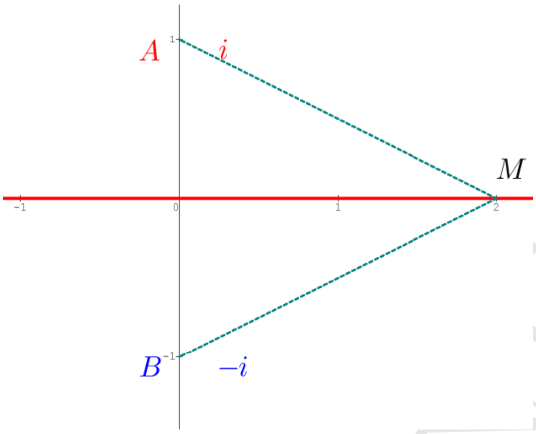


FIGURE 9.14 – Visualisation de la question 1

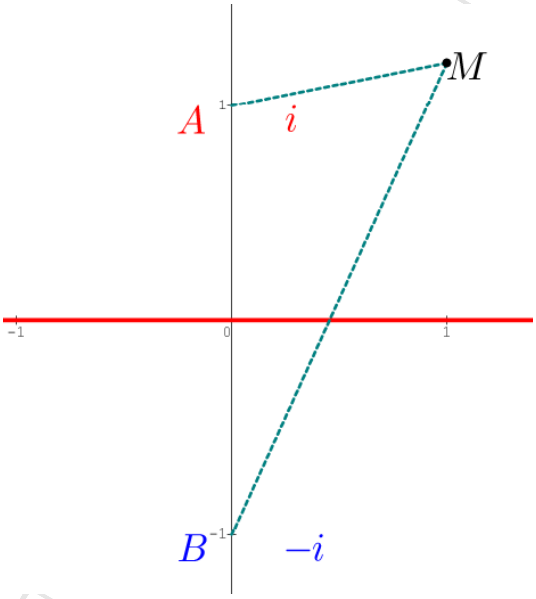


FIGURE 9.15 – Visualisation de la question 2

3. $|\varphi(z)| = k$ *où* $k \neq 1$ *et* $k \geqslant 0$

   Il faut donc trouver $z \in \mathbb{C}$ tels que $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| = k \iff |z-i| = k\,|z+i| \iff |z-i|^2 = k^2\,|z+i|^2$

En posant $z = x + iy$, nous avons :

$$\begin{aligned}
|z-i|^2 = k^2|z+i|^2 &\iff |x+iy-i|^2 = k^2|x+iy+i|^2 \\
&\iff x^2 + (y-1)^2 = k^2x^2 + k^2(y+1)^2 \\
&\iff x^2 + y^2 - 2y + 1 = k^2x^2 + k^2y^2 + 2k^2y + k^2 \\
&\iff (1-k^2)x^2 + (1-k^2)y^2 - 2(1+k^2)y + (1-k^2) = 0 \\
&\iff x^2 + y^2 - 2\frac{1+k^2}{1-k^2}y = -1 \text{ car } k \neq 1 \\
&\iff x^2 + \left(y - \frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 - \frac{(1+k^2)^2}{(1-k^2)^2} = -1 \\
&\iff x^2 + \left(y - \frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 = -1 + \frac{(1+k^2)^2}{(1-k^2)^2} \\
&\iff x^2 + \left(y - \frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 = \frac{(1+k^2)^2 - (1-k^2)^2}{(1-k^2)^2} \\
&\iff x^2 + \left(y - \frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 = \frac{4k^2}{(1-k^2)^2}
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}$ tels que $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = k$ apparaît donc comme un cercle de centre $\Omega\left(0, \frac{1+k^2}{1-k^2}\right)$ et de rayon $R = \frac{2k}{|1-k^2|}$

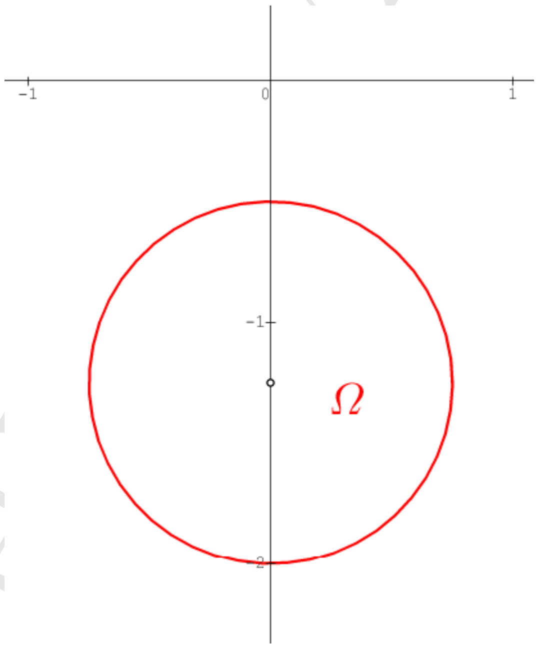


FIGURE 9.16 – Visualisation de la question 3 pour $k = 3$ où nous avons $\Omega\left(0, -\frac{5}{4}\right)$ et $R = \frac{3}{4}$

Exercice 41 :

Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe de module r et d'argument θ

1. *Calculer $|1+z|$ en fonction de r et de θ*

   On écrit donc $z = r\cos\theta + ir\sin\theta$, et donc $1 + z = 1 + r\cos\theta + ir\sin\theta$.
   D'où $|1+z| = \sqrt{(1+r\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta} = \sqrt{1 + 2r\cos\theta + r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \sqrt{r^2 + 1 + 2r\cos\theta}$
   En conclusion, $|1+z| = \sqrt{r^2 + 1 + 2r\cos\theta}$

2. *En déduire $\left|1+z^2\right|$ en fonction de r et de θ*

   Si $z = re^{i\theta}$, alors $z^2 = r^2 e^{2i\theta}$ et donc $1+z^2 = 1 + r^2\cos 2\theta + ir^2 \sin 2\theta$.
   D'où
   $$\begin{aligned}\left|1+z^2\right| &= \sqrt{\left(1+r^2\cos 2\theta\right)^2 + r^4\sin^2 2\theta} \\ &= \sqrt{1+2r^2\cos 2\theta + r^4\cos^2 2\theta + r^4 \sin^2 2\theta} \\ &= \sqrt{r^4+1+2r^2\cos 2\theta}\end{aligned}$$
   En conclusion, $\left|1+z^2\right| = \sqrt{r^4+1+2r^2\cos 2\theta}$

Exercice 42 :

Soit l'équation :
$$z^3 - (6+3i)\,z^2 + (9+12i)\,z - 9\,(2+3i) = 0 \tag{9.2}$$

1. *Montrer que l'équation admet une solution imaginaire pure unique notée z_1. Calculer z_1*

   On suppose donc que $z_1 = \lambda i$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, l'équation devient :
   $$\begin{gathered}(\lambda i)^3 - (6+3i)\,(\lambda i)^2 + (9+12i)\,(\lambda i) - 9\,(2+3i) = 0 \\ \Longleftrightarrow \\ -\lambda^3 i + \lambda^2\,(6+3i) + (-12\lambda + 9\lambda i) - 9\,(2+3i) = 0 \\ \Longrightarrow \\ \left(6\lambda^2 - 12\lambda - 18\right) + i\left(-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 27\right) = 0\end{gathered}$$
   et
   $$\left(6\lambda^2 - 12\lambda - 18\right) + i\left(-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 27\right) = 0 \Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} 6\lambda^2 - 12\lambda - 18 &= 0 \\ -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 27 &= 0\end{aligned}\right.$$
   Résolvons $6\lambda^2 - 12\lambda - 18 = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$
   Tout calculs faits $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ si et seulement si $\lambda = 3$ ou $\lambda = -1$.
   Seule $\lambda = 3$ est aussi solution de $-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 27 = 0$ et donc $z_1 = 3i$

2. *Déterminer les 2 autres solutions z_2 et z_3*

   Voilà donc une question classique !!
   - ▷ Pour la résoudre, nous commençons par factoriser par $z - 3i$
   $$\begin{gathered}(z-3i)\left(az^2 + bz + c\right) = z^3 - (6+3i)\,z^2 + (9+12i)\,z - 9\,(2+3i) \\ \Longleftrightarrow \\ az^3 + (b-3ia)\,z^2 + (c-3ib)\,z - 3ic = z^3 - (6+3i)\,z^2 + (9+12i)\,z - 9\,(2+3i)\end{gathered}$$
     Puis, nous identifions et nous avons :
   $$\left\{\begin{aligned} a &= 1 \\ b - 3ia &= -(6+3i) \\ c - 3ib &= 9+12i \\ -3ic &= -9\,(2+3i)\end{aligned}\right. \quad \text{d'où} \quad \left\{\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= -6 \\ c &= 9 - 6i = 3\,(3-2i)\end{aligned}\right.$$
     Ainsi, nous avons : $z^3 - (6+3i)\,z^2 + (9+12i)\,z - 9\,(2+3i) = (z-3i)\left(z^2 - 6z + 3\,(3-2i)\right)$
   - ▷ Pour connaître les autres racines, nous résolvons l'équation $z^2 - 6z + 3\,(3-2i) = 0$
     - ⋆ Nous calculons le discriminant : $\Delta = 36 - 12\,(3-2i) = 24i$
     - ⋆ Il faut donc, maintenant, rechercher les racines carrées de $24i$
       Soit $\omega = x + iy$ l'une de ces racines carrées *(L'autre sera $-\omega$)*. Alors :
   $$\left\{\begin{aligned} \omega^2 &= x^2 - y^2 + 2ixy = 24i \\ |\omega|^2 &= x^2 + y^2 = |24i| = 24\end{aligned}\right.$$

Nous avons donc à résoudre le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = & 0 \\ x^2 + y^2 = & 24 \\ xy = & 12 \end{cases}$$

D'où nous trouvons $x = y = 2\sqrt{3}$ ou $x = y = -2\sqrt{3}$; nous avons donc $\omega = 2\sqrt{3}\,(1+i)$

⋆ Les racines z_2 et z_3 sont donc :

$$z_2 = \frac{6 + 2\sqrt{3}\,(1+i)}{2} = 3 + \sqrt{3}\,(1+i) \qquad z_3 = \frac{6 - 2\sqrt{3}\,(1+i)}{2} = 3 - \sqrt{3}\,(1+i)$$

3. *On désigne M_1, M_2 et M_3 les solutions de l'équation dans un repère orthonormé. Montrer que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral*

La figure 9.17 donne une visualisation de la question posée.

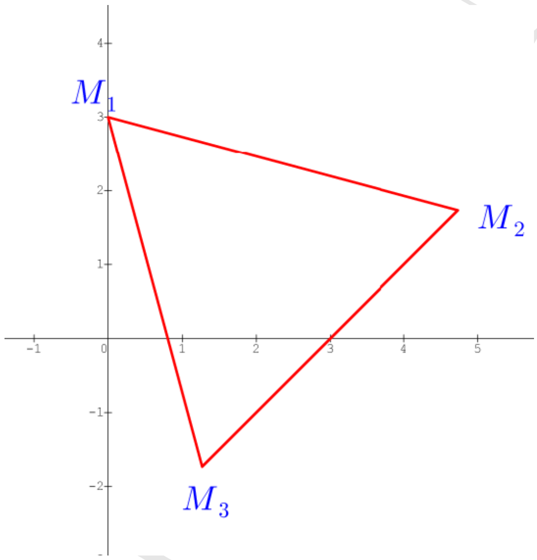


FIGURE 9.17 – Visualisation du triangle équilatéral

Pour démontrer que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral il faut vérifier que $M_1M_2 = M_1M_3 = M_2M_3$

▷ Nous avons

$$M_1M_2 = |z_1 - z_2| = \left|3i - \left(3 + \sqrt{3} + i\sqrt{3}\right)\right| = \sqrt{\left(3+\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}-3\right)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

▷ Pour $M_1M_3 = |z_1 - z_3| = \left|3i - \left(3 - \sqrt{3} + i\sqrt{3}\right)\right| = \sqrt{\left(3-\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}+3\right)^2} = 2\sqrt{6}$

▷ Et pour finir,

$$M_2M_3 = |z_2 - z_3| = \left|\left(3 + \sqrt{3}\,(1+i)\right) - \left(3 - \sqrt{3}\,(1+i)\right)\right| = \left|2\sqrt{3} + 2i\sqrt{3}\right| = 2\sqrt{3}\times\sqrt{2} = 2\sqrt{6}$$

Et nous avons donc $M_1M_2 = M_1M_3 = M_2M_3$, c'est à dire que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral

Exercice 43 :

Soit f l'application définie sur $\mathbb{C}\setminus\{i\}$ par : $f(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$

1. *Déterminer les points fixes de f, c'est à dire les éléments $z \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) = z$*

Nous avons $f(z) = z \iff \dfrac{z+i}{z-i} = z$, et pour $z \neq i$, $z + i = z(z-i)$

Il nous faut donc résoudre l'équation du second degré $z^2 - (1+i)\,z - i = 0$

- ▷ Le discriminant est donné par $\Delta = (1+i)^2 + 4i = 6i$ dont une racine carrée est $\omega = \sqrt{3}\,(1+i)$
- ▷ Les 2 racines sont donc :

$$z_1 = \frac{(1+i)+\sqrt{3}\,(1+i)}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)(1+i) \qquad z_2 = \frac{(1+i)-\sqrt{3}\,(1+i)}{2} = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)(1+i)$$

Il existe donc 2 points fixes à f

2. *f est-elle bijective ? Et si oui, déterminer f^{-1}, sa bijection réciproque*

Pour montrer que f est bijective, il faut montrer qu'elle injective et surjective. Le calcul de f^{-1} se fait en même temps

(a) Etude de l'injectivité

Soient $z_1 \in \mathbb{C}\setminus\{i\}$ et $z_2 \in \mathbb{C}\setminus\{i\}$ tels que $f(z_1) = f(z_2)$. Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{z_1+i}{z_1-i} = \frac{z_2+i}{z_2-i} &\iff (z_1+i)(z_2-i) = (z_1-i)(z_2+i)\\
&\iff z_1z_2 - iz_1 + iz_2 + 1 = z_1z_2 + iz_1 - iz_2 + 1\\
&\iff 2iz_1 = 2iz_2\\
&\iff z_1 = z_2
\end{aligned}$$

f est donc injective

(b) Etude de la surjectivité

Soit $C \in \mathbb{C}$; existe-t-il $z \in \mathbb{C}\setminus\{i\}$ tel que $f(z) = C$, c'est à dire tel que $\dfrac{z+i}{z-i} = C$. Or :

$$\begin{aligned}
\frac{z+i}{z-i} = C &\iff z+i = C(z-i)\\
&\iff z+i = Cz - iC\\
&\iff z(1-C) = -iC - i\\
&\iff \text{Si } C \neq +1 \quad z = \frac{i(C+1)}{C-1}
\end{aligned}$$

Ainsi, si $C \neq 1$, il existe $z \in \mathbb{C}\setminus\{i\}$ tel que $f(z) = C$.

(c) Bijection

f est donc bijective de $\mathbb{C}\setminus\{i\}$ sur $\mathbb{C}\setminus\{+1\}$

(d) Bijection réciproque f^{-1}

Nous avons :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f^{-1} : \mathbb{C}\setminus\{+1\} & \longrightarrow & \mathbb{C}\setminus\{i\}\\ C & \longmapsto & f^{-1}(C) = \dfrac{i(C+1)}{C-1}\end{array}\right.$$

Exercice 44 :

Soit f l'application définie sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ par : $f(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$

1. *Déterminer les points fixes de f, c'est à dire les éléments $z \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) = z$*

Assez facile ! ! Ils sont tels que $z = \dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ Or, tous calculs faits, nous avons :

$$z = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \iff z^2 = 1 \iff z = 1 \text{ ou } z = -1$$

Les seuls points fixes de f sont donc $z = 1$ et $z = -1$

2. *f est-elle injective ? Est-elle surjective ?*

- ▷ f ne peut pas être injective puisque, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, nous avons $f(z) = f\left(\dfrac{1}{z}\right)$; en particulier, nous avons $f(2) = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

▷ <u>f est surjective</u> puisque, pour tout $C \in \mathbb{C}$:

$$\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=C \Longleftrightarrow z+\frac{1}{z}=2C \Longleftrightarrow z^2-2Cz+1=0$$

L'équation $z^2-2Cz+1=0$ a donc deux solutions z_1 et z_2. Chaque élément $C \in \mathbb{C}$ a donc 2 antécédents.

f n'est donc pas injective, mais est surjective

Exercice 45 :

Pour $a \neq k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, calculer $\dfrac{\sin na}{(\sin a)^n}$ en fonction de $\cot a$

Nous avons $\cot a + i = \dfrac{\cos a}{\sin a} + i = \dfrac{1}{\sin a}(\cos a + i\sin a)$ et donc

$$(\cot a+i)^n=\left(\frac{1}{\sin a}\right)^n(\cos a+i\sin a)^n=\left(\frac{1}{\sin a}\right)^n(\cos na+i\sin na)$$

De telle sorte que $\dfrac{\sin na}{(\sin a)^n}$ apparaît comme la partie imaginaire de $(\cot a+i)^n$. Or :

$$(\cot a+i)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}i^k(\cot a)^{n-k}$$

⋆ Si n est pair, alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}i^k(\cot a)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2k}i^{2k}(\cot a)^{n-2k}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2k-1}i^{2k-1}(\cot a)^{n-2k+1}\\ &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2k}(-1)^k(\cot a)^{n-2k}+i\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2k-1}(-1)^{k+1}(\cot a)^{n-2k+1}\end{aligned}$$

De telle sorte que si n est pair, $\dfrac{\sin na}{(\sin a)^n}=\displaystyle\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2k-1}(-1)^{k+1}(\cot a)^{n-2k+1}$

⋆ Si n est impair, alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}i^k(\cot a)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2k}i^{2k}(\cot a)^{n-2k}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}\binom{n}{2k-1}i^{2k-1}(\cot a)^{n-2k+1}\\ &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2k}(-1)^k(\cot a)^{n-2k}+i\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}\binom{n}{2k-1}(-1)^{k+1}(\cot a)^{n-2k+1}\end{aligned}$$

De telle sorte que si n est impair, $\dfrac{\sin na}{(\sin a)^n}=\displaystyle\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}\binom{n}{2k-1}(-1)^{k+1}(\cot a)^{n-2k+1}$

Exercice 46 :

1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(X)=X^2-2X\cos\dfrac{k\pi}{n}+1$. Chercher les racines, éventuellement complexes, de P*

   C'est une question qui ne pose pas de difficulté ; commençons par calculer le discriminant :

$$\Delta=\cos^2\frac{k\pi}{n}-1=-\sin^2\frac{k\pi}{n}=\left(i\sin\frac{k\pi}{n}\right)^2$$

   Il y a donc 2 racines z_1 et z_2 complexes et conjuguées à cette équation :

$$z_1=\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}=e^{\frac{ik\pi}{n}} \text{ et } z_2=e^{\frac{-ik\pi}{n}}$$

2. (a) *Soit $Q(X) = X^{2n} - 1$. Chercher les racines de Q.*

   Les racines de Q sont les racines $2n$-ièmes de 1.

   Elles sont donc du type $\omega_k = e^{\frac{ik\pi}{n}}$ avec $k = 0, \ldots, 2n-1$

   (b) *En déduire que : $Q(X) = \left(X^2 - 1\right) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)$*

   De la question précédente, nous pouvons factoriser $Q(X)$. Nous avons donc :

$$Q(X) = \prod_{k=0}^{2n-1} \left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)$$

   Nous pouvons remarquer que nous pouvons diviser ce produit :

$$Q(X) = \prod_{k=0}^{2n-1} \left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) = (X-1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) (X - e^{\pi}) \prod_{k=n+1}^{2n-1} \left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)$$

   Donc $Q(X) = (X-1)(X+1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) \prod_{k=n+1}^{2n-1} \left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)$

   Comme $\prod_{k=n+1}^{2n-1} \left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{\frac{i(2n-k)\pi}{n}}\right)$, nous pouvons écrire :

$$Q(X) = \left(X^2 - 1\right) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) \left(X - e^{\frac{i(2n-k)\pi}{n}}\right)$$

   Or, $X - e^{\frac{i(2n-k)\pi}{n}} = X - e^{\frac{i2n\pi}{n}} e^{\frac{-ik\pi}{n}} = X - e^{\frac{-ik\pi}{n}}$

   D'où :

$$Q(X) = \left(X^2 - 1\right) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) \left(X - e^{\frac{-ik\pi}{n}}\right) = \left(X^2 - 1\right) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)$$

   Ce que nous voulions.

3. *Démontrer que $\prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right) = 1 + X^2 + X^4 + \cdots + X^{2j} + \cdots + X^{2n-2}$*

   Soit $P(X) = 1 + X + X^2 + \cdots + X^j + \cdots + X^{n-1}$, alors, pour $X \neq 1$, nous avons :

$$P(X) = 1 + X + X^2 + \cdots + X^j + \cdots + X^{n-1} = \frac{X^n - 1}{X - 1}$$

   Et donc :

$$P\left(X^2\right) = 1 + X^2 + X^4 + \cdots + X^{2j} + \cdots + X^{2n-2} = \frac{X^{2n} - 1}{X^2 - 1} = \frac{\left(X^2 - 1\right) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)}{X^2 - 1} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X\right.$$

   Ce que nous voulions

4. *Démontrer que* $n = \prod_{k=1}^{n-1} 4\sin^2 \frac{k\pi}{2n}$

   En faisant $X = 1$ dans l'égalité $\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2 - 2X\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right) = 1 + X^2 + X^4 + \cdots + X^{2j} + \cdots + X^{2n-2}$, nous obtenons :
   $$n = \prod_{k=1}^{n-1}\left(2 - 2\cos\frac{k\pi}{n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} 2\left(1 - \cos\frac{k\pi}{n}\right)$$
   Or, les formules trigonométriques donnent : $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \iff 1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$, et donc $1 - \cos\frac{k\pi}{n} = 2\sin^2\frac{k\pi}{n}$ D'où, bien sûr :
   $$n = \prod_{k=1}^{n-1} 4\sin^2\frac{k\pi}{2n}$$

5. *Démontrer que* $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$

   Nous avons : $\prod_{k=1}^{n-1} 4\sin^2\frac{k\pi}{2n} = 4^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin^2\frac{k\pi}{2n}$

   Nous avons, pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $0 < \frac{\pi}{2n} \leqslant \frac{k\pi}{2n} \leqslant \frac{(n-1)\pi}{2n} < \frac{\pi}{2}$ et donc, $0 < \sin\frac{k\pi}{2n} < 1$, et donc, en prenant la racine carrée $\sqrt{\sin^2\frac{k\pi}{2n}} = \sin\frac{k\pi}{2n}$. D'où :
   $$\sqrt{n} = \sqrt{\prod_{k=1}^{n-1} 4\sin^2\frac{k\pi}{2n}} = \sqrt{4^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin^2\frac{k\pi}{2n}} = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sqrt{\sin^2\frac{k\pi}{2n}} = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}$$
   D'où, bien entendu, $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$

Exercice 47 :

Dans tout le problème, nous appelons $E = \{z \in \mathbb{C}$ *tels que* $\operatorname{Im}(z) > 0\}$ *et* $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}$ *tels que* $|z| = 1\}$

1. *Démontrer que* $(\mathcal{U}, \times)$ *est un groupe commutatif*

   On démontrera que $(\mathcal{U}, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$
   - ▷ Tout d'abord $\mathcal{U} \neq \emptyset$ puisque $1 \in \mathcal{U}$
   - ▷ Soit $z \in \mathcal{U}$ et $z_1 \in \mathcal{U}$. Alors, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $\theta_1 \in \mathbb{R}$ tels que $z = e^{i\theta}$ et $z_1 = e^{i\theta_1}$. Alors :
   $$z \times (z_1)^{-1} = e^{i\theta} \times e^{-i\theta_1} = e^{i(\theta-\theta_1)}$$
   Comme $\left|e^{i(\theta-\theta_1)}\right| = 1$, nous avons $z \times (z_1)^{-1} \in \mathcal{U}$
   - ▷ En conclusion, $(\mathcal{U}, \times)$ est bien un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ et est donc aussi commutatif.

2. *Pour* $u \in \mathcal{U}$ *avec* $u = a + ib$ $(a \in \mathbb{R}$ *et* $b \in \mathbb{R})$, *nous définissons l'application* f_u *de* $\mathbb{C}$ *dans* $\mathbb{C}$ *par :*
   $$\begin{cases} f_u : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \quad z & \longmapsto & f_u(z) = \dfrac{az - b}{bz + a} \end{cases}$$
   Il y a une remarque qu'il est possible de faire : pour tout $u \in \mathcal{U}$, $f_u = f_{-u}$.

En effet, si $u \in \mathcal{U}$ avec $u = a + ib$, nous avons $-u = -a - ib$ et donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$f_{-u}(z) = \frac{-az+b}{-bz-a} = -\frac{-az+b}{bz+a} = \frac{az-b}{bz+a} = f_u(z)$$

(a) i. *Démontrer que, pour tout $u \in \mathcal{U}$, f_u est définie sur E en entier*

Nous avons à étudier 2 cas : $b = 0$ et $b \neq 0$

⋆ Si $b = 0$, alors, comme $a^2 + b^2 = 0$, $a = 1$ ou $a = -1$
- Si $a = 1$, alors $f_1(z) = z$, c'est l'identité de $\mathbb{C}$, et f_1 est bien définie sur E
- Si $a = -1$, alors $f_{-1}(z) = \frac{-z}{-1}$, c'est aussi l'identité de $\mathbb{C}$, et donc f_{-1} est bien définie sur E
- Nous retrouvons, dans cette question la propriété $f_u = f_{-u}$

⋆ Si $b \neq 0$, alors, f_u n'est pas définie pour $z_0 = \frac{-a}{b}$. Comme $\frac{-a}{b} \in \mathbb{R}$, nous avons $\mathrm{Im}(z_0) = 0$. Comme $E = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } \mathrm{Im}(z) > 0\}$, $z_0 \notin E$ et donc, pour tout $u \in \mathcal{U}$, f_u est définie sur E en entier

ii. *Démontrer que, pour tout $u \in \mathcal{U}$ que f_u est une bijection de E sur E*

▷ Montrons que f_u est une surjection de E sur E

Soit $Z \in E$ avec $Z = x + iy$ et $y > 0$. Existe-t-il $z \in E$ tel que $f_u(z) = Z$?
Si ce $z \in E$ existe, alors nous avons :

$$Z = f_u(z) = \frac{az-b}{bz+a} \iff z = \frac{aZ+b}{-bZ+a}$$

Il faut maintenant montrer que $z \in E$, et donc démontrer que $\mathrm{Im}(z) > 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{aZ+b}{-bZ+a} &= \frac{a(x+iy)+b}{-b(x+iy)+a} \\
&= \frac{(ax+b)+iay}{(a-bx)-iby} \\
&= \frac{((ax+b)+iay)((a-bx)+iby)}{((a-bx)-iby)((a-bx)+iby)} \\
&= \frac{\left((ax+b)(a-bx)-aby^2\right)+i\left(by(ax+b)+ay(a-bx)\right)}{(a-bx)^2+b^2y^2}
\end{aligned}$$

Comme le dénominateur $(a-bx)^2+b^2y^2$ est positif, il faut donc démontrer que $by(ax+b)+ay(a-bx) > 0$. Par calcul, nous avons :

$$by(ax+b)+ay(a-bx) = byax + b^2y + a^2y - aybx = y\left(a^2+b^2\right) = y$$

Comme $y > 0$, nous avons le résultat.
Et donc $z \in E$ et, pour tout $u \in \mathcal{U}$ que f_u est une surjection de E sur E

▷ Montrons que f_u est une injection de E sur E

Soient donc $z \in E$ et $z_1 \in E$ tels que $f_u(z) = f_u(z_1)$, c'est à dire tels que $\frac{az-b}{bz+a} = \frac{az_1-b}{bz_1+a}$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\frac{az-b}{bz+a} = \frac{az_1-b}{bz_1+a} &\iff (az-b)(bz_1+a) = (az_1-b)(bz+a) \\
&\iff abzz_1 + a^2z - b^2z_1 - ab = abzz_1 + a^2z_1 - b^2z - ab \\
&\iff a^2z - b^2z_1 = a^2z_1 - b^2z \\
&\iff \left(a^2+b^2\right)z = \left(a^2+b^2\right)z_1 \\
&\iff z = z_1
\end{aligned}$$

f_u est donc bien une injection de E sur E

En conclusion, f_u est une bijection de E sur E.

Remarque :

⋆ f_u étant bijective, f_u admet une bijection réciproque $(f_u)^{-1}$ et nous avons, si $u = a + ib$, $(f_u)^{-1}(z) = \dfrac{az+b}{-bz+a} = f_{\overline{u}}(z)$. or, dans $\mathcal{U}$, $\overline{u} = \dfrac{1}{u} = u^{-1}$. Donc $(f_u)^{-1}(z) = f_{u^{-1}}(z) = f_{\overline{u}}(z)$

⋆ D'autre part, si $z \in E$, alors $f_u(z) \in E$. En effet, comme tout à l'heure, si $z = x + iy$ avec $y > 0$:

$$\begin{aligned} f_u(z) &= \frac{a(x+iy)-b}{b(x+iy)+a} \\ &= \frac{\left((ax-b)(bx+a)+aby^2\right)+iy}{(bx+a)^2+b^2y^2} \end{aligned}$$

Donc, $f_u(z) \in E$

(b) *Démontrer que, pour tout $u \in \mathcal{U}$, il existe un élément $z_0 \in E$ qui soit invariant par f_u*

Si z est invariant par f_u, alors $z = f_u(z)$. Or,

$$z = f_u(z) \Longleftrightarrow z = \frac{az-b}{bz+a} \Longleftrightarrow bz^2 + az = az - b \Longleftrightarrow b\left(z^2+1\right) = 0$$

▷ Si $b = 0$, alors tout point $z \in E$ est fixe ; ce qui est normal puisque, si $b = 0$, alors $f_u = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$

▷ Si $b \neq 0$, alors $z^2 + 1 = 0$ et $z = i$ ou $z = -i$. Seul $i \in E$. Ainsi, pour $b \neq 0$, f_u admet un unique point invariant $z_0 = i$, lequel est invariant pour tout $u \in \mathcal{U}$

3. *On désigne par $\mathcal{B}$ l'ensemble des bijections f_u, autrement dit : $\mathcal{B} = \{f_u \text{ où } u \in \mathcal{U}\}$*

(a) *On considère l'application g de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{B}$ définie par :*

$$\begin{cases} g : \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{B} \\ \quad u & \longmapsto & g(u) = f_u \end{cases}$$

Quelles sont les conditions sur $u \in \mathcal{U}$ et $v \in \mathcal{U}$ pour que $g(u) = g(v)$?

Soient $u \in \mathcal{U}$ et $v \in \mathcal{U}$ tels que $g(u) = g(v)$; alors, pour tout $z \in E$, nous avons $f_u(z) = f_v(z)$. Comme $u \in \mathcal{U}$ et $v \in \mathcal{U}$, il existe $\theta_u \in \mathbb{R}$ et $\theta_v \in \mathbb{R}$ tels que $u = \cos\theta_u + i\sin\theta_u$ et $v = \cos\theta_v + i\sin\theta_v$

Donc :

$$\begin{aligned} f_u(z) = f_v(z) &\Longleftrightarrow \frac{\cos\theta_u z - \sin\theta_u}{\sin\theta_u z + \cos\theta_u} = \frac{\cos\theta_v z - \sin\theta_v}{\sin\theta_v z + \cos\theta_v} \\ &\Longleftrightarrow (\cos\theta_u z - \sin\theta_u)(\sin\theta_v z + \cos\theta_v) = (\cos\theta_v z - \sin\theta_v)(\sin\theta_u z + \cos\theta_u) \\ &\Longleftrightarrow \cos\theta_u \sin\theta_v z^2 + \cos\theta_u\cos\theta_v z - \sin\theta_u\sin\theta_v z - \sin\theta_u\cos\theta_v = \\ &\qquad \cos\theta_v\sin\theta_u z^2 + \cos\theta_v\cos\theta_u z - \sin\theta_v\sin\theta_u z - \sin\theta_v\cos\theta_u \\ &\Longleftrightarrow z^2(\cos\theta_u\sin\theta_v - \cos\theta_v\sin\theta_u) - (\sin\theta_u\cos\theta_v - \sin\theta_v\cos\theta_u) = 0 \\ &\Longleftrightarrow z^2\sin(\theta_u - \theta_v) + \sin(\theta_u - \theta_v) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \left(z^2+1\right)\sin(\theta_u - \theta_v) = 0 \end{aligned}$$

L'égalité $\left(z^2+1\right)\sin(\theta_u - \theta_v) = 0$ devant être vraie pour tout $z \in E$, nous devons donc avoir $\sin(\theta_u - \theta_v) = 0$.

Or, $\sin(\theta_u - \theta_v) = 0 \Longleftrightarrow \theta_u - \theta_v = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

⋆ Donc, on peut avoir $\theta_u = \theta_v + 2k\pi$ et donc $u = v$

⋆ Ou bien on peut avoir $\theta_u = \theta_v + \pi + 2k\pi$ et donc $u = -v$

Les conditions sur $u \in \mathcal{U}$ et $v \in \mathcal{U}$ pour que $g(u) = g(v)$ sont donc $u = v$ ou $u = -v$

(b) *Préciser $(f_u)^{-1}$ et montrer que $(f_u)^{-1} \in \mathcal{B}$*

Il suffit de regarder la question 2 pour voir que $(f_u)^{-1} = f_{u^{-1}} = f_{\overline{u}}$, et donc $(f_u)^{-1} \in \mathcal{B}$

(c) *Soit $u \in \mathcal{U}$ fixé. Trouver $v \in \mathcal{U}$ tel que $g(v) = (f_u)^{-1}$*

Nous avons donc $(f_u)^{-1} = f_{\overline{u}}$. Si $v \in \mathcal{U}$ est tel que $g(v) = (f_u)^{-1}$, alors $v = \overline{u}$ ou $v = -\overline{u}$

(d) *Montrer que l'identité de E, notée Id_E est un élément de $\mathcal{B}$ et quels sont les éléments $u \in \mathcal{U}$ tels que $g(u) = \mathrm{Id}_E$*

Nous avons remarqué que $f_1 = f_{-1} = \mathrm{Id}_E$, et conformément aux questions précédentes, les éléments $u \in \mathcal{U}$ tels que $g(u) = \mathrm{Id}_E$ sont donc $u = 1$ ou $u = -1$

(e) *Soient $u \in \mathcal{U}$ et $v \in \mathcal{U}$. Montrer que $f_u \circ f_v$ est un élément de $\mathcal{B}$*

Soient $u \in \mathcal{U}$ et $v \in \mathcal{U}$; il existe $\theta_u \in \mathbb{R}$ et $\theta_v \in \mathbb{R}$ tels que $u = \cos\theta_u + i\sin\theta_u$ et $v = \cos\theta_v + i\sin\theta_v$. Donc, pour $z \in E$:

$$\begin{aligned}
f_u \circ f_v(z) &= f_u(f_v(z)) \\
&= \frac{\cos\theta_u f_v(z) - \sin\theta_u}{\sin\theta_u f_v(z) + \cos\theta_u} \\
&= \frac{\cos\theta_u \left(\dfrac{\cos\theta_v z - \sin\theta_v}{\sin\theta_v z + \sin\theta_v}\right) - \sin\theta_u}{\sin\theta_u \left(\dfrac{\cos\theta_v z - \sin\theta_v}{\sin\theta_v z + \sin\theta_v}\right) + \cos\theta_u} \\
&= \frac{(\cos\theta_u\cos\theta_v - \sin\theta_u\sin\theta_v) z - (\cos\theta_u\sin\theta_v + \sin\theta_u\cos\theta_v)}{(\cos\theta_u\sin\theta_v + \sin\theta_u\cos\theta_v) z + (\cos\theta_u\cos\theta_v - \sin\theta_u\sin\theta_v)} \\
&= \frac{\cos(\theta_u + \theta_v) z - \sin(\theta_u + \theta_v)}{\sin(\theta_u + \theta_v) z + \cos(\theta_u + \theta_v)} \\
&= f_{uv}(z)
\end{aligned}$$

Comme $uv \in \mathcal{U}$, $f_{uv} \in \mathcal{B}$

(f) *En déduire la structure de l'ensemble $(\mathcal{B}, \circ)$*

Nous allons démontrer que $(\mathcal{B}, \circ)$ est un groupe commutatif

- ▷ Tout d'abord, la loi $\circ$ est associative et de composition interne
- ▷ $(\mathcal{B}, \circ)$ admet un élément neutre $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$
- ▷ Chaque élément $f_u \in \mathcal{B}$ admet un symétrique $(f_u)^{-1} = f_{u^{-1}} = f_{\overline{u}}$
- ▷ La loi $\circ$ est commutative car $f_u \circ f_v = f_{uv} = f_{vu} = f_v \circ f_u$

(g) *Démontrer que $g : (\mathcal{U}, \times) \longrightarrow (\mathcal{B}, \circ)$ est un homomorphisme de groupe. Est-ce un isomorphisme ?*

g est bien un homomorphisme, car $g(uv) = f_{uv} = f_u \circ f_v = g(u) \circ g(v)$. Mais, ce n'est pas un isomorphisme puisque g n'est pas injectif. Nous avons $\ker g = \{-1; +1\}$

4. *Dans cette question, nous nous plaçons dans le cas particulier où $u = i$*

C'est à dire que nous avons $f_u(z) = f_i(z) = -\dfrac{1}{z}$

(a) *On appelle $\Gamma = \left\{z = e^{i\theta} \text{ où } \theta \in]0; \pi[\right\}$. Quelle est l'image de Γ par f_i ?*

Γ est le demi-cercle supérieur de rayon 1 et donc les parties imaginaires sont strictement positives. Pour $z = e^{i\theta} \in \Gamma$, nous avons :

$$f_i\left(e^{i\theta}\right) = -\frac{1}{e^{i\theta}} = -e^{-i\theta} = e^{i\pi} \times e^{-i\theta} = e^{i(\pi - \theta)}$$

Comme $\theta \in]0; \pi[$, nous avons $\pi - \theta \in]0; \pi[$ et donc $f_i\left(e^{i\theta}\right) \in \Gamma$ ainsi $f_i(\Gamma) = \Gamma$ et Γ est donc globalement invariant par f_i

(b) *Soit $\theta_0 \in]0; \pi[$ fixé. On appelle $D(\theta_0) = \left\{\lambda e^{i\theta_0} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}^{*+}\right\}$. Donner l'image de $D(\theta_0)$ par f_i*

En fait, $D(\theta_0)$ est une demie-droite issue de l'origine. Pour $z = \lambda e^{i\theta_0} \in D(\theta_0)$, avec $\lambda > 0$, nous avons :

$$f_i\left(\lambda e^{i\theta_0}\right) = -\frac{1}{\lambda e^{i\theta_0}} = \frac{-1}{\lambda} e^{-i\theta_0} = \frac{1}{\lambda} \times e^{i\pi} \times e^{-i\theta_0} = \frac{1}{\lambda} \times e^{i(\pi - \theta_0)}$$

Nous pouvons donc écrire que $f_i(D(\theta_0)) = D(\pi - \theta_0)$. C'est une demie-droite, symétrique de $D(\theta_0)$ par rapport à l'axe des imaginaires purs.

La figure 9.18 visualise les différentes transformations.

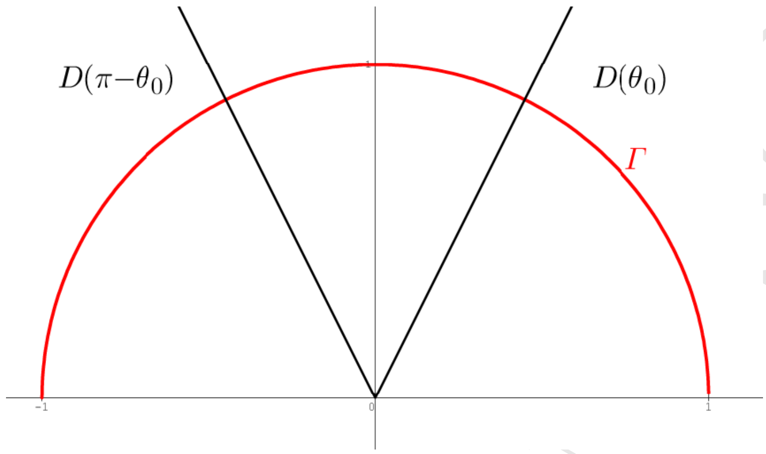


FIGURE 9.18 – Visualisations des transformations $f_i(z) = -\dfrac{1}{z}$

Exercice 48 :

Dans ce problème, on considère le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 de base $\{1, i\}$.
On désignera par $\mathcal{L}(\mathbb{C})$ l'ensemble des applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et par $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ l'ensembmle de tous les couples (s, t) de nombres complexes.
À tout couple $(s, t) \in \mathbb{C}^2$, on désignera par $f_{(s,t)}$ l'application suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_{(s,t)} : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f_{(s,t)}(z) = sz + t\overline{z} \end{array} \right.$$

1. *Montrer que, pour tout couple $(s, t) \in \mathbb{C}^2$, $f_{(s,t)} \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$ c'est à dire que pour tout $(s, t) \in \mathbb{C}^2$, $f_{(s,t)}$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire.*

   Voilà une question des plus simples.
   Soient $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} f_{(s,t)}(\lambda z_1 + \mu z_2) & = & s(\lambda z_1 + \mu z_2) + t\overline{(\lambda z_1 + \mu z_2)} \\ & = & s\lambda z_1 + s\mu z_2 + t\lambda \overline{z_1} + t\mu \overline{z_2} \\ & = & s\lambda z_1 + t\lambda \overline{z_1} + s\mu z_2 + t\mu \overline{z_2} \\ & = & \lambda(sz_1 + t\overline{z_1}) + \mu(sz_2 + t\overline{z_2}) \\ & = & \lambda f_{(s,t)}(z_1) + \mu f_{(s,t)}(z_2) \end{array}$$

   Nous venons de démontrer que $f_{(s,t)} \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$

2. *Réciproquement, démontrer que si $g \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$, il existe couple unique $(s, t) \in \mathbb{C}^2$ pour lequel nous avons $g = f_{(s,t)}$*

   Intéressons à la matrice de g dans la base $\{1, i\}$

$$M_{\{1,i\}}(g) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ avec } a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R},\ d \in \mathbb{R},$$

   De telle sorte que si $z = x + iy$,

$$z' = x' + iy' = g(z) = g(x + iy) = (ax + by) + i(cx + dy) = (ax + idy) + (by + icx)$$

   $\Rightarrow$ Nous avons :

$$ax = \left(\frac{a+d}{2}\right)x + \left(\frac{a-d}{2}\right)x \text{ et } dy = \left(\frac{a+d}{2}\right)y - \left(\frac{a-d}{2}\right)y$$

De telle sorte que :

$$ax + idy = \left(\frac{a+d}{2}\right) z + \left(\frac{a-d}{2}\right) \overline{z}$$

⇒ De même,

$$cx = \left(\frac{b+c}{2}\right) x - \left(\frac{b-c}{2}\right) x \text{ et } by = \left(\frac{b+c}{2}\right) y + \left(\frac{b-c}{2}\right) y$$

De telle sorte que :

$$by + icx = \left(\frac{b+c}{2}\right)(y+ix) + \left(\frac{b-c}{2}\right)(y-ix) = \left(\frac{b+c}{2}\right)(i\overline{z}) + \left(\frac{b-c}{2}\right)(-iz)$$

En additionnant, nous obtenons :

$$g(z) = \left[\left(\frac{a+d}{2}\right) - i\left(\frac{b-c}{2}\right)\right] z + \left[\left(\frac{a-d}{2}\right) + i\left(\frac{b+c}{2}\right)\right] \overline{z}$$

D'où nous obtenons :

$$\begin{cases} s = \left(\dfrac{a+d}{2}\right) - i\left(\dfrac{b-c}{2}\right) \\ t = \left(\dfrac{a-d}{2}\right) + i\left(\dfrac{b+c}{2}\right) \end{cases}$$

Donc, toutes les applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ sont du type $f_{(s,t)}(z) = sz + t\overline{z}$

3. *Calculer s et t en fonction de $g(1)$ et $g(i)$. On dira alors que le couple $(s,t) \in \mathbb{C}^2$ représente g.*

Nous avons, très clairement : $g(1) = s + t$ et $g(i) = si - ti$, d'où nous tirons :

$$\begin{cases} s = \dfrac{g(1) - ig(i)}{2} \\ t = \dfrac{g(1) + ig(i)}{2} \end{cases}$$

4. *Pour $s \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{C}$, $u \in \mathbb{C}$ et $v \in \mathbb{C}$, démontrer qu'il existe donc un couple unique $(p,q) \in \mathbb{C}^2$ tel que $f_{(s,t)} \circ f_{(u,v)} = f_{(p,q)}$.*
Calculer p et q en fonction de s, t, u et v.

⇒ La composition de 2 endomorphismes est aussi un endomorphisme. Ainsi, si $f_{(s,t)} \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$ et si $f_{(u,v)} \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$, alors $f_{(s,t)} \circ f_{(u,v)} \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$.
Les applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{C}$ étant du type $f_{(s,t)}$, il existe donc donc un couple unique $(p,q) \in \mathbb{C}^2$ tel que $f_{(s,t)} \circ f_{(u,v)} = f_{(p,q)}$

⇒ Soit $z \in \mathbb{C}$; alors :

$$\begin{aligned} f_{(s,t)} \circ f_{(u,v)}(z) &= sf_{(u,v)}(z) + t\overline{f_{(u,v)}(z)} \\ &= s(uz + v\overline{z}) + t\overline{(uz + v\overline{z})} \\ &= suz + sv\overline{z} + t\overline{u}\overline{z} + t\overline{v}z \\ &= (su + t\overline{v}) z + (sv + t\overline{u}) \overline{z} \end{aligned}$$

Donc $p = su + t\overline{v}$ et $q = sv + t\overline{u}$, c'est à dire que :

$$f_{(s,t)} \circ f_{(u,v)} = f_{(su+t\overline{v}, sv+t\overline{u})}$$

5. *Déterminer tous les couples $(s,t) \in \mathbb{C}^2$ pour lesquels l'application $f_{(s,t)}$ est involutive.*

Les applications $f_{(s,t)}$ sont involutives si et seulement si $f_{(s,t)} \circ f_{(s,t)} = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$. Nous avons :
⋆ $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}} = f_{(1,0)}$
⋆ $f_{(s,t)} \circ f_{(s,t)} = f_{\left(s^2+t\overline{t}, st+t\overline{s}\right)}$
Et donc nous avons le système :

$$\begin{cases} s^2 + |t|^2 = & 1 \\ t(s + \overline{s}) = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} s^2 + |t|^2 = & 1 \\ 2t\,\mathrm{Re}(s) = & 0 \end{cases}$$

Nous discutons de ce système :

→ Si $t = 0$, alors $s^2 = 1$, c'est à dire que $s = 1$ ou $s = -1$, et les applications involutives sont donc :

$$f_{(1,0)} = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}} \text{ et } f_{(-1,0)} = -\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$$

→ Si $\mathrm{Re}\,(s) = 0$, alors $s = i\lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et de l'identité $s^2 + |t|^2 = 1$, nous tirons

$$-\lambda^2 + |t|^2 = 1 \iff \lambda^2 = |t|^2 - 1$$

Et donc $|t| \geqslant 1$
D'où nous trouvons $s = i\sqrt{|t|^2 - 1}$ et $t \in \mathbb{C}$ avec $|t| \geqslant 1$ ou $s = -i\sqrt{|t|^2 - 1}$ et $t \in \mathbb{C}$ avec $|t| \geqslant 1$, et les applications involutives sont :

$$f_{\left(i\sqrt{|t|^2-1},t\right)} \text{ et } f_{-\left(i\sqrt{|t|^2-1},t\right)} \text{ avec } t \in \mathbb{C} \text{ et } |t| \geqslant 1$$

→ Quelques cas particuliers :
- ⋆ Si $t = 1$, nous obtenons $f_{(0,1)}\,(z) = \overline{z}$ et nous retrouvons une involution classique, tout comme pour $t = -1$ où $f_{(0,-1)}\,(z) = -\overline{z}$
- ⋆ Si $t = i$, nous obtenons $f_{(0,i)}\,(z) = i\overline{z}$ et si $t = -i$, nous obtenons $f_{(0,-i)}\,(z) = -i\overline{z}$ qui sont des involutions classiques
- ⋆ Si $t = 1 + i$, alors $|t|^2 = 2$ et $s = \pm i$.
  - Si $s = i$, alors $f_{(i,1+i)}\,(z) = iz + (1+i)\,\overline{z}$
  - Si $s = -i$, alors $f_{(-i,1+i)}\,(z) = -iz + (1+i)\,\overline{z}$

  Démontrer que ce sont des involutions relève d'un calcul élémentaire, très simple.

6. *Montrer que l'application $f_{(s,t)}$ est bijective si et seulement si $|s| \neq |t|$*

La matrice de $f_{(s,t)}$ dans la base $\{1; i\}$ est donnée par

$$M_{\{1,i\}}\left(f_{(s,t)}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ avec } a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R},\ d \in \mathbb{R},$$

avec

$$\begin{cases} s = \left(\dfrac{a+d}{2}\right) - i\left(\dfrac{b-c}{2}\right) \\ t = \left(\dfrac{a-d}{2}\right) + i\left(\dfrac{b+c}{2}\right) \end{cases}$$

$f_{(s,t)}$ est bijective si et seulement si le déterminant de la matrice $ad - bc \neq 0$. Or :

$$\begin{cases} |s|^2 = \left(\dfrac{a+d}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{b-c}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2+d^2+2ab}{4} + \dfrac{b^2+c^2-2bc}{4} \\ |t|^2 = \left(\dfrac{a-d}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{b+c}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2+d^2-2ab}{4} + \dfrac{b^2+c^2+2bc}{4} \end{cases}$$

De telle sorte que $|s|^2 - |t|^2 = ad - bc$.
Ainsi, l'application $f_{(s,t)}$ est bijective si et seulement si $|s|^2 - |t|^2 \neq 0 \iff |s| \neq |t|$

7. *Trouver $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\left(f_{(s,t)}\right)^{-1} = f_{(u,v)}$*

Nous avons $f_{(s,t)} \circ f_{(u,v)} = f_{(su+t\overline{v},sv+t\overline{u})}$; comme $f_{(1,0)} = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$, il nous faut trouver $u \in \mathbb{C}$ et $v \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\begin{cases} su + t\overline{v} = & 1 \\ sv + t\overline{u} = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} su + t\overline{v} = & 1 \\ \overline{t}u + \overline{s}\overline{v} = & 0 \end{cases}$$

C'est un système de Cramer où les inconnues sont u et $\overline{v}$. Nous avons :

$$\delta = \begin{vmatrix} s & t \\ \overline{t} & \overline{s} \end{vmatrix} = |s|^2 - |t|^2 \qquad \delta_u = \begin{vmatrix} 1 & t \\ 0 & \overline{s} \end{vmatrix} = \overline{s} \qquad \delta_{\overline{v}} = \begin{vmatrix} s & 1 \\ \overline{t} & 0 \end{vmatrix} = -\overline{t}$$

D'où $u = \dfrac{\delta_u}{\delta} = \dfrac{\overline{s}}{|s|^2 - |t|^2}$ et $\overline{v} = \dfrac{\delta_{\overline{v}}}{\delta} = \dfrac{-\overline{t}}{|s|^2 - |t|^2}$ d'où $v = \dfrac{-t}{|s|^2 - |t|^2}$

Deuxième partie

Analyse

Chapitre 10

Les nombres réels

Ce chapitre représente la base de ce qui doit être connu sur les nombres réels. Beaucoup de résultats seront admis. Ils seront démontrés dans des parties de L_1 ou de L_3

10.1 Relation d'ordre

Cette partie complète et surtout adapte à $\mathbb{R}$ la notion de relation d'ordre vue dans le chapitre 1, et définie en 1.10.6. On utilise, sans la définir vraiment, la relation d'ordre naturel « $\leqslant$ ».
On admettra que la relation d'ordre « $\leqslant$ » est une relation d'ordre total

10.1.1 Définition de majorant et de minorant

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$

1. $a \in \mathbb{R}$ est un majorant de A, si et seulement si $(\forall x \in A)\,(x \leqslant a)$.
   Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est dite majorée, si elle admet un majorant.
2. $b \in \mathbb{R}$ est un minorant de A, si et seulement si $(\forall x \in A)\,(b \leqslant x)$.
   Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est dite minorée, si elle admet un minorant
3. Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est dite bornée, si elle est à la fois majorée et minorée

Exemple 1 :

1. Si $A = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } -3 \leqslant x < 3\}$, 3 est un majorant de A, et c'est le plus petit des majorants ; -3 est un minorant, et on a $-3 \in A$ alors que $3 \notin A$
2. Dans $\mathbb{R}$, muni de la relation d'ordre total $\leqslant$, un majorant de l'intervalle $I =]0, +1]$ est $+1$, mais aussi $+2$. En fait, l'ensemble des majorants de I est l'intervalle $[+1; +\infty[$
3. Pour ce même intervalle $I =]0, +1]$, un minorant est 0, un autre est -1, et l'ensemble des minorants est donné par l'intervalle $]-\infty, 0]$
4. On doit remarquer que $+1 \in I$, alors que $0 \notin I$

10.1.2 Définition d'élément maximum, d'élément minimum

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$

1. $M \in A$ est appelé élément maximum de A, si et seulement si $(\forall x \in A)\,(x \leqslant M)$.
2. $m \in A$ est appelé élément minimum de A, si et seulement si $(\forall x \in A)\,(m \leqslant x)$

Remarque 1 :

1. Il faut remarquer que les éléments maximaux ou **minimaux sont dans** A

2. L'élément maximum ou l'élément minimum peuvent ne pas exister.
   Etudier l'existence de l'élément maximum ou de l'élément minimum dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$**, où** $A = \{x \in \mathbb{R} \textbf{ tq } -3 \leqslant x < 3\} = [-3; +3[$
   M est élément maximum si $M \in A$, et si, pour tout $x \in A$, $x \leqslant M$.
   Soit donc M l'élément maximum de A.
   Alors, $M < +3$. Soit $X = \dfrac{M+3}{2}$; alors, $M < X$ et $X < +3$, donc $X \in A$, et M n'est plus le plus grand élément de A. Il y a donc contradiction.
   Ainsi, A n'admet pas de plus grand élément.
   Par contre, A admet un plus petit élément qui est -3

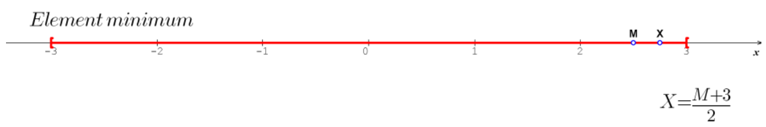


FIGURE 10.1 – Schema représentant M et X

10.1.3 Proposition

Si l'élément maximum ou l'élément minimum existe, il est unique.

Démonstration

Nous ne faisons la démonstration que dans $\mathbb{R}$; l'étendre à un autre ensemble ordonné ne pose aucun problème.
Soit $A \subset \mathbb{R}$ qui possède 2 éléments maximaux M_1 et M_2
- Comme $M_1 \in A$ et que M_2 est un élément maximal, $M_1 \leqslant M_2$
- De même, comme $M_2 \in A$ et que M_1 est un élément maximal, $M_2 \leqslant M_1$

De l'antisymétrie de la relation d'ordre, $M_1 = M_2$
La démonstration de l'unicité de l'élément minimal est identique

10.1.4 Définition de la borne supérieure, de la borne inférieure

1. Soit $A \subset \mathbb{R}$, une partie majorée de $\mathbb{R}$.
   On appelle borne supérieure de A, le plus petit des majorants de A, et on le note : $\sup A$
2. Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie minorée de $\mathbb{R}$.
   On appelle borne inférieure de A, le plus grand des minorants de A, et on le note : $\inf A$

Exemple 2 :

Intéressons nous à l'ensemble des nombres réels :
1. Considérons : $[0, +1]$:
   - Sa borne inférieure est 0, de même que le plus petit élément est 0
   - Sa borne supérieure est $+1$, de même que le plus grand élément est $+1$
2. Quant à l'ensemble $]0, +1[$
   - Sa borne inférieure est 0, mais le plus petit élément n'existe pas.
   - Sa borne supérieure est $+1$, et le plus grand élément n'existe pas
3. Pour l'ensemble $[0, +\infty[$:
   - Sa borne inférieure est 0, de même que le plus petit élément est 0
   - Par contre, ni sa borne supérieure, ni le plus grand élément n'existent.
4. Et pour l'ensemble $]-\infty, +1[$:
   - Ni sa borne inférieure, ni le plus petit élément n'existent.
   - Sa borne supérieure est $+1$, mais il n'y a pas de plus grand élément.

Exercice 1 :

Etudier les bornes supérieures, bornes inférieures, plus grands éléments, plus petits éléments de l'ensemble $A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

Résolution

Soit $y \in A$

Il existe alors $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $y = \frac{1}{m}$

1. Nous avons $\frac{1}{m} \leqslant 1$, et 1 apparaît comme un majorant de A. $1 \in A$ et 1 est donc à la fois borne supérieure et plus grand élément de A.
2. De même, $y > 0$ et 0 apparaît comme un minorant de A, mais $0 \notin A$
   (a) <u>A n'admet pas de plus petit élément</u>
   Supposons, au contraire, que A admette un plus petit élément, et appelons le x. Comme $x \in A$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = \frac{1}{m}$, et nous devons avoir, pour tout $y \in A$, $x \leqslant y$. Or, en prenant $x_1 = \frac{1}{m+1}$, nous avons $x_1 < x$, et x ne peut pas être le plus petit élément.
   (b) <u>0 est la borne inférieure de A</u>
   Nous avons déjà remarqué que 0 est un minorant de A. Montrons que c'est le plus grand. Soit $\varepsilon > 0$ soit un minorant de A. Il existe un entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{m} < \varepsilon$; il suffit de choisir $m > \frac{1}{\varepsilon} + 1$ et m entier, et aucun $\varepsilon > 0$ ne peut être minorant de A

10.1.5 Exercices

Exercice 2 :

1. Etudier l'existence de l'élément maximum ou l'élément minimum dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$, où

$$A = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } -1 \leqslant x < +1\} = [-1; +1[$$

2. On considère l'ensemble $X = \left\{x_n = \frac{1}{n} + (-1)^n \text{ où } n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Cet ensemble a-t-il un plus grand élément ? Un plus petit élément ? Une borne supérieure ? Une borne inférieure ?

Exercice 3 :

Déterminer les majorants et les minorants pour les ensembles A suivants, et trouver éventuellement les bornes de A

1. $A = \{2n^2 - 9n + 4 \text{ où } n \in \mathbb{N}\}$
2. $A = \left\{\frac{n^2 + 2n}{n^2 + 4} \text{ où } n \in \mathbb{N}\right\}$
3. $A = \left\{\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}, n \in \mathbb{N}\right\}$

Exercice 4 :

Pour 2 sous ensembles de $\mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$, non vides et bornés, on note :

$$-A = \{-x \text{ avec } x \in A\} \text{ et } A + B = \{x + y \text{ avec } x \in A \text{ et } y \in B\}$$

1. Calculer $\inf(-A)$ et $\sup(-A)$ en fonction de $\inf(A)$ et $\sup(A)$
2. Calculer $\inf(A+B)$ et $\sup(A+B)$ en fonction de $\inf(A)$, $\inf(B)$, $\sup(B)$ et $\sup(A)$
3. Soit $AB = \{xy \text{ avec } x \in A \text{ et } y \in B\}$. Que pouvons nous dire de $\inf(AB)$ et $\sup(AB)$?

10.2 Insuffisance des rationnels

Introduction

On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels, c'est à dire $\mathbb{Q} = \left\{x = \frac{a}{b} \text{ où } a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{N}^*\right\}$. On note $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$

On ne retient, en fait, que les fractions irréductibles, c'est à dire les rationnels $x = \dfrac{a}{b}$, tels que pgcd $(a, b) = 1$[1] ; en fait, le rationnel $x = \dfrac{a}{b}$ tel que pgcd $(a, b) = 1$ est le représentant de la classe d'équivalence dans la relation d'équivalence définie sur l'ensemble des fractions par :

$$\left(\frac{a}{b} \,\mathrm{Re}\, \frac{c}{d}\right) \Leftrightarrow (ad = bc)$$

Chose remarquable pour $\mathbb{Q}$:
- L'addition est interne dans $\mathbb{Q}$: si $r \in \mathbb{Q}$ et $s \in \mathbb{Q}$, $r + s \in \mathbb{Q}$
- La multiplication est interne dans $\mathbb{Q}$: si $r \in \mathbb{Q}$ et $s \in \mathbb{Q}$, $r \times s \in \mathbb{Q}$
- Chaque élément non nul de $r \in \mathbb{Q}^*$, admet un inverse $\dfrac{1}{r} \in \mathbb{Q}^*$

$\mathbb{Q}$ a donc une structure de corps commutatif

Toutes les équations dans $\mathbb{Q}$ n'ont pas de solution dans $\mathbb{Q}$

1. L'équation $x^2 = 16$ est une équation dans $\mathbb{Q}$ qui a des solutions dans $\mathbb{Q}$; ces solutions sont : $x = +4$ et $x = -4$; de même, l'équation $x^3 = 8$ est une équation dans $\mathbb{Q}$ qui a des *(en fait une seule)* solutions dans $\mathbb{Q}$ *(c'est $x = +2$)*
2. Par contre, l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$

10.2.1 Proposition

L'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$

Démonstration

En effet, supposons le contraire, c'est à dire qu'il existe un rationnel $x_0 = \dfrac{p}{q}$ tel que pgcd $(p, q) = 1$ et qui soit solution de $x^2 = 2$.

Nous avons alors : $\left(\dfrac{p}{q}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$; ce qui montre que p^2 est pair, et **donc que p aussi est pair.**

Nous avons alors $p = 2k$, et, d'après l'équation ci-dessus,

$$p^2 = 2q^2 \Leftrightarrow (2k)^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2k^2 = q^2$$

Ce qui montre que, cette fois ci, q est pair, et il y a contradiction avec l'hypothèse pgcd $(p, q) = 1$
Donc, les solutions de $x^2 = 2$ ne sont pas rationnelles.

Exemple 3 :

Voici une généralisation de la proposition ci-dessus :

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$. Montrer que $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$

Résolution

Soit $n \in \mathbb{N}$ et on s'intéresse à $\sqrt{n}$:
On peut avoir $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$ *(exemple $\sqrt{9} = 3$)*, mais, que se passe-t-il si $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$? *(par exemple, est ce que $\sqrt{3}$ peut se mettre sous forme de fraction ?)*
Nous allons donc montrer que si $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$, alors $\sqrt{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, c'est à dire que $\sqrt{n}$ n'est pas rationnel, autrement dit ne peut pas se mettre sous forme de fraction.
Supposons $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$, mais que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$
On écrit donc $\sqrt{n} = \dfrac{a}{b}$, avec pgcd $(a, b) = 1$.
En élevant au carré, nous avons $n = \dfrac{a^2}{b^2}$, c'est à dire $a^2 = nb^2$; cette égalité montre que b divise a^2 *(Il suffit de voir que $a^2 = b \times (nb)$)*

1. C'est à dire tels que a et b n'aient pas de diviseurs communs. Voir le cours d'arithmétique

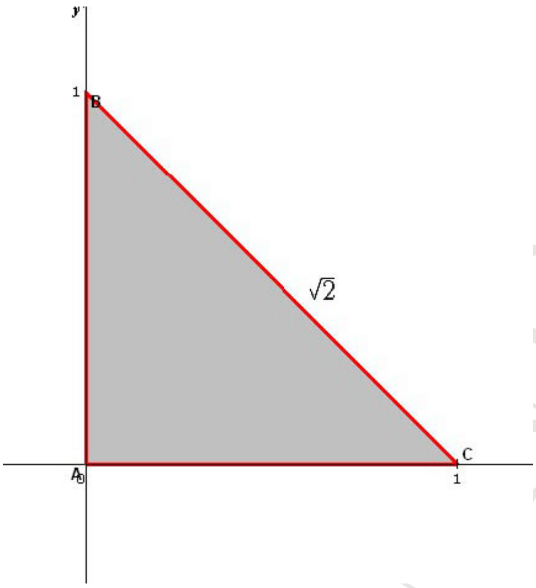


FIGURE 10.2 – Un triangle rectangle isocèle qui a deux côtés de longueur 1 a une hypothénuse de longueur $\sqrt{2}$

Donc, d'après le lemme de Gauss [2], que b divise a : nous avons $a = bm$ avec $m \in \mathbb{N}$, ce qui montre que $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$.
Nous venons de montrer l'implication : $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{n} \in \mathbb{N}$; en prenant la contrapposée, nous avons $\sqrt{n} \notin \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$

Remarque 2 :

Les exemples précédents nous conduisent à construire un nouvel ensemble dans lequel les équations précédentes auront une ou des solutions.
Nous ne faisons pas de construction explicite de $\mathbb{R}$

10.2.2 Axiôme : Existence de $\mathbb{R}$

On admet l'existence d'un ensemble non vide $\mathbb{R}$, appelé ensemble des nombres réels, muni d'une addition, d'une multiplication et d'une relation d'ordre total.

Remarque 3 :

Les éléments de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont appelés nombres irrationnels ; exemple : $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 5 :

1. Montrer que $\dfrac{\ln 5}{\ln 2}$ est un nombre irrationnel

   Corrigé

   Supposons que $\dfrac{\ln 5}{\ln 2} \in \mathbb{Q}$, alors il existe 2 entiers $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\dfrac{\ln 5}{\ln 2} = \dfrac{p}{q}$, c'est à dire, $q \ln 5 = p \ln 2$, et, en utilisant les propriétés du logarihme, $\ln 5^p = \ln 2^q \iff 5^p = 2^q$
   Ce qui est impossible ; donc $\dfrac{\ln 5}{\ln 2} \notin \mathbb{Q}$

2. En déduire que $\dfrac{\ln 10}{\ln 2}$ est aussi irrationnel.

2. Revoir le cours d'arithmétique

Corrigé

Comme précédemment, supposons que $\dfrac{\ln 10}{\ln 2} \in \mathbb{Q}$, alors il existe 2 entiers $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\dfrac{\ln 10}{\ln 2} = \dfrac{p}{q}$. Or, d'après les propriétés du logarithme, $\ln 10 = \ln 5 + \ln 2$, et donc, $\dfrac{\ln 10}{\ln 2} = \dfrac{\ln 5 + \ln 2}{\ln 2} = 1 + \dfrac{\ln 5}{\ln 2}$.

D'après le supposition que nous avons faite, nous avons : $\dfrac{\ln 5}{\ln 2} = \dfrac{p}{q} - 1$. Comme l'addition est interne dans $\mathbb{Q}$, nous avons $\dfrac{p}{q} - 1 \in \mathbb{Q}$ et donc $\dfrac{\ln 5}{\ln 2} \in \mathbb{Q}$, ce qui est en contradiction avec la question précédente. Donc $\dfrac{\ln 10}{\ln 2} \notin \mathbb{Q}$

10.2.3 Propriété :

$\mathbb{R}$ est un corps commutatif totalement ordonné c'est à dire que

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \forall y \in \mathbb{R}, \text{ alors } x \leqslant y \text{ ou bien } y \leqslant x$$

De plus,

— La relation d'ordre est compatible avec l'addition,
Ce qui veut dire que :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z$$

— La relation d'ordre est compatible avec la multiplication par un nombre positif,
Ce qui veut dire que :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (x \leqslant y) \text{ et } (z \geqslant 0) \Rightarrow xz \leqslant yz$$

Remarque 4 :

1. Nous avons, bien sûr, pour tout réel x et y
   - $(x < y) \Leftrightarrow (x \leqslant y)$ et $(x \neq y)$
   - $(x \leqslant y) \Leftrightarrow (y \geqslant x)$
   - $(x > y) \Leftrightarrow (y < x)$
2. On pose $\mathbb{R}^{*+} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } x > 0\}$ et $\mathbb{R}^{+} = \mathbb{R}^{*+} \cup \{0\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } x \geqslant 0\}$
3. De même, on pose $\mathbb{R}^{*-} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } x < 0\}$ et $\mathbb{R}^{-} = \mathbb{R}^{*-} \cup \{0\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } x \leqslant 0\}$

10.2.4 Conséquences de la relation d'ordre

On admet, les propiétés suivantes vraies pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$(x + z \leqslant y + z) \Leftrightarrow (x \leqslant y)$	$(x + z < y + z) \Leftrightarrow (x < y)$
$(x \leqslant y) \Leftrightarrow (-y \leqslant -x)$	$(x < y) \Leftrightarrow (-y < -x)$
$(x \leqslant 0) \Leftrightarrow (-x \geqslant 0)$	$(x < 0) \Leftrightarrow (-x > 0)$
$(x > 0) \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{x} > 0\right)$	$(x < 0) \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{x} < 0\right)$
$(0 < x < y) \Leftrightarrow \left(0 < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}\right)$	$(x < y < 0) \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x} < 0\right)$
$[(x \leqslant y) \text{ et } (z > 0)] \Leftrightarrow (xz \leqslant yz)$	$x^2 \geqslant 0$
$[(x < y) \text{ et } (z > 0)] \Leftrightarrow (xz < yz)$	$[(x < y) \text{ et } (z < 0)] \Leftrightarrow (xz > yz)$

10.2.5 Exposants entiers relatifs

Pour tout réel non nul x, et tout entier relatif strictement négatif m, on pose $x^m = \left(x^{-m}\right)^{-1}$
Nous avons ainsi défini $x^m = \left(x^{-m}\right)^{-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $m \in \mathbb{Z}$

10.2.6 Propriétés des exposants

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et tout $(n, p) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, nous avons :

1. $(xy)^n = x^n y^n$
2. $x^n x^p = x^{n+p}$
3. $(x^n)^p = x^{np}$
4. $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$
5. $\dfrac{x^n}{x^p} = x^{n-p}$

10.2.7 Exercices

Exercice 6 :

Les phrases suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Le produit d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel
2. La somme de deux irrationnels est irrationnelle
3. Le produit de deux irrationnels est irrationnel
4. La somme d'un nombre irrationnel et d'un nombre rationnel est irrationnelle

Exercice 7 :

Soit r un rationnel et x un irrationnel. Montrer que $r + x$ et rx sont irrationnels

Exercice 8 :

X et Y sont des rationnels positifs, tels que $\sqrt{X} \notin \mathbb{Q}$; montrer que $\sqrt{X} + \sqrt{Y} \notin \mathbb{Q}$

Exercice 9 :

Montrer que $\log_{10}(2)$ n'est pas rationnel

Exercice 10 :

1. Démontrer que,quels que soient les nombres rationnels x et y :

$$\left(x + y\sqrt{2} = 0\right) \Longrightarrow (x = y = 0)$$

   En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{Q}$, tout $y \in \mathbb{Q}$, tout $x' \in \mathbb{Q}$ et tout $y' \in \mathbb{Q}$

$$\left(x + y\sqrt{2} = x' + y'\sqrt{2}\right) \Longrightarrow (x = x' \text{ et } y = y')$$

2. On appelle $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ l'ensemble :

$$\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{x + y\sqrt{2} \text{ où } x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q}\right\}$$

   Démontrer que $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$

3. On considère un homomorphisme Φ du corps $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ dans lui même
   (a) Démontrer que, s'il existe $r \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ avec $r \neq 0$ tel que $\Phi(r) \neq 0$, alors $\Phi(1) = 1$
   (b) En déduire alors que, pour tout $a \in \mathbb{Q}$, $\Phi(a) = a$
   (c) Quelle est la laleur de $\left(\Phi\left(\sqrt{2}\right)\right)^2$

(d) Démontrez que les seuls homomorphisme Φ de $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ dans lui même et distincts de l'application nulle dont l'application identique et l'isimorphisme :

$$\begin{cases} \Phi : \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] \\ x + y\sqrt{2} & \longmapsto & x - y\sqrt{2} \end{cases}$$

10.3 Intervalles de $\mathbb{R}$

10.3.1 Définition d'intervalles

1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. On définit l'ensemble $[a; b]$ par :

$$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } a \leqslant x \leqslant b\}$$

2. Un <u>intervalle</u> non vide de $\mathbb{R}$ est un sous ensemble $I \subset \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in I$ et tout $y \in I$, nous avons $[x; y] \subset I$

10.3.2 Définition d'ensemble convexe

On dit qu'un ensemble $X \subset \mathbb{R}$ est un convexe, si et seulement

$$(\forall (x, y) \in X \times X) \quad (\forall \lambda \in [0, 1]) \quad (\lambda x + (1 - \lambda) y \in X)$$

10.3.3 Proposition

1. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$; on suppose $x \leqslant y$.
L'ensemble $A = \{u \in \mathbb{R} \text{ tels que } \exists \lambda \in [0; 1] \text{ tel que } u = \lambda x + (1 - \lambda) y\}$ est convexe et $A = [x; y]$
2. Une partie $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, si et seulement si, c'est une partie convexe de $\mathbb{R}$, c'est à dire si et seulement

$$(\forall (x, y) \in I \times I) \quad ([x, y] \subset I)$$

<u>**Démonstration**</u>

1. **Démonstration du premier point**
   - ▷ <u>Démontrons que A est convexe</u>
   Soient $u \in A$, $v \in A$ et $\mu \in [0; 1]$. Nous allons montrer que $\mu u + (1 - \mu) v \in A$
   Comme $u \in A$, il existe $\lambda_u \in [0; 1]$ tel que $u = \lambda_u x + (1 - \lambda_u) y$; de même,$v = \lambda_v x + (1 - \lambda_v) y$
   Donc :

$$\begin{aligned} \mu u + (1 - \mu) v = & \mu [\lambda_u x + (1 - \lambda_u) y] + (1 - \mu) [\lambda_v x + (1 - \lambda_v) y] \\ = & [\mu \lambda_u + (1 - \mu) \lambda_v] x + [\mu (1 - \lambda_u) + (1 - \mu) (1 - \lambda_v)] \\ = & [\mu \lambda_u + (1 - \mu) \lambda_v] x + [\mu - \mu \lambda_u + 1 - \lambda_v - \mu + \mu \lambda_v] y \\ = & [\mu \lambda_u + (1 - \mu) \lambda_v] x + [1 - (\mu \lambda_u + (1 - \mu) \lambda_v)] y \end{aligned}$$

   Donc, $\mu u + (1 - \mu) v \in A$ et A est convexe
   - ▷ <u>Démontrons que $A = [x; y]$</u>
     - <u>Tout d'abord, $A \subset [x; y]$</u>
     Soit $u \in A$; alors $u = \lambda x + (1 - \lambda) y$ où $\lambda \in [0; 1]$. Or :

$$u - x = \lambda x + (1 - \lambda) y - x = (1 - \lambda) (y - x) \geqslant 0$$

     Donc $u \geqslant x$.
     On démontrait de même que $u \leqslant y$ et donc $u \in [x; y]$

— Réciproquement, montrons que $[x; y] \subset A$
Soit $u \in [x; y]$, c'est à dire que $x \leqslant u \leqslant y$. Il faut trouver $\lambda_u \in [0; 1]$ tel que $u = \lambda_u x + (1 - \lambda_u) y$. S'il existe, nous avons $\lambda_u = \dfrac{u-y}{x-y}$.
Clairement, nous avons $\dfrac{u-y}{x-y} \geqslant 0$ et donc $\lambda_u \geqslant 0$.
D'autre part, $\dfrac{u-y}{x-y} - 1 = \dfrac{u-y-(x-y)}{x-y} = \dfrac{u-x}{x-y} \leqslant 0$ et donc $\lambda_u \leqslant 1$
Ainsi, $u \in A$ et $[x; y] \subset A$

Donc $[x; y] = A$

2. **Pour le second point**
   Le second point est la redite du premier : un intervalle de $\mathbb{R}$ est convexe, et un convexe est un intervalle

10.3.4 Notations

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, on définit les ensembles suivants qui sont des intervalles de $\mathbb{R}$:

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}$ tq $a \leqslant x \leqslant b\}$	$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}$ tq $a < x < b\}$
$]a, b] = \{x \in \mathbb{R}$ tq $a < x \leqslant b\}$	$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}$ tq $a \leqslant x < b\}$
$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}$ tq $a \leqslant x\}$	$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}$ tq $a < x\}$
$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}$ tq $x \leqslant b\}$	$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R}$ tq $x < b\}$

Exercice 11 :

Démontrer, par exemple que $[a, b[$ est un intervalle

Exercice 12 :

1. Soit $c : [0; 1] \longrightarrow [a, b]$ une fonction définie pour tout $t \in [0; 1]$ par $c(t) = (1-t)a + tb$. Montrer que c est une bijection et calculer c^{-1}
2. Trouver une bijection de $]0; 1[$ dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}; +\dfrac{\pi}{2}\right[$
3. En déduire une bijection de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$

10.3.5 Valeur absolue

On appelle valeur absolue de x le nombre $|x| = \max\{x, -x\}$
On a donc :

— Si $x \geqslant 0$, alors $|x| = x$

— Si $x \leqslant 0$, alors $|x| = -x$

Remarque 5 :

Voici un petit programme Python, définissant une fonction retournant la valeur absolue d'un nombre réel :

```
def abs(x):
        if x<0:
                return -x
        else :
                return x
```

10.3.6 Propriétés de la valeur absolue

1. $(x = 0) \Leftrightarrow (|x| = 0)$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geqslant 0$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}^+$,

   (a) $(|x| = \alpha) \Leftrightarrow x \in \{\alpha, -\alpha\}$

   (b) $(|x| \leqslant \alpha) \Leftrightarrow x \in [-\alpha, \alpha]$

   (c) $(|x| < \alpha) \Leftrightarrow x \in]-\alpha; \alpha[$

   (d) $(|x| \geqslant \alpha) \Leftrightarrow x \in]-\infty; -\alpha] \cup [\alpha; +\infty[$

   (e) $(|x| > \alpha) \Leftrightarrow x \in]-\infty; -\alpha[\cup]\alpha; +\infty]$

4. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, nous avons $|xy| = |x|\,|y|$
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, nous avons $\left|\dfrac{1}{x}\right| = \dfrac{1}{|x|}$
6. En généralisant : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $|x^n| = (|x|)^n$
7. De même, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, et tout $n \in \mathbb{N}$ $\dfrac{1}{|x^n|} = \dfrac{1}{(|x|)^n}$
8. $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\left(x^2 = y^2\right) \Leftrightarrow (|x| = |y|)$
9. $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\left(x^2 \leqslant y^2\right) \Leftrightarrow (|x| \leqslant |y|)$

Démonstration

La démonstration est simple et est laissée au lecteur

10.3.7 Ensemble borné

Soit $A \subset \mathbb{R}$.
A est borné, si et seulement si il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in A$, $|x| \leqslant M$

Démonstration

1. Il est clair que, si A est tel que pour tout $x \in A$, $|x| \leqslant M$, cette inégalité est équivalente à $-M \leqslant x \leqslant M$, et donc que A est borné.
2. Supposons A borné. Il existe alors a et b tels que, pour tout $x \in A$, $a \leqslant x \leqslant b$. En posant $M = \max\{|a|, |b|\}$, nous avons alors $-M \leqslant x \leqslant M$, ce qui est équivalent à $|x| \leqslant M$

Remarque 6 :

Il est évident que le M de 10.3.7 dépend de A.

10.3.8 Inégalité triangulaire

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, nous avons l'inégalité suivante, appelée inégalité triangulaire

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad |x + y| \leqslant |x| + |y|}$$

2. Dans l'inégalité précédente, nous avons l'égalité

$$|x + y| = |x| + |y|$$

si, et seulement si x et y sont de même signe.

Démonstration

Démontrons l'inégalité triangulaire
Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, alors nous avons :

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x| \text{ et } -|y| \leqslant y \leqslant |y|$$

Et en additionnant :

$$-|x| - |y| \leqslant x + y \leqslant |x| + |y|$$

D'où $|x + y| \leqslant |x| + |y|$

10.3.9 Généralisation

Pour tout réel $x_1, \cdots, x_n$, nous avons :

1. $\left|\prod_{k=1}^{n} x_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |x_k|$
2. $\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|$, et on a l'égalité $\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$ si et seulement si, tous les $x_1, \cdots, x_n$ sont de même signe.

Démonstration

Une récurrence simple démontre ces généralisations

Exercice 13 :

Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$ $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$

10.3.10 Définition de distance

Pour tout réel $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, le nombre $d(x, y) = |x - y|$ représente une distance ; c'est la distance qui sépare x de y
Cette distance vérifie quatre axiômes vrais pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} d(x, y) \geqslant 0 \\ d(x, y) = d(y, x) \\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\ d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) \end{cases}$$

Remarque 7 :

Voici une fonction Python `distance` qui calcule la distance entre 2 réels x et y :

```python
#On définit d'abord la valeur absolue
def abs(x):
        if x<0:
                return -x
        else :
                return x
#On utilise la valeur absolue pour définir la distance
def distance(x,y):
        return abs(x-y)
```

Remarque 8 :

La propriété de la distance $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ est **l'inégalité triangulaire** $|x - y| \leqslant |x| + |y|$
Nous avons en particulier : $|x - z| = |x - y + y - z| \leqslant |x - y| + |y - z|$

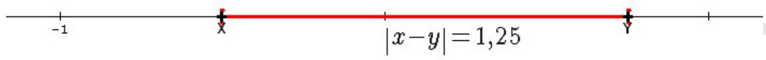


FIGURE 10.3 – Le point x a pour abscisse $-0,5$, alors que le point y a pour abscisse $+0,75$ et la distance qui sépare x de y est $1,25$

10.3.11 Intervalles et valeur absolue

On peut définir un intervalle fermé ou un intervalle ouvert à l'aide des valeurs absolues :
- $[a,b] = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } \left|x - \left(\dfrac{a+b}{2}\right)\right| \leqslant \dfrac{|b-a|}{2}\right\}$
- $]a,b[= \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } \left|x - \left(\dfrac{a+b}{2}\right)\right| < \dfrac{|b-a|}{2}\right\}$

Exemple 4 :

1. $[-1,+1] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } |x| \leqslant 1\}$
2. $]1,2[= \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } \left|x - \left(\dfrac{3}{2}\right)\right| < \dfrac{1}{2}\right\}$

10.3.12 Quelques exercices

Exercice 14 :

Soient a, b et c trois réels tels que $a < b < c$; donner le minimum de

$$|x-a| + |x-b| + |x-c|$$

lorsque $x \in \mathbb{R}$

Exercice 15 :

1. Montrer que $\max\{x,y\} = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$ et que $\min\{x,y\} = \dfrac{x+y-|x-y|}{2}$
   Ces "formules" sont utilisées pour démontrer la continuité de max{f,g} ou min{f,g}
2. La fonction $\max(x,y)$ fait partie des fonctions standard d'un ordinateur. Comment peut-on avoir $\max(x,y,z)$ et $\max(x,y,z,u)$, à l'aide de la seule fonction $\max(x,y)$?

10.4 Insuffisance de $\mathbb{Q}$ quant à l'ordre Axiôme de la borne supérieure

Dans $\mathbb{N}$, dans $\mathbb{Z}$, tout sous ensemble, non vide et majoré admet une borne supérieure, et même un plus grand élément ; ceci est faux dans l'ensemble des rationneles.

10.4.1 Exemple introductif

On considère l'ensemble suivant :

$$E = \left\{x \in \mathbb{Q}^{*+} \text{ tq } x^2 \leqslant 2\right\}$$

E est, par définition, un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$

1. $E \neq \emptyset$ car $1 \in E$; et il y en a d'autres comme par exemple : $\dfrac{3}{4} \in E$
2. E est un ensemble majoré car 2 est un majorant de E

   En effet, si $x \in E$, alors $x^2 \leqslant 2 < 2^2$ et on tire de cette inéquation $|x| < 2$, c'est à dire $x < 2$. E est donc non vide et **majoré dans** $\mathbb{Q}$
3. Supposons que E admette un plus grand élément, et soit a ce plus grand élément ; on note : $a = \max E$.
   Comme $a \in E$, alors $a^2 \leqslant 2$, et comme il n'existe pas de rationnel x tel que $x^2 = 2$, on a sûrement $a^2 < 2$.
4. Nous allons prouver qu'il existe $b \in E$ tel que $a < b$; ce qui contredira le fait que $a = \max E$
   Pour que b **existe,** nous devons donc avoir :

$$\begin{cases} b = a + \lambda \\ b^2 \leqslant 2 \end{cases}$$

   Avec $\lambda > 0$ et $\lambda \in \mathbb{Q}$
   De $b^2 \leqslant 2$, et en développant $b^2 = (a+\lambda)^2$, on obtient

$$\lambda\,(\lambda + 2a) + \left(a^2 - 2\right) \leqslant 0$$

   d'où on tire : $0 < \lambda \leqslant \dfrac{2-a^2}{2a+\lambda}$
5. De $a = \max E$, nous tirons $1 \leqslant a$ donc, $-2 < -a^2 \leqslant -1 \Leftrightarrow 0 < 2 - a^2 \leqslant 1$ et, indépendamment, nous tirons $1 \leqslant 3 \leqslant 2a+1$ c'est à dire, en conclusion, $0 < \dfrac{1}{2a+1} \leqslant \dfrac{1}{3}$ et, mieux, $0 < \dfrac{2-a^2}{2a+1} \leqslant \dfrac{1}{3}$
6. En choisissant $0 < \lambda < 1$, le choix de λ tel que $0 < \lambda \leqslant \dfrac{2-a^2}{2a+1}$ convient . En effet, de $0 < \lambda < 1$, on tire $2a+\lambda < 2a+1$ et donc, $\dfrac{1}{2a+1} < \dfrac{1}{2a+\lambda}$, et donc, $\dfrac{2-a^2}{2a+1} < \dfrac{2-a^2}{2a+\lambda}$; un rationnel λ telque $0 < \lambda \leqslant \dfrac{2-a^2}{2a+1}$ convient donc.
7. Nous avons donc $b = a + \lambda$, tel que $b > a$ et $b \in E$. E n'a donc pas de plus grand élément.

10.4.2 Axiôme de la borne supérieure

Toute partie $A \subset \mathbb{R}$, non vide et majorée admet une borne supérieure

Remarque 9 :

1. C'est un axiôme très important, qui construit l'ensemble des nombres réels
2. Qu'est ce que cela veut dire ? Voici une réécriture de l'axiôme de la borne supérieure :
   A **est non vide et majorée,** c'est à dire :

$$(\exists M \in \mathbb{R}) \text{ tq } (\forall x \in A)\,(x \leqslant M)$$

   A **admet une borne supérieure** c'est à dire : Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} (\forall x \in A)\,(x \leqslant \alpha) \\ (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists x \in A)\,(\alpha - \varepsilon < x) \end{cases}$$

3. Les conditions définissant le réel α signifient que :
   (a) α est un majorant de A
   (b) Tout réel x inférieur à α n'est plus un majorant de A
4. Ce qui veut dire que α est le plus petit des majorants ; à ce titre, il est unique on l'appelle **la borne supérieure** de A et on le note : $\alpha = \sup A$

L'ensemble des majorants de A est alors l'ensemble $[\alpha; +\infty[$

10.4.3 Proposition

Soit $A \subset \mathbb{R}$, une partie non vide et minorée ; alors, $A \subset \mathbb{R}$ admet une borne inférieure

Remarque 10 :

1. **Qu'est ce que cela veut dire ?**
   A **est minorée,** c'est à dire : $(\exists m \in \mathbb{R})$ tq $(\forall x \in A)\,(m \leqslant x)$
   A **admet une borne inférieure** c'est à dire : il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ ***tel que***

$$\begin{cases} (\forall x \in A)\,(\alpha \leqslant x) \\ (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists x \in A)\,(x < \alpha + \varepsilon) \end{cases}$$

2. Comme précédemment, les conditions définissant le réel α signifient que :
   (a) α est un minorant de A
   (b) Tout réel x supérieur à α n'est plus un minorant de A
3. Ce qui veut dire que α est le plus grand des minorants ; à ce titre, il est unique on l'appelle la borne inférieure de A et on le note : $\alpha = \inf A$

L'ensemble des minorants de A est alors l'ensemble $]-\infty; \alpha]$

10.4.4 Liens entre borne supérieure, borne inférieure, plus grand et plus petit élément

1. A est un ensemble majoré, et M un majorant de A est équivalent à

$$\boxed{(\forall a \in A)\,((M \geqslant a) \Leftrightarrow (M \geqslant \sup A))}$$

2. A est un ensemble minoré, et m un minorant de A est équivalent à

$$\boxed{(\forall a \in A)\,((m \leqslant a) \Leftrightarrow (m \leqslant \inf A))}$$

10.4.5 Les résultats suivants sont classiques :

1. $\sup([a;b]) = \sup([a;b[) = \sup(]a;b]) = \sup(]a;b]) = \sup(]-\infty;b]) = \sup(]-\infty;b[) = b$
2. $\inf([a;b]) = \inf([a;b[) = \inf(]a;b]) = \inf(]a;b]) = \inf(]a;+\infty]) = \inf([a;+\infty[) = a$

10.5 Conséquences de l'axiôme de borne supérieure

10.5.1 Axiôme d'Archimède

$\mathbb{R}$ est un corps archimédien, c'est à dire :

$$(\forall a \in \mathbb{R}^{*+})\,(\forall b \in \mathbb{R})\,(\exists n \in \mathbb{N})\,(na > b)$$

Remarque 11 :

Cette propriété peut aussi s'écrire :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\,(\exists n \in \mathbb{N})\,(n > x)$$

Il suffit de faire dans 10.5.1 $a = 1$ et $b = x$

10.5.2 Partie entière d'un nombre réel

Soit $x \in \mathbb{R}$; alors, il existe un entier relatif unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n+1$
Cet entier $n \in \mathbb{Z}$ est appelé partie entière de $x \in \mathbb{R}$, et on la note : $n = \mathrm{E}\,(x) = [x]$; on a donc

$$\mathrm{E}\,(x) \leqslant x < \mathrm{E}\,(x) + 1 \Longleftrightarrow [x] \leqslant x < [x] + 1$$

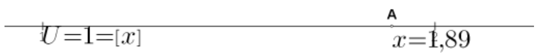


FIGURE 10.4 – Schématisation de la partie entière : ici, $[1,89] = 1$

Démonstration

1. **Existence de la partie entière**
   - Si x est un entier, alors il suffit de prendre $[x] = x$
   - Si x n'est pas un entier et est positif, on utilise le fait que $\mathbb{R}$ est archimédien.
     On a donc, pour tout a strictement positif, il existe un entier naturel non nul n tel que $x < na$ et nous l'appliquons à $a = 1$
     Il existe donc un entier naturel non nul n tel que $x < n$
     Soit A_x l'ensemble des entiers naturels non nuls supérieurs à x :
     $$A_x = \{n \in \mathbb{N} \text{ tels que } n > x\}$$
     A_x est non vide.
     D'après l'un des axiomes de $\mathbb{N}$ il contient donc un plus petit élément. En notant p ce plus petit élément, nous avons donc que $x < p$ et $p - 1 \leqslant x$
     Il suffit alors de prendre $[x] = p - 1$
   - Si x n'est pas un entier et est négatif, on applique le raisonnement précédent sur $-x$
     Nous aboutissons alors à l'existence d'un entier naturel $[-x]$ tel que $[-x] \leqslant -x < [-x] + 1$
     Et donc $-[-x] - 1 < x \leqslant [-x]$
     Comme x n'est pas entier, on a même$-[-x] - 1 < x < [-x]$
     On prend alors $[x] = -[-x] - 1$
2. **Unicité de la partie entière**
   Soient $x \in \mathbb{R}$ et n_1 et n_2 deux entiers tels que $\begin{cases} n_1 \leqslant x < n_1 + 1 \\ n_2 \leqslant x < n_2 + 1 \end{cases}$
   C'est à dire que n_1 et n_2 sont 2 parties entières de x, et nous allons montrer que $n_1 = n_2$
   Alors on a $\begin{cases} n_1 \leqslant x < n_1 + 1 \\ -n_2 - 1 < -x \leqslant -n_2 \end{cases}$
   En additionnant chacune des inégalités, on a donc $n_1 - n_2 - 1 < 0 < n_1 - n_2 + 1$
   En prenant l'inégalité de gauche, on a donc $n_1 - n_2 - 1 < 0$ donc $n_1 - n_2 < 1$
   Et, comme il s'agit d'entiers $n_1 - n_2 \leqslant 0$

En prenant l'inégalité de droite, on a donc $0 < n_1 - n_2 + 1$ donc $-1 < n_1 - n_2$
Et comme il s'agit d'entiers $0 \leqslant n_1 - n_2$
Nous avons donc : $0 \leqslant n_1 - n_2 \leqslant 0$ donc $n_1 - n_2 = 0$, c'est à dire $n_1 = n_2$
La partie entière est donc unique.

Remarque 12 :

Il faut veiller à ne pas confondre **partie entière** et **troncature**.
Exemple, pour $x = -1,89$, nous avons $[-1,89] = -2$, alors que la troncature de $-1,89$ donne -1

Exercice 16 :

1. Avons nous, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[nx] = n\,[x]$?
2. Démontrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = \sum_{k=1}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n}\right] = [nx]$$

10.5.3 Congruence modulo a

Soient $x \in \mathbb{R}$, et a un réel strictement positif.
Alors, il existe un unique couple $(n, y) \in \mathbb{Z} \times [0, a[$ tel que $x = na + y$.
On dit alors que x est congru à y modulo a, et on écrit $x \equiv y\,[a]$

Démonstration

Soient $x \in \mathbb{R}$, et a un réel strictement positif ; il existe alors $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant \dfrac{x}{a} < n + 1$; c'est très simplement la partie entière de $\dfrac{x}{a}$; on a donc $n = \left[\dfrac{x}{a}\right]$
Nous avons alors $an \leqslant x < an + a$, ce qui est équivalent à $0 \leqslant x - an < a$; en posant $y = x - an$, nous avons le résultat.

10.5.4 Propriétés

1. La relation de congruence est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$
2. Chaque classe d'équivalence a un unique représentant dans $[0, a[$ ou dans $\left[-\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}\right[$
3. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad (x \equiv y\ [a]) \Leftrightarrow (x + \lambda \equiv y + \lambda\ [a])$
4. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$ $\quad (x \equiv y\ [a]) \Leftrightarrow (\lambda x \equiv \lambda y\ [a])$

Exemple 5 :

1. Les exemples les plus importants sont empruntés à la trigonométrie :
   (a) $(\tan x = \tan y) \Leftrightarrow (x \equiv y\ [\pi])$
   (b) $(\cos x = 1) \Leftrightarrow (x \equiv 0\ [2\pi])$
   (c) $(\sin 2x = 0) \Leftrightarrow \left(x \equiv 0\ \left[\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$
2. On trouve d'autres exemples dans la théorie de l'information, avec la congruence modulo 1

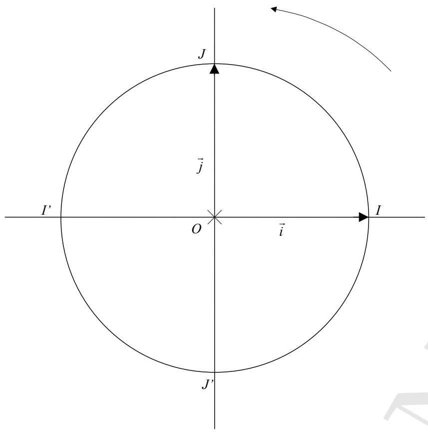


FIGURE 10.5 – Le cercle trigonométrique

10.6 Ensembles denses dans $\mathbb{R}$

10.6.1 Théorème : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

$\mathbb{Q}$ est un ensemble dense dans $\mathbb{R}$, c'est à dire

$$(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\,[(x < y) \Longrightarrow (\exists r \in \mathbb{Q})\,(x < r < y)]$$

En d'autres termes, entre deux réels, il y a toujours au moins un rationnel.

Démonstration

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ fixés une fois pour toutes et tels que $x < y$.
Comme les rationnels s'écrivent $r = \dfrac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, le problème est donc de trouver 2 entiers p et q, $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$x < \frac{p}{q} < y \Longleftrightarrow qx < p < qy$$

1. **Condition d'existence de p et q**
   Soit q entier tel que $q \in \mathbb{N}^*$; alors, p existe sûrement si $1 < qy - qx \Leftrightarrow q > \dfrac{1}{y-x}$ *(on choisira un entier ou l'entier situé entre qx et qy)*
2. On pose donc, d'après 1 $q = \left[\dfrac{1}{y-x}\right] + 1$; d'après les propriétés des parties entières, nous avons $\left[\dfrac{1}{y-x}\right] \leqslant \dfrac{1}{y-x} < \left[\dfrac{1}{y-x}\right] + 1$, c'est à dire $\dfrac{1}{y-x} < q$, ce qui montre que p existe sûrement
3. On pose $p = [qx] + 1$, donc $[qx] \leqslant qx < p$, c'est à dire, $x < \dfrac{p}{q}$ *(on a trouvé une inégalité !! il faut maintenant montrer l'autre !!)*
4. De $\dfrac{1}{y-x} < q$, il faut remarquer 2 choses : la première, simple : $0 < q$, et la seconde : $\left(\dfrac{1}{q} < y - x\right) \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{q} + x < y\right)$
5. Comme $0 < q$ et que $[qx] \leqslant qx < [qx] + 1$, en divisant par $q > 0$, on obtient :

$$\frac{[qx]}{q} \leqslant x < \frac{[qx]+1}{q} = \frac{[qx]}{q} + \frac{1}{q} \leqslant x + \frac{1}{q} < y$$

En choisissant $q = \left[\dfrac{1}{y-x}\right] + 1$ et $p = [qx] + 1$, nous avons donc bien montré $x < \dfrac{p}{q} < y$; ce que nous voulions.

Remarque 13 :

1. On peut même dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$, il y a une infinité de rationnels. Il suffit, pour cela, de découper l'intervalle $]x, y[$ en n intervalles de longueurs égales :

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_k = x + \dfrac{k\,(y-x)}{n}$ avec $k = 0, \cdots, n$ entre les réels x_k et x_{k+1} (ou dans l'intervalle $]x_k, x_{k+1}[$), il y a au moins rationnel r_k
2. Mieux, Tout intervalle contient au moins un irrationnel :

   Partant de x et y tels que $x < y$, on peut appliquer l'implication de l'affirmation 10.6.1 aux réels $x - \sqrt{2}$ et $y - \sqrt{2}$

   On en déduit qu'il existe un rationnel r dans l'intervalle $\left]x - \sqrt{2}; y - \sqrt{2}\right[$, et par translation $x < r + \sqrt{2} < y$. Or, $r + \sqrt{2}$ est irrationnel, car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

   On a donc montré que si $x < y$, alors l'intervalle $]x, y[$ contient aussi un irrationnel.
3. On démontrerait, comme ci-dessus, que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$, il y a une infinité d'irrationnels. Ainsi $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

10.6.2 Autre ensemble denses dans $\mathbb{R}$: l'ensemble $\mathbb{Z}\left[\dfrac{1}{d}\right]$

Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que $d \geqslant 2$

Soit $\mathbb{Z}\left[\dfrac{1}{d}\right]$ l'ensemble suivant :

$$\mathbb{Z}\left[\frac{1}{d}\right] = \left\{ q \in \mathbb{Q} \text{ tels que } q = n + \sum_{k=1}^{m} a_k d^{-k} \text{ avec } n \in \mathbb{Z}\ ,\ a_k \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leqslant a_k < d \right\}$$

Alors $\mathbb{Z}\left[\dfrac{1}{d}\right]$ est dense dans $\mathbb{R}$

Démonstration

Soient $d \in \mathbb{N}$ tel que $d \geqslant 2$ et $x \in \mathbb{R}$

1. **Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $d^{-n}[d^n x] \leqslant x < d^{-n}[d^n x] + d^{-n}$**

   Par définition de la partie entière, $[d^n x] \leqslant d^n x < [d^n x] + 1$; le résultat demandé est obtenu en multipliant l'inégalité par d^{-n}
2. **Appelons $u_n = d^{-n}[d^n x]$ et $v_n = u_n + d^{-n}$; montrons que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = x$**

   D'après la question précédente, nous avons : $u_n \leqslant x < v_n$, ou encore, $u_n \leqslant x < u_n + d^{-n}$.

   Cette dernière inégalité est équivalente à $0 \leqslant x - u_n < d^{-n}$

   Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} d^{-n} = 0$, nous avons $\lim\limits_{n \to +\infty} (x - u_n) = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = x$.

   Comme $v_n = u_n + d^{-n}$, nous avons aussi $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n) = x$
3. **On construit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $a_0 = 0$ et $a_n = d^n(u_n - u_{n-1})$; montrer que $a_n \in \mathbb{Z}$**

   Il suffit de réécrire a_n

   $$a_n = d^n(u_n - u_{n-1}) = d^n\left(d^{-n}[d^n x] - d^{-(n-1)}\left[d^{(n-1)}x\right]\right)$$

   et alors, $a_n = [d^n x] - d\left[d^{(n-1)}x\right]$, ce qui montre que $a_n \in \mathbb{Z}$

4. **En utilisant l'inégalité $u_n \leqslant x < u_n + d^{-n}$, montrons que $-1 < a_n < d$, et que a_n ne peut donc prendre que d valeurs : 0 et $d-1$**
On peut écrire l'inégalité à l'ordre n et à l'ordre $n-1$

$$\left\{\begin{array}{l} u_n \leqslant x < u_n + d^{-n} \\ u_{n-1} \leqslant x < u_{n-1} + d^{-n+1} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} u_n \leqslant x < u_n + d^{-n} \\ -u_{n-1} - d^{-n+1} < -x \leqslant -u_{n-1} \end{array}\right.$$

Ce qui donne, en additionnant,

$$u_n - u_{n-1} - d^{-n+1} < 0 < u_n + d^{-n} - u_{n-1}$$

Ce qui, traduit autrement, nous donne : $-d^{-n} < u_n - u_{n-1} < d^{-n+1}$; en multipliant l'inégalité par d^n, nous obtenons l'inégalité demandée ; comme $a_n \in \mathbb{Z}$, les seules valeurs admissibles de a_n sont donc entières et comprises entre 0 et $d-1$

5. **Pour $n \geqslant 1$, démontrons que $u_n = \sum_{p=1}^{n} a_p d^{-p} + u_0$**
   (a) Il faut d'abord remarquer que $u_0 = d^{-0}\left[d^0 x\right] = [x]$
   (b) Puis, de l'identité $a_n = d^n\left(u_n - u_{n-1}\right)$, nous pouvons déduire $u_n - u_{n-1} = a_n d^{-n}$, puis en faisant la somme

$$\begin{array}{rl} u_1 - u_0 = & a_1 d^{-1} \\ u_2 - u_1 = & a_2 d^{-2} \\ u_3 - u_2 = & a_3 d^{-3} \\ \vdots & \vdots \\ u_n - u_{n-1} = & a_n d^{-n} \end{array}$$

   nous obtenons, après simplification $u_n - u_0 = \sum_{k=1}^{n} a_k 2^{-k}$, c'est à dire $u_n = u_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k 2^{-k}$, ce que nous voulions

6. **En déduire que l'ensemble $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{d}\right]$ est dense dans $\mathbb{R}$** La conclusion est évidente, puisque, chaque u_n est en fait un élément de $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{d}\right]$ et que $\lim_{n \to +\infty} = x$
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, il existera $u_n \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{d}\right]$ tel que $x < u_n < y$

Remarque 14 :

1. On démontre très facilement que $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{d}\right]$ est un sous anneau de $\mathbb{Q}$
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, le développement $u_n = [x] + \sum_{k=1}^{m} a_k d^{-k}$ est une approximation de x à d^{-n} près
3. Il y a des développements bien connus et beau coup utilisés :
   — Les décimaux $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{10}\right]$ utilisés massivement dans la vie courante
   — Les dyadiques $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ beaucoup utilisés en informatique
   La densité des dyadiques dans $\mathbb{R}$, montre qu'il est justifié de n'utiliser, en informatique, que la base 2
   En informatique, les nombres sont représentés en base 2, par des dyadiques. Ce choix n'est pas plus mauvais qu'un autre, que celui de la base décimale utilisée plus couramment, par exemple.
   Exemple de dyadique : $\left(\overline{101,0010111011}\right)_2$

4. Un élément de $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{d}\right]$ est un rationnel, mais la réciproque est fausse

   Exemple : Un dyadique est un rationnel, mais la réciproque est fausse.

   Soit D un nombre dyadique ; alors, $D = \mathrm{E}(D) + \sum_{k=1}^{n} a_k 2^{-k}$; il suffit ensuite de réduire au même dénominateur 2^n, pour montrer que $D \in \mathbb{Q}$.

   Cependant, il existe des rationnels qui ne sont pas des dyadiques ; il suffit par exemple, de prendre $\frac{1}{3}$; nous avons $\frac{1}{3} = \left(\overline{0,010101010101\cdots010101\cdots}\right)_2 = \left(\overline{0,\overline{01}}\right)_2$; le développement de $\frac{1}{3}$ en base 2 étant infini, ce n'est donc pas un dyadique

10.6.3 Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

Les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont :

— Ou bien de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}$

$$a\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } x = an \text{ avec } n \in \mathbb{Z}\}$$

— Ou bien sont denses dans $\mathbb{R}$

Démonstration

1. Soit $a \in \mathbb{R}$; alors, de manière évidente, $a\mathbb{Z}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$
2. Soit, maintenant, G un sous groupe additif de $\mathbb{R}$
   (a) Si $G = \{0\}$, alors, G est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ *(trivial)* et, en fait, $G = 0\mathbb{Z}$
   (b) Supposons $G \neq \{0\}$; alors, G contient certainement des nombres strictement positifs et donc $A = G \cap]0; +\infty[$ est surement non vide. A étant un ensemble minoré *(par 0)* admet une borne inférieure ; soit a cette borne inférieure ; nous avons donc $a = \inf A$

      i. **Supposons $a \neq 0$ *(c'est à dire* $a > 0$**

      ▷ Montrons que $a \in G$
      On fait une démonstration par l'absurde en supposant le contraire, c'est à dire que $a \notin G$
      Alors, $2a = a + a$ est tel que $2a > a$. a étant la borne inférieure de A *(le plus grand des minorants)* il existe $b \in A$ tel que

      $$a \leqslant b < 2a$$

      Comme $b \in G$ et $a \notin G$, nous avons $a \neq b$ et donc $a < b < 2a$
      De même, comme $b > a$, il existe $c \in A$ tel que $a < c < b$, ce qui nous donne $b - c > 0$ et des inégalités $b < 2a$ et $-c < -a$, par addition, $b - c < a$.
      Or, $b_i n G$ et $c \in G$, et donc $b - c \in G$; or, $b - c < a$, ce qui est en contradiction avec la définition de a
      Donc, $a \in G$ et donc $a\mathbb{Z} \in G$

      ▷ Réciproquement, soit $g \in G$
      Nous allons montrer que g est du type ka avec $k \in \mathbb{Z}$.
      Soit $g_1 = \left[\frac{g}{a}\right] a$. Alors, $g_1 \in a\mathbb{Z}$ et comme nous avons démontré que $a \in G$, $g_1 \in G$.
      De $\left[\frac{g}{a}\right] \leqslant \frac{g}{a} < \left[\frac{g}{a}\right] + 1$, on tire, en multipliant par a

      $$a\left[\frac{g}{a}\right] \leqslant g < a\left[\frac{g}{a}\right] + a \Longleftrightarrow g_1 \leqslant g < g_1 + a$$

      Et donc, $0 \leqslant g - g_1 < a$. Or, $g - g_1 \in G$ et donc, $g - g_1 = 0$, c'est à dire $G \subset a\mathbb{Z}$

      ▷ Donc, de $a\mathbb{Z} \subset G$ et de $G \subset a\mathbb{Z}$, on déduit que $G = a\mathbb{Z}$

ii. **Supposons $a = 0$; on montre que G est dense dans $\mathbb{R}$**
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha < \beta$. Il va falloir montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $\alpha < g < \beta$
Premièrement, $\beta - \alpha > 0$, et donc $\dfrac{\beta - \alpha}{2}$ n'est pas un minorant de $A = G \cap \left]0; +\infty\right[$; il existe donc $g \in A$ tel que $g < \dfrac{\beta - \alpha}{2}$; g étant strictement positif, nous avons $0 < g < \dfrac{\beta - \alpha}{2}$
Soit $g_1 = \left[\dfrac{\frac{\beta+\alpha}{2}}{g}\right] g$. Alors, de la fonction partie entière, nous tirons

$$\left[\frac{\frac{\beta+\alpha}{2}}{g}\right] \leqslant \frac{\frac{\beta+\alpha}{2}}{g} < \left[\frac{\frac{\beta+\alpha}{2}}{g}\right] + 1$$

Et donc, en multipliant par g

$$g\left[\frac{\frac{\beta+\alpha}{2}}{g}\right] \leqslant \frac{\beta+\alpha}{2} < g\left[\frac{\frac{\beta+\alpha}{2}}{g}\right] + g \Longleftrightarrow g_1 \leqslant \frac{\beta+\alpha}{2} < g_1 + g$$

D'où $\dfrac{\beta+\alpha}{2} - g < g_1 \leqslant \dfrac{\beta+\alpha}{2}$
De l'inégalité $0 < g < \dfrac{\beta-\alpha}{2}$, nous tirons $\dfrac{\alpha-\beta}{2} < -g < 0$, et en additionnant $\dfrac{\beta+\alpha}{2}$, nous obtenons : $\alpha < \dfrac{\beta+\alpha}{2} - g < \dfrac{\beta+\alpha}{2}$
Et donc :

$$\alpha < \frac{\beta+\alpha}{2} - g < g_1 \leqslant \frac{\beta+\alpha}{2}$$

Et comme $\dfrac{\beta+\alpha}{2} < \beta$, il existe $g_1 \in G$ tel que $\alpha < g_1 < \beta$

10.6.4 Conséquence

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
Considérons $G(a,b) = \{ap + bq \text{ où } p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}\}$
Clairement, $G(a,b)$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Il y a donc 2 possibilités :

- Ou bien $G(a,b)$ est dense dans $\mathbb{R}$
- Ou bien il exist ec $\in \mathbb{R}$ tel que $G(a,b) = c\mathbb{Z}$

Résultat

$G(a,b) = \{ap + bq$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}\} = c\mathbb{Z}$ si et seulement si $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

Démonstration

1. Supposons $G(a,b) = c\mathbb{Z}$
   Si $a = 0$ ou $b = 0$, il n'y a pas de problème. Supposons $a \neq 0$ et $b \neq 0$.
   Alors :
   ▷ Il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $a = a \times 1 + b \times 0 = cm$
   ▷ De même, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $b = a \times 0 + b \times 1 = cn$
   Et donc, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{cm}{cn} = \dfrac{m}{n}$ et donc $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$
2. Réciproquement, supposons $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$
   Alors $\dfrac{a}{b} = \dfrac{m}{n}$ avec $m \wedge n = 1$ et donc $\dfrac{a}{b} = \dfrac{m}{n} \Longleftrightarrow \dfrac{a}{m} = \dfrac{b}{n} = \lambda$
   C'est à dire que $a = \lambda m$ et $b = \lambda n$; autrement dit, $a \in \lambda\mathbb{Z}$ et $b \in \lambda\mathbb{Z}$
   Donc, pour tout $g \in G(a,b)$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$g = ka + k'b = k\lambda m + k'\lambda n = \lambda(km + k'n)$$

Et donc, $g \in \lambda\mathbb{Z}$, c'est à dire $G(a,b) \subset \lambda Z$
m et n étant premiers entre eux ($m \wedge n = 1$), d'après l'identité de Bezout, il existe $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$ tels que $mu + nv = 1$.
En multipliant par λ, nous obtenons :

$$\lambda mu + \lambda nv = \lambda \Longleftrightarrow \frac{a}{m} \times mu + \frac{b}{n} \times nv = \lambda \Longleftrightarrow au + bv = \lambda$$

Ce qui montre que $\lambda \in G(a,b)$ et donc que $\lambda Z \subset G(a,b)$
Donc, $\lambda Z = G(a,b)$

Ce qu'il fallait démontrer

10.6.5 Application

1. Si x est irrationnel, alors l'ensemble

$$G(x,1) = \{mx + n \text{ où } m \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{Z}\}$$

   est dense dans $\mathbb{R}$
2. En particulier, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, il existe $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$ tels que

$$a < mx + n < b$$

10.7 Des exercices sur les nombres réels

Exercice 17 :

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note toujours $[x]$ la partie entière de x. Démontrez que, pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, nous avons :

1. $[x+y] = [x] + [y] + \varepsilon$ où $\varepsilon = 0$ ou $\varepsilon = 1$
2. $[x-y] = [x] - [y] - \varepsilon$ où $\varepsilon = 0$ ou $\varepsilon = 1$

Exercice 18 :

Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons : $\left[\dfrac{[nx]}{n}\right] = [x]$

Exercice 19 :

Démontrer que si B est majorée, et que si $A \subset B$, alors, A est majorée et $\sup A \leqslant \sup B$

Exercice 20 :

Soient x et a deux nombres réels tels que $a \neq 0$ et $|x-a| < |a|$. Démontrer que $a - |a| < x < a + |a|$ et en déduire que x est du signe de a

Exercice 21 :

Soit $x \geqslant 0$ un nombre réel tel que $x \neq \sqrt{3}$. Posons $y = \dfrac{x+3}{x+1}$. Calculer $\dfrac{y-\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}$ et en déduire que $y - \sqrt{3} < x - \sqrt{3}$

Exercice 22 :

1. Montrer que l'ensemble $A = \left\{x \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } x + \dfrac{1}{x} < 2\right\}$ est un intervalle majoré. En déduire $\sup A$
2. Montrer que l'ensemble $B = \left\{x \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } x + \dfrac{1}{x} < 2\right\}$ est majoré mais n'est pas un intervalle. En déduire $\sup B$

Exercice 23 :

Pour comparer deux quantités, on en fait la différence . Utiliser cette remarque pour faire les questions suivantes.

1. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, $|xy| \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2}$
2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\left(x^2 - x \geqslant -\dfrac{1}{4}\right)$
3. Démontrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, nous avons : $a + b < \left(1 + a^2\right)\left(1 + b^2\right)$

Exercice 24 :

1. Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, nous avons $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.
2. En déduire que pour tout $a > 0$ et tout $b > 0$, $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geqslant 2$

Exercice 25 :

x et y sont 2 réels strictement positifs.On définit a, g et h par : :

1. $a = \dfrac{x+y}{2}$
2. $g = \sqrt{xy}$
3. $\dfrac{2}{h} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

Comparez a, g et h

Exercice 26 :

Soit $(a_n)_{n_i n \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On considère alors la suite $(x_n)_{n_i n \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$x_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_n} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)$$

Soit $P(n)$ la propriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$P(n) : \ x_n \geqslant n^2$$

1. Démontrer $P(1)$
2. Démontrer que la propriété est héréditaire, c'est à dire que

$$P(n) \Longrightarrow P(n+1)$$

3. Conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $x_n \geqslant n^2$. Dans quel cas avons nous $x_n = n^2$?

Exercice 27 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $a \geqslant 2\sqrt{a-1}$
2. Pour $a \geqslant 1$, simplifier, en fonction des valeurs de a, l'expression

$$y = \sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$$

(Etudier le signe de y, puis élever au carré)

Exercice 28 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $|x+1|+1 \geqslant \left|x^2-6x\right|$

Exercice 29 :

Ecrire, à l'aide d'intervalles le sous-ensemble de $\mathbb{R}$

$$A=\{x \in \mathbb{R}/\,|x-1| \leqslant 2\} \cup \{x \in \mathbb{R}/\,|2x-1|>4\}$$

Exercice 30 :

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, tels que $-1 \leq x \leq 0$ et $y \geq 2$;

1. Donner un encadrement de $x+y$, xy, $\dfrac{x}{y}$
2. Montrer que $\left|\dfrac{x}{y}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$

Exercice 31 :

1. Soients
$$A=\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } 1 \leqslant x \leqslant 2 \text{ et } -1 \leqslant y \leqslant +1\right\}$$
et
$$B=\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } -3 \leqslant y-x \leqslant 0 \text{ et } 0 \leqslant x+y \leqslant +3\right\}$$
   (a) Montrer que nous avons $A \subset B$
   (b) Montrer que nous avons $B \not\subseteq A$
2. Soit
$$C=\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } 0 \leqslant x \leqslant 3 \text{ et } |y| \leqslant \frac{3}{2}\right\}$$
   (a) Montrer que nous avons $B \subset C$
   (b) Montrer que nous avons $C \not\subseteq B$

Exercice 32 :

On donne les encadrements suivants : $1,41 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1,42$ et $1,73 \leqslant \sqrt{3} \leqslant 1,74$

1. En déduire des encadrements *(avec 2 chiffres après la virgule)* pour les quantités suivantes :

   (a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ (c) $\sqrt{6}$ (d) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

2. De même encadrer les quantités ci-dessous :

   (a) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$ (b) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ (c) $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

Exercice 33 :

Rappel : $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices 2×2 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ à coefficients réels, où, chacun des $x_i \in \mathbb{R}$. On note $\mathcal{O} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la matrice nulle, c'est à dire que $\mathcal{O}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, telle que $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on note $\|M\|_{+\infty}=\max\{|a|,|b|,|c|,|d|\}$.
   (a) Soients $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$; donnez $\|A\|_{+\infty}$, $\|B\|_{+\infty}$ et $\|A+B\|_{+\infty}$

(b) Montrer que $\|M\|_{+\infty} = 0$ si et seulement si $M = \mathcal{O}$

(c) Montrer que pour tout $M_1 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et tout $M_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, nous avons : $\|M_1 + M_2\|_{+\infty} \leq \|M_1\|_{+\infty} + \|M_2\|_{+\infty}$

(d) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda M_1\|_{+\infty} = |\lambda| \|M_1\|_{+\infty}$

2. On note de plus, pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$\|M\|_1 = |a| + |b| + |c| + |d| \quad \text{et} \quad \|M\|_2 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

(a) Montrer que $\|M\|_\infty \leqslant \|M\|_1 \leqslant 4 \times \|M\|_\infty$

(b) Montrez que $\|M\|_\infty \leqslant \|M\|_2 \leqslant 2\|M\|_\infty$

(c) En déduire que $\dfrac{1}{4}\|M\|_1 \leqslant \|M\|_2 \leqslant 2\|M\|_1$

Exercice 34 :

1. émontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons :

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

2. Calculer la partie entière du nombre réel $a = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{\sqrt{n}}$

Exercice 35 :

Si $x \in \mathbb{R}$, on note $\{x\} = x - [x]$ la partie fractionnaire de x.

1. Montrer que $\{x\} \in [0, 1[$
2. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ un nombre irrationnel et f de $\mathbb{N}$ dans $[0, 1[$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{N} & \longrightarrow & [0,1[\\ n & \longmapsto & f(n) = \{n\theta\} \end{array}\right.$$

(a) Montrer que f est injective

(b) Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un couple d'entiers $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $m \neq n$ et $0 < f(m) - f(n) < \varepsilon$

(c) En déduire que l'ensemble $\big\{x \in \mathbb{R}$ tels que $\exists (m, n) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $x = m + n\theta\big\}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Exercice 36 :

Introduction aux inégalités de Schwarz

Nous nous plaçons dans l'ensembles $\mathbb{C}$ des nombres complexes, mais les méthodes de résolution ont tout des nombres réels

1. Soient $z \in \mathbb{C}$, $z' \in \mathbb{C}$ et $t \in \mathbb{R}^*$. Démontrer que

$$2|zz'| \leqslant t^2|z|^2 + t^{-2}|z'|^2$$

2. Soient $\{a_i$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$ et $\{b_i$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$, 2 familles de nombres complexes. Démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, :

$$2\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leqslant t^2 \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right) + t^{-2}\left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right)$$

3. (a) Pour $A > 0$ et $B > 0$, on définit, pour $t > 0$ la fonction $\varphi(t) = At^2 + Bt^{-2}$. Démontrer que, pour tout $t > 0$, $\varphi(t) \geqslant 2\sqrt{AB}$

(b) En déduire **l'inégalité de Schwarz pour les sommes finies :** [3]

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leqslant \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)} \times \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right)}$$

Exercice 37 :

Application des inégalités de Schwarz

1. On se donne un entier $\geqslant 1$ et des réels $x_1, \ldots, x_n$. Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

2. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, nous avons :

$$\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leqslant \frac{n(n+1)}{2\sqrt{3}} \sqrt{2n+1}$$

3. On se donne un entier $n \geqslant 1$ et des réels strictement positifs $x_1, \ldots, x_n$. Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) \geqslant n^2$$

4. Montrer que, pour $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \geqslant \frac{6n}{(n+1)(2n+1)}$

3. Cette inégalité peut aussi se prouver à partir des propriétés du produit scalaire dans $\mathbb{C}^n$

10.8 Correction de quelques exercices

Exercice 2 :

On considère l'ensemble $X = \left\{x_n = \dfrac{1}{n} + (-1)^n \text{ où } n \in \mathbb{N}^*\right\}$. *Cet ensemble a-t-il un plus grand élément ? Un plus petit élément ? Une borne supérieure ? Une borne inférieure ?*

Exercice 34 :

Si $x \in \mathbb{R}$, *on note* $\{x\} = x - [x]$ *la partie fractionnaire de* x.
Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *un nombre irrationnel et* f *de* $\mathbb{N}$ *dans* $[0, 1[$ *définie par :*

$$\begin{cases} f : \mathbb{N} & \longrightarrow & [0,1[\\ \quad n & \longmapsto & f(n) = \{n\theta\} \end{cases}$$

Que $\{x\} \in [0, 1[$ est évident puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$[x] \leqslant x < [x] + 1 \Longleftrightarrow 0 \leqslant x - [x] < 1$$

1. *Montrer que* f *est injective*

   Soient $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ et supposons que nous ayions $f(m) = f(n)$; alors :

   $$\begin{aligned} \{m\theta\} - \{n\theta\} \Longleftrightarrow & \quad m\theta - [m\theta] = n\theta - [n\theta] \\ \Longleftrightarrow & \quad \theta(m - n) = [m\theta] - [n\theta] \end{aligned}$$

   La dernière égalité sous-entend que si $m \neq n$, alors, $\theta \in \mathbb{Q}$, ce qui est impossible ; donc $m = n$ et f est injective.

2. *Démontrer que pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un couple d'entiers* $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ *tels que* $m \neq n$ *et* $0 < f(m) - f(n) < \varepsilon$

   Soient $\varepsilon > 0$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{q} < \varepsilon$

   On subdivise l'intervalle $[0, 1[$ en q intervalles $I_k = \left[\dfrac{k}{q}; \dfrac{k+1}{q}\right[$ où $k = 0, \ldots, q - 1$. La famille $(I_k)_{k=0,\ldots,q-1}$ forme une partition de $[0, 1[$.
   Pour $j = 0, \cdots, q$, les $q + 1$ nombres $(f(j))_{j=0,\cdots,q}$ sont tous dans $[0, 1[$, et du fait de l'injectivité de f sont tous différents.
   Il existe donc k_0 tel que $0 \leqslant k_0 \leqslant q - 1$, m et n avec $0 \leqslant m \leqslant q$ et $0 \leqslant n \leqslant q$ tels que $f(m) \in I_{k_0}$ et $f(n) \in I_{k_0}$

   En effet, supposons qu'il y ait au plus un seul élément $f(j)$ dans chacun des I_k ; ceci entendrait qu'il existe j_0 et j_1, $j_0 \neq j_1$ tels que $f(j_0) = f(j_1)$; ce qui est contradictoire avec l'injectivité de f.

   Donc, si $f(m) \in I_{k_0}$ et $f(n) \in I_{k_0}$, alors $0 < |f(m) - f(n)| < \dfrac{k_0 + 1}{q} - \dfrac{k_0}{q} = \dfrac{1}{q} < \varepsilon$

   Ce que nous voulions

3. *En déduire que l'ensemble* $\left\{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } \exists (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tels que } x = m + n\theta\right\}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$

   Il y a 2 façons de répondre à cette question :
   - ▷ **La première, en utilisant les résultats sur les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$**
     En effet, d'après 10.6.5 les ensembles $G = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } \exists (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tels que } x = m + n\theta\right\}$ sont des sous-groupes de $\mathbb{R}$, denses dans $\mathbb{R}$.
   - ▷ **La seconde, en utilisant les résultats de l'exercice**
     Nous appelons donc $G = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } \exists (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tels que } x = m + n\theta\right\}$
     Soit $t \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Nous allons montrer qu'il existe $x \in G$ tel que $|x - t| < \varepsilon$
     D'après la question précédente, il existe $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$ tels que $0 < f(m) - f(n) < \varepsilon$
     $\mathbb{R}$ étant archimédien, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $q(f(m) - f(n)) > \{t\}$.

L'ensemble $\{q \in \mathbb{N} \text{ tel que } q\,(f\,(m) - f\,(n)) > \{t\}\}$ est donc non vide et possède un plus petit élément p. Alors :

$$(p-1)\,(f\,(m) - f\,(n)) \leqslant \{t\} < p\,(f\,(m) - f\,(n))$$

Donc :

$$(p-1)\,(f\,(m) - f\,(n)) \leqslant \{t\} < (p-1)\,(f\,(m) - f\,(n)) + \varepsilon$$

Ce qui retraduit, donne :

$$(p-1)\,(f\,(m) - f\,(n)) \leqslant t - [t] < (p-1)\,(f\,(m) - f\,(n)) + \varepsilon$$

Ou, ce qui est équivalent :

$$[t] + (p-1)\,(f\,(m) - f\,(n)) \leqslant t < [t] + (p-1)\,(f\,(m) - f\,(n)) + \varepsilon$$

En posant $x = [t] + (p-1)\,(f\,(m) - f\,(n))$, nous avons bien $|x - t| < \varepsilon$; mais qu'est donc x ?

$$x = [t] + (p-1)\,(f\,(m) - f\,(n)) = [t] + (p-1)\,(m\theta - [m\theta] - n\theta - [n\theta])$$

Et donc $x = [t] + (p-1)\,([m\theta] - [n\theta]) + (p-1)\,(m-n)\,\theta$, et donc $x \in G$
G est donc dense dans $\mathbb{R}$...........OUF ! !

Exercice 35 :

1. *Soient $z \in \mathbb{C}$, $z' \in \mathbb{C}$ et $t \in \mathbb{R}^*$. Démontrer que $2\,|zz'| \leqslant t^2\,|z|^2 + t^{-2}\,|z'|^2$*

   Il suffit de calculer et développer $\left(t\,|z| - t^{-1}\,|z'|\right)^2$.

   $$\left(t\,|z| - t^{-1}\,|z'|\right)^2 = t^2\,|z|^2 + t^{-2}\,|z'|^2 - 2\,|zz'|$$

   Comme $\left(t\,|z| - t^{-1}\,|z'|\right)^2 \geqslant 0$, nous avons :

   $$t^2\,|z|^2 - t^{-2}\,|z'|^2 - 2\,|zz'| \geqslant 0 \Longleftrightarrow t^2\,|z|^2 + t^{-2}\,|z'|^2 \geqslant 2\,|zz'|$$

   L'égalité n'ayant lieu que si $t = \sqrt{\dfrac{|z'|}{|z|}}$ avec $z \neq 0$

2. *Soient $\{a_i \text{ avec } 1 \leqslant i \leqslant n\}$ et $\{b_i \text{ avec } 1 \leqslant i \leqslant n\}$, 2 familles de nombres complexes. Démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, :*

   $$2\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leqslant t^2\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right) + t^{-2}\left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right)$$

   Pour un i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$ fixé, et pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, nous avons $2\,|a_i b_i| \leqslant t^2\,|a_i|^2 + t^{-2}\,|b_i|^2$.

   Donc, en passant à la sommation, nous avons : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2\,|a_i b_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(t^2\,|a_i|^2 + t^{-2}\,|b_i|^2\right)$, c'est à dire, en factorisant et en utilisant la linéarité de la somme,

   $$2\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leqslant t^2\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right) + t^{-2}\left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right)$$

3. (a) *Pour $A > 0$ et $B > 0$, on définit, pour $t > 0$ la fonction $\varphi\,(t) = At^2 + Bt^{-2}$. Démontrer que, pour tout $t > 0$, $\varphi\,(t) \geqslant 2\sqrt{AB}$*

   ▷ Premièrement, il n'y a pas de problème de domaine et nous avons :

   $$\lim_{t\to+\infty} \varphi\,(t) = \lim_{t\to 0} \varphi\,(t) = +\infty$$

▷ Calculons maintenant la dérivée de φ :

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= 2At - 2Bt^{-3}\\ &= 2t^{-3}\left(At^4 - B\right)\\ &= 2t^{-3}\left(\sqrt{A}t^2+\sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A}t^2-\sqrt{B}\right)\\ &= 2t^{-3}\left(\sqrt{A}t^2+\sqrt{B}\right)\left(A^{\frac14}t+B^{\frac14}\right)\left(A^{\frac14}t-B^{\frac14}\right)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\varphi'(t)=0 \iff A^{\frac14}t-B^{\frac14}=0 \iff t=\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac14}$$

▷ Le signe de la dérivée dépend donc de celui de $A^{\frac14}t-B^{\frac14}$. Donc :

— Si $0<t\leqslant\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac14}$ alors $\varphi'(t)\leqslant 0$ et la fonction φ est décroissante

— Et si $t\geqslant\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac14}$ alors $\varphi'(t)\geqslant 0$ et la fonction φ est croissante

— φ admet donc un minimum en $t_0=\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac14}$

▷ Ainsi, pour tout $t>0$, nous avons $\varphi(t)\geqslant\varphi(t_0)$. Or,

$$\begin{aligned}\varphi(t_0) &= \varphi\left(\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac14}\right)\\ &= A\left(\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac14}\right)^2+B\left(\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac14}\right)^{-2}\\ &= A\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac12}+B\left(\frac{B}{A}\right)^{-\frac12}\\ &= A\sqrt{\frac{B}{A}}+B\sqrt{\frac{A}{B}}\\ &= 2\sqrt{AB}\end{aligned}$$

Et donc, pour pour tout $t>0$, $\varphi(t)\geqslant 2\sqrt{AB}$

(b) *En déduire l'inégalité de Schwarz pour les sommes finies :*

$$\left|\sum_{i=1}^n a_ib_i\right|\leqslant\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n|a_i|^2\right)}\times\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n|b_i|^2\right)}$$

Nous avons montré que, pour tout $t>0$,

$$2\sum_{i=1}^n|a_ib_i|\leqslant t^2\left(\sum_{i=1}^n|a_i|^2\right)+t^{-2}\left(\sum_{i=1}^n|b_i|^2\right)$$

En posant $A=\sum_{i=1}^n|a_i|^2$ et $B=\sum_{i=1}^n|b_i|^2$ et reprenant $\varphi(t)=At^2+Bt^{-2}$, nous avons donc :

$$2\sum_{i=1}^n|a_ib_i|\leqslant\varphi(t)$$

En particulier, $2\sum_{i=1}^n|a_ib_i|\leqslant\inf_{t>0}\varphi(t)$, c'est à dire $2\sum_{i=1}^n|a_ib_i|\leqslant 2\sqrt{AB}\iff\sum_{i=1}^n|a_ib_i|\leqslant\sqrt{AB}$

Ce qui, retraduit avec les hypothèses donne :

$$\sum_{i=1}^n|a_ib_i|\leqslant\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n|a_i|^2\right)}\times\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n|b_i|^2\right)}$$

Comme $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i b_i|$, nous avons l'inégalité demandée

Exercice 36 :

1. *On se donne un entier $\geqslant 1$ et des réels $x_1, \ldots, x_n$. Montrer que*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

Nous allons tenter d'aller plus loin en travaillant sur les nombres complexes.
Soit donc un entier $\geqslant 1$ et des nombres complexes $x_1, \ldots, x_n$. D'après l'inégalité de Schwarz,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} 1 \times x_i\right| \leqslant \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} |1|^2\right)} \times \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)} \Longleftrightarrow \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leqslant \sqrt{n} \times \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)}$$

Ce qui donne, en élevant au carré : $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right|^2 \leqslant n \times \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)$

Si les nombres $x_1, \ldots, x_n$ sont réels, nous avons $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$ et $|x_i|^2 = x_i^2$, et si les nombres $x_1, \ldots, x_n$ sont réels, nous avons bien $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$

2. *Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, nous avons :* $\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2\sqrt{3}}\sqrt{2n+1}$

En posant, pour $k = 1, \cdots, n$ $a_k = k$ et $b_k = \sqrt{k}$, l'inégalité de Schwarz nous donne :

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leqslant \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)} \times \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right)} \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leqslant \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)} \times \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)}$$

Or, de manière classique, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et donc :

$$\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)} \times \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)} = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \times \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{n(n+1)}{2\sqrt{3}}\sqrt{2n+1}$$

D'où le résultat.

3. *On se donne un entier $n \geqslant 1$ et des réels strictement positifs $x_1, \ldots, x_n$. Montrer que* $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k}\right) \geqslant n^2$

On se donne, pour $k = 1, \cdots, n$ $a_k = \sqrt{x_k}$ et $b_k = \dfrac{1}{\sqrt{x_k}}$; alors, l'inégalité de Schwarz nous montre que :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_k} \times \frac{1}{\sqrt{x_k}}\right| \leqslant \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{x_k}\right)^2\right)} \times \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2\right)}$$

Ce qui nous donne :

$$n \leqslant \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_k\right)} \times \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)}$$

Ce qui nous donne le résultat en élevant au carré.

4. *Montrer que, pour $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \geqslant \frac{6n}{(n+1)(2n+1)}$*

En posant $x_k = k^2$ dans l'inégalité $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) \geqslant n^2$ démontrée à la question précédente, nous avons :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right) \geqslant n^2$$

Or, identité bien connue : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et l'inégalité devient :

$$\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right) \geqslant n^2$$

D'où le résultat, par simplification

Chapitre 11

Les suites numériques réelles

Que l'on se place d'un point de vue pratique ou d'un point de vue théorique, la **notion de suite est fondamentale**. Toutes les autres notions d'analyse réelle peuvent d'ailleurs s'en déduire.
Dans ce chapitre, vous trouverez beaucoup d'exercices résolus qui seront un guide pour le travail personnel.

11.1 Introduction

11.1.1 Définition

Soit E un ensemble quelconque.
On appelle suite d'éléments de E, une application f de $I \subset \mathbb{N}$ dans E

$$\begin{cases} f : I & \xrightarrow{f} & E \\ \quad n & \xmapsto{f} & f(n) \end{cases}$$

Remarque 1 :

1. I peut être un ensemble fini ou infini.
   — Si I est un ensemble fini, **la suite est dite finie**.
   — Si I est un ensemble infini, la suite est dite infinie
2. On préfère utiliser la notation indicielle dans le cas des suites.
   On pose donc $f(n) = x_n$ où x_n est un élément tel que $x_n \in E$; $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ représente l'application *(ou la suite)* f
3. On peut dire *(et on le dit !!)* que x_n est le terme d'indice n de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$
4. Si $E = \mathbb{R}$, on parle alors de **suites numériques réelles**, et c'est ce type de suite que nous étudions dans ce chapitre
5. On peut aussi remarquer que si la suite est infinie, l'ensemble des valeurs prises par la suite de terme général $u_n = (-1)^n$, $w_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{6} + n\dfrac{\pi}{2}\right)$ sont des exemples de suites numériques infinies qui ne prennent qu'un nombre fini de valeurs
6. $\left(v_n = \dfrac{n-1}{n^2+1}\right)$ pour $1 \leqslant n \leqslant 6$ est l'exemple *(trop)* simple d'une suite finie

11.1.2 Comment définit-on une suite ?

Il y a plusieurs façons de définir une suite :

1. Par une formule explicite, en fonction de l'entier n ;

   Exemples :

— $u_n = \sin\dfrac{1}{n}$, suite qui n'est définie que pour $n \in \mathbb{N}^*$; nous avons, en particulier, $u_1 = \sin 1$, $u_2 = \sin\dfrac{1}{2}$

— $v_n = \pi 2^{-n}$; nous avons $v_0 = \pi$, $v_1 = \dfrac{\pi}{2}$, $v_2 = \dfrac{\pi}{4}$

2. Par une formule itérative *(Formule de récurrence)*
Par exemple, la **suite de FIBONACCI**.

$$\begin{cases} F_{n+2} = & F_{n+1} + F_n \\ F_0 = F_1 = & 1 \end{cases}$$

Le tableau suivant donne les premières valeurs de cette suite :

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

TABLE 11.1 – Le calcul des premiers termes de la suite de Fibonacci $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ avec $F_0 = F_1 = 1$

On peut utiliser un algorithme simple pour le calcul des valeurs de la suite de Fibonacci :
Algorithme donnant les termes successifs de la suite de Fibonnacci
Codage d'une suite de Fibonnacci en langage `Python` :

```
#On définit d'abord le calcul du terme d'ordre n
def fibonacci(n):
    a=b=1  #affectation typique du langage Python
        for i in range(n):
                a, b = a+b, b #Autre affectation typique du langage Python
        return b
#On imprime les termes de la suites de 1 à 120
for n in range(120):
        print (fibonacci(n))
```

3. On peut aussi définir une suite par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction numérique d'une variable réelle
Exemple : On considère la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{3}{u_n}\right) \end{cases}$$

qui est une suite numérique qui converge $\sqrt{3}$; cette suite est connue comme **l'algorithme des babyloniens**, qui permet d'approximer [1] la racine carrée du nombre $\sqrt{3}$. Elle est définie à partir de la fonction : $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{3}{x}\right)$ *(cf figure 11.1)* [2] C'est une suite qui converge très rapidement.
Le tableau suivant donne les premières valeurs de la suite :

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
5	2,8	1,97571	1,74276	1,73208	1,73205	1,73205

TABLE 11.2 – Le calcul des premiers termes de la suite des babyloniens $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{3}{u_n}\right)$ avec $u_0 = 5$

1. Ou approcher
2. En fait, on peut trouver une approximation de $\sqrt{A}$ avec $A > 0$ en utilisant la suite $U_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(U_n + \dfrac{A}{U_n}\right)$

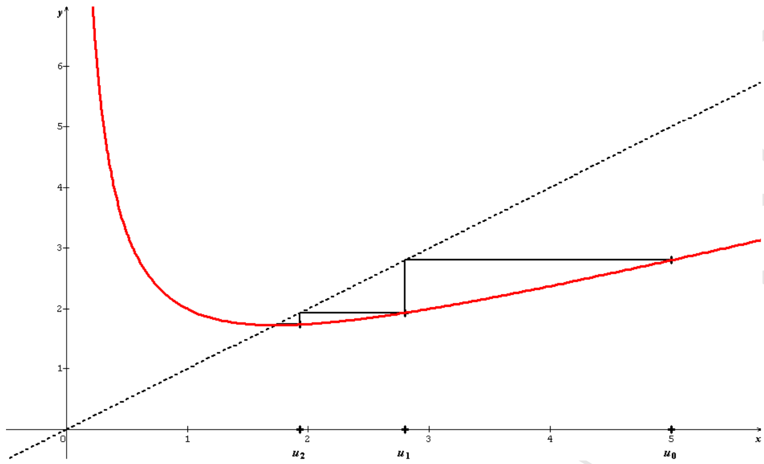


FIGURE 11.1 – La visualisation de la suite $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right)$

Algorithmes donnant les termes successifs de la suite des babyloniens dans le langage Python

```
# Ce script définit une fonction babylon dans laquelle on insère 2 variables:
# Une variable A dont on veut déterminer la racine carrée
# Une variable n qui donnera lerme de rang n de la suite des babyloniens
def babylon(A,n):
    if A <= 0:
        A=-A
    A = float(A) #On force A à avoir le type flottant
    n = int(n) #On force n à avoir le type entier
    B = A+2 #C'est notre premier terme, totalement arbitraire plus grand que A
    for i in range(n):
        B = 0.5*(B+(A/B))
    return B
```

Nous obtenir comme valeurs : *babylon* $(144, 5) = 12.11935\ldots$ et *babylon* $(144, 30) = 12.0$

4. Il est aussi possible de définir les termes successifs d'une suite **par un algorithme** ; c'est le cas de la célèbre **conjecture de Syracuse**
   La conjecture de Syracuse est une conjecture mathématique qui reste improuvée à ce jour et qui est définie de manère suivante :
   Soit $n \in \mathbb{N}$
   Si n est pair, alors le terme suivant est obtenu en divisant n par 2
   Si n est impair, alors le terme suivant est obtenu en multipliant n par 3 et on lui ajoute 1
   En répétant cette procédure, la suite nombre atteint la valeur 1, puis se prolonge indéfiniment par une suite de 3 valeurs triviales, appelée « cycle trivial »
   Jusqu'à présent, la conjecture de Syracuse selon laquelle, depuis n'importe quel entier positif de départ, la suite de Syracuse atteint 1, n'a pas été mise en défaut.

Programme Python, calculant les n premiers termes d'une suite de Syracuse commençant par un premier terme noté p

```
def syracuse(p,n):
    for i in range(n):
       if p%2 == 0: #On teste si p est pair
           p =p/2
       else:
           p = 3*p+1
    print("Le terme de la suite d'ordre {} est {}").format(i+1,p)
```

Calculez *syracuse* $(1, 12)$ ou *syracuse* $(12, 20)$

Exercice 1 :

Que pouvez vous dire de la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{n}{2n+1}\left(1+(-1)^n\right)$

Résolution

Pour le moment, il est difficile d'en dire beaucoup sur cette suite. Dans un premier temps, ce qu'il nous est possible de dire, c'est ceci :

— Si n est impair, alors, $u_n = 0$

— Si n est pair, alors $u_n = \dfrac{2n}{2n+1}$

Il nous est possible de faire un tableau des premières valeurs : On voit donc, facilement, un comportement

$n =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$u_n =$	0	0	$\frac{4}{5}$	0	$\frac{8}{9}$	0	$\frac{12}{13}$	0	$\frac{16}{17}$	0	$\frac{20}{21}$

TABLE 11.3 – Calcul des premières valeurs de la suite $u_n = \dfrac{n}{2n+1}\left(1+(-1)^n\right)$

différent suivant que l'indice des termes est pair ou impair. On peut donc créer ainsi 2 ≪ **sous-suites** ≫ ou ≪ **suites extraites** ≫ :

— La sous-suite des termes de rang pair dont les termes se rapprochent de 1 ; elle admet +1 comme limite.

— La sous-suite des termes de rang impair, toujours nulle

— En fait, cette suite n'admet aucune limite.

11.1.3 Définition

1. Une suite est dite croissante si, $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} \geqslant u_n$
2. Une suite est dite décroissante si, $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} \leqslant u_n$
3. Une suite est dite monotone, si elle est toujours croissante ou toujours décroissante

Exercice 2 :

1. Que dire de la suite de terme général $u_n = \dfrac{10^n}{n!}$?

   (a) Pour étudier la croissance ou la décroissance de cette suite, il est possible de faire le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, rapport que l'on compare à 1 ; ici,

   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{10^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{10^n} = \frac{10}{n+1}$$

   Ainsi :

   $$\begin{cases} \dfrac{10}{n+1} < 1 & \text{si } n > 9 \\ \dfrac{10}{n+1} > 1 & \text{si } n < 9 \\ \dfrac{10}{n+1} = 1 & \text{si } n = 9 \end{cases}$$

   Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante jusque $n = 9$, puis, $u_9 = u_{10}$, et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir de $n = 10$

   (b) Bien sur qu'il est aussi possible de faire la différence entre 2 termes consécutifs : $u_{n+1} - u_n$

   $$\begin{cases} u_{n+1} - u_n = & \dfrac{10^{n+1}}{(n+1)!} - \dfrac{10^n}{n!} \\ \qquad = & \dfrac{10^n}{n!}\left(\dfrac{10}{n+1} - 1\right) \\ \qquad = & \dfrac{10^n}{n!}\left(\dfrac{10-(n+1)}{n+1}\right) \\ \qquad = & \dfrac{10^n}{n!}\left(\dfrac{9-n}{n+1}\right) \end{cases}$$

   On retrouve donc $u_{n+1} - u_n > 0 \iff n < 9$ et $u_{n+1} - u_n < 0 \iff n > 9$ et $u_9 = u_{10}$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{n^n}{n!}$; étudier la croissance ou la décroissance de cette suite.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	10	50	166,67	416,67	833,34	1388,88	1984,13	2480,16	2755,32	2755,32	2505,21	2087.67

TABLE 11.4 – Le calcul des douze premiers termes de la suite $\dfrac{10^n}{n!}$

Correction de l'exercice
Commençons par faire le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Nous avons donc :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n}$$

Après simplification :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1$$

Donc, $u_{n+1} > u_n$, et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement croissante

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_{n+1} = -u_n^2 + u_n$; étudier la croissance ou la décroissance de cette suite.

   C'est très simple : pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons : $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$. Donc, $u_{n+1} \leqslant u_n$ et la suite est bien décroissante

11.2 Suites arithmétiques, suites géométriques

Les suites géométriques ont une importance capitale dans le cours de mathématiques

11.2.1 Définition

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, si $u_n = u_{n-1} + r$ et $u_0 = a$
- r est la raison de cette suite.
- Il est équivalent de dire que $u_n - u_{n-1} = r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Remarque 2 :

1. Il est bien évident que l'on peut définir un premier terme à cette suite, ailleurs qu'en $n = 0$; on peut définir comme premier terme $u_{n_0} = a$ où n_0 est le plus petit élément de I
2. On dit que des nombres réels a, b, c sont en **progression arithmétique** si $b-a = c-b$ ou encore, que $b = \dfrac{a+c}{2}$

11.2.2 Proposition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique si et seulement si $\boxed{2u_n = u_{n-1} + u_{n+1}\,(P)}$

Remarque 3 :

Ceci veut donc dire qu'il y a équivalence entre le fait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite arithmétique et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété (P)

Démonstration

Cette proposition est une équivalence ; il faut donc faire la démonstration *"dans les deux sens"*.
- On suppose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$suite arithmétique.
  Alors, $u_{n+1} = u_n + r$ et $u_n = u_{n-1} + r$, c'est à dire que $r = u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1}$; C'est à dire, en transposant, $2u_n = u_{n-1} + u_{n+1}$

— On suppose $2u_n = u_{n-1} + u_{n+1}$
Ceci veut donc dire que $u_n + u_n = u_{n+1} + u_{n-1}$ ou, ce qui est équivalent à $u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1}$
Ce qui veut donc dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique

Remarque 4 :

Remarquez **comment** nous avons démontré une équivalence.

11.2.3 Expression de u_n en fonction de n

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,(\forall p \in \mathbb{N})\,(p \leqslant n) \Rightarrow (u_n = u_p + (n-p)\,r)$$

En particulier, on a $\boxed{u_n = u_0 + nr}$

2. $(\forall n \in \mathbb{N})\,(\forall p \in \mathbb{N})\,(p \leqslant n)$ et $(0 \leq k \leq n-p) \Rightarrow (u_{n-k} + u_{p+k} = u_n + u_p)$

Démonstration

1. On démontre le premier point par récurrence sur n
Vérifions pour le premier terme u_p Nous avons, effectivement $u_p = u_p + (p-p)\,r$
Supposons que pour $n \geqslant p$**,** $u_n = u_p + (n-p)\,r$
Démontrons à l'ordre $n+1$ Nous avons $u_{n+1} = u_n + r = u_p + (n-p)\,r + r = u_p + (n+1-p)\,r$
Ce que nous voulions
2. Pour le second point, il suffit de réutiliser le point juste au-dessus :

$$\begin{aligned} u_{n-k} + u_{p+k} &= u_p + (n-k-p)\,r + u_p + u_p + (p+k-p) \\ &= u_p + (n-p)\,r - kr + u_p + kr \\ &= u_n + u_k \end{aligned}$$

Remarque 5 :

1. Il faut remarquer que les suites arithmétiques sont donc les restrictions sur $\mathbb{N}$ des applications affines du type $f(x) = ax + b$
2. On vient de démontrer que les suites sont arithmétiques **si et seulement si** elles sont du type $u_n = an + b$.

11.2.4 Somme des termes d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \leqslant n$. On pose $S_{p,n} = \sum_{k=p}^{n} u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$.

Alors $S_{p,n} = \dfrac{(n-p+1)(u_p + u_n)}{2}$

On a, en particulier, $\boxed{S_{0,n} = S_n = \dfrac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}}$

Démonstration

On écrit $S_{p,n}$ de 2 manières différentes et, de plus, on compte le nombre de termes formant la somme des $S_{p,n}$

$$\begin{cases} S_{p,n} = & u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{n-1} + u_n \\ S_{p,n} = & u_n + u_{n-1} + \cdots + u_{p+1} + u_p \end{cases}$$

En faisant remarquer que *(cf supra 2)* que $u_{n-k} + u_{p+k} = u_n + u_p$ on obtient alors, en additionnant, $2S_{p,n} = (n-p+1)\,(u_n + u_p)$ D'où le résultat

Exercice 3 :

1. Calculer la somme des n premiers nombres entiers

   Il suffit de remarquer que la suite des entiers est une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 1$ et de raison $r = 1$. Donc, $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$ est donnée par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n-1+1)(u_1+u_n)}{2} = \frac{n(1+n)}{2}$$

2. Calculer la somme des n premiers nombres impairs

   Comme tout à l'heure, il suffit de remarquer que la suite des entiers impairs est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 2$. Les entiers impairs s'écrivent $u_k = 2k+1$. Donc, $S_n = \sum_{k=0}^{n} 2k+1$ est donnée par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 2k+1 = \frac{(n-0+1)(1+2n+1)}{2} = (n+1)^2$$

3. Calculer la somme des n premiers multiples de 5

   Les entiers multiples de 5 s'écrivent $5k$, et la somme des n premiers multiples de 5 s'écrit donc $\sum_{k=1}^{n} 5k$. Or,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 5k = 5\sum_{k=1}^{n} k = \frac{5n(1+n)}{2}$$

11.2.5 Suites géométriques

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, s'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que $(\forall n \in \mathbb{N})\,(u_{n+1} = qu_n)$ et $u_0 \in \mathbb{R}$. q est appelé la raison de cette suite

Remarque 6 :

1. Si la raison $q = 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 0$; nous sommes donc devant la suite nulle à partir du rang 1. De même, si le premier terme $u_0 = 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$; nous sommes donc devant la suite nulle ; ces deux cas sont semblables et sans intérêt
2. Dans les cas où **ni le premier terme u_0, ni la raison q ne sont nuls**, la définition 11.2.5 est équivalente à la suivante : $(\forall n \in \mathbb{N})\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} = q\right)$

Exercice 4 :

Trois nombres a, b et c sont dits en **progression géométrique** si $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = q$

Trois nombres a, b et c forment une progression géométrique. On suppose que $a+b+c = 7$ et que $2a+b = 0$. Calculer a,b et c

Si a, b, et c sont en progression géométrique, alors, $b = aq$ et $c = aq^2$, de telle sorte que :

$$a + aq + aq^2 = a\left(1+q+q^2\right) = 7$$

De la dernière identié, nous tirons que $a \neq 0$ et $1+q+q^2 \neq 0$ [3]

De plus, nous avons $2a+b = 0 \iff 2a+aq = 0 \iff a(2+q) = 0$. Comme $a \neq 0$, nous avons $q = -2$ et donc $3a = 7$. D'où :

$$a = \frac{7}{3} \qquad b = \frac{-14}{3} \qquad c = \frac{28}{3}$$

11.2.6 Proposition

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, si et seulement si $(\forall n \in \mathbb{N})\left((u_n)^2 = u_{n+1} \times u_{n-1}\right)$

3. De toute façons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $1+x+x^2 \geqslant \frac{3}{2}$

Démonstration

À faire seul ; il faut s'inspirer de 11.2.2

11.2.7 Proposition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q
Alors

1. Pour tout $n \geqslant p$, $u_n = q^{n-p} \times u_p$.
   En particulier si le premier terme est u_0, nous avons : $\boxed{u_n = u_0 q^n}$
2. $(\forall n \in \mathbb{N})\,(\forall p \in \mathbb{N})\,(\forall k \in \mathbb{N})\,(p \leqslant k \leqslant n)\,(u_{n-k}u_{p+k} = u_n u_p)$

Démonstration

Une nouvelle fois, la démonstration est très simple et laissée à faire tout seul ; il faut s'inspirer de 11.2.3

Remarque 7 :

1. Il est bon, à nouveau, de remarquer que les suites géométriques sont les restrictions à $\mathbb{N}$ des fonctions exponentielles du type $f(x) = aq^x$ si $q > 0$
2. On démontre ainsi que les suites sont géométriques, si et seulement si elles sont du type $u_n = aq^n$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q > 0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n$. En construisant $w_n = \ln u_n$, nous avons : $w_n = \ln a + n \ln q$ et la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ apparaît comme une suite arithmétique.

11.2.8 Somme des termes d'une suite géométrique

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q où q est différent de 1 $(q \neq 1)$
   Comme précédemment, on pose $S_{p,n} = \displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$
   Alors $S_{p,n} = \dfrac{u_p(1 - q^{n+1-p})}{1-q}$
   On a, en particulier, $\boxed{S_{0,n} = S_n = \dfrac{u_0(1 - q^{n+1})}{1-q}}$
2. Si $q = 1$, alors $S_{p,n} = (n + 1 - p)u_p$

Remarque 8 :

Un moyen de retenir la formule est celui-ci :

$$\boxed{\text{Somme} = \frac{\text{premier terme} \times \left(1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}\right)}{1 - \text{raison}}}$$

Démonstration

Démonstration du théorème sur la somme des termes d'une suite géométrique
On réécrit l'expression de $S_{p,n}$:

$$S_{p,n} = \sum_{k=p}^{n} u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{n-1} + u_n$$

En multipliant $S_{p,n}$ par $-q$, nous obtenons :

$$-qS_{p,n} = -qu_p - qu_{p+1} - \ldots - qu_{n-1} - qu_n$$

Or $qu_p = u_{p+1}$, donc

$$-qS_{p,n} = -u_{p+1} - \ldots - u_n - u_{n+1}$$

Donc, $S_{p,n} - qS_{p,n} = u_p - u_{n+1}$; on tire donc de cette égalité : $S_{p,n} = \dfrac{u_p - u_{n+1}}{1-q}$; or, d'après 11.2.7, $u_{n+1} = u_p q^{n+1-p}$; donc :

$$S_{p,n} = \frac{u_p\left(1 - q^{n+1-p}\right)}{1-q}$$

Ce que nous voulions

Exercice 5 :

1. Calculer, pour $X \neq 1$ une expression plus simple du polynome $P(X)$ suivant :

$$P(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + \ldots + X^{n-1} + X^n$$

Si on considère la suite géometrique de raison $X \neq 1$ et de premier terme $U_0 = 1$, $P(X)$ apparait comme la somme de termes d'une suite géometrique. Donc,

$$P(X) = \frac{1 - X^{n+1}}{1 - X}$$

2. En déduire une factorisation de P considéré comme polynome à coefficients complexes.

On peut remarquer que 1 n'est pas racine de P. D'après la question précédente,

$$P(X) = \frac{1 - X^{n+1}}{1 - X}$$

Donc, $P(X) = 0 \Longleftrightarrow 1 - X^{n+1} = 0$. Les racines de P sont donc toutes les racines $n+1$-ièmes de 1 sauf 1. Les racines sont donc de la forme $X_k = e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}$ Une factorisation de P est donc donnée par

$$P(X) = \prod_{k=1}^{n}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}\right)$$

Exercice 6 :

Factoriser $X^n - Y^n$

Nous allons, bien entendu, écarter les cas où $X = 0$, $Y = 0$ et $X = Y$. Supposons que nous nr soyions dans aucun des cas ci-dessus ; alors,

$$X^n - Y^n = X^n\left(1 - \frac{Y^n}{X^n}\right) = X^n\left(1 - \left(\frac{Y}{X}\right)^n\right)$$

D'après l'exercice précédent : $(1 - X)\,P(X) = 1 - X^{n+1}$.

Donc, $\left(1 - \left(\frac{Y}{X}\right)^n\right) = \left(1 - \frac{Y}{X}\right)\left(1 + \frac{Y}{X} + \left(\frac{Y}{X}\right)^2 + \left(\frac{Y}{X}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{Y}{X}\right)^{n-2} + \left(\frac{Y}{X}\right)^{n-1}\right)$

D'où :

$$\begin{aligned}
X^n - Y^n &= X^n\left(1 - \left(\frac{Y}{X}\right)^n\right)\\
&= X^n\left(1 - \frac{Y}{X}\right)\left(1 + \frac{Y}{X} + \left(\frac{Y}{X}\right)^2 + \left(\frac{Y}{X}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{Y}{X}\right)^{n-2} + \left(\frac{Y}{X}\right)^{n-1}\right)\\
&= \left(1 - \frac{Y}{X}\right)\left(X^n + X^{n-1}Y + X^{n-2}Y^2 + X^{n-3}Y^3 + \ldots + X^2Y^{n-2} + XY^{n-1}\right)\\
&= (X - Y)\left(X^{n-1} + X^{n-2}Y + X^{n-3}Y^2 + X^{n-2}Y^3 + \ldots + XY^{n-2} + Y^{n-1}\right)
\end{aligned}$$

Nous avons donc : $\boxed{X^n - Y^n = (X - Y)\left(X^{n-1} + X^{n-2}Y + X^{n-3}Y^2 + X^{n-2}Y^3 + \ldots + XY^{n-2} + Y^{n-1}\right)}$

Exercice 7 :

On définit les deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par ses deux premiers termes $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \dfrac{3}{2}u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n$

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $v_n = u_{n+1} - u_n$

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique ; calculez le terme général v_n en fonction de n

   Tout d'abord, remarquons que $v_0 = u_1 - u_0 = 1$. D'autre part,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+2} - u_{n+1} \\ &= \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n - u_{n+1} \\ &= \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

   La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique et de raison $\dfrac{1}{2}$.

   Nous avons donc $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n v_1 = \dfrac{1}{2^n}$

2. En déduire calculez le terme général u_n en fonction de n ; quelle est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.

   Nous allons utiliser, ici, ce qu'on a coutume d'appeler une méthode « télescopique ».
   Présentons les résultats sous forme de tableau :

$$\begin{aligned} v_{n-1} &= u_n - u_{n-1} \\ v_{n-2} &= u_{n-1} - u_{n-2} \\ &\vdots \quad \vdots \\ v_2 &= u_2 - u_1 \\ v_0 &= u_1 - u_0 \end{aligned}$$

   En additionnant, nous obtenons : $v_0+v_1+\cdots+v_{n-2}+v_{n-1} = (u_1-u_0)+(u_2-u_1)+\cdots+(u_{n-1}-u_{n-2})+(u_n-u_{n-1}) = u_n - u_0$.

   Nous avons donc $u_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k$. Cette dernière somme est la somme des termes d'une suite géométrique, et donc :

$$u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} v_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

   Et donc, $u_n = u_0 + 2 - \dfrac{1}{2^{n-1}} = 3 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$

3. Trouver le plus petit entier N_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant N_0$, on ait $|u_n - 3| < 10^{-5}$

   Il nous faut donc résoudre l'inéquation :

$$|u_n - 3| < 10^{-5} \Longleftrightarrow \left|3 - \frac{1}{2^{n-1}} - 3\right| < 10^{-5} \Longleftrightarrow \frac{1}{2^{n-1}} < 10^{-5}$$

   Or, $\dfrac{1}{2^{n-1}} < 10^{-5} \Longleftrightarrow 2^{n-1} > 10^5$, c'est à dire, en passant au logarithme,

$$(n-1)\ln 2 > 5 \ln 10 \Longleftrightarrow n > 5\left(1 + \frac{\ln 5}{\ln 2}\right) + 1$$

   C'est à dire, $n > 17$. Nous avons donc $N_0 = 18$

11.2.9 Exercices

Exercice 8 :

Soit $u_n = \dfrac{2}{5}u_{n-1} + \dfrac{1}{5}$. Calculer α pour que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - \alpha$ soit une suite géométrique.

Exercice 9 :

On définit une suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de u_0 et la condition suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 1 \quad u_{n+1} = \frac{5u_n + 3}{u_n + 3}$$

1. On pose $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$
   (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique ; en préciser la raison.
   (b) Calculer v_n en fonction de u_0 et de n
2. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les cas suivants :

   (a) $u_0 = 3$ (b) $u_0 = -1$ (c) $u_0 = 4$

Exercice 10 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{3n} u_n \end{cases}$$

1. Montrer que la suite de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{n}$ est une suite géométrique
2. En déduire une formule explicite de u_n
3. Donner $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 11 :

Cet exercice s'inspire de la structure des nombres en machines.
On considère une suite double $(x_{i,j})_{i\in\mathbb{N},j\in\mathbb{N}}$ de réels positifs. On peut représenter ces réels sous forme de matrice infinie, dans lequel i désigne le numéro de la ligne, et j celui de la colonne. On suppose que ces réels sont tels que :

$$\begin{cases} x_{i,j+1} - x_{i,j} = l_i \\ x_{i+1,j} = q x_{i,j} \end{cases}$$

C'est à dire que les réels disposés en ligne, sur la ligne numéro i, forment une suite arithmétique de raison l_i *(la raison dépend de la ligne)*, alors que les nombres disposés en colonne forment une suite géométrique de raison q, q étant constant.
Démontrer que, pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $j \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$x_{i,j} = q^{i-1}\left[x_{1,1} + (j-1)\, l_1\right]$$

montrant ainsi que les termes q, l_1 et $x_{1,1}$ définissent complètement cette suite double

Exercice 12 :

On considère le programme suivant écrit dans le langage de description `Python` :

```
def f(x,y):
    x = float(x)
    y = float(y)
    compteur = 0
    while x+y>5:
        y = 2*x+y
        x = -2*x
        compteur +=1
    print x, y, compteur
```

Pour étudier le comportement de ce programme, et, en particulier savoir s'il ne boucle pas de manière infinie, on considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans lesquelles, les nombres x_n et y_n représentent l'état (ou les valeurs) des variables x et y à l'itération n. Ainsi, nous avons :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \text{ et } y_0 = 10 \\ x_{n+1} = -2x_n \\ y_{n+1} = 2x_n + y_n \end{cases}$$

1. Calculer x_1, y_1, x_2, y_2
2. Démontrer que $x_n = (-2)^n$
3. Démontrer que $y_n = 10 + \frac{2}{3}(1 - (-2)^n)$
4. Démontrer qu'il existe un rang n tel que l'instruction **"while x+y> 5"** soit fausse.
5. Que conclure quant à la sortie du programme ?

Exercice 13 :

Faire une étude la plus complète possible de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ (u_{n+1})^\alpha = \beta u_n \text{ où } \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0 \end{cases}$$

11.3 Suites bornées, propriétés vraies à partir d'un certain rang

11.3.1 Définition

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite bornée si l'image de $\mathbb{N}$ par cette suite est bornée

11.3.2 Définition équivalente

Nous allons énoncer une définition équivalente à 11.3.1 et ce sera la seule que nous utiliserons :

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si l'ensemble $\{u_n ; n \in \mathbb{N}\}$ est borné c'est à dire si et seulement si

$$\boxed{(\exists M > 0)\ (\forall n \in \mathbb{N})\ (|u_n| \leqslant M)}$$

Exemple 1 :

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ est une suite bornée, car pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, nous avons $|u_n| \leq 1$
2. La négation de suite bornée *(cf cours de logique)* est donnée par :
$$(\forall M > 0)(\exists n \in \mathbb{N})(|u_n| > M)$$
3. **Un exemple de suite non bornée** est la suite $(u_n = \left(-\sqrt{2}\right)^n$.
En effet, soit $M > 0$, pour que $\left|\sqrt{2}\right|^n \geq M$, il faut que $\dfrac{n}{2}\ln 2 > \ln M$, c'est à dire $n > \dfrac{2\ln M}{\ln 2}$

Exercice 14 :

La suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n}{2n+1}(1 + (-1)^n)$ est-elle une suite bornée ?

Lorsque nous prenons la valeur absolue, nous avons :

$$|u_n| = \left|\frac{n}{2n+1}(1 + (-1)^n)\right| = \frac{n}{2n+1}|(1 + (-1)^n)| \leqslant \frac{n}{2n+1} \times 2 < +1$$

Donc, $|u_n| < 1$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée par 1

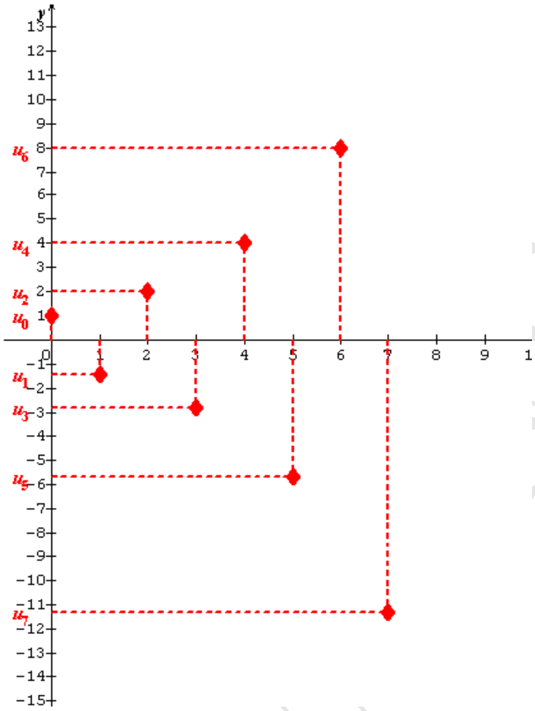


FIGURE 11.2 – Visualisation de la suite $(u_n = \left(-\sqrt{2}\right)^n$ sur quelques termes

11.3.3 Définition et proposition

On appelle $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{N}$
On définit, dans cet ensemble les opérations suivantes :

1. Addition $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. Multiplication $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \times (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
3. Multiplication par un scalaire Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Démonstration

On admet ce résultat

11.3.4 Proposition

Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des suites numériques réelles bornées Alors $\mathcal{B}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Remarque 9 :

Qu'est ce que ceci veut dire ?

Addition Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$

Multiplication par un scalaire Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$

L'addition et la multiplication par un scalaire réel confère à $\mathcal{B}$, la structure de sous-espace vectoriel.
Pour la multiplication, nous avons le résultat suivant :

Multiplication Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \times (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$

Démonstration

La démonstration est très simple et est essentiellement basée sur l'inégalité triangulaire des valeurs absolues, inégalités que nous retrouverons dans d'autres démonstrations.
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$; alors, en réécrivant l'hypothèse :

— Il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$
— Il existe $M' > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leqslant M'$

1. En ce qui concerne l'addition, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$ et $|v_n| \leqslant M'$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après l'inégalité triangulaire,
$$|u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n| \leqslant M + M'$$
Ce qui montre que l'addition de 2 suites bornées est aussi une suite bornée.
2. D'autre part,
$$(\forall\lambda \in \mathbb{R})\,(|\lambda u_n| = |\lambda|\,|u_n| \leqslant |\lambda|\,M)$$
Ce qui montre que si on multiplie une suite bornée par un scalaire réel, on obtient aussi une suite bornée.
3. De même,
$$|u_n v_n| = |u_n|\,|v_n| \leqslant M \times M'$$
Ce qui montre bien que le produit de 2 suites bornées est une suite bornée, c'est à dire, un élément de $\mathcal{B}$

11.3.5 Propriétés vraies à partir d'un certain rang

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite avoir une propriété (P) à partir d'un certain rang, s'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a la propriété (P)

Exemple 2 :

1. La suite $u_n = \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{n^2}$ est positive, dès que $n > \sqrt{10}$, c'est à dire dès que $n \geqslant 4$, c'est à dire dès que $n \geqslant E\left(\sqrt{10}\right) + 1$ où E désigne la partie entière.
2. Pour $\varepsilon > 0$, $u_n = \varepsilon - \dfrac{1}{n}$ est positif à partir d'un certain rang $N_0 = E\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right) + 1$
3. La suite $\dfrac{(\ln n)^4}{n^2}$ est décroissante à partir du rang $n = 8$

   Comment démontrer ce résultat ? Il suffit de constater que $\dfrac{(\ln n)^4}{n^2}$ est la restriction à $\mathbb{N}$ de la fonction numérique $\dfrac{(\ln x)^4}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^{*+}$; et les variations de la suite suivront les variations de la fonction numérique. Donc, si $f(x) = \dfrac{(\ln x)^4}{x^2}$, les variations de f seront données par le signe de la dérivées de f.
   Or, $f'(x) = \dfrac{2x\ln x\,(2 - \ln x)}{x^4}$. Le signe de f' est donc celui de $2 - \ln x$. Ainsi :
   — Si $0 < x < e^2$, la dérivée est positive et la fonction est croissante.
   — Si $x > e^2$, la dérivée est négative et la fonction est décroissante.
   Comme $e^2 \simeq 7,389$, on en déduit que si $n \geqslant 8$, la suite $\dfrac{(\ln n)^4}{n^2}$ est donc décroissante à partir du rang $n = 8$
4. De même, la suite $\dfrac{(10)^n}{n!}$ est décroissante à partir du rang $n = 10$

   En posant $u_n = \dfrac{(10)^n}{n!}$, nous faisons le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
   Donc, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{10^{n+1}}{(n+1)!} \times \dfrac{n!}{10^n} = \dfrac{10}{n+1}$. Ainsi,
   — Si $n \geqslant 10$, nous avons $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ et la suite $\dfrac{(10)^n}{n!}$ est décroissante à partir du rang $n = 10$
   — Si $n \leqslant 10$, nous avons $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ et la suite $\dfrac{(10)^n}{n!}$ est croissante jusqu'au rang $n = 10$
5. **Une suite est stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang.

11.4 Limite d'une suite

11.4.1 Définition de suite qui tend vers 0

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers zéro, et on écrit

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

Si, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, $|u_n| \leqslant \varepsilon$ à partir d'un certain rang

Remarque 10 :

Autrement dit

1. $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)\,(\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |u_n| \leqslant \varepsilon)}$
2. On dit alors, que u_n est infiniment petit lorsque n est infiniment grand

Exemple 3 :

1. **Exemples de suites tendant vers zéro**

   (a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

   En effet, soit $\varepsilon > 0$,
   Alors, $|u_n| = \left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \dfrac{1}{n}$, et $\dfrac{1}{n} \leqslant \varepsilon$ dès que $n \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$.
   En choisissant $N_\varepsilon = [\dfrac{1}{\varepsilon}] + 1$, nous avons $N_\varepsilon > \dfrac{1}{\varepsilon}$ et :

   $$n \geqslant N_\varepsilon \Longrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Longrightarrow |u_n| \leqslant \varepsilon$$

   Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

   (b) La suite $u_n = \dfrac{1}{n}$ est aussi une suite qui tend vers zéro ; la démonstration est tout à fait semblable à celle ci-dessus.

   (c) $v_n = \dfrac{1}{n^2}$

   C'est aussi une suite qui tend vers zéro.
   En effet, soit $\varepsilon > 0$,
   Alors, $|u_n| = \left|\dfrac{1}{n^2}\right| = \dfrac{1}{n^2}$, et $\dfrac{1}{n^2} \leqslant \varepsilon \Longleftrightarrow \dfrac{1}{n} \leqslant \sqrt{\varepsilon}$. Ainsi, nous avons $\dfrac{1}{n^2} \leqslant \varepsilon$ dès que $n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.
   En choisissant $N_\varepsilon = [\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}] + 1$, nous avons $N_\varepsilon > \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ et :

   $$n \geqslant N_\varepsilon \Longrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \Longrightarrow |u_n| \leqslant \varepsilon$$

   Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

2. **Exemples de suites qui ne tendent pas vers zéro**

   (a) $u_n = \dfrac{n}{2n+1}$

Il est très facile de vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{n}{2n+1} < \dfrac{1}{2}$

Pour $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$, et pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N$ et $|u_n| \geqslant \dfrac{1}{4} = \varepsilon$

Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0

(b) $u_n = \left(-\sqrt{2}\right)^n$

Bien sûr qu'étant non bornée, la suite $u_n = \left(-\sqrt{2}\right)^n$ ne tend pas vers zéro !!

11.4.2 Proposition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle

Alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0}$$

Démonstration

La démonstration est évidente ; il suffit de relire la définition de suite qui tend vers zéro

Exemple 4 :

Cette proposition est très utile pour démontrer la convergence vers zéro de suites dont les signes sont alternativement positifs ou négatifs : on peut penser à $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ ou à $\dfrac{(-1)^n}{n^p}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$

11.4.3 Théorème

Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble des suites tendant vers zéro. Alors, $\mathcal{O}$ est stable par l'addition, la multiplication et la multiplication par un scalaire

Autrement dit :

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites qui tendent vers zéro, alors

Stabilité par l'addition $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = 0$

Stabilité pour la multiplication $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = 0$

Stabilité pour la multiplication par un scalaire $(\forall\lambda \in \mathbb{R}) \left(\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n\right) = 0$

$\mathcal{O}$ est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Démonstration

1. **On démontre pour la somme**

   On suppose $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |u_n| \leqslant \varepsilon)$$

   Il existe donc un entier $N_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geqslant N_\varepsilon^1 \Rightarrow |u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

   De même, il existe un entier $N_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geqslant N_\varepsilon^2 \Rightarrow |v_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc, si $n \geqslant N_\varepsilon^1$ et, en même temps,$n \geqslant N_\varepsilon^2$ par exemple, si $n \geqslant N_\varepsilon$ où $N_\varepsilon = \sup(N_\varepsilon^1, N_\varepsilon^2)$, on a alors

$$|u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

C'est à dire que $\lim\limits_{n_to+\infty} (u_n + v_n) = 0$

2. **On démontre pour le produit de 2 suites**

On suppose $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |u_n| \leqslant \varepsilon)$$

Il existe donc un entier $N_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geqslant N_\varepsilon^1 \Rightarrow |u_n| < \sqrt{\varepsilon}$$

De même, il existe un entier $N_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geqslant N_\varepsilon^2 \Rightarrow |v_n| < \sqrt{\varepsilon}$$

Donc, si $n \geqslant N_\varepsilon^1$ et, en même temps,$n \geqslant N_\varepsilon^2$ par exemple, si $n \geqslant N_\varepsilon$ où $N_\varepsilon = \sup(N_\varepsilon^1, N_\varepsilon^2)$, on a alors

$$|u_n \times v_n| = |u_n| \times |v_n| \leqslant \sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon$$

C'est à dire que $\lim\limits_{n_to+\infty} (u_n \times v_n) = 0$

3. **Pour le produit par un scalaire,** il suffit d'appliquer le résultat précédent à la suite constante $v_n = \lambda$

Remarque 11 :

On peut utiliser ces fameuses phrases faciles à retenir :
— **La limite de la somme, c'est la somme des limites**
— **La limite du produit, c'est le produit des limites**

11.4.4 Utilisation des techniques de majoration

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites telles que $|u_n| \leqslant |v_n|$ à partir d'un certain rang autrement dit

$$(\exists N_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(n \geqslant N_0 \Longrightarrow |u_n| \leqslant |v_n|)$$

Alors

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

Remarque 12 :

C'est un théorème **très important**, très souvent utilisé, justifiant l'utilisation des suites de référence

Démonstration

Elle est simple et utilise la définition de la limite. La voici :
Ecrivons tout d'abord que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0
Soit $\varepsilon > 0$; il existe donc $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N_0$, alors, $|u_n| \leqslant \varepsilon$
Donc, si $n \geqslant N_0$ et si il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_1 \Rightarrow |u_n| \leqslant |v_n|$, et ce d'après l'hypothèse, en posant $N^\varepsilon = \sup(N_1, N_2)$, alors, pour $n \geqslant N^\varepsilon$, on a $n \geqslant N_0$ et $n \geqslant N_1$, donc $|u_n| \leqslant |v_n| \leqslant \varepsilon$
D'où le résultat

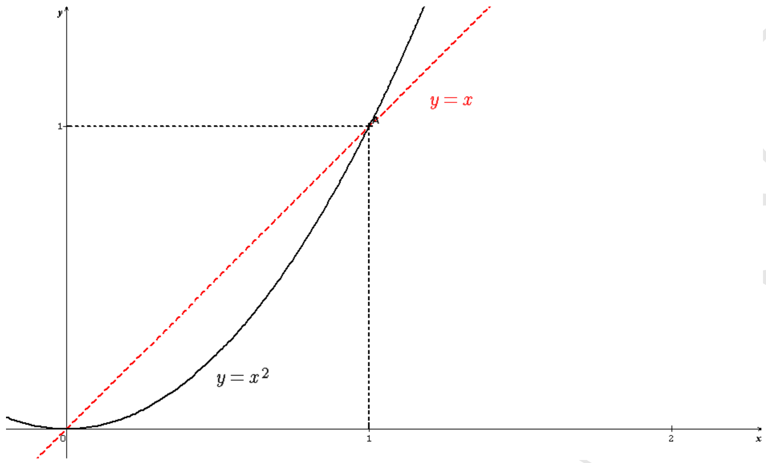


FIGURE 11.3 – La visualisation de la comparaison des fonctions $y = x$ et $y = x^2$ qui permet aussi de comparer les suites $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$

Exemple 5 :

On peut utiliser ce théorème pour démontrer que la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $\alpha > 1$, converge vers zéro ; Il suffit d'utiliser que $n^\alpha \geqslant n$ si $n \geqslant 1$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $0 \leqslant \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{n}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, nous avons $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$

Exercice 15 :

Donner la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite de terme $u_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$

En prenant la valeur absolue, nous avons :

$$|u_n| = \left|\frac{2+(-1)^n}{n}\right| \leqslant \frac{3}{n}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Exercice 16 :

1. Démontrer que $n! \geqslant n$ et que $n^n \geqslant n$.

   Il y a plusieurs façons de démontrer ces deux résultats. Dans les deux cas, pour $n = 0$, nous avons $0! = 1$ et donc, $0! > 0$ et $0^0 = 1$ et donc $0^0 > 0$. Par contre, pour $n = 1$, $1! = 1^1 = 1$, et on conclue donc que pour $n = 0$ ou $n = 1$, $n! \geqslant n$ et $n^n \geqslant n$. Suposons, maintenant que $n \geqslant 2$.

   — Le rapport $\frac{n!}{n} = (n-1)! \geqslant 1$ donc, si $n \geqslant 2$, $n! \geqslant n$

   — De même, le rapport $\frac{n^n}{n} = n^{n-1} \geqslant 1$ donc, si $n \geqslant 2$, $n! \geqslant n$

   Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! \geqslant n$ et $n^n \geqslant n$

   En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^n} = 0$

   Des inégalités ci-dessus, nous tirons $\frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^n} \leqslant \frac{1}{n}$.

   Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^n} = 0$

2. Soit $k \in \mathbb{R}$, tel que $|k| < 1$
   (a) Pour, $a > 1$, $a = 1 + a'$ où $a' > 0$. Montrer que $a^n \geqslant 1 + na'$

Cette démonstration peut se faire de 2 manières : par récurrence sur n ou en utilisant la formule du binôme de Newton.

Par récurrence On appelle $P(n)$ la propriété $P(n)$: $(1+a')^n \geqslant 1 + na'$
- On vérifie facilement que $P(0)$ est vrai
- Supposons que $P(n)$ est vraie
- Démontrons que $P(n+1)$ est vraie.
  $(1+a')^{n+1} = (1+a')^n \times (1+a') \geqslant (1+na') \times (1+a') = 1 + (n+1)a' + na'^2 > 1 + (n+1)a'$

Ainsi, nous venons de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a')^n \geqslant 1 + na'$

En utilisant le binôme de Newton

$$\begin{aligned}(1+a')^n &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a'^k \\ &= \mathrm{C}_n^0 a'^0 + \mathrm{C}_n^1 a'^1 + \sum_{k=2}^{n} \mathrm{C}_n^k a'^k \\ &= 1 + na' + \sum_{k=2}^{n} \mathrm{C}_n^k a'^k\end{aligned}$$

Or, $1 + na' + \sum_{k=2}^{n} \mathrm{C}_n^k a'^k \geqslant 1 + na'$; donc, $(1+a')^n \geqslant 1 + na'$

   (b) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a^n} = 0$

Ainsi, si $a > 1$, nous avons $a = 1 + a'$ avec $a' > 0$. Donc,

$$\frac{1}{a^n} = \frac{1}{(1+a')^n} \leqslant \frac{1}{1+na'}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+na'} = 0$, nous avons $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a^n} = 0$

   (c) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} k^n = 0$

Soit $k \in \mathbb{R}$, tel que $|k| < 1$; il existe alors $a \in \mathbb{R}$, et $a > 1$ tel que $|k| = \frac{1}{a}$. Donc, $|k|^n = \frac{1}{a^n}$.

On vient de montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a^n} = 0$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} |k|^n = 0$, et donc que $\lim_{n\to+\infty} k^n = 0$

3. Résultat : Les suites géométriques de raison k telles que $|k| < 1$ convergent vers zéro

Exercice 17 :

1. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})\,(|\sin x| \leqslant |x|)$

Voici une question classique de comparaison. L'inégalité $|\sin x| \leqslant |x|$ est totalement équivalente à la double inégalité : $-x \leqslant \sin x \leqslant x$. Pour démontrer cette double inégalité, nous allons utiliser deux fonctions auxiliaires dont nous étudierons le signe. La première sera $\varphi(x) = \sin x - x$ et la seconde $\psi(x) = \sin x + x$

- Etude de $\varphi(x) = \sin x - x$

  En calculant la dérivée, nous avons $\varphi'(x) = \cos x - 1$; comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\cos x \leqslant 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) \leqslant 0$ et la fonction φ est décroissante.

  De $\varphi(0) = 0$, nous déduisons que
  - Si $x \leqslant 0$, $\sin x - x \geqslant 0 \Longleftrightarrow \sin x \geqslant x$
  - Si $x \geqslant 0$, $\sin x - x \leqslant 0 \Longleftrightarrow \sin x \leqslant x$
- Etude de $\psi(x) = \sin x + x$

  En calculant la dérivée, nous avons $\psi'(x) = \cos x + 1$; comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\cos x \geqslant -1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) \geqslant 0$ et la fonction ψ est croissante.

  De $\psi(0) = 0$, nous déduisons que
  - Si $x \leqslant 0$, $\sin x + x \leqslant 0 \Longleftrightarrow \sin x \leqslant -x$
  - Si $x \geqslant 0$, $\sin x + x \geqslant 0 \Longleftrightarrow \sin x \geqslant -x$

En synthèse, nous avons, si $x \leqslant 0$, $x \leqslant \sin x \leqslant -x$, et si $x \geqslant 0$, $-x \leqslant \sin x \leqslant x$

C'est à dire, que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $|\sin x| \leqslant |x|$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \sin\left(\frac{u_n}{2}\right)$. Démontrer que, $(\forall n \in \mathbb{N})\left(|u_n| \leqslant \frac{|u_0|}{2^n}\right)$.

En utilisant la question ci-dessus, nous avons $|u_n| = |\sin u_{n-1}| \leqslant \left|\dfrac{u_{n-1}}{2}\right| = \dfrac{|u_{n-1}|}{2}$.

Pour démontrer que $\left(|u_n| \leqslant \dfrac{|u_0|}{2^n}\right)$, on peut le faire par récurrence ou en utilisant les multiplications successives. En effet :

$$\begin{aligned} |u_n| &\leqslant \frac{|u_{n-1}|}{2} \\ |u_{n-1}| &\leqslant \frac{|u_{n-2}|}{2} \\ &\vdots \\ |u_2| &\leqslant \frac{|u_1|}{2} \\ |u_1| &\leqslant \frac{|u_0|}{2} \end{aligned}$$

En multipliant termes à termes, nous avons :

$|u_n|\times|u_{n-1}|\times\cdots\times|u_2|\times|u_1| \leqslant \dfrac{|u_{n-1}|}{2}\times\dfrac{|u_{n-2}|}{2}\times\cdots\times\dfrac{|u_1|}{2}\times\dfrac{|u_0|}{2} = |u_{n-1}|\times|u_{n-2}|\times\cdots\times|u_1|\times|u_0|\times\dfrac{1}{2^n}$

C'est à dire :

$$|u_n|\times|u_{n-1}|\times\cdots\times|u_2|\times|u_1| \leqslant |u_{n-1}|\times|u_{n-2}|\times\cdots\times|u_1|\times|u_0|\times\frac{1}{2^n}$$

En simplifiant, nous obtenons : $|u_n| \leqslant |u_0| \times \dfrac{1}{2^n}$ Ce que nous voulions.

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Nous avons $\lim |u_0| \times \dfrac{1}{2^n} = 0$, car c'est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

11.4.5 Définition de suite qui tend vers l

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite l si et seulement si la suite $(u_n - l)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite 0

Remarque 13 :

1. On dit alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$
2. On peut penser autrement l'idée que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$. Le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ veut dire que $|u_n - l|$ peut être rendu aussi petit que l'on veut, à partir d'un certain rang, c'est à dire que :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)\,(|u_n - l| < \varepsilon) \text{ à partir d'un certain rang}$$
3. C'est à dire
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)\,(|u_n - l| < \varepsilon)\ \text{ à partir d'un certain rang } N_\varepsilon \in \mathbb{N}$$
N_ε dépend du $\varepsilon > 0$ choisi.
4. Forme formalisée
$$\boxed{(\exists l \in \mathbb{R})\,(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)}$$
5. Une suite qui ne converge pas est dite divergente ; autrement dit, $(\forall l \in \mathbb{R})\,(u_n - l)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers zéro
6. Il est rare que l'étude des limites exige l'utilisation directe de la définition de la limite *(en tout cas, ceci dépasse notre propos)* ; on l'utilise pour démontrer certains résultats forts utiles et qui peuvent être directement utilisés. On en verra quelques uns.

11.4.6 Proposition

Toute suite convergente est bornée

Démonstration

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers l. Ecrivons qu'elle converge.
Soit $\varepsilon > 0$
Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$ alors $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$, c'est à dire que si $n \geqslant N$ alors

$$|u_n - l| \leqslant \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon \leqslant u_n - l \leqslant \varepsilon \Longleftrightarrow l - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant l + \varepsilon$$

Ce qui signifie que l'ensemble $\{u_n \text{ pour } n \geqslant N\}$ est borné.
D'autre part, l'ensemble $\{u_n \text{ tel que } 0 \leqslant n \leqslant N\}$ est un ensemble fini de nombres réels donc borné
Donc, l'ensemble $\{u_n \text{ tels que } n \in \mathbb{N}\} = \{u_n \text{ tel que } 0 \leqslant n \leqslant N\} \cup \{u_n \text{ pour } n \geqslant N\}$ est borné.
Une suite convergente est donc bornée

Remarque 14 :

La réciproque est fausse. **Exemple :**$(-1)^n$ est une suite bornée, mais non convergente

11.4.7 Proposition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique, réelle alors, si cette limite existe, cette limite est unique

Démonstration

Voici donc un exemple d'utilisation directe de la définition de la limite

1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet donc 2 limites, l et l', **différentes** et on écrit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ces 2 limites. L'objet de la démonstration sera donc d'arriver à une contradiction, ou plutôt une absurdité.
2. On suppose donc $l \neq l^{'}$, et donc, la distance qui sépare l de $l^{'}$, non nulle, est donc strictement positive ; on l'écrit : $|l - l'| > 0$

Figure 11.4 – Schéma montrant la situation où $l \neq l'$

3. Soit $\varepsilon = \dfrac{|l - l'|}{4}$ On a donc bien $\varepsilon > 0$
4. Ecrivons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite l et pour limite l'
$$\left(\exists N_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}\right)(\forall n \in \mathbb{N})\left(n \geqslant N_\varepsilon^1 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon\right)$$
$$\left(\exists N_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}\right)(\forall n \in \mathbb{N})\left(n \geqslant N_\varepsilon^2 \Rightarrow |u_n - l'| < \varepsilon\right)$$
5. Soit $N_\varepsilon = \sup\left(N_\varepsilon^1, N_\varepsilon^2\right)$, c'est à dire que N_ε est le plus grand de N_ε^1 et N_ε^2, et que donc,$N_\varepsilon \geqslant N_\varepsilon^1$ et $N_\varepsilon \geqslant N_\varepsilon^2$
6. Pour $n > N_\varepsilon$, nous avons
$$|l - l'| \leqslant |u_n - l| + |u_n - l'| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = 2\frac{|l - l'|}{4} = \frac{|l - l'|}{2}$$
7. Il y a donc une contradiction dans le fait que $|l - l'| \leqslant \dfrac{|l - l'|}{2}$

La limite est donc unique

11.4.8 Règles de calcul : opérations sur les limites

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique convergeant vers l et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergeant vers l', alors

Addition $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l+l'$

Multiplication $(u_n\times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ll'

Multiplication par un scalaire $(\forall\lambda\in\mathbb{R})\,(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda l'$

Démonstration

1. **On fait la démonstration pour l'addition**
   (a) On peut écrire $u_n = l+a_n$ et $v_n = l'+b_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$. Pour nous, c'est plus simple, car nous connaissons bien les suites qui tendent vers 0
   (b) Donc : $u_n+v_n = l+l'+a_n+b_n$ c'est à dire $((u_n+v_n)-(l+l')) = a_n+b_n$
   (c) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+b_n)=0$, et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n+v_n = l+l'$
2. **On fait la démonstration pour la multiplication**
   (a) On écrit toujours $u_n = l+a_n$ et $v_n = l'+b_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.
   (b) Donc, comme
   $$u_n\times v_n = (l+a_n)(l'+b_n) = ll' + lb_n + a_n(l'+b_n)$$
   c'est à dire
   $$(u_n\times v_n)-(ll') = lb_n + a_n(l'+b_n)$$
   (c) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(lb_n+a_n(l'+b_n))=0$, et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\times v_n = ll'$
3. Pour le produit par un scalaire, il suffit d'appliquer le résultat précédent à la suite constante $v_n=\lambda$

11.4.9 Et le quotient ?

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique convergeant vers l tel que $\boxed{l\neq 0}$, alors

1. La suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie, à partir d'un certain rang, ce qui veut dire, qu'à partir d'un certain rang, $|u_n|>0$ ou, ce qui est équivalent, $u_n\neq 0$
2. $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{u_n}=\dfrac{1}{l}}$

Démonstration

Á nouveau, nous utilisons la définition théorique de la limite. Une nouvelle fois, nous pouvons remarquer que cette définition est très utile pour démontrer rigoureusement des résultats qu'on utilisera, par la suite, sans soucis.

1. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique convergeant vers l et que $l\neq 0$, c'est à dire, $|l|>0$, il existe, $N_0\in\mathbb{N}$ tel que si $n\geqslant N_0$ alors $|u_n-l|\leqslant\dfrac{|l|}{2}$; donc, si $n\geqslant N_0$ alors, en réécrivant l'inégalité précédente, nous avons :
   $$\frac{-|l|}{2}\leqslant u_n-l\leqslant\frac{|l|}{2}\Leftrightarrow l-\frac{|l|}{2}\leqslant u_n\leqslant l+\frac{|l|}{2}$$
   Donc, on a sûrement $u_n\neq 0$ et $\dfrac{1}{u_n}$ existe si $n\geqslant N_0$

2. On pose alors $u_n = l + a_n$ où $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

   D'après la définition de la limite, pour $\varepsilon = \dfrac{|l|}{2}$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N_\varepsilon$ alors $|a_n| \leqslant \varepsilon = \dfrac{|l|}{2}$

3. On évalue alors, $\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{l}$.
   On a, après calculs :
$$\begin{aligned} \frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} &= \frac{1}{a_n + l} - \frac{1}{l} \\ &= \frac{-a_n}{l(1+a_n)} \end{aligned}$$

4. Il faut donc montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{l(l+a_n)} = 0$
   Or, d'après l'inégalité triangulaire des modules *(ou des valeurs absolues)*, on a : $||l| - |a_n|| \leqslant |a_n + l|$, et donc que $||l| - |a_n|| \leqslant |a_n + l|$

5. Or, si $n \geqslant N_\varepsilon$, nous avons $|a_n| \leqslant \dfrac{|l|}{2}$, c'est à dire : $-|a_n| \geqslant -\dfrac{|l|}{2}$; en additionnant $|l|$ de chaque côté de l'inégalité, nous obtenons :
$$|l| - |a_n| \geqslant \frac{|l|}{2}$$
   C'est à dire *(il n'y a pas de problème de signe)* : $||a_n| - |l|| \geqslant \dfrac{|l|}{2}$
   En conclusion, si $n \geqslant N_\varepsilon$ nous avons $\dfrac{1}{||a_n| - |l||} \leqslant \dfrac{2}{|l|}$ et donc $||l| - |a_n|| \leqslant |a_n + l|$

6. Ceci montre donc que la suite $\dfrac{1}{l(l+a_n)}$ est bornée à partir du rang N_ε ; en effet,
$$||l| - |a_n|| \leqslant |a_n + l|$$

7. On en conclue donc que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{l(l+a_n)} = 0$, et donc, en conclusion, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{l}$

Ce que nous voulions

Remarque 15 :

Les résultats précédents permettent de démontrer que si, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, et que si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l' avec $l' \neq 0$, alors, $\left(\dfrac{u_n}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{l}{l'}$

11.4.10 Théorème des limites par encadrement

Ce théorème est aussi connu sous le nom de « Théorème des gendarmes » qui n'est pas du tout une appellation contrôlée.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, 3 suites telles que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang N_0
On suppose de plus que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$
Alors, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l}$

Démonstration

Une nouvelle illustration de l'utilisation d'une définition théorique, pour démontrer un résultat très souvent utilisé.
Soit $\varepsilon > 0$

1. **On écrit proprement, que** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$
   Que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ veut dire qu'il existe $N_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N_\varepsilon^1$, alors $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$
2. **On écrit ensuite que** $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$
   De même, il existe $N_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N_\varepsilon^2$, alors $|w_n - l| \leqslant \varepsilon$
3. **On utilise le compatibilité de l'addition avec la relation d'ordre**
   Pour $n \geqslant N_0$, nous avons : $u_n - l \leqslant v_n - l \leqslant w_n - l$, c'est à dire,
   $$|v_n - l| \leqslant \max\{|u_n - l|, |w_n - l|\}$$
   c'est à dire $|v_n - l| \leqslant |u_n - l|$ et $|v_n - l| \leqslant |w_n - l|$
4. **Conclusion**
   Donc, si $N_\varepsilon = \max\left\{N_\varepsilon^1, N_\varepsilon^2\right\}$, nous avons $N_\varepsilon \geqslant N_\varepsilon^1$ et $N_\varepsilon \geqslant N_\varepsilon^2$; donc, $n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l| \leqslant \varepsilon$, et $n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |w_n - l| \leqslant \varepsilon$. Donc, $n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |v_n - l| \leqslant \varepsilon$

Ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$

Exemple 6 :

Application de ce théorème : Etudier la limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{3n+4} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

Pour $k \in \{1, \dots, 3n+4\}$, c'est à dire $1 \leqslant k \leqslant 3n+4$, nous avons :

$$n \leqslant \sqrt{n^2+k} \leqslant \sqrt{n^2+3n+4}$$

Donc, en passant à l'inverse,

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+3n+4}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \frac{1}{n}$$

puis en passant à la sommation :

$$\frac{3n+4}{\sqrt{n^2+3n+4}} \leqslant \sum_{k=1}^{3n+4} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \frac{3n+4}{n}$$

Comme $\dfrac{3n+4}{n} = 3 + \dfrac{4}{n}$, que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n+4}{n} = 3$ et que, d'autre part :

$$\frac{3n+4}{\sqrt{n^2+3n+4}} = \frac{3n+4}{n\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{4}{n^2}}} = \frac{3+\dfrac{4}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{4}{n^2}}},$$

on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n+4}{\sqrt{n^2+3n+4}} = 3$

On en déduit donc que : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{3n+4} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = 3}$

Exercice 18 :

Cet exercice utilise diverses techniques de majoration pour le calcul de limites

1. (a) Montrer l'égalité suivante, vraie si $x \in \mathbb{R}^+$:$x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$

   Dans un exercice précédent, l'exercice 11.4.4, nous avons déjà montré que si $x \geqslant 0$, alors $\sin x \leqslant$.
   Montrons maintenant l'autre inégalité, en posant $\Phi(x) = \sin x - \left(x - \dfrac{x^3}{6}\right)$

   La dérivée de Φ est $\Phi'(x) = \cos x - \left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)$ dont il est difficile de donner le signe ! !

Dérivons une seconde fois : $\Phi''(x) = -\sin x + x$, et si $x \geqslant 0$, $\Phi''(x) \geqslant 0$, et donc Φ' est une fonction croissante. D'où, pour tout $x \geqslant 0$, nous avons $\Phi'(x) \geqslant \Phi'(0)$. Or, $\Phi'(0) = 0$, et nous en déduis que Φ est croissante sur $\mathbb{R}^+$; en particulier, $\Phi(0) \geqslant \Phi(0) = 0$, c'est à dire

$$\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) \geqslant 0 \Longleftrightarrow \sin x \geqslant \left(x - \frac{x^3}{6}\right)$$

Nous en déduisons que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, nous avons $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$

(b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite définie par : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et donner sa limite.

Nous allons utiliser l'inégalité ci-dessus pour répondre à notre question. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, nous avons :

$$\frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{6n^6} \leqslant \sin\frac{k}{n^2} \leqslant \frac{k}{n^2}$$

En passant à la sommation, nous avons :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{6n^6}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$$

Or, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2}$

D'autre part, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{6n^6} = \frac{1}{6n^6}\sum_{k=1}^{n} k^3$.

Or, il est connu que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, et donc, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{6n^6} = \frac{n^2(n+1)^2}{24n^6}$, d'où nous obtenons l'encadrement :

$$\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n^2(n+1)^2}{24n^6} \leqslant u_n \leqslant \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2(n+1)^2}{24n^6} = 0$, nous en déduisons, en utilisant les théorèmes de limite par encadrement, que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$; pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $X_n = \dfrac{[nx]}{n}$ où $[.]$ définit la partie entière. Donner $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} X_n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$[nx] \leqslant nx < [nx] + 1$$

Je divise maintenant par n, et j'obtiens :

$$\frac{[nx]}{n} \leqslant x < \frac{[nx]}{n} + \frac{1}{n} \Longleftrightarrow X_n \leqslant x < X_n + \frac{1}{n}$$

Inégalité qui peut être écrite : $x - \dfrac{1}{n} < X_n \leqslant x$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x - \frac{1}{n} = x$, d'après les limites par encadrement, nous tirons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} X_n = x$

11.4.11 Théorème

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite l, et si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N$ alors $u_n \geqslant a$ Alors $l \geqslant a$

Démonstration

Nous allons faire une démonstration par l'absurde.
Supposons $l < a$ et soit $\varepsilon > 0$
Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = l$, il existe un entier $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tel que si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $|u_n - l| < \varepsilon$

En particulier, pour $\varepsilon = \dfrac{a-l}{2}$, si $n \geqslant N_\varepsilon$, alors $\dfrac{-(a-l)}{2} \leqslant u_n - l \leqslant \dfrac{a-l}{2}$, c'est à dire

$$l - \frac{(a-l)}{2} \leqslant u_n \leqslant l + \frac{a-l}{2}$$

c'est à dire : $u_n \leqslant \dfrac{a+l}{2}$
Or, $\dfrac{a+l}{2} < a$, car $l < a$, et $\dfrac{a+l}{2}$ est le milieu de l'intervalle $[l\ a]$
Il y a donc une contradiction avec l'hypothèse $u_n \geqslant a$

Remarque 16 :

1. Le problème est le même si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant N$ alors $u_n \leqslant a$
2. Les inégalités strictes ne sont pas conservées ; par exemple : $\dfrac{1}{n} > 0$, mais, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

11.4.12 Proposition

Soients $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites convergentes.
Si $u_n \geqslant v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n}$

Remarque 17 :

Ce théorème ne permet, en fait, que de donner une évaluation *(une estimation)* de la limite, sans toutefois la préciser. C'est un grand travail de mathématicien que de savoir donner un ordre de grandeur ; nous y reviendrons.

Démonstration

La démonstration de ce théorème est simple : on crée la suite $w_n = u_n - v_n$, alors, $w_n \geqslant 0$ à partir d'un certain rang ;
comme la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, que sa limite est $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, et que, d'après le théorème précédent, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n \geqslant 0$, on a le résultat.

11.4.13 Exercices

Exercice 19 :

1. If $a_n = \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{100} + \cdots + \dfrac{1}{10^n}$, how large must n be for $\dfrac{1}{9} - a_n$ to be less than 10^{-6}
2. If $a_n = \dfrac{7}{10} + \dfrac{7}{100} + \cdots + \dfrac{7}{10^n}$, how large must n be for $\dfrac{7}{9} - a_n$ to be less than 10^{-8}

Exercice 20 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \in \mathbb{R}$.

On appelle $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$

1. On suppose $|q| < 1$. Donner $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$
2. On suppose $q > 1$. Donner $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$
3. Etudier lorsque $q < -1$, $q = 1$ et $q = -1$

Exercice 21 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2$

1. Quelle est limite de cette suite ?
2. Justifier l'existence d'un entier N_0, tel que si $n > N_0$, alors $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{49}{72}$
3. Calculer l'entier N_0

Exercice 22 :

Cet exercice repose sur l'utilisation des théorèmes classiques des limites, et des limites remarquables
Donnez les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\pi + \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{n}$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin^2 n - \cos^2 n}{n^3}$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n}\right)$
6. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$
7. $\lim\limits_{n\to+\infty} (a^n+b^n)$ où $a>0$ et $b>0$

Exercice 23 :

Nous posons $u_2 = 1 - \dfrac{1}{2^2}$ et pour tout entier $n \geqslant 3$:

$$u_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$$

Calculer u_n et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 24 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par ses deux premiers termes $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et par la relation, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$$

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = u_{n+1} - u_n$$

1. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer v_n en fonction de n
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
3. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, nous ayions : $|u_n - 3| < 10^{-5}$

Exercice 25 :

Cet exercice étudie un cas particulier de suite : les suites arithmético-géométriques
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$, et par la relation de récurrence, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$$

1. Etudier le cas où $u_0 = 3$

2. On suppose $u_0 \neq 3$
   Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
   $$(\forall n \in \mathbb{N})\,(v_n = u_n + \alpha)$$
   Montrer qu'il existe une valeur de α pour laquelle la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique
3. Exprimer u_n en fonction de u_0 et de n. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

Exercice 26 :

Cet exercice utilise les théorèmes de limites et de majoration ; il utilise aussi un outil de comparaison des termes succesifs d'une suite.
Ce problème apporte des notions du point de vue théorique ; c'est le genre d'exercice qu'il faut rédiger complètement

1. On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes positifs tels que : $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \geqslant 2$
   — Montrer que, pour tout $n \geqslant 10$, alors $x_n \geqslant 2^{n-10}x_{10}$; en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$;
   — Que se passe-t-il si $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \geqslant 2$ seulement lorsque $n \geqslant 17$?
2. On considère maintenant une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes positifs tels que : $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$; donner $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$
3. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_n = \dfrac{(1,1)^n}{n}$, pour $n \neq 0$
   — Evaluer $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$, puis, trouver N_0, tel que, si $n \geqslant N_0$, alors $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \geqslant 1,05$
   — En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$
4. Etudier les suites définies par $x_n = \dfrac{2^n}{n!}$
5. **Généralisation :**
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$
   Montrer que si $l < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et que, si $l > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
6. **Que se passe-t-il si** $l = 1$ **?** L'objet de cette question est de montrer qu'il est impossible de décider quoi que ce soit lorsque $l = 1$
   (a) On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $a_n = n^3$ donner $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$
   (b) On considère la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $b_n = \dfrac{1}{n^3}$ donner $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$
   (c) On considère la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $c_n = \dfrac{2\,(n+1)\,(n+2)}{n^2}$ donner $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{c_{n+1}}{c_n}$
   (d) On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1$; que dire de $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$?

11.5 Limites infinies

11.5.1 Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle.
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si et seulement si
Pour tout $A > 0$, $u_n > A$ à partir d'un certain rang
Autrement dit
Pour tout $A > 0$, il existe $N_A \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant N_A$ alors $u_n > A$

Remarque 18 :

1. Réécrivons la définition de suite qui tend vers $+\infty$, en écriture formalisée :

$$\boxed{(\forall A > 0)\,(\exists N_A \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(n > N_A \Rightarrow u_n > A)}$$

2. On dit alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est infiniment grand lorsque n est infiniment grand
3. Pour montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$, on utilise une définition semblable :

$$\boxed{(\forall A > 0) \text{ il existe } N_A \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geqslant N_A \Rightarrow u_n \leqslant -A}$$

4. Une suite qui tend vers plus ou moins l'infini est dite **divergente**

Exemple 7 :

Pour $\alpha > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$

11.5.2 Proposition

Nous avons les résultats suivants :

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$

Démonstration

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers $+\infty$

1. Démontrons que $u_n > 0$ à partir d'un certain rang

   La démonstration peut être considérée comme une relecture de la définition de suite qui tend vers $+\infty$:

   Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers $+\infty$, pour $A = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que si $n \geqslant N$, alors $u_n \geqslant 1$... Donc, nous avons $u_n > 0$ dès que $n \geqslant N$

2. Démontrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$

   D'après le point précédent, on peut supposer $u_n > 0$, et donc $\dfrac{1}{u_n} > 0$ et est toujours défini.

   Soit $\varepsilon > 0$.

   Alors $\dfrac{1}{u_n} < \varepsilon \Longleftrightarrow u_n > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$ alors $u_n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, c'est à dire que si $n \geqslant N$, alors $0 < \dfrac{1}{u_n} < \varepsilon$.

   Ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$

Remarque 19 :

Nous avons les mêmes résultats pour $-\infty$:

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ alors $u_n < 0$ à partir d'un certain rang
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$

Je propose au lecteur de les démontrer seul, en exercice.

11.5.3 Propriétés des suites qui tendent vers $+\infty$

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont 2 suites qui tendent vers $+\infty$, alors
   (a) Addition : $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$
   (b) Multiplication :$(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$
   (c) Multiplication par un scalaire :
      i. $(\forall\lambda>0)\,(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** $+\infty$
      ii. $(\forall\lambda<0)\,(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** $-\infty$
2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites ; si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, et si il existe $a>0$ tel que $v_n\geqslant a$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_nv_n=+\infty$
3. Théorème de minoration [a] Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites telles que $u_n\geqslant v_n$ à partir d'un certain rang.
   Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$, alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

a. Appelé aussi : Théorème "pousse au c.."

Démonstration

Nous allons utiliser, ici, la définition de suite tendant vers l'infini

1. **Démonstration du premier point**
   (a) *Addition de 2 suites qui tendent vers $+\infty$*
   Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites qui tendent vers $+\infty$
   On va écrire que les deux suites tendent vers $+\infty$
   Soit $A>0$
   — On écrit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$
     Il existe $N_A^u\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant N_A^u\Rightarrow u_n\geqslant\dfrac{A}{2}$
   — On écrit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$
     Il existe $N_A^v\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant N_A^v\Rightarrow v_n\geqslant\dfrac{A}{2}$
   Soit $N=\max\{N_A^u,N_A^v\}$
   Si $n\geqslant N$, alors $n\geqslant N_A^u$ et $n\geqslant N_A^v$, donc, $u_n\geqslant\dfrac{A}{2}$ et $v_n\geqslant\dfrac{A}{2}$; donc, si $n\geqslant N$, alors $u_n+v_n\geqslant A$; donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=+\infty$
   (b) *Multiplication de 2 suites qui tendent vers $+\infty$*
   Soit $A>0$
   Ecrivons, comme d'habitude, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers $+\infty$
   Il existe donc $N_A\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant N_A\Rightarrow u_n\geqslant\sqrt{A}$
   De même, écrivons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers $+\infty$
   Il existe $M_a\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant M_a\Rightarrow v_n\geqslant\sqrt{A}$
   Soit donc alors $Q=\max\{N_A,M_a\}$; si $n\geqslant Q$, alors $n\geqslant N_A$ et $n\geqslant M_a$, donc $u_nv_n\geqslant\sqrt{A}\sqrt{A}=A$ et ceci, pour tout $A>0$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_nv_n=+\infty$
   (c) *Multiplication d'une suite qui tend vers $+\infty$ par un scalaire*
      i. Soit $\lambda>0$; écrivons, une nouvelle fois, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers $+\infty$
      Soit $A>0$ il existe donc $N_A\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant N_A\Rightarrow u_n\geqslant\dfrac{A}{\lambda}$. Donc, si $n\geqslant N_A$, $\lambda u_n\geqslant A$, ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$

ii. De même, soit $\lambda < 0$; comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers $+\infty$, pour $A > 0$ il existe donc $N_A \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_A \Rightarrow u_n \geqslant \dfrac{A}{-\lambda}$. Donc, si $n \geqslant N_A$, $\lambda u_n \leqslant \lambda \dfrac{A}{-\lambda} = -A$; ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

2. **Démonstration du second point**

   Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers $+\infty$, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $v_n > a > 0$ à partir d'un certain rang N_v.

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, pour $A > 0$ il existe donc $N_A \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_A \Rightarrow u_n \geqslant \dfrac{A}{a}$.

   Soit $Q = \max\{N_A, N_v\}$; si $n \geqslant Q$, alors $n \geqslant N_A$ et $n \geqslant N_v$, et donc $u_n v_n \geqslant a\dfrac{A}{a} = A$.

   Ce qui termine de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$

3. **Démonstration du troisième point : *Théorème de minoration***

   Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites telles que $u_n \geqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

   Ceci veut donc dire qu'il existe un entier $P \in \mathbb{N}$, tel que si $n \geqslant P$, alors $u_n \geqslant v_n$

   Ecrivons que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$; alors, pour $A > 0$ il existe donc $N_A \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N_A \Rightarrow v_n \geqslant A$.

   Comme précédemment, nous posons $Q = \max\{N_A, P\}$; si $n \geqslant Q$, alors $n \geqslant N_A$ et $n \geqslant P$, et donc $u_n \geqslant v_n \geqslant A$; en particulier, $u_n \geqslant A$, ce qui termine de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Exercice 27 :

1. Démontrer que si $k > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n = +\infty$

   Si $k > 1$, il existe $a > 0$ tel que $k = 1 + a$. Donc, $k^n = (1+a)^n \geqslant 1 + na$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + na = +\infty$, il en est de même de $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n = +\infty$

2. En déduire que si $|k| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n = 0$

Remarque 20 :

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, on ne peut rien affirmer de $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$; nous sommes devant une indétermination.

Exemples d'indétermination

— Si $u_n = n^2$ et $v_n = \dfrac{1}{n} - n^2$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, mais comme $u_n + v_n = \dfrac{1}{n}$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = 0$

— Autre exemple : si $u_n = n^2$ et $v_n = n - n^2$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, mais comme $u_n + v_n = n$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$

— Et, dernier exemple : si $u_n = n^2$ et $v_n = -n^3$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, mais comme $u_n + v_n = n^2 - n^3$, nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = -\infty$

Nous ne pouvons donc rien décider, et il faut regardr au cas par cas.

11.5.4 Convergence et monotonie

Voici un théorème extrêmement important, d'utilisation courante.

Toute suite croissante et majorée converge

Démonstration

Le point important sur lequel s'appuie la démonstration, est l'axiôme de la borne supérieure vu en 10.4.2 rappelé ci-dessous.

Tout sous ensemble de nombres réels,non vide et majoré, admet une borne supérieure

Cette démonstration n'est pas facile. Bien la comprendre est important
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite numérique, croissante et majorée.
Donc, $\{u_n; n\in\mathbb{N}\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide et majoré, qui admet donc, d'après 10.4.2, une borne supérieure M.
Soit $M = \sup\{u_n; n\in\mathbb{N}\}$ cette borne supérieure et soit $\varepsilon > 0$ quelconque.
Alors, $M-\varepsilon$ n'est pas un majorant de l'ensemble $\{u_n; n\in\mathbb{N}\}$; il existe donc $N_M\in\mathbb{N}$ tel que $M-\varepsilon \leqslant u_{N_M} \leqslant M$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, nous avons : $n \geqslant N_M \Rightarrow M-\varepsilon \leqslant u_{N_M} \leqslant u_n \leqslant M$.
Donc, $|u_n - M| \leqslant \varepsilon$, c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = M$

Remarque 21 :

1. On vient de montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique croissante et majorée, alors elle converge vers sa borne supérieure
2. Donc, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique décroissante et minorée, alors, elle converge vers sa borne inférieure
3. Une suite peut etre convergente sans être croissante ou décroissante.

   Exemple : $\dfrac{(-1)^n}{n}$; cette suite converge vers zéro, mais n'est ni croissante, ni décroissante.
4. Une suite peut etre bornée *(majorée, entre autres)* sans toutefois être convergente.

   Exemples : $u_n = \sin\dfrac{n\pi}{6}$ ou $v_n = (-1)^n$,
5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique croissante. Si elle est convergente, alors elle est bornée.
   En prenant la contrapposée, si elle est non bornée, alors elle est divergente : c'est ce que précise le corollaire suivant.
   (En fait, toute suite convergente est bornée ; les corollaires qui suivent précisent en fait cette divergence)

11.5.5 Corollaire

1. Une suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$
2. Une suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$

Démonstration

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique croissante et non majorée.
   Alors, soit $A > 0$
   $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'étant pas une suite majorée, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $u_N > A$
   $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, nous avons l'implication : $n > N \Rightarrow u_n > u_N > A$
   Donc, pour tout $A > 0$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $n > N \Rightarrow u_n > A$.
   Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
2. La démonstration du second point est exactement la même

Exercice 28 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par : $u_0 = 0$, et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 3. Qu'en déduire ?
   — On montre tout d'abord que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et minorée par 3.
   Cette démonstration se fait par récurrence.
   On appelle $P(n)$ la propriété : $P(n)$: $0 \leqslant u_n \leqslant 3$

— $P(0)$ est évidemment vraie
— Supposons que $P(n)$ soit vraie
— Démontrons que $P(n+1)$ est vraie.
Tout d'abord, comme $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$, nous avons bien $u_{n+1} \geqslant 0$
De plus, $u_{n+1} - 3 = \sqrt{6+u_n} - 3 = \dfrac{6+u_n-9}{\sqrt{6+u_n}+3} = \dfrac{u_n-3}{\sqrt{6+u_n}+3}$.
Comme $u_n \leqslant 3, \dfrac{u_n-3}{\sqrt{6+u_n}+3} \leqslant 0$, et donc $u_{n+1} \leqslant 3$, et donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$

Nous venons de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$

— On montre tout d'abord que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
Nous faisons donc la différence $u_{n+1} - u_n$.

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{6+u_n} - u_n = \frac{6+u_n-u_n^2}{\sqrt{6+u_n}+u_n} = \frac{(2+u_n)(3-u_n)}{\sqrt{6+u_n}+u_n}$$

Comme $\dfrac{(2+u_n)}{\sqrt{6+u_n}+u_n} > 0$, le signe de $u_{n+1}-u_n$ ne dépend que de celui de $3-u_n$. Donc,$u_{n+1}-u_n \geqslant 0$ et la suite est donc croissante

— $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite coissante et majorée, elle est donc convergente.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3 - u_{n+1} \leqslant \dfrac{3-u_n}{3}$

Il suffit de faire les calculs!!
$3 - u_{n+1} = 3 - \sqrt{6+u_n} = \dfrac{9-6-u_n}{3+\sqrt{6+u_n}} = \dfrac{3-u_n}{3+\sqrt{6+u_n}}$
Or, $3 \leqslant 3+\sqrt{6+u_n}$ et donc $\dfrac{3-u_n}{3+\sqrt{6+u_n}} \leqslant \dfrac{3-u_n}{3}$.
Nous avons donc $3 - u_{n+1} \leqslant \dfrac{3-u_n}{3}$

3. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

En utilisant les méthodes de l'exercice 11.4.4, nous pouvons écrire que $0 \leqslant 3 - u_n \leqslant \dfrac{3-u_0}{3^n}$, et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 - u_n = 0$
On en déduit donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$

11.5.6 Quelques exercices

Exercice 29 :

Questions sur le cours
Voilà quelques réflexions qu'il est bon de se faire pour s'assurer de la compréhension du cours.

1. Le produit de deux suites croissantes est-il une suite croissante? *(Que pensez vous des suites* $u_n = -\dfrac{1}{n^3}$ *ou* $v_n = -1 - \dfrac{1}{n}$ *et du produit* $u_n v_n$ *?)*
2. Une suite positive, qui converge vers 0 est-elle décroissante? *(Que pensez vous de la suite* $\dfrac{2+(-1)^n}{n}$ *?)*
3. Une suite croissante, négative, converge-t-elle vers 0?
4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers l; la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente? *(Que pensez vous des suite* $u_n = (-1)^n$ *et* $v_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n+1}$ *?)*
5. La suite de terme général $u_n = \dfrac{n^4+2}{1+(-1)^n n^4}$ est-elle convergente?

Exercice 30 :

Les suites suivantes sont-elles bornées? Convergentes? Non bornées? Divergentes?

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $u_n = \left(\dfrac{1+\sin n}{n}\right)$
2. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $w_n = n\left(1 + n\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\right)$

Exercice 31 :

Etudier la monotonie, et éventuellement la convergence des suites suivantes *(on ne demande pas la limite)*

1. $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn}$
2. $V_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$
3. $W_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

Exercice 32 :

Montrer que la suite $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$ est bornée sans être convergente.

Exercice 33 :

1. Montrer que pour $k = 2, \ldots, n$, nous avons : $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}$
2. On considère la suite $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$; montrer qu'elle est croissante et majorée.
3. Conclusion ?

11.6 Equivalences de suites

Dans ce paragraphe, nous allons « survoler » la notion de suite équivalente. Cette notion entre dans ce qu'on peut appeler les notions de comparaison, d'ordre de grandeur. Il sera bon de bien comprendre ce paragraphe, et d'en connaitre les subtilités. Nous retrouverons la notion d'équivalence tout au long des cours d'analyse.

11.6.1 Equivalence de suites

Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, non nulles et de même signe à partir d'un certain rang, sont dites équivalentes en $+\infty$, et on écrit :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\approx} v_n}$$

Si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$

Remarque 22 :

La condition $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ est équivalente à la condition :
Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ et une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers zéro, telle que si $n > N_0$, alors $u_n - v_n = \varepsilon_n v_n$, ou ce qui est équivalent, $u_n = (1+\varepsilon_n)\, v_n$

En effet, supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$

Ceci veut donc dire, que nous avons $\frac{u_n}{v_n} = 1 + \varepsilon_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$; en fait, donc, nous pouvons conclure que $u_n = v_n\,(1+\varepsilon_n)$, au moins à partir d'un certain rang

11.6.2 Théorème

$E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites numériques réelles.
Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, la relation $u_n \approx v_n$ est une relation d'équivalence

Démonstration

Montrons que c'est une relation d'équivalence

Réflexivité Evidemment, on a $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \approx (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$; il suffit de prendre pour $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite nulle.

Symétrie Supposons $u_n \approx v_n$; il faut donc montrer que $v_n \approx u_n$

A partir d'un certain rang N_0 , nous avons $u_n = (1+\varepsilon_n)\,v_n$, et donc $v_n = \left(\dfrac{1}{1+\varepsilon_n}\right) u_n$, ou encore, $v_n = \left(1 - \dfrac{\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n}\right) u_n$; si nous posons $\varepsilon'_n = \dfrac{-\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n}$, nous avons : $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon'_n = 0$,et donc $v_n \approx u_n$

Transitivité Supposons $u_n \approx v_n$ et $v_n \approx w_n$; il faut donc démontrer que $u_n \approx w_n$

Il existe donc un entier N_0 tel que si $n \geqslant N_0$, alors, $u_n = (1+\varepsilon_n)\,v_n$

De même, il existe N_1 tel que, si $n \geqslant N_1$, alors, $v_n = (1+\varepsilon'_n)\,w_n$

Donc, pour $n \geqslant \max(N_0, N_1)$, nous avons $u_n = (1+\varepsilon_n)\,v_n$ et $v_n = (1+\varepsilon'_n)\,w_n$, et, dès ce moment, $u_n v_n = (1+\varepsilon_n)(1+\varepsilon'_n)\,u_n$. En posant $\varepsilon''_n = \varepsilon_n(1+\varepsilon'_n) + \varepsilon'_n$, on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon''_n = 0$

On a donc $u_n \approx w_n$

11.6.3 Propriété importante

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, non nulles et de même signe à partir d'un certain rang, telles que $u_n \underset{+\infty}{\approx} v_n$
Alors, pour tout $A > 0$, et tout $B > 0$ il existe N, entier positif tel que

$$n > N \Longrightarrow A\,|v_n| \leqslant |u_n| \leqslant B\,|v_n|$$

Démonstration

Comme $u_n \underset{+\infty}{\approx} v_n$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_1$, alors $u_n = (1+\varepsilon_n)\,v_n$ où $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers zéro.

Cette suite tendant vers zéro, pour tout $\lambda > 0$, il existe $K_\lambda \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant K_\lambda$, $|\varepsilon_n| \leqslant \lambda$

Nous avons donc, pour $n \geqslant N_1$ et $n \geqslant K_\lambda$,

$$|u_n| = |(1+\varepsilon_n)\,v_n| = |(1+\varepsilon_n)|\,|v_n| \leqslant (1+|\varepsilon_n|)\,|v_n| \leqslant (1+\lambda)\,|v_n|$$

En posant $B = (1+\lambda)$, nous avons la première inégalité

De la même manière, comme $u_n \underset{+\infty}{\approx} v_n$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_2$, alors $v_n = (1+\varepsilon^1_n)\,u_n$ où $(\varepsilon^1_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers zéro.

Cette suite tendant vers zéro, pour tout $\lambda_1 > 0$, il existe $K_{\lambda_1} \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant K_{\lambda_1}$, $|\varepsilon^1_n| \leqslant \lambda_1$

Nous avons donc, pour $n \geqslant N_2$ et $n \geqslant K_{\lambda_1}$,

$$|v_n| = \left|(1+\varepsilon^1_n)\,u_n\right| = \left|(1+\varepsilon^1_n)\right|\,|u_n| \leqslant \left(1+|\varepsilon^1_n|\right)|u_n| \leqslant (1+\lambda_1)\,|u_n|$$

En posant $\alpha = (1+\lambda_1)$, nous avons donc $|v_n| \leqslant \alpha\,|u_n| \Longleftrightarrow \dfrac{1}{\alpha}\,|v_n| \leqslant |u_n|$

En posant $A = \dfrac{1}{\alpha}$, nous avons la seconde inégalité.

Ainsi, si $N = \max\{N_1, N_2, K_\lambda, K_{\lambda_1}\}$, si $n \geqslant N$, alors $A\,|v_n| \leqslant |u_n| \leqslant B\,|v_n|$

Remarque 23 :

1. Nous avons aussi, si $u_n \underset{+\infty}{\approx} v_n$, alors $A\,|u_n| \leqslant |v_n| \leqslant B\,|u_n|$, à partir d'un certain rang N
2. Ces inégalités montrent la relation "forte" qu'est l'équivalence des suites.
   De plus, avec ces inégalités, on voit que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'annule à partir d'un certain rang, il en est de même de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et réciproquement !
3. Si $u_n \underset{+\infty}{\approx} v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$, alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, même si $\lim\limits_{n\to+\infty} = \infty$.
   On en conclue donc que, **dans une recherche d'existence ou de valeur de la limite, on peut remplacer une suite, par une autre suite équivalente**

11.6.4 Proposition

Soit $P(n) = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \cdots + a_0$ avec $a_p \neq 0$. Alors, en $+\infty$, $P(n) \underset{+\infty}{\approx} a_p n^p$.
Ceci se résume par la phrase suivante :
En $+\infty$, un polynôme tend comme son terme de plus haut degré.

Démonstration

Soit donc $P(n) = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \cdots + a_0$ avec $a_p \neq 0$.
Factorisons par le terme de plus haut degré $a_p n^p$:

$$P(n) = a_p n^p \left(1 + \frac{a_{p-1}}{a_p}\frac{1}{n} + \cdots + \frac{a_k}{a_p}\frac{1}{n^{p-k}} + \cdots + \frac{a_0}{a_p}\frac{1}{n^p}\right) \iff \frac{P(n)}{n^p} = 1 + \frac{a_{p-1}}{a_p}\frac{1}{n} + \cdots + \frac{a_k}{a_p}\frac{1}{n^{p-k}} + \cdots + \frac{a_0}{a_p}\frac{1}{n^p}$$

Pour $k = 0, \cdots, p-1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_k}{a_p}\frac{1}{n^{p-k}} = 0$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{a_{p-1}}{a_p}\frac{1}{n} + \cdots + \frac{a_k}{a_p}\frac{1}{n^{p-k}} + \cdots + \frac{a_0}{a_p}\frac{1}{n^p} = 1$,
c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{P(n)}{n^p} = 1$
Donc $P(n) \underset{+\infty}{\approx} a_p n^p$

Exemple 8 :

$125n^{258} + n^7\sqrt{\pi} + n^2 + 1 \underset{+\infty}{\approx} 125n^{258}$

11.6.5 Proposition : Règles de calcul sur les suites équivalentes

1. Si $u_n^1 \underset{+\infty}{\approx} u_n^2$ et si $v_n^1 \underset{+\infty}{\approx} v_n^2$, alors $u_n^1 v_n^1 \underset{+\infty}{\approx} u_n^2 v_n^2$
2. Si $u_n \underset{+\infty}{\approx} v_n$ et si u_n et v_n ne s'annulent pas, alors $\frac{1}{u_n} \underset{+\infty}{\approx} \frac{1}{v_n}$
3. Conséquence : Si $u_n^1 \underset{+\infty}{\approx} u_n^2$ et si $v_n^1 \approx v_n^2$, et si u_n^2 et v_n^2 ne s'annulent pas, alors $\frac{u_n^1}{u_n^2} \underset{+\infty}{\approx} \frac{v_n^1}{v_n^2}$

Démonstration

1. *Démonstration du premier point*
   Supposons $u_n^1 \underset{+\infty}{\approx} u_n^2$ et $v_n^1 \underset{+\infty}{\approx} v_n^2$, alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n^1}{u_n^2} = 1$, et, de même, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n^1}{v_n^2} = 1$, ce qui montre que, en utilisant le produit des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n^1 v_n^1}{u_n^2 v_n^2} = 1$, c'est à dire $u_n^1 v_n^1 \underset{+\infty}{\approx} u_n^2 v_n^2$
2. *Démonstration du second point*
   Il existe donc un entier N_0 tel que si $n \geqslant N_0$, alors, $u_n = (1 + \varepsilon_n) v_n$, donc, si $n \geqslant N_0$
   $\frac{1}{u_n} = \frac{1}{(1+\varepsilon_n) v_n} = \frac{1}{(1+\varepsilon_n)} \times \frac{1}{v_n}$;
   Or, $\frac{1}{(1+\varepsilon_n)} = 1 - \frac{\varepsilon_n}{(1+\varepsilon_n)}$; en posant $E_n = -\frac{\varepsilon_n}{(1+\varepsilon_n)}$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} E_n = 0$ et
   $\frac{1}{u_n} = (1 + E_n)\frac{1}{v_n}$ donc $\frac{1}{u_n} \approx \frac{1}{v_n}$
3. *Démonstration du troisième point*
   Le troisième point est une synthèse des 2 points précédents.

Exemple 9 :

L'exemple type est la question posée par le rapport de deux polynômes.
Si $u_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)} = \dfrac{a_k n^k + \ldots + a_0}{b_j n^j + \ldots + b_0}$, comme nous avons $P(n) \underset{+\infty}{\approx} a_k n^k$ et $Q(n) \underset{+\infty}{\approx} b_j n^j$, nous avons $u_n \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{a_k n^k}{b_j n^j}$, c'est à dire : $u_n \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{a_k}{b_j} n^{k-j}$

Exercice 34 :

1. En utilisant les équivalents, calculer la limite suivante : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2 + 2n \sin n + 1}{2n^2 + 3n + 1}$
   - ▷ Nous avons clairement, d'après 11.6.4 $2n^2 + 3n + 1 \underset{+\infty}{\approx} 2n^2$.
   - ▷ Démontrons que $n^2 + 2n \sin n + 1 \underset{+\infty}{\approx} n^2$
     Il suffit de factoriser par le terme « qui tend le plus rapidement vers $+\infty$ » :
     $$n^2 + 2n \sin n + 1 = n^2 \left(1 + 2\frac{\sin n}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \Longleftrightarrow \frac{n^2 + 2n \sin n + 1}{n^2} = 1 + 2\frac{\sin n}{n} + \frac{1}{n^2}$$
     Comme, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, nous avons $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2 + 2n \sin n + 1}{n^2} = 1$ et donc $n^2 + 2n \sin n + 1 \underset{+\infty}{\approx} n^2$
   - ▷ En utilisant les résultats de 11.6.5, nous avons :
     $$\frac{n^2 + 2n \sin n + 1}{2n^2 + 3n + 1} \underset{+\infty}{\approx} \frac{n^2}{2n^2}$$
     Donc, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2 + 2n \sin n + 1}{2n^2 + 3n + 1} = \frac{1}{2}$
2. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R}$ et que si $u_n \underset{+\infty}{\approx} v_n$, alors $(u_n)^\alpha \underset{+\infty}{\approx} (v_n)^\alpha$

   Rien de plus simple. Par hypothèse, nous avons $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, donc, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right)^\alpha = 1$, c'est à dire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n^\alpha}{v_n^\alpha} = 1$
3. On appelle $u_n^1 = n^3 + 4n^2$, $u_n^2 = n^3 + 1$, $v_n^1 = -n^3 + \dfrac{1}{n}$, $v_n^2 = -n^3 + 2n$. Montrer que l'on a $u_n^1 \underset{+\infty}{\approx} u_n^2$, $v_n^1 \underset{+\infty}{\approx} v_n^2$, mais pas $u_n^1 + v_n^1 \underset{+\infty}{\approx} u_n^2 + v_n^2$

   Il suffit de remarquer que $u_n^1 + v_n^1 = 4n^2 + \dfrac{1}{n}$ et que $u_n^2 + v_n^2 = 2n + 1$.
   Donc, $u_n^1 + v_n^1 \underset{+\infty}{\approx} 4n^2$ et $u_n^2 + v_n^2 \underset{+\infty}{\approx} 2n$
4. Avons nous $e^{n^3+4n^2} \underset{+\infty}{\approx} e^{n^3+1}$?

   Il suffit de faire le rapport $\dfrac{e^{n^3+4n^2}}{e^{n^3+1}} = e^{4n^2-1}$ qui ne tend pas vers 1 lorsque n tend vers l'infini !

Remarque 24 :

On ne fait pas ce qu'on veut avec les équivalents *(par exemple additionner, prendre l'exponentielle ou le logarithme)* il faut, le plus souvent, revenir à la définition.

Exercice 35 :

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^2+n+k}$$

1. Écrire, en langage `Python`© un programme permettant de calculer le terme u_n pour n'importe quel $n \in \mathbb{N}^*$
2. Démontrez que nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{n+1}{n^2+2n} \leqslant u_n \leqslant \frac{n+1}{n^2+n}$$

3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
4. Soit la suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour $n \geqslant 1$ par $v_n = nu_n$. Donner $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$; en déduire que $u_n \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{1}{n}$

11.7 Problèmes

Exercice 36 :

1. On pose $u = 2+\sqrt{5}$ et $v = 2-\sqrt{5}$
   (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire $u^n = a_n + b_n\sqrt{5}$ et $v^n = a_n - b_n\sqrt{5}$ où $a_n \in \mathbb{N}$ et $b_n \in \mathbb{N}$
   (b) Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n
   (c) Calculer a_n et b_n pour $0 \leqslant n \leqslant 5$
2. Exprimer :
   (a) $a_n^2 - 5b_n^2$ et $a_nb_{n-1} - a_{n-1}b_n$ en fonction de n
   (b) b_{n+1} en fonction de b_n et b_{n-1}
   (c) a_{n+1} en fonction de a_n et a_{n-1}
3. (a) Montrer que, pour $n \geqslant 1$, $a_n \geqslant 2^n$
   (b) De même, montrer que, pour $n \geqslant 2$, $b_n \geqslant 2^{n-1}$
   (c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$
4. En exprimant a_n et b_n en fonction de u^n et v^n, étudier :

   (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$

Exercice 37 :

*Ce problème est l'étude d'un algorithme très connu, vieux d'il y à près de 4000 ans, utilisé par les sumériens. Il est parfois connu sous le nom **d'algorithme de Babylone***

1. a est un réel strictement positif donné. On définit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation, vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$; pour quelles valeurs de a, avons nous la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante ?
   (b) Dans la suite du problème, on suppose $(u_0)^2 - a \neq 0$

i. Démontrer les relations suivantes :
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \sqrt{a} = \dfrac{1}{2u_n}\left(u_n - \sqrt{a}\right)^2$
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + \sqrt{a} = \dfrac{1}{2u_n}\left(u_n + \sqrt{a}\right)^2$

ii. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante pour $n \geqslant 1$

iii. En déduire que cette suite admet une limite

(c) On définit la suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation, vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$$

i. Calculez v_{n+1} en fonction de v_n

ii. Calculez v_{n+1} en fonction de v_1 et de n, et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

(d) Trouver $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

2. On fixe, dans cette partie $u_0 = 2$ et $a = 2$
   (a) Calculer u_1, u_2 et u_3, *(laisser sous forme de fraction)*
   (b) Montrer que $0 < u_1 - \sqrt{2} < 10^{-1}$; en déduire que $0 < u_2 - \sqrt{2} < \dfrac{1}{3}10^{-2}$
   (c) Trouver une majoration de l'erreur commise en prenant u_3, comme valeur approchée de $\sqrt{2}$
3. A partir de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie dans la partie l, on construit la n-ième erreur relative :

$$\varepsilon_n = \frac{|u_n - \sqrt{a}|}{\sqrt{a}} \Longleftrightarrow \left|u_n - \sqrt{a}\right| = \varepsilon_n\sqrt{a}$$

   (a) Montrer que $\varepsilon_{n+1} = \dfrac{(\varepsilon_n)^2}{2(1+\varepsilon_n)}$ et que $\varepsilon_{n+1} < \dfrac{(\varepsilon_0)^{2n}}{2^{n+1}}$
   (b) Montrer que si $\varepsilon_n < 10^{-p}$, alors $\varepsilon_{n+1} < \dfrac{10^{-2p}}{2}$
   *Ceci veut dire que lorsque l'on calcule u_n en faisant le calcul une fois de plus, on **double la précision**.L'algorithme de calcul décrit dans la partie 1 est un algorithme très puissant de calcul d'une racine carrée d'un nombre positif.*

Exercice 38 :

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$(n+1)^2 u_{n+1} - (n-1)^2 u_n + n = 0 \tag{11.1}$$

1. Montrer qu'il existe un nombre réel k tel que, si nous posons $v_n = u_n - k$, alors, pour tout $n \geqslant 2$, nous avons :
$$(n+1)^2 v_{n+1} - (n-1)^2 v_n = 0$$
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $v_n = \dfrac{4v_2}{n^2(n-1)^2}$
3. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
4. Si l'égalité (11.1) est vraie aussi pour $n = 1$, que pouvons nous dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 39 :

On appelle $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général u_n vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$4u_{n+2} - 4u_{n+1} + u_n = 0$$

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme $u_0 \neq 0$ et de raison $q \neq 0$.

   Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{E}$ si et seulement si $q = \dfrac{1}{2}$
2. Montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{E}$ si et seulement si la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $\lambda_n = 2^n u_n$ est une suite arithmétique
3. En déduire que $\mathcal{E}$ est l'ensemble des suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général u_n s'écrit $u_n = (an+b)\,2^{-n}$ où a et b sont 2 nombres réels arbitraires ; faire le lien avec la question 1
4. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2 \Longrightarrow 2^n > \mathrm{C}_n^2 = \dbinom{n}{2}$

   (b) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n}$

   (c) Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (an+b)\,2^{-n}$ où a et b sont 2 nombres réels arbitraires.
5. On appelle $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Donner $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$

Exercice 40 :

L'objet de ce problème est ***l'approximation décimale d'un nombre réel****. Par exemple, une calculatrice, un ordinateur ne présentent à l'utilisateur que des décimaux : est-ce justifié ? L'approximation est-elle suffisante ? Pouvons nous approcher le réel aussi proche que l'on souhaite ?*
Soit $x \in \mathbb{R}$; on rappelle que la partie entière de x est l'unique entier relatif $\mathrm{E}(x) = [x]$ tel que

$$[x] \leqslant x < [x] + 1$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $10^{-n}[10^n x] \leqslant x < 10^{-n}[10^n x] + 10^{-n}$
2. On appelle $u_n = 10^{-n}[10^n x]$ et $v_n = u_n + 10^{-n}$; montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = x$
3. On construit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = 0$ et $a_n = 10^n(u_n - u_{n-1})$; montrer que $a_n \in \mathbb{Z}$
4. En utilisant l'inégalité $u_n \leqslant x < u_n + 10^{-n}$, montrer que $-1 < a_n < 10$, et que a_n ne peut donc prendre que 10 valeurs à préciser
5. Pour $n \geq 1$, démontrer que $u_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} a_p 10^{-p} + u_0$

Exercice 41 :

Cet exercice est connu sous le nom de ***lemme de Kronecker***
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de nombres réels strictement positifs tels que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{y_k}{u_k}$ existe

1. On pose $v_n = u_n - u_{n-1}$ et $z_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{y_k}{u_k}$.

   Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k = \sum_{k=1}^{n} v_k\,(z_n - z_{k-1})$
2. Montrer que, pour $p < n$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} y_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{p} v_k\,(z_n - z_{k-1})\right| + M \sum_{k=p+1}^{n} v_k$$

   Où $M = \displaystyle\sup_{p+1\leqslant k\leqslant n} |z_n - z_{k-1}|$
3. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} \sum_{k=1}^{n} y_k = 0$

Exercice 42 :

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par :

$$x_0 = 2 \quad x_1 = 3 \text{ et pour } n \geqslant 0 \qquad x_{n+2} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}$$

Il faut montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et en donner la limite

Chapitre 12

Limite et continuité d'une fonction numérique réelle

Beaucoup des résultats de ce cours seront donnés sans démonstration. Il faudra faire les exercices présents dans ce chapitre, et qui illustrent autant que possible le cours. Ce seront les outils de votre travail personnel qui vous permettront de bien assimiler ce chapitre. Les démonstrations seront souvent faites dans le cours de L_1

12.1 Limite finie d'une fonction

12.1.1 Introduction

Que dire de cette fonction dont le graphe est ci-après (figure 12.1) ? Quel est le comportement de cette fonction au voisinage de 0 ?

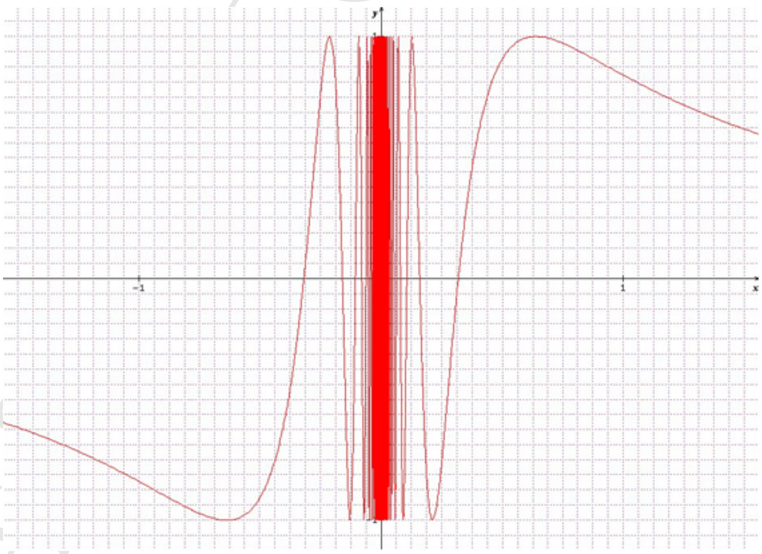


Figure 12.1 – Le comportement de la fonction $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ au voisinage de 0

Pas très facile à dire !! Il faut donc étuder très rigoureusement ces fonctions au voisinage des points « turbulents »

Exemple 1 :

EXERCICE D'INTRODUCTION

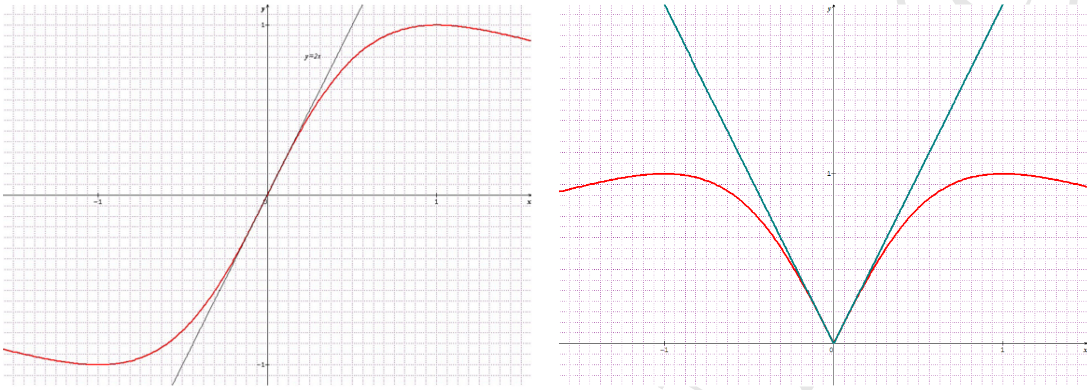


FIGURE 12.2 – La fonction $\varphi(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ et la droite d'équation $y = 2x$ au voisinage de 0 sur la figure de gauche, et, sur la figure de droite, $|\varphi(x)|$ et $y = 2|x|$

Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique définie telle que : $\varphi(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ (voir le graphe sur la figure 12.2)

1. Quel est le domaine de définition de φ ?
2. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ |\varphi(x)| \leq 2|x|$
3. Quelles conditions faut-il sur $x \in \mathbb{R}$ pour que $|\varphi(x)| \leq 10^{-n}$ où $n \in \mathbb{N}$

12.1.2 Précisions importantes

1. **Que signifie x tend vers 0 ?**
   Cela signifie que « x est suffisamment proche de 0 » ou encore que x est situé au « voisinage de 0 » et x prend successivement des valeurs de plus en plus proches de 0.
   Mais comment ? Dans $\mathbb{R}$, il n'y a que « deux manières principales de tendre vers 0 » :
   — x peut tendre vers 0 en prenant des valeurs positives, on écrit que $x \to 0 \quad x > 0$ et on lit « x tend vers 0 par valeurs positives »ou « x tend vers 0 par valeurs supérieures » ou encore « x tend vers 0 à droite de 0 ».
   La notation $x \to 0^+$ est admise mais à éviter.
   — x peut tendre vers 0 en prenant des valeurs négatives, on écrit que $x \to 0 \quad x < 0$ et on lit « x tend vers 0 par valeurs négatives »ou « x tend vers 0 par valeurs inférieures » ou encore « x tend vers 0 à gauche de 0 ».
   La notation $x \to 0^-$ est admise mais est aussi à éviter.
2. **Que signifie x tend vers x_0 ?**
   Cela signifie que x prend successivement des valeurs de plus en plus proches de x_0. Ce qui peut se traduire par $(x - x_0) \to 0$.
   Comme pour 0, on distingue « deux manières principales de tendre vers x_0 » :
   — x peut tendre vers x_0 en prenant des valeurs positives, on écrit que $x \to x_0 \quad x > x_0$ et on lit « x tend vers x_0 par valeurs positives »ou « x tend vers x_0 par valeurs supérieures » ou encore « x tend vers x_0 à droite ».
   La notation $x \to x_0^+$ est admise mais à proscrire.
   — x peut tendre vers x_0 en prenant des valeurs négatives, on écrit que $x \to 0 \quad x < x_0$ et on lit « x tend vers x_0 par valeurs négatives »ou « x tend vers x_0 par valeurs inférieures » ou encore « x tend vers x_0 à gauche ».
   La notation $x \to x_0^-$ est admise mais à proscrire.

3. Dans ce paragraphe sur les limites, f est une fonction définie sur I et x_0 est toujours un réel tel que I soit un domaine *(le plus souvent un intervalle)* qui contienne toujours un intervalle de la forme :
   — $]x_0, x_0 + a[$ où $a > 0$
   — $]x_0 - b, x_0[$ où $b > 0$
   On pourra aussi s'intéresser à des intervalles de la forme $]x_0 - b, x_0[\cup]x_0, x_0 + a[$ ou bien $]x_0 - a, x_0 + a[$.
   x_0 pourra ne pas être élément [1] de I
   Dans tous ces cas, on dit que x est adhérent à I

12.1.3 Définition de la limite d'une fonction

En guise d'introduction, nous pouvons écrire que, si $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et si $x_0 \in I$, f admet l comme limite en x_0 si $f(x)$ est proche de l lorsque x est proche de x_0. Cette approche est formalisée comme suit :

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle.
On dit que f tend vers l quand x tend vers x_0 si, pour tout intervalle ouvert J de centre l, il existe un intervalle I de centre x_0 tel que $f(I) \subset J$
Autrement dit,

$$\boxed{(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta_\varepsilon > 0)\,/\,(|x - x_0| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)}$$

On écrit alors

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = l}$$

12.1.4 Limites à droites, limites à gauche

1. Limite à droite :
   On dit que f tend vers l lorsque x tend vers x_0 à droite, et on écrit $\boxed{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l}$ si,

   $$\boxed{(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta_\varepsilon > 0)\,/\,(0 < x - x_0 < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)}$$

2. Limite à gauche
   On dit que f tend vers l lorsque x tend vers x_0 à gauche, et on écrit $\boxed{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l}$, si,

   $$\boxed{(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta_\varepsilon > 0)\,/\,(0 < x_0 - x < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)}$$

12.1.5 Proposition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I, sauf, peut-être en $x_0 \in I$.
f admet une limite en x_0, si et seulement si, elle admet une limite droite de x_0 notée l_d , et une limite à gauche de x_0 notée l_g, et si ces limites sont égales $l_d = l_g = l$

Exemple 2 :

Voici 2 fonctions qui n'admettent pas de limite en 0 Il suffit de lire le graphe 12.3.

1. La fonction $\varphi(x) = e^{\frac{1}{x}}$ est une fonction qui admet une limite à gauche (nous avons $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} e^{\frac{1}{x}} = 0$), sans en admettre une à droite (nous avons $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$)

1. La notion d'ahérence est vue dans le cours de L_1

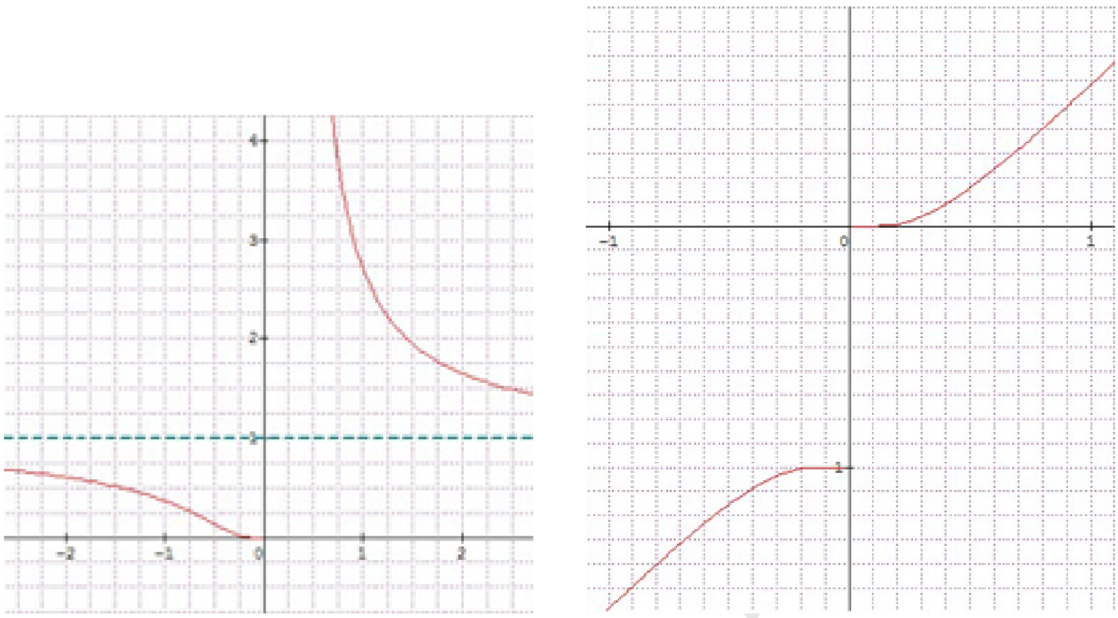


FIGURE 12.3 – A gauche, le graphe de la fonction $\varphi(x) = e^{\frac{1}{x}}$ au voisinage de 0, et, à droite, le graphe de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$ au voisinage de 0

2. La fonction $f(x) = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$ est une fonction qui admet une limite à gauche et une limite à droite : nous avons $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} - 1} = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} - 1} = 0$

   La fonction $f(x) = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$ n'admet donc pas de limite en 0

12.1.6 Unicité de la limite

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I, sauf, peut-être en $x_0 \in I$.
On suppose que f admette une limite quand x tend vers x_0.
Alors, cette limite est unique

Démonstration

On suppose que f admette 2 limites appelées l_1 et l_2 avec $l_1 \neq l_2$, c'est à dire $|l_1 - l_2| > 0$
On appelle $\varepsilon = \dfrac{|l_1 - l_2|}{4}$

- ▷ On écrit que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$
  Il existe donc $\eta_1 > 0$ tel que si $|x - x_0| < \eta_1$ alors $|f(x) - l_1| \leqslant \varepsilon$
- ▷ On écrit que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_2$
  De même, il existe donc $\eta_2 > 0$ tel que si $|x - x_0| < \eta_2$ alors $|f(x) - l_2| \leqslant \varepsilon$

Soit $\eta = \min\{\eta_1; \eta_2\}$; alors, pour $|x - x_0| < \eta$:

$$|l_1 - l_2| \leqslant |f(x) - l_1| + |f(x) - l_2| \leqslant 2\varepsilon = 2 \times \frac{|l_1 - l_2|}{4} = \frac{|l_1 - l_2|}{2}$$

Ainsi, nous avons, pour $|x - x_0| < \eta$, $|l_1 - l_2| \leqslant \dfrac{|l_1 - l_2|}{2}$, ce qui est impossible.
Donc $l_1 = l_2$ et la limite est donc unique.

12.1.7 Opérations sur les limites

Soient f et g 2 fonctions numériques définies sur un intervalle I sauf, peut-être en x_0
Supposons que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = l_1$ et que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} g(x) = l_2$; on suppose l_1 et l_2, finies.
Alors, nous avons les propriétés suivantes :

1. Addition : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} (f+g)(x) = l_1 + l_2$
2. Multiplication par un scalaire : $(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \lambda f(x) = \lambda l_1$
3. Multiplication : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} (f \times g)(x) = l_1 l_2$
4. Quotient : Si $l_2 \neq 0$, alors $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l_1}{l_2}$

Démonstration

1. **Nous démontrons le résultat pour l'addition**
   Soient f et g 2 fonctions numériques définies sur un intervalle I sauf, peut-être en x_0 telles que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = l_1$ et que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} g(x) = l_2$. Nous allons démontrer que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} (f+g)(x) = l_1 + l_2$
   Soit $\varepsilon > 0$
   - On écrit que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$
     Il existe donc $\eta_1 > 0$ tel que si $|x - x_0| < \eta_1$ alors $|f(x) - l_1| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$
   - On écrit que $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2$
     De même, il existe donc $\eta_2 > 0$ tel que si $|x - x_0| < \eta_2$ alors $|g(x) - l_2| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$

   Soit $\eta = \min\{\eta_1 ; \eta_2\}$; alors, pour $|x - x_0| < \eta$:
   $$|(f(x) + g(x)) - (l_1 + l_2)| = |(f(x) - l_1) + (g(x) - l_2)| \leqslant |f(x) - l_1| + |g(x) - l_2| \leqslant 2 \times \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
   Ainsi, nous avons démontré que si $|x - x_0| < \eta$, alors $|(f(x) + g(x)) - (l_1 + l_2)| \leqslant \varepsilon$
   Ce qui démontre que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} (f+g)(x) = l_1 + l_2$.
2. **Nous démontrons le résultat pour la multiplication par un scalaire**
   - Si $\lambda = 0$, alors ; pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\lambda f(x) = 0$, et donc
     $$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} (\lambda f)(x) = 0 = 0 \times l_1 = \lambda l_1$$
   - Supposons $\lambda \neq 0$, c'est à dire $|\lambda| > 0$.
     Nous avons : $|(\lambda f)(x) - \lambda l_1| = |\lambda f(x) - \lambda l_1| = |\lambda| |f(x) - l_1|$
     Soit $\varepsilon > 0$
     Alors, il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que si $x \in \mathbb{R}$ et $|x - x_0| < \eta_\varepsilon$ alors $|f(x) - l_1| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}$
     Et donc, si $x \in \mathbb{R}$ et $|x - x_0| < \eta_\varepsilon$ alors $|\lambda| |f(x) - l_1| \leqslant |\lambda| \times \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$

   On vient donc de montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \lambda f(x) = \lambda l_1$
3. **Nous démontrons le résultat pour la multiplication de deux fonctions**
   Nous avons : $(f \times g)(x) - l_1 l_2 = f(x) g(x) - l_1 l_2$
   D'autre part :
   - $f(x) = (f(x) - l_1) + l_1$
   - $g(x) = (g(x) - l_2) + l_2$

▷ En multipliant les 2 équations ci-dessus et en retirant $l_1 l_2$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} f(x)\,g(x) - l_1 l_2 &= ((f(x) - l_1) + l_1)\,((g(x) - l_2) + l_2) - l_1 l_2 \\ &= (f(x) - l_1)\,(g(x) - l_2) + l_1\,(g(x) - l_2) + l_2\,(f(x) - l_2) \end{aligned}$$

De telle sorte que :

$$|f(x)\,g(x) - l_1 l_2| \leqslant |f(x) - l_1|\,|g(x) - l_2| + |l_1|\,|g(x) - l_2| + |l_2|\,|f(x) - l_2|$$

Soit $\varepsilon > 0$

— Nous écrivons que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = l_1$

— Il existe η_ε^1 telque si $|x - x_0| < \eta_\varepsilon^1$, alors $|f(x) - l_1| < \dfrac{\varepsilon}{3(1 + |l_1|)}$

— De même, Il existe η_ε^2 telque si $|x - x_0| < \eta_\varepsilon^2$, alors $|f(x) - l_1| < \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{3}}$

— Nous écrivons que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} g(x) = l_2$

— Il existe η_ε^3 telque si $|x - x_0| < \eta_\varepsilon^3$, alors $|g(x) - l_2| < \dfrac{\varepsilon}{3(1 + |l_2|)}$

— De même, Il existe η_ε^4 telque si $|x - x_0| < \eta_\varepsilon^4$, alors $|g(x) - l_2| < \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{3}}$

Soit $\delta = \inf\left\{\eta_\varepsilon^1, \eta_\varepsilon^2, \eta_\varepsilon^3, \eta_\varepsilon^4\right\}$. Alors, si $|x - x_0| < \delta$, alors nous avons, en même temps :

— $|f(x) - l_1| < \dfrac{\varepsilon}{3(1 + |l_1|)}$

— $|f(x) - l_1| < \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{3}}$

— $|g(x) - l_2| < \dfrac{\varepsilon}{3(1 + |l_2|)}$

— $|g(x) - l_2| < \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{3}}$

Et donc, si $|x - x_0| < \delta$, alors :

$$\begin{aligned} |f(x)\,g(x) - l_1 l_2| &\leqslant |f(x) - l_1|\,|g(x) - l_2| + |l_1|\,|g(x) - l_2| + |l_2|\,|f(x) - l_2| \\ &< \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} \times \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} + |l_1| \times \frac{\varepsilon}{3(1 + |l_1|)} + |l_2| \times \frac{\varepsilon}{3(1 + |l_2|)} \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Et donc $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} (f \times g)(x) = l_1 l_2$

4. **Nous démontrons le résultat pour le quotient de deux fonctions**

Nous allons, en fait, démontrer que, si $l_1 \neq 0$, alors $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{l_1}$, le résultat sur le quotient venant en combinant ce résultat avec le résultat sur la multiplication de 2 fonctions.

Il y a un résultat important que nous allons utiliser, c'est l'inégalité, issue de l'inégalité triangulaire :

$$||a| - |b|| \leqslant |a - b|$$

Comme $l_1 \neq 0$, nous avons $|l_1| > 0$.

Il existe donc $\eta_1 > 0$ tel que si $|x - x_0| < \eta_1$, alors $|f(x) - l_1| < \dfrac{|l_1|}{2}$.

Et, de l'inégalité triangulaire, nous déduisons que si $|x - x_0| < \eta_1$, alors $||f(x)| - |l_1|| < \dfrac{|l_1|}{2}$. Or :

$$||f(x)| - |l_1|| < \frac{|l_1|}{2} \Longleftrightarrow \frac{|l_1|}{2} < |f(x)| < \frac{3\,|l_1|}{2}$$

D'où nous déduisons :

$$\frac{2}{3\,|l_1|} < \frac{1}{|f(x)|} < \frac{2}{|l_1|}$$

De l'inégalité précédente, nous tirons deux choses :

- ▷ Une première, évidente : $\dfrac{1}{|f(x)|} < \dfrac{2}{|l_1|}$
- ▷ En second lieu, de $\dfrac{2}{3|l_1|} < \dfrac{1}{|f(x)|}$, nous en déduisons que $\dfrac{2}{|l_1|} < \dfrac{3}{|f(x)|}$

C'est à dire que nous avons :

$$\frac{1}{|f(x)|} < \frac{2}{|l_1|} < \frac{3}{|f(x)|}$$

Revenons maintenant à notre expression de départ : $\left|\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{l_1}\right|$:

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l_1}\right| = \left|\frac{f(x) - l_1}{f(x) \times l_1}\right| = \frac{1}{|f(x)| \times |l_1|} \times |f(x) - l_1|$$

Ainsi, si $|x - x_0| < \eta_1$, alors $\dfrac{1}{|f(x)| \times |l_1|} \times |f(x) - l_1| \leqslant \dfrac{2}{|l_1|^2} \times |f(x) - l_1|$

Soit $\varepsilon > 0$

Il existe $\eta_2 > 0$ tel que $|x - x_0| < \eta_2$, alors $|f(x) - l_1| \leqslant \dfrac{|l_1|^2}{2} \times \varepsilon$

En posant $\eta = \inf\{\eta_1 ; \eta_2\}$, si $|x - x_0| < \eta$, alors $|f(x) - l_1| \leqslant \dfrac{|l_1|^2}{2} \times \varepsilon$, et donc

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l_1}\right| \leqslant \frac{2}{|l_1|^2} \times |f(x) - l_1| \leqslant \frac{2}{|l_1|^2} \times \frac{|l_1|^2}{2} \times \varepsilon = \varepsilon$$

Nous venons donc de démontrer que si $l_1 \neq 0$, alors $\displaystyle\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l_1}$

En combinant avec le résultat précédent, nous avons bien, si $l_2 \neq 0$, alors $\displaystyle\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$

Remarque 1 :

La multiplication par un scalaire est inclus dans le cas de la multiplication de 2 fonctions, où l'une des deux fonctions est constante

12.1.8 Composition des applications *(Résultat admis)*

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I , et soit $x_0 \in I$
Soit g une fonction numérique définie sur un intervalle J
On suppose : $f(I) \subset J$ $\displaystyle\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = y_0$ $y_0 \in J$ $\displaystyle\lim_{\substack{y \to y_0 \\ y \neq y_0}} g(x) = l$

Alors, $\displaystyle\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} g \circ f(x) = l$

Remarque 2 :

Ce résultat sera démontré dans la partie L_1 du cours

Exemple 3 :

1. Calculons $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$.

   En utilisant les propriétés du logarithme, nous avons :

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln x} = \frac{\ln\left(x\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)}{\ln x} = \frac{\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln x}$$

Finalement : $\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x} = 1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}$.

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{\ln x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x} = 1$

2. Calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+1) - \ln x$.

   Nous avons
   $$\ln(x+1) - \ln x = \ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) - \ln(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$
   Finalement $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+1) - \ln(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$

3. Soit à calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^x+1) - x$.

   Nous avons :
   $$\ln(e^x+1) - x = \ln\left(e^x\left(1+e^{-x}\right)\right) - x = \ln e^x + \ln\left(1+e^{-x}\right) - x = \ln(1+e^{-x})$$
   Finalement : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^x+1) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$.

Exercice 1 :

Voici deux exercices résolus

1. Etudiez $\lim\limits_{x\to1} \sin\left(\dfrac{\pi\left(x^2-x\right)}{x^2-1}\right)$

   Résolution

   Nous allons commencer par chercher $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\left(x^2-x\right)}{x^2-1}$

   C'est un rapport de 2 polynômes qui admetent, tous les deux 1 comme racine ; il est donc tout à fait possible de factoriser par $x-1$. Nous avons donc :
   $$\frac{\left(x^2-x\right)}{x^2-1} = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} \overset{x\neq1}{=} \frac{x}{(x+1)}$$
   De telle sorte que $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\left(x^2-x\right)}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x}{(x+1)} = \dfrac{1}{2}$

   Donc, $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\pi\left(x^2-x\right)}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x}{(x+1)} = \dfrac{\pi}{2}$

   Et, $\lim\limits_{x\to1} \sin\left(\dfrac{\pi\left(x^2-x\right)}{x^2-1}\right) = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}}$ puis $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}}$

   Résolution

   (a) Regardons donc la limite de $\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}}$ lorsque x tend vers -1, à gauche de -1.

   Tout d'abord, remarquons que $\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-3)} \overset{x\neq-1}{=} \dfrac{(x+1)}{(x-3)}$

   On peut remarquer que si $x<-1$, alors $\dfrac{(x+1)}{(x-3)} > 0$, et que donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}} = 0$

(b) De la même manière, si $x \neq -1$, $\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3} = \dfrac{(x+1)}{(x-3)}$, sauf que, cette fois, au voisinage de -1, à droite de -1, $\dfrac{(x+1)}{(x-3)} < 0$; il est donc impossible de calculer la limite de $\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}}$ lorsque x tend vers -1, à droite de -1.

Donc, $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}}$ n'existe pas.

12.1.9 Limites et relation d'ordre

1. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I telle que $(\forall x \in I)\,(f(x) \geqslant 0)$
   On suppose que, pour $x_0 \in I$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x\neq x_0}} f(x) = l$
   Alors, $l \geqslant 0$
2. Soit f et g deux fonctions numériques définies sur un intervalle I et telles que $(\forall x \in I)\,(f(x) \leqslant g(x))$
   On suppose que, pour $x_0 \in I$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x\neq x_0}} f(x) = l_1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x\neq x_0}} g(x) = l_2$
   Alors, $l_1 \leqslant l_2$

Démonstration

1. **Démontrons le premier point**
   Nous allons faire un raisonnement par l'absurde.
   Supposons donc $l < 0$
   Si $l < 0$, alors $|l| > 0$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que si $|x - x_0| < \eta$ alors $|f(x) - l| < \dfrac{|l|}{2}$
   Ainsi, si $|x - x_0| < \eta$ alors $-\dfrac{|l|}{2} + l < f(x) < l + \dfrac{|l|}{2} \iff \dfrac{3l}{2} < f(x) < \dfrac{l}{2} < 0$
   Ce qui sous entend que si $|x - x_0| < \eta$ alors $f(x) < 0$. ce qui est en contradiction avec l'hypothèse où, pour tout $x \in I$,$f(x) \geqslant 0$.
   Ainsi, l'hypothèse ahjoutée $l < 0$ est-elle absurde. Donc, $l \geqslant 0$
2. **Démontrons le second point**
   Le second point n'est qu'un corollaire du premier. En effet, si nous posons $h(x) = g(x) - f(x)$, alors, pour tout $x \in I$, nous avons $h(x) \geqslant 0$.
   D'autre part, $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)$ existe, et nous avons même $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} (g(x) - f(x)) = l_2 - l_1$
   D'après le point précédent, comme pour tout $x \in I$, nous avons $h(x) \geqslant 0$, nous avons $l_2 - l_1 \geqslant 0$, c'est à dire $l_2 \geqslant l_1$
   Ce que nous voulions

Remarque 3 :

Le résultat est tout à fait semblable si, pour tout $x \in I$, nous avons $(f(x) \leqslant 0)$ et si $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x\neq x_0}} f(x) = l$, alors, $l \leqslant 0$

12.1.10 Théorème des limites par encadrements

Soient f, g et h trois fonctions numériques définies sur un intervalle I telles que

$$(\forall x \in I)\left(f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)\right)$$

On suppose que, pour $x_0 \in I$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} h(x) = l$

Alors, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} g(x) = l$

Démonstration

Nous devons donc évaluer $g(x) - l$. Or :

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \Longrightarrow f(x) - l \leqslant g(x) - l \leqslant h(x) - l \Longrightarrow |g(x) - l| \leqslant \max\{|f(x) - l|\,;|h(x) - l|\}$$

Soit $\varepsilon > 0$

- Ecrivons que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = l$
  Il existe $\eta_f > 0$ rel que si $|x - x_0| < \eta_f$, alors $|f(x) - l| < \varepsilon$
- De même, écrivons que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} h(x) = l$
  Il existe $\eta_h > 0$ rel que si $|x - x_0| < \eta_h$, alors $|h(x) - l| < \varepsilon$

Prenons $\eta = \inf\{\eta_f ; \eta_h\}$. Alors, si $|x - x_0| < \eta$, alors $|h(x) - l| < \varepsilon$ et $|f(x) - l| < \varepsilon$ et donc $\max\{|f(x) - l|\,;|h(x) - l|\} < \varepsilon$.
Ainsi, si $|x - x_0| < \eta$, alors $|g(x) - l| < \varepsilon$.
Nous venons donc de montrer que $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ existe et que $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$

Remarque 4 :

Ce résultat est aussi connu par le nom de Théorème des gendarmes ou encore, Théorème du sandwich...qui ne sont pas des appellations contrôlées.

Exercice 2 :

Soit $g(x) = x \times \left[\dfrac{1}{x}\right]$ où $[x]$ désigne la partie entière de $x \in \mathbb{R}$ (cf graphe de la figure 12.4)

1. Donnez le domaine de définition de g

   Résolution
   Evidemennt, le domaine de définition est $\mathbb{R}^*$

2. (a) Montrer que nous avons, pour $x < 0$, $1 \leq g(x) < 1 - x$

   Résolution
   On suppose $x < 0$. Nous avons toujours : $\left[\dfrac{1}{x}\right] \leqslant \dfrac{1}{x} < \left[\dfrac{1}{x}\right] + 1$ En multipliant par x, négatif, nous inversons le sens des inégalités ; donc,

   $$x\left[\frac{1}{x}\right] \geqslant x \times \frac{1}{x} > x\left[\frac{1}{x}\right] + x$$

   C'est à dire $g(x) \geqslant 1 > g(x) + x$ Et nous avons donc : $1 \leqslant g(x) < 1 - x$

   (b) Montrer que nous avons, pour $x > 0$, $1 - x < g(x) \leq 1$

   Résolution
   La résolution de cette question ne diffère pas de la précédente.

FIGURE 12.4 – Le graphe de la fonction $g(x) = x \times \left[\dfrac{1}{x}\right]$

On suppose donc $x > 0$. Nous avons toujours : $\left[\dfrac{1}{x}\right] \leqslant \dfrac{1}{x} < \left[\dfrac{1}{x}\right] + 1$ En multipliant par x, positif, cette fois ci, nous avons :

$$x\left[\frac{1}{x}\right] \leqslant x \times \frac{1}{x} < x\left[\frac{1}{x}\right] + x$$

C'est à dire $g(x) \leqslant 1 < g(x) + x$ Et nous avons donc : $1 - x < g(x) \leqslant 1$

(c) En déduire $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} g(x)$

Résolution

Nous allons procéder en deux temps : à droite de 0, puis à gauche de 0.

— A gauche de 0, c'est à dire si $x < 0$, nous avons $1 \leq g(x) < 1 - x$, et en utilisant les limites par encadrement, nous avons $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} g(x) = 1$

— De même, à droite de 0, c'est à dire si $x > 0$, nous avons $1 - x < g(x) \leq 1$, et en utilisant les limites par encadrement, nous avons $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = 1$

Nous avons donc g qui admet une limite à droite, et une limite à gauche, lesquelles sont égales à 1, et donc, $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} g(x) = 1$

12.1.11 Quelques exercices

Exercice 3 :

On considère la fonction f ainsi définie :

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{x}{\max(1, |x|)} \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $|f(x)| \leqslant |x|$ et $|f(x)| \leqslant 1$
2. Donner $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$
3. Tracer le graphe de f

Exercice 4 :

Etudier les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x\neq -1}} \dfrac{x^3+3x^2-2x-4}{x+1}$
2. $\lim\limits_{x\to +4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}-1}$
4. $\lim\limits_{x\to +2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$

12.2 Limites infinies

12.2.1 Définitions

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I , et soit $x_0 \in I$

1. On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 si
$$(\forall A>0)\,(\exists \eta_A>0)\,(0<|x-x_0|<\eta_A \Rightarrow f(x)>A)$$
et on écrit $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} f(x)=+\infty$
2. On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 si
$$(\forall A>0)\,(\exists \eta_A>0)\,(0<|x-x_0|<\eta_A \Rightarrow f(x)<-A)$$
et on écrit : $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} f(x)=-\infty$
3. On dit que f tend vers l quand x tend vers $+\infty$ si
$$(\forall \varepsilon>0)\,(\exists A>0)\,(x>A \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon)$$
et on écrit $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=l$
4. De la même manière, on dit que f tend vers l quand x tend vers $-\infty$ si
$$(\forall \varepsilon>0)\,(\exists A>0)\,(x<-A \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon)$$
et on écrit $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=l$
5. On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si
$$(\forall A>0)\,(\exists B>0)\,(x>B \Rightarrow f(x)>A)$$
et on écrit $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

Exercice 5 :

Ecrire les définitions de :

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$
2. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$
3. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$

Exercice 6 :

Le graphe de la figure 12.5 est celui de la fonction $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$; pour cette fonction f,

1. Trouver $\eta_A>0$ tel que si $0<x<\eta_A$, alors $f(x)>A$, où A est un nombre strictement positif quelconque

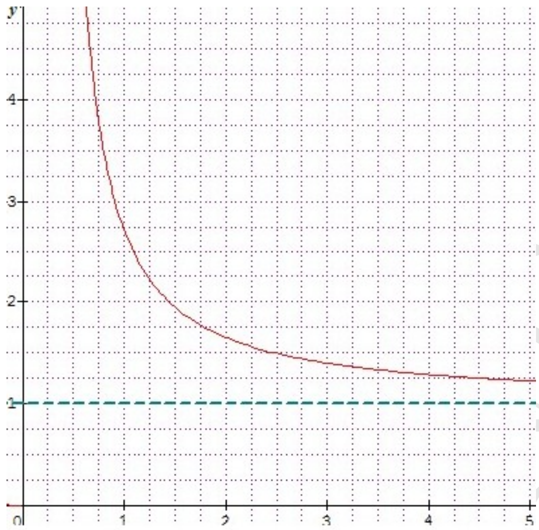


FIGURE 12.5 – Ici, nous avons : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +1$

2. De la même manière, trouver $B > 0$, tel que si $x > B$, alors $|f(x) - 1| < \varepsilon$ où ε est un nombre strictement positif quelconque

Résolution

1. Soit $A > 0$; nous souhaitons avoir $e^{\frac{1}{x}} > A$; or,

$$e^{\frac{1}{x}} > A \iff \frac{1}{x} > \ln A \iff x < \frac{1}{\ln A}$$

Ainsi, il existe $\eta_A > 0$ et $\eta_A = \dfrac{1}{\ln A}$ tel que si $0 < x < \eta_A$, alors $f(x) > A$, où A est un nombre strictement positif quelconque

2. Soit $\varepsilon > 0$; nous souhaitons trouver $B > 0$ tel que tel que si $x > B$, alors $|f(x) - 1| < \varepsilon$
   — Remarquons tout de suite que si $x > 0$, alors $\dfrac{1}{x} > 0$ et $e^{\frac{1}{x}} > 1$; donc

$$|f(x) - 1| < \varepsilon \iff f(x) - 1 < \varepsilon$$

   — Or, $f(x) - 1 < \varepsilon$ est équivalent à $e^{\frac{1}{x}} - 1 < \varepsilon \iff e^{\frac{1}{x}} < 1 + \varepsilon$
   — En passant au logarithme, nous avons $\dfrac{1}{x} < \ln(1 + \varepsilon)$, ce qui nous donne $x > \dfrac{1}{\ln(1 + \varepsilon)}$

Ainsi, il existe $B > 0$ et $B = \dfrac{1}{\ln(1 + \varepsilon)}$, tel que si $x > B$, alors $|f(x) - 1| < \varepsilon$ où ε est un nombre strictement positif quelconque

12.2.2 Proposition

Soient f et g 2 fonctions numériques réelles, définies au moins sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On suppose :

1. Pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$
2. Pour $x_0 \in I$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

Alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

Démonstration

Soit $A > 0$
Alors, il existe $\eta_A > 0$ tel que si $|x - x_0| < \eta_A$, alors $f(x) > A$
Pour tout $x \in I$ tel que $|x - x_0| < \eta_A$, nous avons $g(x) \geqslant f(x) > A$.
Nous avons donc $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

Remarque 5 :

Ce résultat peut s'adapter très facilement à plein d'autres situations.

12.3 Synthèse sur les limites finies et infinies

Voici des tableaux qui tentent de faire des synthèses sur les opérations sur les limites ; les points d'interrogation « ? »désignent les cas d'indétermination

12.3.1 Addition

f \ g	$+\infty$	$-\infty$	l_1
$+\infty$	$+\infty$	?	$+\infty$
$-\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
l_2	$+\infty$	$-\infty$	$l_1 + l_2$

12.3.2 Produit

f \ g	$+\infty$	$-\infty$	l_1
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	∞ dépend du signe de l_1
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	∞ dépend du signe de l_1
l_2	∞ dépend du signe de l_2	∞ dépend du signe de l_2	$l_1 \times l_2$

12.3.3 Quotient

On regarde le quotient $\dfrac{f}{g}$

g \ f	$+\infty$	$-\infty$	0	l_1
$+\infty$	?	?	0	0
$-\infty$	?	?	0	0
0	∞	∞	?	∞
l_2	∞	∞	0	$\dfrac{l_1}{l_2}$

Remarque 6 :

Il y a de nombreux cas d'indéterminations du type $\dfrac{\infty}{\infty}$, $+\infty - (+\infty)$, $\dfrac{0}{0}$, $0 \times \infty$, cas qu'il faut, à chaque fois, étudier de près.

Exercice 7 :

Montrer que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$

<u>Résolution</u>

Voici une question classique, peu difficile et qui se résoud toujours de la même manière, en prenant la valeur absolue.

Nous avons : $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \leqslant \left|\dfrac{1}{x}\right|$. Or, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, et donc, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left|\dfrac{1}{x}\right| = 0$

Par les théorèmes de majoration, nous concluons donc que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$

Exercice 8 :

Etudier les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \sqrt{x^2+1} + x$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$
3. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x \sin \frac{1}{x}$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{x^4 - 1}$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 + x^2 + 1}{x^3 + 2}$
6. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^4 - x^2 + 1}{x^3 - 1}$
7. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(e^x - e^{-x}) - x$

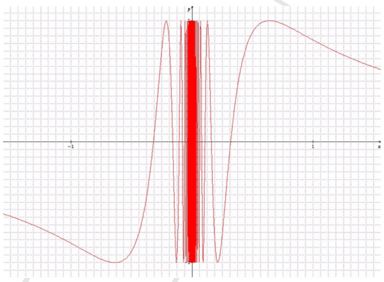
Exercice 9 :

Donner, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et de $\beta \in \mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^4 + 2x + 1} - \sqrt{\alpha x^4 + \beta x + 1}$

12.4 Fonctions continues

12.4.1 Introduction

1. Qu'est ce qu'une fonction continue ? Comment matérialiser, sur un graphe, physiquement, ce qu'est une fonction continue ?



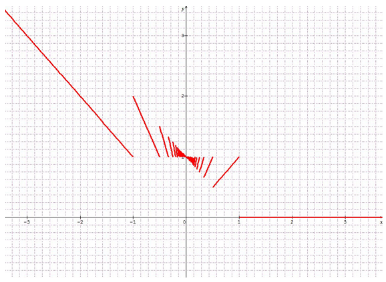


FIGURE 12.6 – Ces fonctions sont-elles continues ? Comment définir la continuité ?

2. Une idée de continuité, est de dire que pour tracer le graphe de f, il ne faut pas *"lever son crayon"*. C'est ce qu'on tente de formaliser dans dans la définition suivante.

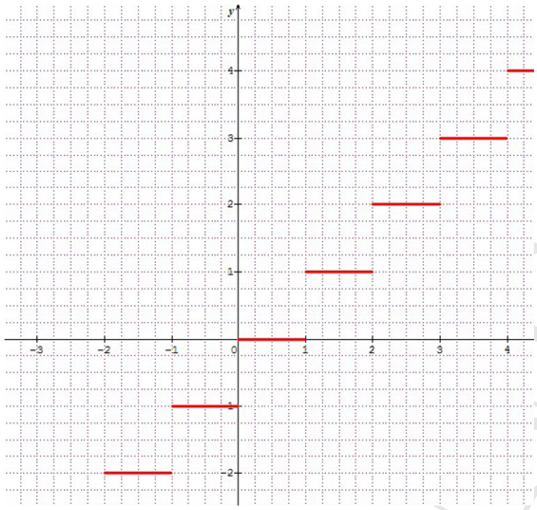


FIGURE 12.7 – Ainsi, la fonction **"Partie entière"**, notée $[x]$ est-elle continue sur tout intervalle $[n, n+1[$ avec $n \in \mathbb{Z}$, mais pas en $n_0 \in \mathbb{Z}$

12.4.2 Définition de fonction continue en un point

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique d'une variable réelle et soit $x_0 \in I$.
On dit que f est continue en x_0 si et seulement si :
- $f(x_0)$ existe
- $\lim\limits_{x \to x_0} = f(x_0)$

Autrement dit, en utilisant la définition de la limite vue dans les paragraphes précédents 12.1.3 :
f est continue en x_0 si et seulement si

$$\boxed{(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta_\varepsilon > 0)\,/\,(|x - x_0| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)}$$

Remarque 7 :

1. Une autre façon d'écrire que f est continue est de le dire comme ceci : $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ et $f(x_0)$ existe, c'est à dire :

$$\boxed{(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \eta_\varepsilon > 0)\,/\,(|h| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon)}$$

2. L'étude des fonctions continues en un point se résume souvent à une étude de limites ; d'où la juxtaposition de ces 2 études

Exemple 4 :

Exemples de fonctions continues

1. $f(x) = ax + b$ **est une fonction continue en tout** $x_0 \in \mathbb{R}$**.** En effet :

   Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit $\varepsilon > 0$

   Alors,
$$|f(x) - f(x_0)| = |ax + b - (ax_0 + b)| = |ax - ax_0| = |a|\,|x - x_0|$$
   Ainsi, nous avons $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ dès que $|a|\,|x - x_0| \leq \varepsilon$, c'est à dire si $|x - x_0| \leq \dfrac{\varepsilon}{|a|}$;

   on choisit donc $\eta_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{|a|}$

2. **La fonction** $g(x) = |x|$ **est continue en tout** $x_0 \in \mathbb{R}$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit $\varepsilon > 0$ Alors,

$$|g(x) - g(x_0)| = ||x| - |x_0|| \leq |x - x_0|$$

Ainsi, nous avons $|g(x) - g(x_0)| \leq \varepsilon$ dès que $|x - x_0| \leq \varepsilon$; on choisit donc $\eta = \varepsilon$

3. Est ce que $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$ est continue en $x = 1$?

   Evidemment non, puisque $f(1)$ n'est pas défini !!

12.4.3 Continuité à droite, continuité à gauche

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique d'une variable réelle et soit $x_0 \in I$.

1. On dit que f est continue à droite de x_0 si et seulement si :
   — $f(x_0)$ existe
   — $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$
2. On dit que f est continue à gauche de x_0 si et seulement si :
   — $f(x_0)$ existe
   — $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$

12.4.4 Théorème

f est continue en x_0, si et seulement si, f est continue à droite et à gauche de x_0

Démonstration

Ce théorème est la conséquence des résultats sur les limites

Exercice 10 :

1. Etudier la continuité de $f(x) = [x] + (x - [x])^2$ en $n_0 \in \mathbb{Z}$

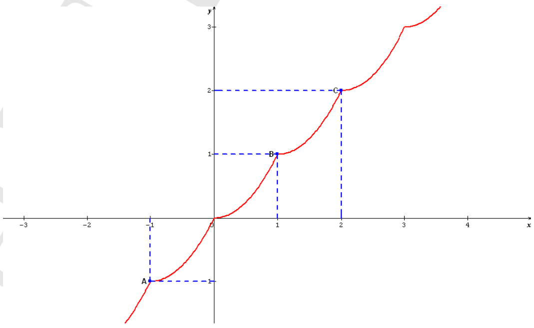


FIGURE 12.8 – Le graphe de la fonction $f(x) = [x] + (x - [x])^2$

Soit $n_0 \in \mathbb{Z}$ et nous allons étudier f sur l'intervalle $[n_0 \,;\, n_0 + 1[$, et, plus spécialement en n_0

— Sur l'intervalle $[n_0 \,;\, n_0 + 1[$, nous avons $[x] = n_0$, et $f(x) = n_0 + (x - n_0)^2$. Sur cet intervalle, f est un polynôme du second degré, le calcul de la limite est donc facile : $\lim\limits_{\substack{x \to n_0 \\ x > n_0}} f(x) = n_0 = f(n_0)$

f est donc continue à droite de n_0

- Etudions la limite à gauche de n_0. Nous devons donc étudier f sur l'intervalle $[n_0 - 1\ ;\ n_0[$, et sur cet intervalle, f s'exprime par : $f(x) = n_0 - 1 + (x - n_0 + 1)^2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to n_0 \\ x < n_0}} f(x) = n_0 = f(n_0)$
  f est donc continue à droite et à gauche de n_0, f est donc continue en n_0

Elle est donc continue en $n_0 \in \mathbb{Z}$ (voir figure 12.8

2. La fonction $f(x) = (x-1)[x]$ est-elle continue en $x = 1$, en $x = 2$?
   - Tout d'abord, si $x \in [0\ ;\ +1[$, alors $[x] = 0$, et f est nulle sur l'intervalle $[0\ ;\ +1[$; f est donc, en particulier, continue à gauche de 1.
     A droite de 1,$f(x) = (x-1)$ et comme $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = 0$; f est donc continue à droite de 1.
     f est donc continue en $x = 1$
   - Remarquons maintenant que $f(2) = 2$.
     A droite de 2,$f(x) = 2(x-1)$ et comme $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = 2$; f est donc continue à droite de 2.
   - A gauche de 2,$f(x) = (x-1)$ et comme $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = 1 \neq f(2)$; f n'est donc pas continue à gauche de 2.
     f n'est donc pas continue en $x = 2$ puisque non continue à gauche de 2
3. La fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$ est-elle continue en 0 ?

   Nous avons $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} e^{\frac{1}{x}} + 1 = +\infty$ et donc, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} + 1} = 0$

   De même, nous avons $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} e^{\frac{1}{x}} + 1 = +1$ et donc, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} + 1} = 1$

   La limite à droite de 0 étant différente de la limite à gauche de 0, il est impossible que f soit continue en 0.

12.4.5 Théorème

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions numériques d'une variable réelle continues en $x_0 \in I$.Alors :

1. Somme de fonctions continues : $f + g$ est continue en x_0
2. Produit de fonctions continues : $f \times g$ est continue en x_0
3. Produit par un scalaire : $(\forall \lambda \in \mathbb{R})\ \lambda \times f$ est continue en x_0
4. Quotient de fonctions continues : Si $g(x_0) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ est continue en x_0

Démonstration

Ce théorème est la conséquence des théorèmes sur les limites

12.4.6 Théorème

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique d'une variable réelle continue en $x_0 \in I$ et telle que $f(I) \subset J$
Soit $g : J \to \mathbb{R}$, continue en $y_0 = f(x_0)$ Alors $g \circ f$ est continue en $x_0 \in I$

Démonstration

De même, ce théorème est la conséquence des théorèmes sur les limites

12.4.7 Prolongement par continuité

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique d'une variable réelle et x_0 qui n'est pas dans I et répond aux critères de la remarque 12.1.2
On suppose $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$
Soit

$$\left[\begin{array}{rcl} g : I \cup \{x_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = \left\{\begin{array}{l} f(x) \text{ si } x \neq x_0 \\ g(x_0) = l \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Alors, g est continue en x_0. On dit que g est le prolongement par continuité de f en x_0

Exemple 5 :

1. Il y a un premier exemple, classique, c'est celui de la fonction $f(x) = x \ln x$ qui est définie sur $\mathbb{R}^{\star +}$
   Or, d'après les limites connues, $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$. On peut donc prolonger f par continuité, en posant $f(0) = 0$
2. Le problème est évidemment le même pour $f_n(x) = x^n \ln x$, en posant $f_n(0) = 0$ $(n \in \mathbb{N}^\star)$

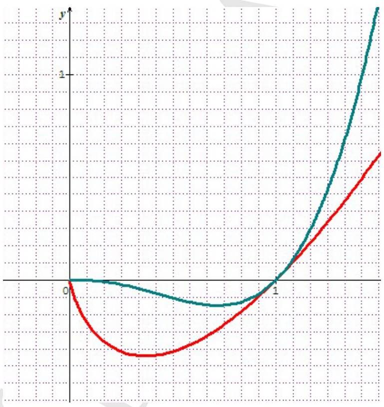


FIGURE 12.9 – Voici les graphes des fonctions $f_1(x) = x \ln x$ et $f_3(x) = x^3 \ln x$

Exercice 11 :

1. Est-il possible de prolonger par continuité en 0, la fonction $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$?

   Il suffit de chercher $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\left| x \sin \dfrac{1}{x} \right| \leqslant |x|$

   On en déduit donc que $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$ et qu'en posant $f(0) = 0$, on prolonge f par continuité en 0.
2. Est-il possible de prolonger par continuité en 0, la fonction $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$?

   Nous allons considérer 2 cas : le premier lorsque x tend vers zéro par valeurs positives et l'autre, lorsque x tend vers zéro par valeurs négatives.

   — $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$, et donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$
     On peut donc d'ores et déjà conclure qu'il est impossible de prolonger f en 0 par continuité.

   — Regardons cependant à gauche de 0
     $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$, et donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} e^{\frac{1}{x}} = 0$

On peut , par contre, prolonger par continuité à gauche, en posant $f(0) = 0$. On obtient ainsi une fonction continue à gauche, mais non continue en 0.

12.4.8 Exercices

Exercice 12 :

C'est un exercice sur les traditionnelles questions de logique : contrapposée, réciproque.

1. Soient f et g deux fonctions numériques définies dans un intervalle I, et soit $x_0 \in I$; on sait que l'implication suivante :
$$\boxed{(f \text{ continue en } x_0 \text{ et } g \text{ continue en } x_0) \Rightarrow (fg \text{ continue en } x_0)}$$
est vraie. L'implication suivante :
$$\boxed{(fg \text{ non continue en } x_0) \Rightarrow ((f \text{ non continue en } x_0) \text{ ou } (g \text{ non continue en } x_0))}$$
est-elle vraie ?
2. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} F(x) = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} + 1} \text{ si } x \neq 0 \\ F(0) = +1 \end{cases}$$
Etudier la continuité de F en 0
3. Soient G et H, les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, par : $G(x) = x^2$ et $H(x) = x^2+1$; étudier la continuité des fonctions produit FG et FH en 0
4. L'implication
$$\boxed{(fg \text{ continue en } x_0) \Rightarrow ((f \text{ continue en } x_0) \text{ et } (g \text{ continue en } x_0))}$$
est-elle vraie, pour toute fonction f et g définies dans un intervalle I et $x_0 \in I$?

Exercice 13 :

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant la propriété suivante :
$$(\forall x \in \mathbb{R}) \left(\lim_{h \to 0} (f(x+h) - f(x-h) = 0) \right)$$
Cette fonction est-elle nécessairement continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 14 :

Étudier la continuité en $n_0 \in \mathbb{Z}$ de la fonction suivante : $g(x) = x + \sqrt{x - [x]}$

12.5 Fonctions continues sur un intervalle

Attention La notion d'intervalle est prise au sens large : ouvert, fermé, même $\mathbb{R}$ peut être pris comme un intervalle.

12.5.1 Définition

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D}_f$, et soit $I \subset \mathcal{D}_f$
On dit que f est continue sur I, si et seulement si $(\forall x_0 \in I)$ f est continue en x_0

Exemple 6 :

Voici des exemples et contre-exemples :

1. $\tan x$ est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right[$
2. $[x]$ est continue sur $]0,1[$, mais pas sur $[0,1]$ *(Attention aux bornes)*
3. $\frac{1}{x}$ n'est pas continue sur $[-1;+1]$; en effet, $\frac{1}{x}$ n'est pas définie en 0.

12.5.2 Théorème

Soient $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions numériques d'une variable réelle continues sur $\mathcal{U} \subset (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)$. Alors :

1. Somme de fonctions continues : $f+g$ est continue sur $\mathcal{U}$
2. Produit de fonctions continues : $f \times g$ est continue sur $\mathcal{U}$
3. Produit par un scalaire : $(\forall\lambda \in \mathbb{R})$ $\lambda \times f$ est continue sur $\mathcal{U}$
4. Quotient de fonctions continues : Si $g(x) \neq 0$, pour tout $x \in \mathcal{U}$, $\frac{f}{g}$ est continue en $\mathcal{U}$

Démonstration

Ce résultat est directement issu des théorèmes d'opérations sur les limites et sur les fonctions continues en un point.

12.5.3 Définition

Voici un retour à des définitions vues en mathématiques discrètes (cf 1.12.2)

1. Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on appelle image directe de A par f, l'ensemble
$$f(A) = \{y \in \mathbb{R}/y = f(x) \text{ où } x \in A\}$$
2. Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on appelle image réciproque de A par f, l'ensemble
$$f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R}/f(x) \in A\}$$

12.5.4 Théorème *[Admis]*

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, une fonction continue sur $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}_f$.
Soit $I \subset \mathcal{U}$ un intervalle ; alors, $f(I)$ est aussi un intervalle.

Remarque 8 :

1. Par construction, f est surjective de I dans $f(I)$
2. Soient $y \in f(I)$ et $y' \in f(I)$; d'après le théorème ci-dessus, $f(I)$ étant un intervalle $[y\ y'] \subset f(I)$; donc, pour tout $z \in [y\ y']$, il existe $u \in I$ tel que $f(u) = z$

Exemple 7 :

On considère $f(x) = \sin x$, continue sur $\mathbb{R}$, donc

— Si $I = \mathbb{R}$, alors $f(I) = [-1;+1]$
— Si $I = [0, 2\pi[$, alors $f(I) = [-1;+1]$
— Si $I =]-2\pi, 2\pi[$, alors $f(I) = [-1;+1]$
— Si $I = \left]0, +\frac{\pi}{2}\right[$, alors $f(I) =]0;+1]$
— Si $I = [0, +\pi]$, alors $f(I) = [0;+1]$

— Si $I =]0, +\pi[$, alors $f(I) =]0; +1]$

On voit, d'après l'exemple ci-dessus,que $f(I)$, image directe de I par f n'est pas forcément de la même nature que I (ouvert ou fermé), mais, c'est un intervalle

Exercice 15 :

Soit f une fonction numérique, et A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On note $f(A)$ l'image directe de A (c.f.12.5.3). Déterminez $f(A)$ dans les cas suivants :

1. $\underline{f(x) = x^2}$
   (a) $A =]-1, 2[$
   Question classique!! $f(A) = [0\ ;\ 4[$
   (b) $A =]-3; -1] \cup [2, 4[$
   $f(A) = [1\ ;\ 16[$
2. $\underline{f(x) = [x]}$
   La fonction étudiée ici est la partie entière
   (a) $A = [-5, 3]$
   $f(A) = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
   (b) $A = \mathbb{R}^{\star+}$
   $f(A) = \mathbb{N}$
3. $\underline{f(x) = x - [x]}$
   Il faut remarquer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons : $[x] \leqslant x < [x]+1$. Donc, en soustrayant $[x]$ à chaque membre de l'égalité, nous obtenons : $0 \leqslant x - [x] < 1$, et ce, pour tout $x \in \mathbb{R}$
   (a) $A = \left[\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right]$
   $f(A) = [0\ ;\ 1[$
   (b) $A = \mathbb{R}$
   $f(A) = [0\ ;\ 1[$
   (c) Pour $\lambda \in [0\ ;\ 1[$ trouver $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda$
4. $\underline{f(x) = x^2 - 3x + 2}$
   Nous devons remarquer que f est décroissante sur $\left]-\infty\ ;\ \frac{3}{2}\right]$, puis croissante sur $\left[\frac{3}{2}\ ;\ +\infty\right[$.
   Le minimum est donc atteint en $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4}$
   (a) $A = [1, 2]$
   $f(A) = \left[-\frac{1}{4}\ ;\ 0\right]$
   (b) $A = [1, 2[$
   $f(A) = \left[-\frac{1}{4}\ ;\ 0\right]$
   (c) $A = \left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$
   $f(A) = \left[-\frac{1}{4}\ ;\ +\infty\right[$

12.5.5 Théorème de la valeur intermédiaire *[Admis et important]*

Soit f une fonction continue sur $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}_f$. Soit $[a, b] \subset \mathcal{U}$. On dit que $[a, b]$ est un segment ou un compact de $\mathbb{R}$
Alors,

1. f est bornée et atteint ses bornes
2. Pour tout $\lambda \in f([a, b])$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$

Remarque 9 :

Qu'est ce que « **bornée et atteint ses bornes** » veut dire ?

Bornée veut dire que $f([a,b]) = [m,M]$

Atteint ses bornes veut dire qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = m$ et qu'il existe $x_1 \in [a,b]$ tel que $f(x_1) = M$

Exemple 8 :

Soit $f(x) = x^2$ et $I = [0,2]$; alors, $f(I) = [0,4]$ et il existe $c \in [0,2]$ tel que $f(c) = 1$ et la borne supérieure 4 est atteinte en $x = 2$

Exercice 16 :

On donne la fonction $f(x) = |x^2 - 2x|$, définie sur l'intervalle $[0;3]$ et dont le graphe est donné par la figure 12.10

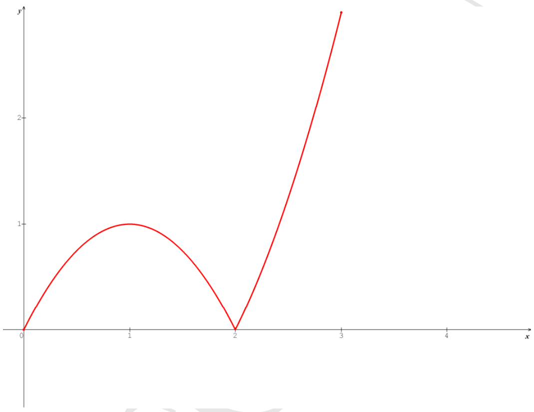


FIGURE 12.10 – Graphe de la fonction $f(x) = |x^2 - 2x|$

1. Démontrer qu'elle est strictement croissante sur $[0;1]$, strictement décroissante sur $[1;2]$ et strictement croissante sur $[2;3]$

   On regarde ces expressions en enlevant les valeurs absolues.
   - Si $x \leqslant 0$ et si $x \geqslant 2$, alors $x^2 - 2x \geqslant 0$ et $|x^2 - 2x| = x^2 - 2x$. On en déduit donc que si $x \geqslant 2$, $x^2 - 2x$ et donc $|x^2 - 2x|$ est croissante.
     La fonction $f(x)$ est donc strictement croissante sur $[2;3]$
   - Maintenant, Si $0 \leqslant x \leqslant 2$, $x^2 - 2x \leqslant 0$ et $|x^2 - 2x| = -x^2 + 2x$. On en déduit donc que si $0 \leqslant x \leqslant 2$, $-x^2 + 2x$ et donc $|x^2 - 2x|$ est strictement croissante sur $[0;1]$ et strictement décroissante sur $[1;2]$
     La fonction $f(x)$ est donc strictement croissante sur $[0;1]$, strictement décroissante sur $[1;2]$
2. Calculez $f(0)$ et $f(3)$. Soit λ un nombre compris entre $f(0)$ et $f(3)$; combien existe-t-il de nombres c tels que $f(c) = \lambda$? Discuter suivant les valeurs de λ

   Evidemment, $f(0) = 0$ et $f(3) = 3$
   La discussion peut se faire de manière géométrique :
   - Si $\lambda = 0$, il n'y a que 2 solutions à l'équation $f(c) = \lambda$; ce sont $c = 0$ et $c = 2$
   - Si $0 < \lambda < +$, il y a 3 solutions à l'équation $f(c) = \lambda$.
   - Si $\lambda = 1$, il n'y a que 2 solutions à l'équation $f(c) = \lambda$, ; ce sont $c = 1$ et $2 < c < 3$
   - Si $\lambda > 1$, il n'y a qu'une solution à l'équation $f(c) = \lambda$ où nous avons $2 < c < 3$

12.5.6 Application à la résolution d'équations : existence d'une solution

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ tel que $f(a) \times f(b) < 0$
Alors, l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $[a, b]$

Démonstration

Pour simplifier, supposons $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$; d'après les résultats précédents, $f([a, b])$ est un segment tel que $f(a) \in f([a, b])$ et $f(b) \in f([a, b])$, et donc $[f(a) f(b)] \subset f([a, b])$
Or, $0 \in [f(a) f(b)]$, et donc $0 \in f([a, b])$. Il existe donc $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$, et $c \in]a; b[$, car $f(a) \times f(b) \neq 0$

Exemple 9 :

1. Soit $f(x) = (4x - 5)(x - 1)(4x - 3)$; les calculs de $f(0) = -15$ et de $f(2) = 15$ montrent qu'il existe $c \in]0; 2[$ tel que $f(c) = 0$

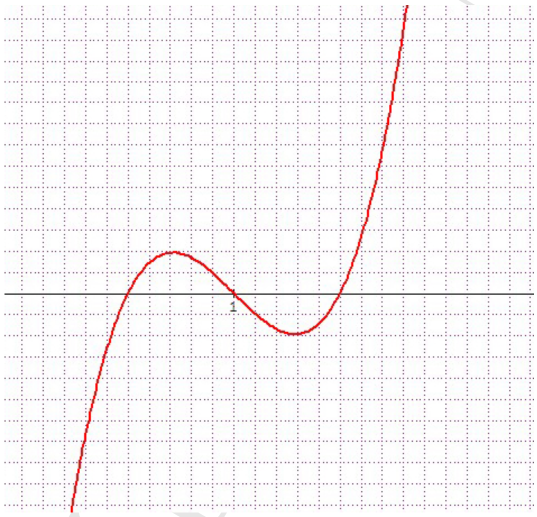


FIGURE 12.11 – Graphe de la fonction $f(x) = (4x - 5)(x - 1)(4x - 3)$

2. Soit $g(x) = (x - 3)\left(x^2 - 1\right)$; le calcul de $g(0) = 3$ et de $g(2) = -3$ montrent qu'il existe $c \in]0; 2[$ tel que $g(c) = 0$; en fait, il y en a 3
3. Se pose donc le problème de l'unicité des solutions.

12.6 Fonctions monotones sur un intervalle

12.6.1 Rappels

1. On dit qu'une fonction f est **strictement croissante** sur I, si, pour tout $(x, y) \in I \times I$ nous avons l'implication
$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$
2. On dit qu'une fonction f est **strictement décroissante** sur I, si, pour tout $(x, y) \in I \times I$ nous avons l'implication
$$x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

12.6.2 Proposition

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle. Si f est strictement monotone sur I alors f est injective de I dans $f(I)$

Démonstration

Nous allons utiliser la définition de fonction injective :

$$f \text{ est injective } \iff (\forall x \in I)(\forall y \in I)(x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y))$$

Soit f strictement monotone; supposons f strictement croissante.
Soit $x \neq y$. Alors, de deux choses l'une : ou bien $x < y$ ou bien $y < x$.
Si $x < y$, alors $f(x) < f(y)$ donc $f(x) \neq f(y)$
Nous aurions la même démonstration si $y < x$. Donc, si f est strictement croissante, f est injective.
De même, on démontrerait que si f est strictement décroissante, alors f est injective.
Ce que nous voulions démontrer.

12.6.3 Théorème

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathcal{D}_f$. Soit $I \subset \mathcal{D}_f$ et on suppose f continue et strictement monotone sur I.
Alors, f est une bijection de I sur $f(I)$

Démonstration

Le fait que f soit strictement monotone assure l'injectivité de f ; de plus, f est surjective de I dans $f(I)$; donc f est bijective.

12.6.4 Application à la résolution d'équation

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathcal{D}_f$. Soit $[a;b] \subset \mathcal{D}_f$ et on suppose f continue et strictement monotone sur $[a;b]$ et telle que $f(a) \times f(b) < 0$
Alors, l'équation $f(x) = 0$ n'a qu'une seule solution dans $[a;b]$

Remarque 10 :

La dichotomie
L'algorithme de résolution de l'équation $f(x) = 0$ par dichotomie est la conséquence du résultat ci-dessus.

```
def dicho(f,a,b,epsilon):
        a, b = float(a) , float(b)
        u,v = min(a,b) , max(a,b)
        while (v-u) > epsilon:
                m = float((u+v)/2)
                if f(u)*f(m)<0:
                        v=m
                else:
                        u = m
        return (u+v)/2
```

L'algorithme de résolution est simple à comprendre. Si nous voulons évaluer *(trouver une approximation décimale)* de $\sqrt{2}$ en faisant tourner l'algorithme, on définit la fonction $f(x) = x^2 - 2$ par :

```
f = lambda x : x**2 -2
```

Puis, nous faisons tourner la fonction en faisant :

```
dicho(f,0,2, 0.000001)
```

A 10^{-5} près, nous trouvons $\sqrt{2} \approx 1,41421329$

12.6.5 Fonction réciproque d'une fonction continue

On sait que si f est continue et strictement monotone sur I, alors, f est bijective de I sur $f(I)$
f étant bijective, il existe alors f^{-1}, bijective elle aussi, telle que

$$f \circ f^{-1} = Id_{f(I)} \text{ et } f^{-1} \circ f = Id_I$$

Exemple 10 :

On considère une fonction f . Déterminer la fonction φ telle que, sur un ensemble que l'on déterminera, $f \circ \varphi(x) = x$. Représenter les graphes de f et φ sur un même repère orthonormé.
En fait, le processus est toujours le même : si $y = f(x)$, il faut exprimer x en fonction de y

1. $f(x) = 2x + 5$
   On écrit $y = 2x+5$; l'objet est en fait d'exprimer x en fonction de y ; ici, c'est très simple, et on trouve : $x = \frac{1}{2}(y-5)$, et donc $\boxed{\varphi(x) = \frac{1}{2}(x-5)}$
2. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$
   Nous avons donc $y = \dfrac{x+1}{x-2}$, et en faisant les calculs habituels, nous trouvons $x = \dfrac{2y+1}{y-1}$; on a donc
   $$\boxed{\varphi(x) = \frac{2x+1}{x-1}}$$
3. $f(x) = x^2 - 1$
   Il est clair que cette fonction n'est pas bijective, et qu'il faut donc restreindre les domaines de départ et d'arrivée pour que nous obtenions des bijections.
   (a) f est continue et décroissante sur $\mathbb{R}^-$, à valeurs dans $[-1, +\infty[$ et est donc bijective de $\mathbb{R}^-$ dans $[-1, +\infty[$; pour trouver sa fonction réciproque, nous essayons d'exprimer x en fonction de y en utilisant l'expression $y = x^2 - 1$; nous trouvons alors $x = -\sqrt{y+1}$, et donc
   $$\boxed{\varphi(x) = -\sqrt{x+1}}$$
   (b) De la même manière, f est continue et croissante sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $[-1, +\infty[$ et est donc bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $[-1, +\infty[$; pour trouver sa fonction réciproque, nous essayons d'exprimer x en fonction de y en utilisant l'expression $y = x^2 - 1$; nous trouvons alors $x = \sqrt{y+1}$, et donc
   $$\boxed{\varphi(x) = \sqrt{x+1}}$$

12.6.6 Théorème

Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$, une fonction numérique réelle, continue et strictement monotone.
Alors, son application réciproque f^{-1} est continue et de même sens de variation que f.

Démonstration

Continuité On admet la continuité

Sens de variation Supposons f croissante. Nous allons montrer que si $u < v$, alors $f^{-1}(u) < f^{-1}(v)$, c'est à dire que f^{-1} est croissante.
Supposons le contraire, c'est à dire $f^{-1}(u) \geq f^{-1}(v)$. Par définition, $f^{-1}(v) \in [a; b]$ et $f^{-1}(u) \in [a; b]$; comme f est croissante, nous avons : $f\left(f^{-1}(u)\right) \geq f\left(f^{-1}(v)\right)$, donc $u \geq v$, ce qui est absurde et nous avons donc $f^{-1}(u) < f^{-1}(v)$

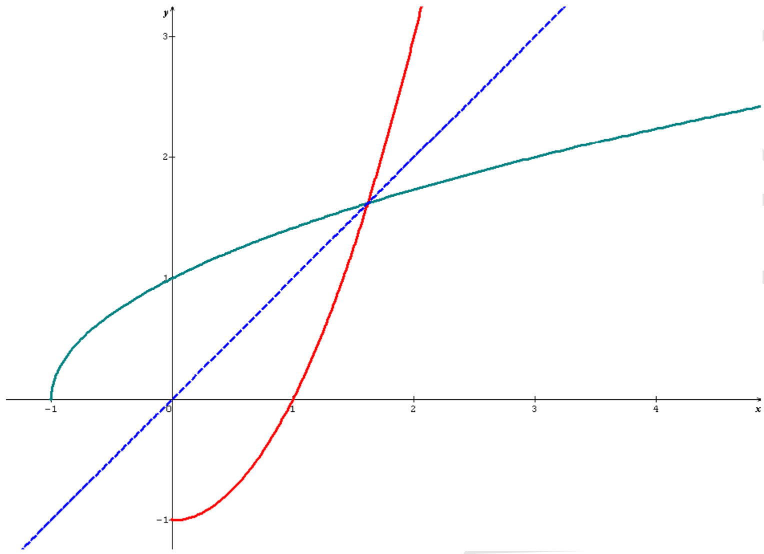


FIGURE 12.12 – Graphe de la fonction $f(x) = x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}^+$ et de sa fonction réciproque $\varphi(x) = \sqrt{x+1}$

12.6.7 Graphe de f^{-1}

Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$, une fonction numérique réelle, continue et strictement monotone, donc bijective.
Alors, le graphe de son application réciproque f^{-1} est symétrique de celui de f par rapport à la première bissectrice.

Remarque 11 :

Avant la démonstration, reportez vous à la figure 12.12

Démonstration

On commence par évoquer un lemme simple :

Lemme

Dans le plan dans lequel on a mis un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, les points de coordonnées (x, y) et (y, x) sont symétriques par rapport à la première bissectrice

Démonstration du théorème

On appelle G_f le graphe de f, et $G_{f^{-1}}$ celui de f^{-1}. Par définition des graphes, nous avons

$$G_f = \{(x, f(x)) / x \in [a; b]\} \quad G_{f^{-1}} = \left\{\left(y, f^{-1}(y)\right) / y \in f([a, b])\right\}$$

Or, il existe $x \in [a; b]$ tel que $y = f(x)$, cet x est unique, et

$$G_{f_{-1}} = \left\{\left(f(x), f^{-1} \circ f(x)\right) / x \in [a, b]\right\} = \{(f(x), x) / x \in [a, b]\}$$

Donc G_f et $G_{f^{-1}}$, d'après le lemme, sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Exercice 17 :

1. Soit la fonction f définie par $f(x) = x|x|$
   Montrer que f admet une application réciproque f^{-1} dont on précisera les propriétés *(ensemble de définition, sens de variation, continuité)*. Tracer les courbes dans un même repère orthonormé.

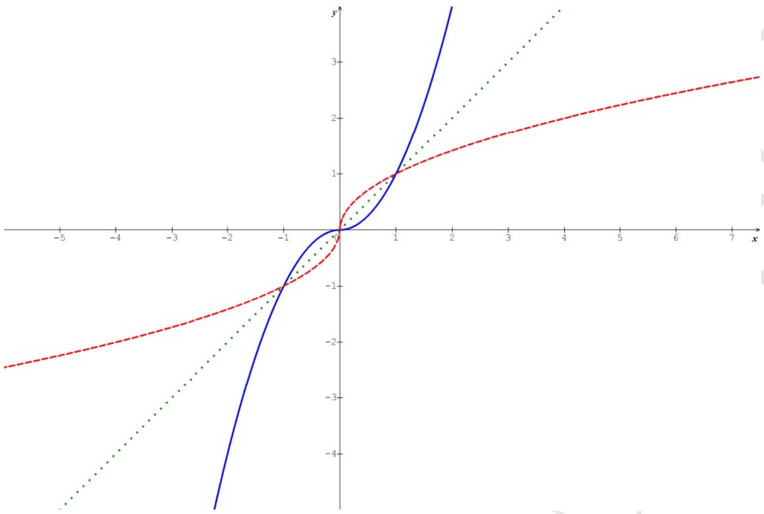


FIGURE 12.13 – Le graphe de la fonction $f(x) = x|x|$ et de sa fonction réciproque f^{-1}

— Si $x \geqslant 0$, alors $f(x) = x^2$, et f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$
— Si $x \leqslant 0$, alors $f(x) = -x^2$, et f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$

f est donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$; il y est donc bijective.

2. Même question que ci-dessus avec la fonction définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = x + \tan x$

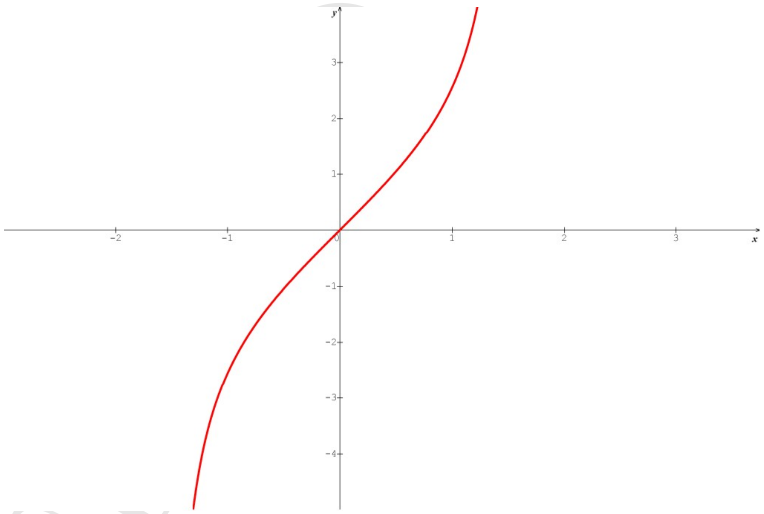


FIGURE 12.14 – Le graphe de la fonction $f(x) = x + \tan x$

La fonction f est évidemment continue sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right[$; le calcul de sa dérivée donne $f'(x) = 1 + 1 + \tan^2 x = 2 + \tan^2 x$, laquelle est positive.

f est donc une fonction strictement croissante et continue, donc bijective. Le graphe de f est donné figure 12.14

12.6.8 Exercices

Exercice 18 :

Montrer que l'équation $x^2 \cos x + x \sin x + 1 = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$

Exercice 19 :

Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction <u>continue</u> sur $[a, b]$; montrer qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$

Exercice 20 :

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction <u>continue</u> telle que $f(a) \neq f(b)$. Soit $p > 0$ et $q > 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b]$ tel que $pf(a) + qf(b) = (p + q) f(c)$

Exercice 21 :

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie et continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$ et que $\lim\limits_{t \to -\infty} f(t) = -\infty$. Montrer qu'il existe $c \in R$ tel que $f(c) = 0$.
En déduire que tout polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.

Exercice 22 :

Soit f une fonction réelle, définie et continue sur $\mathbb{R}$. Démontrer que si f est périodique et de période T, alors, f est bornée sur $\mathbb{R}$

Exercice 23 :

Racines d'un polynome
Démontrer que le polynôme $P(X) = 12X^4 - 14X - 3X^2 - 5$ a deux racines réelles.

Exercice 24 :

On considère l'équation suivante :
$$\text{(E)} : \quad 4x^5 - 20x + 1 = 0$$
En étudiant la fonction $f(x) = 4x^5 - 20x + 1$, montrer que l'équation (E) admet 3 solutions réelles : $\alpha < \beta < \gamma$. Localiser ces solutions entre 2 entiers successifs.

Exercice 25 :

Soient f et g 2 fonctions continues sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit la fonction $\max(f, g)$ par, $\max(f, g)(x) = \max(f(x), g(x))$. Montrer que $\max(f, g)$ est une fonction continue ;

Exercice 26 :

1. Montrer que si f est croissante sur I, et si g est décroissante sur $f(I)$, alors, $g \circ f$ est décroissante sur I ; étendre ce résultat à d'autres situations
2. Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos^3 x - 3\cos x + 2$
   (a) Déterminer le sens de variation de la fonction ϕ définie par $\phi : [-1; +1] \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(x) = x^3 - 3x + 2$
   (b) En déduire le sens de variation de f
   (c) Montrer que f est une bijection de $[0, \pi]$ sur un intervalle que l'on déterminera.

Exercice 27 :

Soit
$$\left\{ \begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|} \end{array} \right.$$
Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1, +1[$, et donner $f^{-1}(y)$ pour $y \in]-1, +1[$

Exercice 28 :

Soit

$$\left\{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)=x^2-3x+2 \end{array}\right.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, pour que f réalise une bijection de $[a,b]$ sur $f([a,b])$; exprimer alors sa bijection réciproque.

Exercice 29 :

Montrer que

$$\left\{\begin{array}{rcl} f:[0,1] & \rightarrow & [0,1] \\ x & \mapsto & f(x)=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right) \end{array}\right.$$

est bijective et résoudre l'équation $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{64}$

12.7 Correction de quelques exercices

Chapitre 13

Étude de la dérivabilité d'une fonction numérique d'une variable réelle

13.1 Introduction

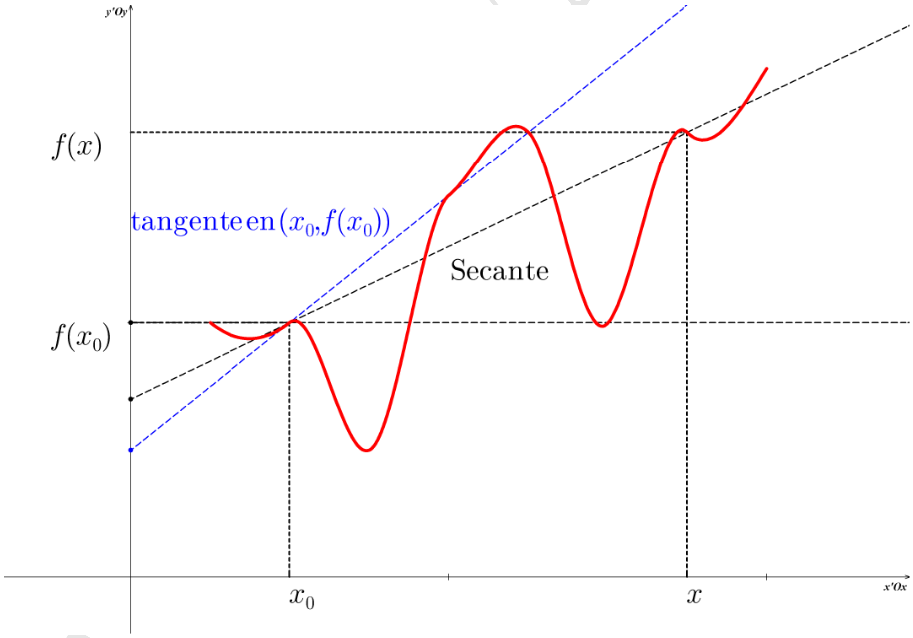


FIGURE 13.1 – Schéma d'introduction

1. **Quelle est l'équation de la sécante qui joint les points** $(x, f(x))$ **et** $(x_0, f(x_0))$ **?**
   - ▷ Elle a une équation du type : $y - f(x_0) = a(t - x_0)$; il faut donc déterminer a
   - ▷ La droite passant par le point $t = x$, nous avons, justement lorsque $t = x$: $f(x) - f(x_0) = a(x - x_0)$, d'où nous tirons :
     $$a = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
   - ▷ Que désigne le nombre a ?
     C'est,la tangente de l'angle que fait la sécante avec l'axe $x'Ox$

2. **Qu'est ce qui se passe si x se rapproche de x_0 ?**
La sécante, quelque part, devient la tangente....D'où les définitions qui vont suivre

13.2 Premières définitions, premières propriétés

13.2.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \mathcal{D}_f$
On dit que f est dérivable en x_0, si et seulement si : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est finie.
Cette limite finie est alors notée $f'(x_0)$ et est appelé nombre dérivé de f en x_0

Remarque 1 :

En posant $h = x - x_0$, cette définition est équivalente à $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ est finie

13.2.2 Interprétation géométrique de la dérivée

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \mathcal{D}_f$

1. Supposons que f admette, en x_0, une dérivée $f'(x_0)$, soit Γ sa représentation graphique
Alors, Γ admet en $(x_0, f(x_0))$, une tangente dont l'équation est donnée par :
$$y - f(x_0) = f^{'}(x_0)(x - x_0)$$
2. Réciproquement, soit Γ la représentation graphique de f et M, un point de Γ de coordonnées $(x_0, f(x_0))$
Supposons que Γ admette en M une tangente non parallèle à $(\mathcal{O}, y)$, alors, f est dérivable en x_0

Exemple 1 :

$f(x) = \sqrt{x}$ définie pour $x \geqslant 0$ n'est pas dérivable en $x = 0$, car le rapport $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ s'exprime par $\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$ dont la limite est infinie lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.*(Cf figure 13.2)*

13.2.3 Dérivée à droite, dérivée à gauche

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \mathcal{D}_f$

1. Dérivabilité à droite
On dit que f est dérivable à droite de x_0 si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe, et cette limite est notée $f'_d(x_0)$
2. Dérivabilité à Gauche
On dit que f est dérivable à gauche de x_0 si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe, et cette limite est notée $f'_g(x_0)$
3. f est dérivable en x_0 si et seulement si
— f est dérivable à droite et à gauche de x_0
— Et si ces dérivées sont égales
C'est à dire si : $f^{'}_d(x_0)$ et $f^{'}_g(x_0)$ existent, et si $f^{'}_d(x_0) = f^{'}_g(x_0)$

Remarque 2 :

1. Si f est dérivable à droite de x_0, alors elle admet **une demie tangente à droite de** x_0, d'équation : $y - f(x_0) = f^{'}_d(x_0)(x - x_0)$. Le problème est le même à gauche.

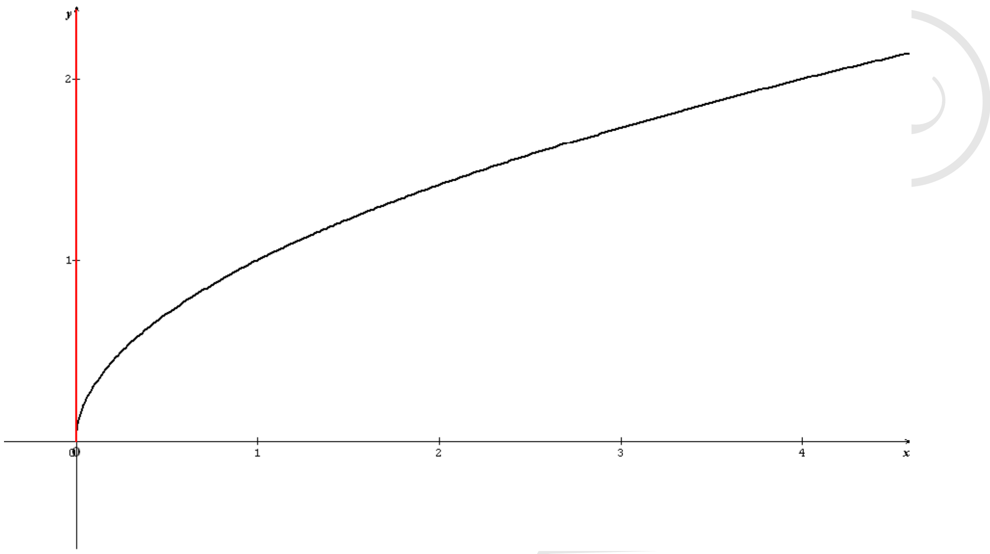


FIGURE 13.2 – La fonction $\sqrt{x}$ et la tangente en $x = 0$ qui est verticale

2. Une fonction peut être dérivable à droite et à gauche de x_0, sans pour autant y être dérivable ; Exemple : $f(x) = x^2 + |x|$ qui admet une dérivée à droite et à gauche de 0, sans y être dérivable ; voir le graphe 13.3

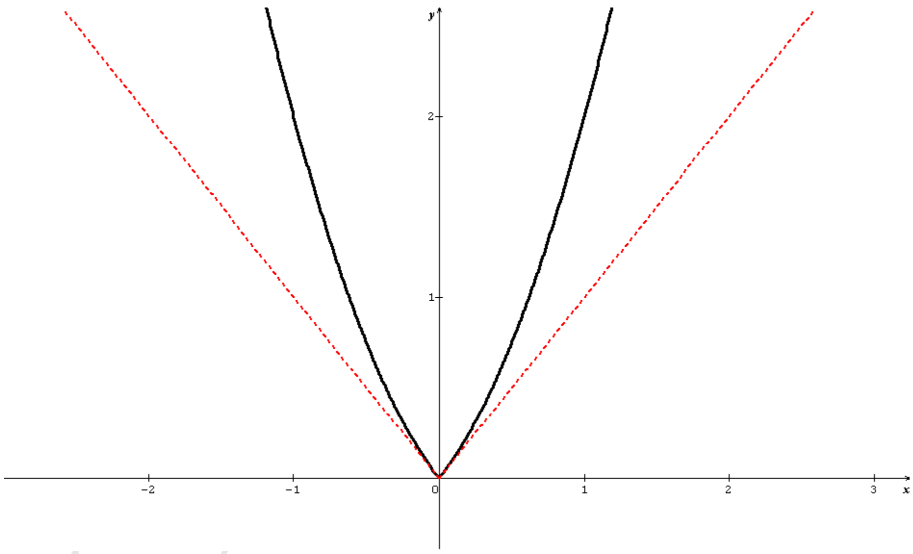


FIGURE 13.3 – La fonction $x^2 + |x|$ admet une dérivée à droite de 0, à gauche de 0, mais n'est pas dérivable en 0

Exemple 2 :

1. Nous allons démontrer que $f(x) = x^2 + |x|$ admet une dérivée à droite de 0.
   Si $x \geqslant 0$, alors $f(x) = x^2 + x$ et : $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{x^2 + x}{x} = x + 1$
   Donc , $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x + 1 = 1$
   Ce qui veut dire que f est dérivable à droite de 0 et que $f'_d(0) = 1$

2. Nous allons démontrer, maintenant, que $f(x) = x^2 + |x|$ admet une dérivée à gauche de 0.
   Si $x \leqslant 0$, alors $f(x) = x^2 - x$ et : $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{x^2 - x}{x} = x - 1$
   Donc , $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} x - 1 = -1$
   Ce qui veut dire que f est dérivable à gauche de 0 et que $f'_g(0) = -1$
3. Nous avons f dérivable à droite de 0, dérivable à gauche de 0, mais comme $f'_g(0) \neq f'_d(0)$, f n'est pas dérivable en 0

13.2.4 Théorème

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \mathcal{D}_f$
On suppose que f est dérivable en x_0. Alors, f est continue en x_0

Démonstration

Par hypothèse, nous avons $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$
Or, nous avons :

$$(f(x) - f(x_0)) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times (x - x_0)$$

Or, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times (x - x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times \lim\limits_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \times 0 = 0$
Ainsi, $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
Ce qui montre que f est continue en x_0

Remarque 3 :

La réciproque est fausse ! !
En effet ; il suffit de regarder la fonction $x^2 + |x|$ du graphe 13.3 qui admet une dérivée à droite de 0, à gauche de 0, mais n'est pas dérivable en 0 tout en y étant continue !

Exercice 1 :

1. Soit $f(x) = x^2$. Utiliser la définition formelle de fonction dérivable en $x_0 = 3$ pour montrer que $f'(3) = 6$
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et g la fonction numérique telle que $g(x) = \lambda$. Utiliser la définition formelle de fonction dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$ pour montrer que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, $g'(x_0) = 0$
3. Soit $f(x) = x$. Utiliser la définition formelle de fonction dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$ pour montrer que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, $f'(x_0) = 1$
4. Soit $f(x) = x^3$. Utiliser la définition formelle de fonction dérivable en x_0 pour montrer que $f'(x_0) = 3x_0^2$
5. Soit $f(x) = |x|$. Utiliser la définition formelle de fonction dérivable pour montrer que f n'est pas dérivable en $x_0 = 0$, bien qu'elle y soit continue.

Exercice 2 :

Soit f définie par :

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } \; = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Il faut montrer que f est continue en 0, mais n'est pas dérivable en 0

13.2.5 Théorème

Soient f, g et h, 3 fonctions définies sur un même domaine $\mathcal{D}$ et toutes dérivables en $x_0 \in \mathcal{D}$;. Alors :

1. $f+g$, fg sont dérivables en $x_0 \in \mathcal{D}$. Si $g(x_0) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x_0
2. Nous avons :
   (a) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
   (b) $(f \times g)'(x_0) = f'(x_0) \times g(x_0) + f(x_0) \times g'(x_0)$
   (c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0) \times g(x_0) - f(x_0) \times g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$ avec, bien entendu $g(x_0) \neq 0$

Démonstration

1. **Démontrons que** $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
   En faisant le rapport de dérivation, nous avons :
$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$
   Et donc
$$\lim_{x \to x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$
   D'où $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2. **Démontrons que** $(f \times g)'(x_0) = f'(x_0) \times g(x_0) + g'(x_0) \times f(x_0)$
   De la même manière :
$$\begin{aligned}
\frac{(f \times g)(x) - (f \times g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) \times g(x) - f(x_0) \times g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{f(x) \times g(x) - f(x) \times g(x_0) + f(x) \times g(x_0) - f(x_0) \times g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{f(x) \times g(x) - f(x) \times g(x_0)}{x - x_0} + \frac{f(x) \times g(x_0) - f(x_0) \times g(x_0)}{x - x_0} \\
&= f(x) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}
\end{aligned}$$
   Comme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f(x_0) \times g'(x_0)$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$
   Nous avons donc $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{(f \times g)(x) - (f \times g)(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \times g(x_0) + g'(x_0) \times f(x_0)$
   D'où $(f \times g)'(x_0) = f'(x_0) \times g(x_0) + g'(x_0) \times f(x_0)$
3. **Démontrons que** $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0) \times g(x_0) - f(x_0) \times g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$
   Tout d'abord, $\dfrac{f}{g}(x) - \dfrac{f}{g}(x_0) = \dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)} = \dfrac{f(x)\,g(x_0) - f(x_0)\,g(x)}{g(x) \times g(x_0)}$
   Donc :
$$\begin{aligned}
\frac{1}{x - x_0}\left(\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(x_0)\right) &= \frac{1}{g(x) \times g(x_0)}\left(\frac{f(x)\,g(x_0) - f(x_0)\,g(x)}{x - x_0}\right) \\
&= \frac{1}{g(x) \times g(x_0)}\left(\frac{f(x)\,g(x_0) - f(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g(x)}{x - x_0}\right) \\
&= \frac{1}{g(x) \times g(x_0)}\left(g(x_0) \times \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \times \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right)
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{g(x) \times g(x_0)} = \dfrac{1}{(g(x_0))^2}$, que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0)$, nous avons :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0} \left(\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(x_0) \right) = \frac{1}{(g(x_0))^2} \left(f'(x_0) \times g(x_0) - f(x_0) \times g'(x_0) \right)$$

C'est à dire que $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0) \times g(x_0) - f(x_0) \times g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

Remarque 4 :

Nous avons, en particulier, $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$; il suffit de considérer la fonction constante $g(x) = \lambda$ et la dérivée du produit.

Exemple 3 :

En utilisant le théorème 13.2.5 :

1. On démontre facilement, et par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée de la fonction puissance $f(x) = x^n$, est, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, $f'(x_0) = n x_0^{n-1}$
2. De même, pour tout $n \in \mathbb{Z}^-$, la dérivée de la fonction puissance $f(x) = x^n$ définie pour $x \in \mathbb{R}^*$, est, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $f'(x_0) = n x_0^{n-1}$

13.2.6 Dérivée des fonctions composées

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathcal{D}_f$ et dérivable en $x_0 \in \mathcal{D}_f$
Soit g une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathcal{D}_g$; on suppose $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$ et g dérivable en $y_0 = f(x_0)$
Alors, $g \circ f$ est dérivable en x_0 et :

$$(g \circ f)'(x_0) = g' \circ f(x_0) \times f'(x_0) = g'(y_0) \times f'(x_0)$$

Démonstration

Nous écrivons tout d'abord les hypothèses

1. f est dérivable en x_0 ; nous pouvons donc écrire :
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + u(x) \Longleftrightarrow f(x) - f(x_0) = (x - x_0)(f'(x_0) + u(x))$$
Où u est une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ et telle que $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0$
2. De même, g est dérivable en y_0 et nous pouvons écrire :
$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = g'(y_0) + v(y) \Longleftrightarrow g(y) - g(y_0) = (y - y_0)(g'(y_0) + v(y))$$
Où v est une fonction définie sur $\mathcal{D}_g$ et telle que $\lim\limits_{y \to y_0} v(y) = 0$

Donc :
$$\begin{aligned} g(f(x)) - g(f(x_0)) &= (f(x) - f(x_0))(g'(f(x_0)) + v(f(x))) \\ &= (x - x_0)(f'(x_0) + u(x))(g'(f(x_0)) + v(f(x))) \end{aligned}$$

D'où $\dfrac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = (f'(x_0) + u(x))(g'(f(x_0)) + v(f(x)))$ Nous avons :

- ▷ $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x_0) + u(x) = f'(x_0)$
- ▷ f étant dérivable en x_0 est continue en x_0, et donc $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)) = y_0$, d'où $\lim\limits_{x \to x_0} v(f(x)) = 0$, et donc $\lim\limits_{y \to y_0} g'(f(x_0)) + v(f(x)) = g'(f(x_0))$

D'où, nous avons $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = f'(x_0) \times g'(f(x_0))$

Ce que nous voulions

13.3 Fonction dérivée

13.3.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ et soit $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}_f$

- On dit que f est dérivable sur $\mathcal{U}$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathcal{U}$, $f'(x)$ existe.
- L'application

$$\begin{cases} f' : \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{cases}$$

s'appelle fonction dérivée de f ; cette fonction est parfois notée $f' = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$

13.3.2 Opération sur les dérivées

1. Somme de deux fonctions
Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors $f+g$ est dérivable sur I et
$$(f+g)^{'} = f^{'} + g^{'}$$
2. Produit par un scalaire
Si f est une fonction dérivable sur intervalle I, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est dérivable sur I et
$$(\lambda f)^{'} = \lambda f^{'}$$
3. Produit de deux fonctions
Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors $f \times g$ est dérivable sur I et
$$(f \times g)^{'} = g \times f^{'} + g^{'} \times f$$
4. Quotient de deux fonctions
Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et si la fonction g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et
$$\left(\frac{f}{g}\right)^{'} = \frac{f^{'}g - g^{'}f}{g^2}$$

Démonstration

C'est une aplication simple du théorème 13.2.5

Remarque 5 :

Le résultat précédent, nous montre que l'opération de dérivation est linéaire :
si D est l'opérateur de dérivation, nous avons :

$$\mathrm{D}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathrm{D}(f) + \mu \mathrm{D}(g)$$

Exemple 4 :

On ne va pas revenir sur les cours de terminale ; par contre, voici quelques exemples courants ; exemples initiés après le théorème 13.2.5

1. La dérivée de la fonction polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ est donnée par $P^{'}(x) = 2ax + b$
2. La dérivée de $\sin x$ est donnée par $\cos x$
3. La dérivée de $\cos x$ est donnée par $-\sin x$
4. Et, évidemment, pour $x > 0$ la dérivée de $\ln x$ est donnée par $\dfrac{1}{x}$

Remarque 6 :

Quelques conventions :

1. Soit $a < b$; f est dérivable sur l'intervalle $[a, b]$ si et seulement si f est dérivable sur $]a, b[$ et f dérivable à droite de a et à gauche de b.
2. De la même manière on définirait f dérivable sur $]a, b]$ ou $[a; b[$

13.3.3 Fonction dérivée des fonctions composées

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathcal{D}_f$ et dérivable sur un intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$
Soit g une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathcal{D}_g$ et dérivable sur un intervalle $J \subset \mathcal{D}_g$ on suppose $f(I) \subset J$
Alors, $g \circ f$ est dérivable sur l'intervalle I et :

$$(g \circ f)' = g' \circ f \times f'$$

Démonstration

C'est une application directe de 13.2.6

Exemple 5 :

Voici des dérivées classiques utilisant les fonctions composées :

1. $(\cos u(x))' = -u'(x) \sin u(x)$
2. $(\sin u(x))' = u'(x) \cos u(x)$
3. $(\ln |u(x)|)' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$
4. $\left([f(x)]^n\right)' = nf'(x) [f(x)]^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{Z}$

Exercice 3 :

1. Calculer la dérivée de $\cos(2x+3)$, $\ln\left(3x^2-5\right)$
2. Pour $a \in \mathbb{R}^{*+} - \{+1\}$, donner la dérivée de $\lg_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, puis de $\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$
3. Calculez les dérivées de $\sqrt{x^2-2x-3}$, $\sqrt{2\sin^2 x - 1}$
4. Calculez les dérivées $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^x$ et $\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$

Exercice 4 :

Soit Soit f définie par :

$$\left\{\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \left\{\begin{array}{l} x^2 \sin \dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } \ = 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

1. Calculer, pour $x \neq 0$, $f'(x)$
2. f est-elle dérivable en 0 ?
3. $f'(x)$ est-elle continue en 0 ?

13.4 Accroissements finis

13.4.1 Définition de maximum local

Soit f définie sur $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f présente un maximum local en $a \in \mathcal{D}_f$ s'il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $|x - a| < \alpha \Longrightarrow f(x) \leqslant f(\alpha)$

Remarque 7 :

Bien entendu; nous définirions de même la notion de minimum local

13.4.2 Théorème

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathcal{D}_f$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et soit $[a;b] \subset \mathcal{D}_f$.
On suppose que f est dérivable sur $]a,b[$ et présente un maximum local en $x_0 \in]a,b[$. Alors $f'(x_0) = 0$

Démonstration

Soit $\alpha > 0$ tel que défini dans la définition 13.4.1 de telle sorte que nous ayions :

$$a < x_0 - \alpha < x_0 < x_0 + \alpha < b$$

- Pour $x \in]a,b[$ tel que $a < x_0 - \alpha < x < x_0$.
  Alors $x - x_0 < 0$ et $f(x) \leqslant f(x_0)$, et donc $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$.
  f étant dérivable en x_0, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ et l'inégalité $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$ montre que $f'(x_0) \geqslant 0$
- Maintenant, pour $x \in]a,b[$ tel que $x_0 < x < x_0 + \alpha < b$.
  Alors $x - x_0 > 0$ et $f(x) \leqslant f(x_0)$, et donc $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$.
  f étant dérivable en x_0, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ et l'inégalité $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$ montre que $f'(x_0) \leqslant 0$

Nous avons donc, en conclusion $f'(x_0) = 0$

Remarque 8 :

Nous avons, bien sûr un résultat analogue pour les minima locaux

13.4.3 Théorème de Rolle

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathcal{D}_f$ et soit $[a;b] \subset \mathcal{D}_f$.
On suppose f continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$ et telle que $f(a) = f(b)$.
Alors, il existe $c \in]a;b[$ tel que $f^{'}(c) = 0$

Démonstration

1. **Supposons que f soit constante sur $[a;b]$**
   Alors, on a évidemment $f(a) = f(b)$, mais, pour tout $x \in]a;b[$, nous avons $f^{'}(x) = 0$ et le théorème est vérifié.
2. **Supposons f non constante sur $[a;b]$.**
   Supposons, de plus, que f admette des valeurs supérieures à $f(a)$ *(f étant non constante, ceci est possible; on aurait pu tout aussi bien supposer l'existence de valeurs inférieures à $f(a)$)* et soit $M = \sup\limits_{x \in [a;b]} f(x)$
   - f étant continue sur l'intervalle $[a;b]$, d'après le théorème des compact, M existe, et , de plus, $M > f(a)$ et, il existe $c \in]a;b[$ tel que $M = f(c)$
   - Et donc, d'après le théorème 13.4.2, $f'(c) = 0$

Ce que nous voulions

Remarque 9 :

1. Vous trouvez une illustration du théorème de Rolle, dans la figure 13.4
2. La dérivabilité en a ou b n'est pas nécessaire
3. La continuité de f sur $[a;b]$ est nécessaire
4. la démonstration aurait été semblable si nous avions choisi $m = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x) = f(c)$
5. Les conditions du théorème de Rolle sont suffisantes, elles ne sont pas pour cela nécessaires.
6. En utilisant la contrapposée du théorème de Rolle, on peut dire que si f est continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$ et telle que pour tout $x \in]a;b[$ tel que $f^{'}(x) \neq 0$, alors $f(a) \neq f(b)$

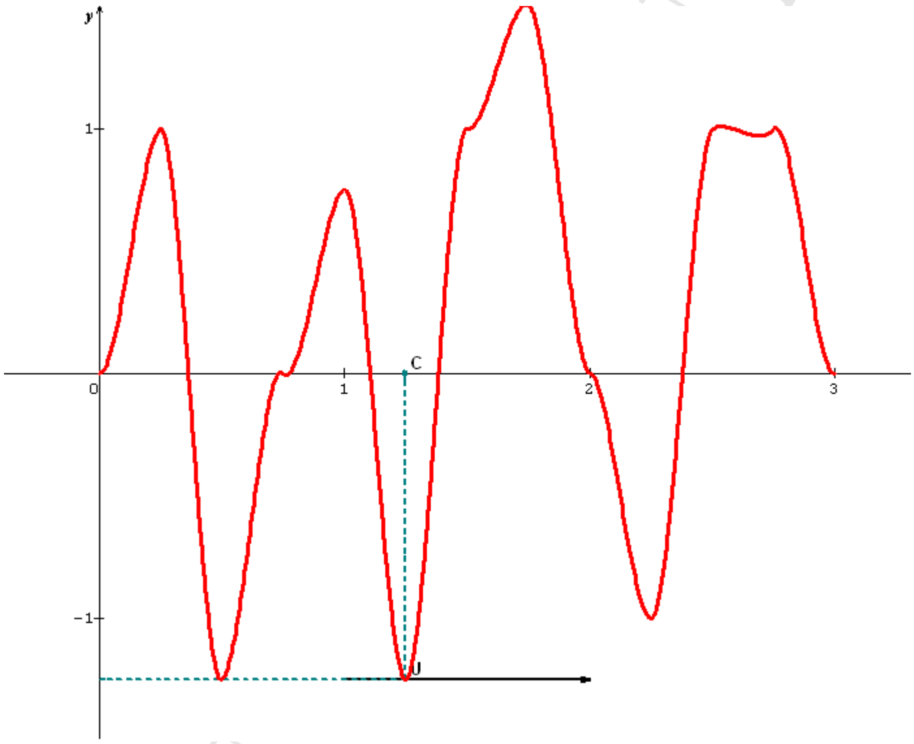


FIGURE 13.4 – Illustration du théorème de Rolle où, ici, $f(0) = f(2) = 0$

13.4.4 Accroissements finis généralisés

Soient f et g 2 fonctions numériquse d'une variable réelle définies respectivement sur $\mathcal{D}_f$ et sur $\mathcal{D}_g$. Soit $[a;b] \subset \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.
On suppose f et g continues sur $[a;b]$ et dérivables sur $]a;b[$.
Alors, il existe $c \in]a;b[$ tel que

$$(f(a) - f(b))\, g'(c) = (g(a) - g(b))\, f'(c)$$

Démonstration

On construit la fonction auxiliaire h définie sur $[a;b]$, pour tout $x \in [a;b]$ par :

$$h(x) = (f(a) - f(b))\, g(x) - (g(a) - g(b))\, f(x)$$

Alors :

▷ h est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$

- ▷ $h(a) = (f(a) - f(b))\, g(a) - (g(a) - g(b))\, f(a) = -f(b)\, g(a) + g(b)\, f(a)$
- ▷ $h(b) = (f(a) - f(b))\, g(b) - (g(a) - g(b))\, f(b) = g(b)\, f(a) - f(b)\, g(a)$
- ▷ Nous avons donc $h(a) = h(b)$

D'après le théorème de Rolle 13.4.3, il existe $c \in \left]a;b\right[$ tel que $h'(c) = 0$. Or,

$$h'(x) = (f(a) - f(b))\, g'(x) - (g(a) - g(b))\, f'(x)$$

Il existe donc $c \in \left]a;b\right[$ tel que

$$(f(a) - f(b))\, g'(c) - (g(a) - g(b))\, f'(c) = 0 \Longleftrightarrow (f(a) - f(b))\, g'(c) = (g(a) - g(b))\, f'(c)$$

Ce que nous voulions

13.4.5 Théorème des accroissements finis

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathcal{D}_f$ et soit $[a;b] \subset \mathcal{D}_f$. On suppose f continue sur $[a;b]$, dérivable sur $\left]a;b\right[$.
Alors, il existe $c \in \left]a;b\right[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

Démonstration

Ce théorème est une conséquence de 13.4.4
Soit la fonction g définie sur $[a;b]$ pour tout $x \in [a;b]$ par $g(x) = x$.
Alors, clairement, g est continue sur $[a;b]$, dérivable sur $[a;b]$ avec, en particulier $g'(x) = 1$. Alors, d'après 13.4.4, il existe $c \in \left]a;b\right[$ tel que

$$(f(a) - f(b))\, g'(c) = (g(a) - g(b))\, f'(c) \Longleftrightarrow (f(a) - f(b)) = (a - b)\, f'(c) \Longleftrightarrow f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

Remarque 10 :

Interprétation graphique

Ceci veut dire qu'il existe une tangente à la courbe représentative qui est parallèle à la sécante à la courbe passant par $A(a, f(a))$ et $B(bf(b))$

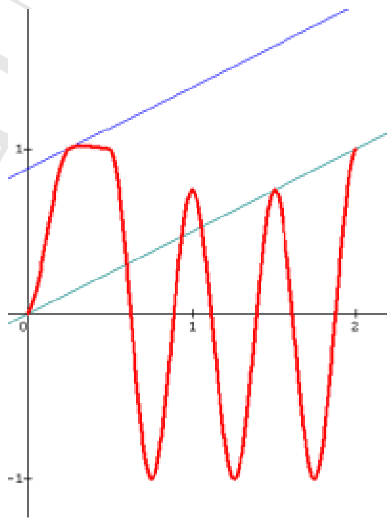


FIGURE 13.5 – Illustration du théorème des accroissements finis

Exercice 5 :

Une autre démonstration de 13.4.5
Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathcal{D}_f$ et soit $[a;b] \subset \mathcal{D}_f$. On suppose f continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$
Pour $x \in [a;b]$, on note

$$\phi(x) = (x-a)(f(b)-f(a)) - (f(x)-f(a))(b-a)$$

En appliquant à ϕ le théorème de Rolle, retrouver le théorème des accroissements finis 13.4.5

Exemple 6 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à x fait correspondre $f(x) = x^2$.
f étant continue et dérivable, on peut lui appliquer le théorème des accroissements finis pour deux réels quelconques a et b avec $a < b$:
il existe $c \in]a;b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f^{'}(c)$; on peut, dans ce cas particulier, calculer c. Donc,

$$f(b) - f(a) = (b-a)f^{'}(c) \Leftrightarrow b^2 - a^2 = 2c(b-a) \Leftrightarrow c = \frac{a+b}{2}$$

On retrouve ainsi une propriété géométrique de la parabole :
Si A et B sont deux points d'une parabole Γ d'abscisses resprctives a et b, la tangente à Γ au point C d'abscisse $c = \dfrac{a+b}{2}$ est parallèle à la sécante. Voir la figure 13.6 (AB)

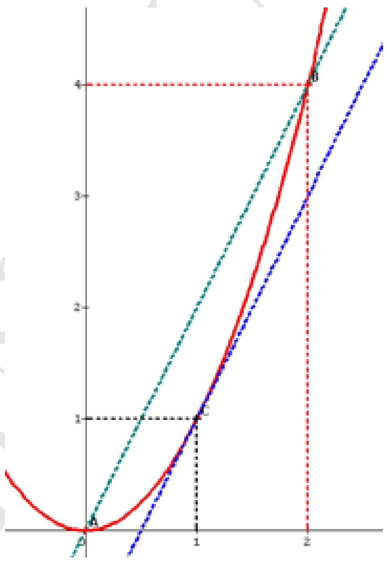


FIGURE 13.6 – Illustration de la question des paraboles

13.4.6 Conséquence : inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathcal{D}_f$ et soit $[a;b] \subset \mathcal{D}_f$.
On suppose f continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$ et que,il existe m et M tels que pour tout $x \in]a;b[$, nous ayions l'inégalité $m \leqslant f^{'}(x) \leqslant M$, alors,

$$m \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant M$$

Démonstration

Elle est simple et nous allons la faire.
En utilisant le théorème des accroissements finis, nous pouvons dire qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

Comme, pour tout $x \in]a;b[$, nous avons l'inégalité $m \leqslant f'(x) \leqslant M$, nous avons, en particulier $m \leq f'(c) \leq M$, c'est à dire

$$m \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leqslant M$$

Ce que nous voulions.

Remarque 11 :

Important :
Ce résultat est, le plus souvent utilisé sous une autre forme, en majorant la valeur absolue de la dérivée sur l'intervalle $]a;b[$:

Si il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in]a;b[$, $\left|f^{'}(x)\right| \leqslant M$, alors,

$$\left|\frac{f(b) - f(a)}{b-a}\right| \leqslant M$$

C'est à dire : $\left|f^{'}(x)\right| \leqslant M \Longrightarrow |f(b) - f(a)| \leqslant M\,|b-a|$

On en conclue que si f a une dérivée bornée sur $]a;b[$ alors, f est lipschitzienne sur $]a;b[$. On retrouve ce questionnement pour les résolutions d'équations.

Exemple 7 :

Dans les quelques exemples qui suivent, nous allons utiliser l'inégalité des accroissements finis démontrée en 13.4.6

1. **Quel est l'erreur commise en remplaçant $\sqrt{10002}$ par $\sqrt{10000} = 100$?**
   On considère la fonction $f : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}^{+}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ dont la dérivée est : $f^{'}(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
   En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[10000; 100002]$, dans lequel nous avons $\left|f^{'}(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{10000}} = \dfrac{1}{200}$.
   L'erreur sera donc $\left|\sqrt{10002} - 100\right| \leqslant 2 \times \dfrac{1}{200} = 10^{-1}$
2. **Utilisation de l'inégalité des accroissements finis pour démontrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $S_n \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ est divergente et tend vers $+\infty$**
   On considère la fonction $\ln : \mathbb{R}^{\star +} \longrightarrow \mathbb{R}$ et on applique l'inégalité des accroissements finis entre $[n; n+1]$.
   Nous avons donc $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{\ln(n+1) - \ln n}{(n+1) - n} \leqslant \dfrac{1}{n}$, c'est à dire, $\dfrac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \dfrac{1}{n}$
   En sommant de 1 à n, nous avons :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln k \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

C'est à dire, après calcul, $\ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$; comme $\lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty$, on démontre que $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$, c'est à dire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $S_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ est divergente et tend vers $+\infty$.

13.4.7 Conséquences sur l'étude des variations d'une fonction

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathcal{D}_f$ et soit $I \subset \mathcal{D}_f$. On suppose f dérivable sur I

1. f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I
2. f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I
3. f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative sur I

Démonstration

1. **On démontre dans le sens direct**
   — Si f est constante sur I, alors le rapport $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = 0$ pour tout $x \neq y$ de I, donc $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$
   — De même, pour $x \leq y$, en supposant f est croissante, le rapport $\tau(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$, qui représente le taux de variation de f est positif ; le rapport ne change pas de signe si $y \leq x$; en conséquence $\lim_{x\to y} \tau(x,y) = f'(y)$ est positif
   — La démonstration est la même si la fonction f est décroissante.
2. **Le théorème des accroissements finis permet de démontrer la réciproque.**
   En effet, soient $x \in I$ et $y \in I$ tels que $x < y$
   f est dérivable et continue sur I qui contient l'intervalle $[x;y]$, et donc f est continue et dérivable sur l'intervalle plus petit $[x;y]$ et il existe $c \in [x;y]$ tel que $\tau(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c)$
   — Supposons f' nulle sur I, alors $\tau(x,y) = 0$ et donc $f(x) = f(y)$ pour tout $x \in I$ et $y \in I$; f est donc constante sur I
   — Supposons f' positive sur I, alors $\tau(x,y) \geq 0$ et donc $f(x) \leq f(y)$ pour tout $x \in I$ et $y \in I$ tels que $x \leq y$; f est donc croissante sur I
   — La démonstration est tout à fait semblable si f' est négative.

13.4.8 Tableau donnant quelques fonctions dérivées

Et pour clôre cette première partie, en plus de dérivées décrites dans le cours, voici le tradionnel tableau donnant quelques dérivées...Á utiliser dans les calculs !
Certaines de ces dérivées seront démontrées dans les chapitres ultérieurs du L_0 (exponentielles, logarithmes)

Fonction $f(x)$	Paramètres	Dérivée $f'(x)$	Ensemble de définition de $f'(x)$
Addition $u+v$		$u'+v'$	
Produit $u\times v$		$u'v+v'v$	
Quotient $\frac{u}{v}$		$\frac{u'v-v'u}{v^2}$	$\{x\in\mathbb{R} \text{ tel que } v(x)\neq 0\}$
x^n	$n\in\mathbb{N}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
x^n	$n\in\mathbb{Z}^-$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}^*$
x^α	$\alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}^+$
$e^{u(x)}$		$u'(x)\,e^{u(x)}$	
$\ln\lvert u(x)\rvert$		$\frac{u'(x)}{u(x)}$	
$\log_a\lvert x\rvert$	$a\in\mathbb{R}^*-\{+1\}$	$\frac{1}{x\ln a}$	$\mathbb{R}^*$
a^x	$a\in\mathbb{R}^{*+}$	$a^x\ln a$	
$\tan x$		$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right\}$
$\sin u(x)$		$u'(x)\cos u(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos u(x)$		$-u'(x)\sin u(x)$	$\mathbb{R}$
$(u(x))^n$		$nu'(x)\,(u(x))^{n-1}$	$\mathbb{R}$

13.5 Premiers exercices

13.5.1 Questions élémentaires

Exercice 6 :

1. Soit $A(r)$ l'aire d'un cercle de rayon r. Montrer que $A'(r)$ en est la circonférence
2. On considère, dans $\mathbb{R}^2$, l'ensemble $\Delta=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tels que} x+y=1\right\}$ *(c'est une droite !!)*. Minimiser, sur Δ l'expression x^2+y^2

Exercice 7 :

Soit $\left\{\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{\begin{array}{l} 4x^2-6 \text{ si } x\in\left]-\infty;-1\right[\\ x^3+x \text{ si } x\in[-1;1] \\ -x^2+6x-3 \text{ si } x\in\left]1;+\infty\right[\end{array}\right. \end{array}\right.$

1. Représenter $\mathcal{C}_f$, courbe représentative f sur $[-2;2]$.
2. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$, on regardera en particulier les points -1 et 1.
3. Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.
4. Calculer et placer la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

13.5.2 Savoir calculer des dérivées

L'objet des exercices qui suivent est de pratiquer, et faire pratiquer le calcul des dérivées

Exercice 8 :

Calculer les dérivée premières des fonctions suivantes :

1. $f_1(x)=\left(1-x^2\right)^2$
2. $f_2(x)=\dfrac{1}{\left(1-x^3\right)^2}$
3. $f_3(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ pour $x\neq 0$
4. $f_4(x)=\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$
5. $f_5(x)=\sin x+\dfrac{1}{\cos x}$
6. $f_6(x)=\tan\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$
7. $f_7(x)=\sqrt{1+\sin^2 x}$
8. $f_8(x)=\sqrt{\dfrac{1}{\sin x}}$ pour $x\in\left]0,\pi\right[$

9. $f_9(x) = \sqrt{\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}}$
10. $f_{10}(x) = \ln\left(x^2+1\right)$
11. $f_{11}(x) = e^{1+\frac{1}{x}}$
12. $f_{12}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

Exercice 9 :

Soit $g(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Démontrer que $g'(x) = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2} = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$

Exercice 10 :

La dérivée logarithmique
Soit f une fonction dérivable en x_0 ; on appelle dérivée logarithmique en x_0, le nombre $L(f)(x_0) = \dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)}$ *(On suppose, bien entendu, $f(x_0) \neq 0$)*

1. Calculez $L(fg)$, $L\left(\dfrac{f}{g}\right)$, $L(\lambda f)$, $L(f^n)$, et plus généralement, $L\left(\dfrac{f_1 \times \cdots \times f_p}{g_1 \times \cdots \times g_m}\right)$
2. Applications
   En utilisant les dérivées logarithmiques, calculer $f'(x)$ dans les cas suivants :

   (a) $\dfrac{(x-1)^2(x+1)^3}{(x^2-x+1)^3}$

   (b) $\dfrac{(x-3)^2(x+5)^4}{(x^2+x+1)^5}$

Exercice 11 :

On pose $\left\{ \begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin^3(x) \end{array} \right.$ et $\left\{ \begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right) \end{array} \right.$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.
2. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer g'.

Exercice 12 :

Soient a, b, c et d, 4 fonctions dérivables sur même domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$.
Nous considérons $F(x) = \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}$
Démontrez que F est dérivable et que

$$F'(x) = \begin{vmatrix} a'(x) & b'(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c'(x) & d'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'(x) & b(x) \\ c'(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b'(x) \\ c(x) & d'(x) \end{vmatrix}$$

Exercice 13 :

1. En utilisant une approximation linéaire, démontrer que $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ peut être approché par $1-\dfrac{x}{2}$ au voisinage de 0, c'est à dire lorsque x est proche de 0
2. L'objet de cette question est de majorer l'erreur commise lorsqu'on remplace $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ par $1-\dfrac{x}{2}$
   On considère la fonction f suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f : \left[\dfrac{-1}{2};\dfrac{1}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = 1-\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} \end{array} \right.$$

   (a) Calculez f'' la dérivée de f'

(b) Quel est le signe de f'' ? En déduire le sens de variations de f'.

(c) En déduire que l'équation $f'(x) = 0$ n'a qu'une seule solution que l'on calculera.

(d) Etablir le tableau des variations de f sur l'intervalle $\left[\frac{-1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

(e) En déduire que, pour tout $x \in \left[\frac{-1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ nous avons $1 - \frac{x}{2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

3. De la même manière, démontrer que :

$$\text{Pour tout } x \in \left[\frac{-1}{2}; \frac{1}{2}\right] \text{ nous avons } \frac{1}{\sqrt{1+x}} \leqslant 1 - \frac{x}{2} + 3x^2$$

4. (a) Démontrer que $\left|\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \left(1 - \frac{x}{2}\right)\right| \leqslant 3x^2$

(b) Quelle est l'erreur commise lorsque nous remplaçons $\frac{1}{\sqrt{1,05}}$ par $0,975$

13.5.3 Exercices sur la notion de dérivée

Exercice 14 :

La fonction $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{x^3 \sin x^2 + x^2}{2 + \sqrt{|x|}}$ est-elle dérivable en 0 ? Si oui, quelle est sa dérivée ?

Exercice 15 :

Dérivabilité à droite et à gauche

1. Etudiez la dérivabilité à droite et à gauche, en $x = 1$ et en $x = -1$ de la fonction $f(x) = \left|x^2 - 1\right|$
2. La fonction $f(x) = x\sqrt{x}$ est-elle dérivable à droite de 0 ?

Exercice 16 :

On pose $f(x) = (x+1)\sqrt{|x^2 - 1|}$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la dérivabilité de f et calculer f'.

13.5.4 Accroissements finis

Exercice 17 :

Soient $C_0, C_1, \ldots, C_n$ des constantes telles que

$$C_0 + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} + \ldots + \frac{C_{n-1}}{n} + \frac{C_n}{n+1} = 0$$

Montrer que l'équation

$$C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_{n-1}x^{n-1} + C_n x^n = 0$$

a au moins une racine réelle comprise entre 0 et 1

Exercice 18 :

En utilisant le théorème des accroissements finis trouver un encadrement des valeurs : $\sqrt{500} - \sqrt{499}$ puis de $\ln(1001) - \ln(1000)$.

Exercice 19 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{1 + \cos^2 x}$$

Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, f' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $[a; a + 2\pi]$

Exercice 20 :

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. En utilisant la fonction $g = \ln f$, démontrer qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que :

$$\frac{f(a)}{f(b)} = \exp\left(\frac{f'(c)}{f(c)}(b-a)\right)$$

Exercice 21 :

Soient f et g 2 fonctions continues sur $[a;b]$ et dérivables sur $]a;b[$
En utilisant le théorème des accroissements finis généralisés, démontrer que si, pour tout $x \in]a;b[$, $|f'(x)| \leqslant g'(x)$, alors $|f(b) - f(a)| \leqslant g(b) - g(a)$

13.6 Dérivée d'ordre supérieur

13.6.1 Définition

1. On appelle $f^{(0)}$ la dérivée d'ordre 0 de f, c'est à dire $f^{(0)} = f$
2. Si $n \geqslant 1$, la dérivée n-*ième* de f est définie par récurrence, par :

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$$

3. On note aussi, parfois, $f^{(n)}(x) = \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(f(x))$

Exemple 8 :

1. Calcul des dérivées successives, jusqu'à l'ordre 5, de $f(x) = -7x^2 + 8x + 2$

   Bien entendu, comme c'est un polynôme, c'est très simple :

   Dérivée première $f'(x) = -14x + 8$

   Dérivée seconde $f^{(2)}(x) = -14$

   Dérivée troisième $f^{(3)}(x) = 0$

   Et, bien entendu, pour $k \geqslant 4, f^{(k)}(x) = 0$

2. Examiner les dérivées successives de $\sin x$

   Dérivée première $f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

   Dérivée seconde $f^{(2)}(x) = -\sin x = \sin(x + \pi) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$

   Dérivée troisième $f^{(3)}(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$

   Et, ceci se démontre très facilement par récurrence sur k, pour $k \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\sin^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)}$$

3. De la même manière, les dérivées successives de $\cos x$ sont données, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = (x-a)^n$, quelles sont les dérivées successives de f_n ?

Dérivée première $f_n'(x) = n(x-a)^{n-1} = \dfrac{n!}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$

Dérivée seconde $f_n^{(2)}(x) = n(n-1)(x-a)^{n-2} = \dfrac{n!}{(n-2)!}(x-a)^{n-2}$

Dérivée troisième $f_n^{(3)}(x) = n(n-1)(n-2)(x-a)^{n-3} = \dfrac{n!}{(n-3)!}(x-a)^{n-3}$

Rappelons que le nombre d'arrangements de k éléments pris parmi n est donné par : $\mathrm{A}_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Nous pouvons donc démontrer très facilement par récurrence sur k, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{f_n^{(k)}(x) = \mathrm{A}_n^k (x-a)^{n-k}}$$

On montre, en particulier, que si $k > n$, $f_n^{(k)}(x) = 0$

13.6.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ et soit $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}_f$

1. f est continuement dérivable sur $\mathcal{U}$ si f est dérivable sur $\mathcal{U}$ et si f' est continue sur $\mathcal{U}$
2. Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$
   On dit que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathcal{U}$ si et seulement si $f^{(n)}$ est définie *(i.e. f est n fois dérivable)*et la fonction $f^{(n)}$ est continue sur $\mathcal{U}$
3. Fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$
   On dit que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{U}$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ est définie *(i.e. f est n fois dérivable)* et la fonction $f^{(n)}$ est continue sur $\mathcal{U}$

Remarque 12 :

1. On dit souvent que f est de classe $\mathcal{C}^0$ si f est simplement continue
2. Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathcal{U}$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $0 \leqslant k \leqslant n$, f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{U}$

Exemple 9 :

1. Si f est le rapport de 2 polynômes, définis sur I, alors, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I
2. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)^n}$, alors, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} - \{a\}$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!} \times \frac{1}{(x-a)^{n+k}}}$$

Exercice 22 :

1. Calculez les dérivées *n-ièmes* de x^α où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^{\star+}$
2. Calculez les dérivées *n-ièmes* de a^x où $x \in \mathbb{R}$ et $a > 0$
3. Rechercher les dérivées *n-ièmes* de $\log_a(x)$

13.7 Dérivée de la fonction réciproque

13.7.1 Théorème

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ et soit $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}_f$.
On suppose f continue et strictement monotone sur $\mathcal{U}$, et donc bijective sur $\mathcal{U}$; alors

1. Si f est dérivable en $x_0 \in \mathcal{U}$ et est telle que $f^{'}(x_0) \neq 0$, alors, f^{-1} est dérivable en $y_0 \in f(\mathcal{U})$ tel que $y_0 = f(x_0)$, et nous avons :

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)}}$$

2. Si f est partout dérivable sur $\mathcal{U}$ et si f' ne s'annule jamais sur $\mathcal{U}$, alors f^{-1} est partout dérivable sur $f(\mathcal{U})$, et

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)^{'} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}}$$

Démonstration

Pour $y \in f(\mathcal{U})$ et $y_0 \in f(\mathcal{U})$ avec $y \neq y_0$, on pose

$$\tau(y, y_0) = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$

$\tau(y, y_0)$ est le taux de variations de f^{-1} entre y et y_0.
f étant une bijection, il existe un unique élément $x \in \mathcal{U}$ et un unique élément $x_0 \in \mathcal{U}$ tels que $y = f(x)$ et $y_0 = f(x_0)$, ce qui est équivalent à : $f(y) = x$ et $f(y_0) = x_0$, et donc,$\tau(y, y_0)$ devient

$$\tau(y, y_0) = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

Donc, par la continuité de f et g :

$$\lim_{y \to y_0} \tau(y, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

On retrouve donc f^{-1} dérivable et, $\left(f^{-1}\right)^{'} = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$

Remarque 13 :

Si $f'(x_0) = 0$, f^{-1} n'est pas dérivable en y_0, mais la courbe représentative de f^{-1} admet, au point $M_0(y_0, f(y_0))$ une tangente parallèle à $\left(y^{'}\mathcal{O}, y\right)$

Exemple 10 :

La dérivée de la fonction exponentielle
La fonction exponentielle $\exp x = e^x$ est la fonction réciproque de la fonction $\ln x$, donc,

$$(\exp x)^{'} = \frac{1}{(\ln)^{'} \circ \exp(x)} = \frac{1}{(\ln)^{'}(\exp(x))}$$

Comme $(\ln)^{'} x = \dfrac{1}{x}$, nous avons :

$$(\exp x)^{'} = \frac{1}{(\ln)^{'}(\exp(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\exp x}} = \exp x$$

On a donc, ce qu'on connaît : $(e^x)^{'} = e^x$

Exercice 23 :

Calculer la dérivée de $e^{u(x)}$ où u est une fonction dérivable.

13.8 Seconde liste d'exercices

13.8.1 Indéterminations et rapport de dérivation

Exercice 24 :

L'objet de cet exercice est d'utiliser le rapport de dérivation pour lever des indéterminations ; c'est aussi l'outil utilisé pour donner les limites remarquables.

1. $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{\ln x - 1}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - b^x}{c^x - d^x}$ avec $c \neq d$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^n - 1}{kx}$ où $k \neq 0$

13.8.2 Dérivées successives

Exercice 25 :

On pose $f(x) = xe^x$

1. Calculer $f'(x)$; $f''(x)$; $f^{(3)}(x)$ et $f^{(4)}(x)$.
2. Conjecturer l'expression de $f^{(n)}(x)$.
3. Etablir à l'aide d'un raisonnement par récurrence le résultat de la question précédente.

Exercice 26 :

On pose $f(x) = x\sin(x)$

1. Calculer $f'(x) =$; $f''(x)$; $f^{(3)}(x)$ et $f^{(4)}(x)$.
2. Conjecturer l'expression de $f^{(n)}(x)$.
3. Etablir à l'aide d'un raisonnement par récurrence le résultat de la question précédente.

13.8.3 Exercices de prolongement

Exercice 27 :

Soit $\mathcal{P}$ le plan euclidien muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé. Pour un point A et une droite $\mathcal{D}$ donnés du plan, on définit la distance de A à $\mathcal{D}$ par $d(A;\mathcal{D}) = \inf\limits_{M\in\mathcal{D}} AM$.

1. On pose $A(1,2)$ et $\mathcal{D} : y = 2x+3$. Calculer $d(A;\mathcal{D})$.
2. On pose $A(x_0;y_0)$ et $\mathcal{D} : y = ax+b$. Calculer $d(A;\mathcal{D})$

Exercice 28 :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\begin{cases} f_n : [0;1] & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto \quad f_n(x) = e^{-x}\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}\right) \end{cases}$

1. Calculer $f_n'(x)$, puis trouver un encadrement de f_n' sur $[0;1]$.
2. Montrer que $-\dfrac{1}{(n+1)!} \leqslant e^{-1}\left(1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}\right) - 1 \leqslant 0$.
3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$.

Exercice 29 :

Dérivée centrale
Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $I =]a - \varepsilon; a + \varepsilon]$, où $\varepsilon > 0$.
On appelle <u>dérivée centrale de</u> f en a, le nombre $f_c\left(a\right) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \dfrac{f\left(a+h\right) - f\left(a-h\right)}{2h}$ si cette limite existe.

1. Montrer que si f est dérivable en a, alors elle admet une dérivée centrale en a
2. N'est-il pas possible de donner une condition plus faible ?
3. Avons-nous la réciproque ? (c'est à dire que si f admet une dérivée centrale en a, est-elle dérivable en a ? Etudier, par exemple, $|x|$ au voisinage de 0

Exercice 30 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x} = 1$

Exercice 31 :

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\sqrt{2} \leqslant \cos x + \sin x \leqslant \sqrt{2} \text{ et } -\sqrt{2} \leqslant -\cos x + \sin x \leqslant \sqrt{2}$$
2. Pour $t \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $f_t\left(x\right) = \cos tx + \sin tx$; montrer que si $|t| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, alors l'équation $f_t\left(x\right) = x$ admet une unique solution

Exercice 32 :

Soit $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\mu \geqslant 1$

1. En étudiant les variations de la fonction $\varphi\left(x\right) = \dfrac{1 + x^\mu}{\left(1+x\right)^\mu}$ définie pour $x \in [0; 1]$, démontrer que, pour tout $x \in [0; 1]$
$$2^{1-\mu} \leqslant \frac{1 + x^\mu}{\left(1+x\right)^\mu} \leqslant 1$$
2. De même, montrer que, pour tout $x \in [0; 1[$
$$\frac{1 - x^\mu}{\left(1-x\right)^\mu} \geqslant 1$$

13.9 Quelques exercices corrigés

13.9.1 Premiers exercices

Exercice 2 :

Soit f définie par :

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } & = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Il faut montrer que f est continue en 0, mais n'est pas dérivable en 0

Assez simple, puisque $\left| x \sin \dfrac{1}{x} \right| \leqslant |x|$ et donc $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$. f est donc continue en 0
Si nous faisons le rapport de dérivation :

$$\frac{f(x) - f(x)}{x} = \sin \frac{1}{x}$$

La fonction $\sin \dfrac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0, et donc le rapport $\dfrac{f(x) - f(x)}{x}$ n'en admet pas non plus. f n'est donc pas dérivable en 0

Exercice 3 :

Soit la fonction $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ définie pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

1. *Montrer que f est dérivable en 0, et calculer $f^{'}(0)$*
2. *Calculer $f^{'}(x)$*
3. *$f^{'}(x)$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$?*

Nous allons rédiger un corrigé qui ne suit pas complètement les questions posées.

1. **Tout d'abord, f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$**
   - ▷ Elle est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composée et produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$
   - ▷ Regardons la continuité en 0. Nous avons $\left| x^2 \sin \dfrac{1}{x} \right| \leqslant x^2$ et donc $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin \dfrac{1}{x} = 0$. f est donc continue en 0
2. **f est une fonction dérivable en 0**
   Nous faisons donc le rapport de dérivation :
   $$\frac{f(x) - f(x)}{x} = x \sin \frac{1}{x}$$
   Or, $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(x)}{x} = 0$ et $f'(0) = 0$
   f est donc dérivable en 0
3. **Calcul de $f'(x)$ pour $x \neq 0$**
   Nous avons $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \times \left(\dfrac{-1}{x^2} \cos \dfrac{1}{x} \right) = 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$
4. **$f'(x)$ n'est pas continue en 0**
   Si $\lim\limits_{x \to 0} 2x \sin \dfrac{1}{x} = 0$, par contre $\lim\limits_{x \to 0} \cos \dfrac{1}{x}$ n'existe pas ; f' n'est donc pas continue en 0

Exercice 5 :

On considère, dans $\mathbb{R}^2$, l'ensemble $\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que} x + y = 1\right\}$ (c'est une droite ! !). Minimiser, sur Δ l'expression $x^2 + y^2$

Appelons $f(x,y) = x^2 + y^2$. Il faut donc trouver $\inf\limits_{(x,y)\in\Delta} f(x,y)$

Si $(x,y) \in \Delta$, alors $x + y = 1 \iff y = 1 - x$, et en appelant $\Phi(x) = f(x, 1-x) = x^2 + (1-x)^2$, il faut donc minimiser Φ.

Pour ce faire, on calcule la dérivée de Φ, nous en étudions le signe et en déduisons le minimum.

$\Phi'(x) = 4x - 2$; Φ' s'annule en $x = \dfrac{1}{2}$, et le minimum est atteint en $x = \dfrac{1}{2}$. Le minimum est donc $\Phi\left(\dfrac{1}{2}\right) = f\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$

Exercice 7 :

Calculer les dérivée premières des fonctions suivantes :

Il n'est pas sûr que nous développions les corrigés ; nous allons, par contre, donner les méthodes de calculs ;

1. $f_1(x) = \left(1 - x^2\right)^2$

   Cette fonction f_1, est du type $f_1(x) = (u(x))^n$ dont la dérivée est donnée par $f_1'(x) = n(u(x))^{n-1} \times u'(x)$.

   Ici, nous avons donc : $f_1'(x) = 2\left(1 - x^2\right) \times (-2x) = 4x\left(x^2 - 1\right)$.[1]

2. $f_2(x) = \dfrac{1}{\left(1 - x^3\right)^2}$

   f_2 est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Cette fonction f_2, est du type $f_2(x) = (u(x))^n$ (avec ici, $n = -2$) dont la dérivée est donnée par $f_2'(x) = n(u(x))^{n-1} \times u'(x)$.

   Donc : $f_2'(x) = -2\left(1 - x^3\right)^{-3} \times -3x^2 = \dfrac{6x^2}{\left(1 - x^3\right)^3}$

3. $f_3(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ *pour* $x \neq 0$

   Ici, f_3 est de la forme $f_3(x) = u(x)\,v(x)$ où $u(x) = x$ et $v(x) = \sin \dfrac{1}{x}$

   Donc,$f_3'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$

   Nous avons $v(x) = \sin \dfrac{1}{x} = \sin \circ i(x)$ où $i(x) = \dfrac{1}{x}$. Donc, $v'(x) = i'(x) \times \sin' \circ i(x) = \dfrac{-1}{x^2} \cos \dfrac{1}{x}$

   D'où $f_3'(x) = \sin \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x} \cos \dfrac{1}{x}$

4. $f_4(x) = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

   f_4 est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$

   Cette fois-ci, nous avons $f_4(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ qui admet pour fonction dérivée $f_4'(x) = \dfrac{u'(x)\,v(x) - v'(x)\,u(x)}{v^2(x)}$ où :

   $$\begin{array}{ll} u(x) = 1 - \cos x & u'(x) = \sin x \\ v(x) = 1 + \cos x & v'(x) = -\sin x \end{array}$$

   D'où $f_4'(x) = \dfrac{2 \sin x}{(1 + \cos x)^2}$

5. $f_5(x) = \sin x + \dfrac{1}{\cos x}$

   f_5 est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$

1. Bien sûr qu'on aurait pu développer ! !

$f_5(x) = \sin x + (\cos x)^{-1}$ et donc $f_5'(x) = \cos x + -1 \times (-\sin x)(\cos x)^{-2} = \cos x + \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

6. $f_6(x) = \tan\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

   f_6 est définie, continue et dérivable pour $\dfrac{1-x}{1+x} \neq k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, c'est à dire $x \neq \frac{1-\frac{\pi}{2}+k\pi}{1+\frac{\pi}{2}+k\pi}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

   Ensuite, $f_6(x) = \tan u(x)$ dont la dérivée est donnée par $f_6'(x) = u'(x)\tan' u(x) = u'(x)\left(1+\tan^2 u(x)\right)$

   C'est à dire $f_6'(x) = \dfrac{-2}{(1+x)^2}\left(1+\tan^2\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)\right)$

7. $f_7(x) = \sqrt{1+\sin^2 x}$

   Comme $1+\sin^2 x \geqslant +1$, f_7 est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ en entier comme composée de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ en entier

   $f_7(x)$ est du type $f_7(x) = (u(x))^{\frac{1}{2}}$ dont la dérivée est $f_7'(x) = u'(x) \times \dfrac{1}{2} \times (u(x))^{\frac{-1}{2}}$.

   Donc, comme $u(x) = 1+\sin^2 x$, nous avons $u'(x) = 2\sin x\cos x = \sin 2x$.

   Donc $f_7'(x) = \dfrac{\sin 2x}{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$

8. $f_8(x) = \sqrt{\dfrac{1}{\sin x}}$ *pour* $x \in]0,\pi[$

   Comme $x \in]0,\pi[$, nous avons $\sin x > 0$ et donc f_8 est complètement définie pour tout $x \in]0,\pi[$

   $f_8(x)$ est du type $f_8(x) = (u(x))^{\frac{-1}{2}}$ de dérivée $f_8'(x) = u'(x) \times \dfrac{-1}{2}(u(x))^{\frac{-3}{2}}$

   Donc, $f_8'(x) = \dfrac{-\cos x}{2\sin x\sqrt{\sin x}}$

9. $f_9(x) = \sqrt{\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}}$

   Pour que f_9 soit définie, continue il faut que $\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x} \geqslant 0$ et $1+\tan x \neq 0$, c'est à dire $-1 \tan x \leqslant +1$ ou encore, $-\dfrac{\pi}{4} < x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$, et pour qu'elle soit dérivable, il faut que $\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x} > 0$

   Donc, f_9 est définie, continue sur $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\dfrac{\pi}{4}+k\pi ; +\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right]$ et dérivable sur $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\dfrac{\pi}{4}+k\pi ; +\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right[$

   Comme toujours, $f_9(x)$ est du type $f_9(x) = \sqrt{u(x)} = (u(x))^{\frac{1}{2}}$, de dérivée

   $$f_9'(x) = u'(x) \times \frac{1}{2} \times (u(x))^{\frac{-1}{2}}$$

   De $u(x) = \dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$, nous trouvons $u'(x) = \dfrac{-2\left(1+\tan^2 x\right)}{(1+\tan x)^2}$, d'où

   $$f_9'(x) = \frac{-\left(1+\tan^2 x\right)}{(1+\tan x)^2}\sqrt{\frac{1+\tan x}{1-\tan x}}$$

10. $f_{10}(x) = \ln\left(x^2+1\right)$

    Ici, c'est très simple ; comme $x^2+1 > 0$, f_{10} est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

    De plus, $f_{10}(x)$ est du type $f_{10}(x) = \ln(u(x))$ dont la dérivée est donnée par $f_{10}'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

    Donc, ici, $f_{10}'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

11. $f_{11}(x) = e^{1+\frac{1}{x}}$

    Ici, ce n'est pas moins simple !! f_{11} est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$

De plus, $f_{11}(x)$ est du type $f_{10}(x) = \exp(u(x))$ dont la dérivée est donnée par $f'_{11}(x) = u'(x)\exp(u'(x))$

Donc, ici, $f'_{10}(x) = \dfrac{-1}{x^2}e^{1+\frac{1}{x}}$

12. $f_{12}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

Rien à ajouter à la question au-dessus, et donc $f'_{12}(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$

Exercice 12 :

La fonction $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{x^3 \sin x^2 + x^2}{2 + \sqrt{|x|}}$ *est-elle dérivable en 0 ? Si oui, quelle est sa dérivée ?*

Si l'exercice est posé, c'est qu'il y a une difficulté qui se pose en 0, puisqu'à priori, $\sqrt{|x|}$ n'est pas dérivable en 0. Pour tenter d'y voir clair, nous revenons à la définition.

- ▷ Premièrement, $f(0) = 1$
- ▷ Ensuite :

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(0)}{x} &= \frac{2x + 1 + \dfrac{x^3 \sin x^2 + x^2}{2 + \sqrt{|x|}} - 1}{x} \\ &= \frac{2x + \dfrac{x^3 \sin x^2 + x^2}{2 + \sqrt{|x|}}}{x} \\ &= 2 + \frac{x^2 \sin x^2 + x}{2 + \sqrt{|x|}}\end{aligned}$$

- ▷ Et, pour terminer $\lim\limits_{x \to 0}$

$dfrac x^2 \sin x^2 + x2 + \sqrt{|x|} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 2$

Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 2$

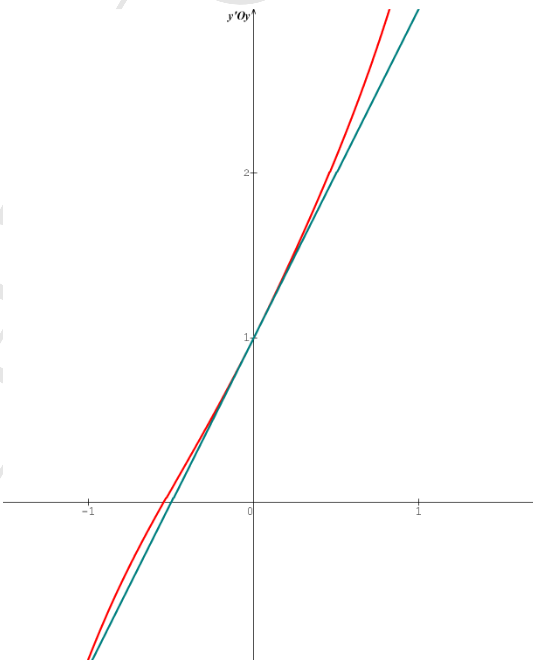


FIGURE 13.7 – Le graphe de la fonction $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{x^3 \sin x^2 + x^2}{2 + \sqrt{|x|}}$ et la tangente au voisinage de $x = 0$

Exercice 13 :

1. *Etudiez la dérivabilité à droite et à gauche, en $x = 1$ et en $x = -1$ de la fonction $f(x) = \left|x^2 - 1\right|$*

   Nous allons tout d'abord exprimer f sans la valeur absolue ; elle est simple :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1 - x^2 \text{ si } -1 \leqslant x \leqslant +1 \\ x^2 - 1 \text{ sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

   Nous allons étudier f au voisinage de $x = 1$; l'étude en $x = -1$ est identique et peut se faire par parité de f
   - Si $x \geqslant 1$, alors $f(x) = x^2 - 1$ et :

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

     Donc $\lim\limits_{\substack{x \to +1 \\ x > 1}} x + 1 = 2$ et donc $f'_d(1) = 2$
   - Si $x \leqslant 1$, alors $f(x) = 1 - x^2$ et :

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{1 - x^2}{x - 1} = -(x + 1)$$

     Donc $\lim\limits_{\substack{x \to +1 \\ x < 1}} x + 1 = -2$ et donc $f'_g(1) = -2$

   Ainsi, f n'est pas dérivable en $x = 1$. De même, f n'est pas dérivable en $x = -1$
2. *La fonction $f(x) = x\sqrt{x}$ est-elle dérivable à droite de 0 ?*

   La réponse est OUI...

   Il suffit de faire le rapport de dérivation $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \sqrt{x}$, et le calcul de la limite, à droite de 0 permet d'écrire que $f'_d(0) = 0$

Exercice 14 :

On pose $f(x) = (x + 1)\sqrt{\left|x^2 - 1\right|}$.

1. *Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.*

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\left|x^2 - 1\right| \geqslant 0$; comme la fonction $\sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, que le polynôme $x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$, f est continue siur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions continues.
2. *Etudier la dérivabilité de f et calculer f'*

   Si la fonction $\sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, elle est, par contre dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$. Les points qui risquent de poser un souci sont donc en $x = 1$ et $x = -1$

   (a) **Etude en $x = 1$**
   - Si $x > 1$

     Alors $x^2 - 1 \geqslant 0$ et $\left|x^2 - 1\right| = x^2 - 1$, d'où :

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{(x + 1)\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1} = \frac{(x + 1)\sqrt{(x - 1)(x + 1)}}{x - 1} = \frac{(x + 1)\sqrt{x + 1}}{\sqrt{x - 1}}$$

     Donc, $\lim\limits_{\substack{x \to +1 \\ x > 1}} \dfrac{(x + 1)\sqrt{x + 1}}{\sqrt{x - 1}} = \lim\limits_{\substack{x \to +1 \\ x > 1}} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = +\infty$, et donc f n'est pas dérivable en $x = 1$, à droite de 1

▷ Si $x < 1$
Alors $x^2 - 1 \leqslant 0$ et $\left|x^2 - 1\right| = 1 - x^2$, d'où :

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \frac{(x+1)\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \frac{(x+1)\sqrt{(1-x)(x+1)}}{x-1} \\ &= \frac{(x+1)\sqrt{(1-x)(x+1)}}{-(1-x)} = \frac{-(x+1)\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x}}\end{aligned}$$

Donc, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to+1\\x<1}} \frac{-(x+1)\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\substack{x\to+1\\x<1}} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = -\infty$, et donc f n'est pas dérivable en $x = 1$, à gauche de 1

(b) **Etude en $x = -1$**

▷ Etude à droite de-1, c'est à dire si $x > -1$
Alors $x^2 - 1 \leqslant 0$ et $\left|x^2 - 1\right| = 1 - x^2$, d'où :

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \frac{(x+1)\sqrt{1-x^2}}{x+1} = \sqrt{1-x^2}$$

Donc, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \sqrt{1-x^2} = \lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = 0$, et donc f est dérivable en $x = -1$, à droite de -1 et $f'_d(-1) = 0$

▷ Etude à gauche de-1, c'est à dire si $x < -1$
Alors $x^2 - 1 \geqslant 0$ et $\left|x^2 - 1\right| = x^2 - 1$, d'où :

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \frac{(x+1)\sqrt{x^2-1}}{x+1} = \sqrt{x^2-1}$$

Donc, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} \sqrt{x^2-1} = \lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = 0$, et donc f est dérivable en $x = -1$, à gauche de -1 et $f'_g(-1) = 0$

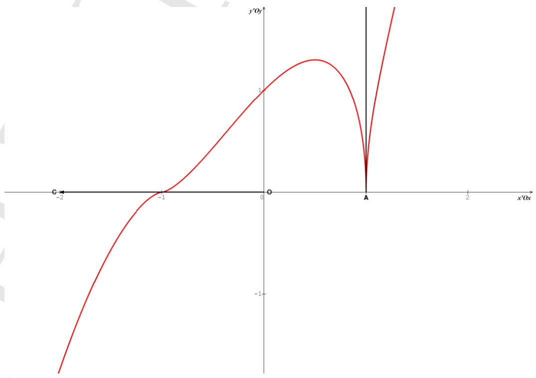


FIGURE 13.8 – Le graphe de la fonction $f(x) = (x+1)\sqrt{\left|x^2 - 1\right|}$ et les tangentes au voisinage de $x = +1$ et $x = -1$

Exercice 15 :

Soient $C_0, C_1, \ldots, C_n$ des constantes telles que $C_0 + \dfrac{C_1}{2} + \dfrac{C_2}{3} + \ldots + \dfrac{C_{n-1}}{n} + \dfrac{C_n}{n+1} = 0$
Montrer que l'équation $C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_{n-1}x^{n-1} + C_nx^n = 0$ a au moins une racine réelle comprise entre 0 et 1

Soit $F(x) = C_0x + \dfrac{C_1x^2}{2} + \dfrac{C_2x^3}{3} + \ldots + \dfrac{C_{n-1}x^n}{n} + \dfrac{C_nx^{n+1}}{n+1}$.

Alors, $F(0) = 0$, et d'après l'hypothèse, $F(1) = 0$.
D'après le théorème de Rolle 13.4.3, il existe $c \in]0;+1[$ tel que $F'(c) = 0$. Or, $F'(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_{n-1}x^{n-1} + C_n x^n$.
Il existe donc $c \in]0;+1[$ tel que $C_0 + C_1 c + C_2 c^2 + \ldots + C_{n-1}c^{n-1} + C_n c^n = 0$

Exercice 16 :

En utilisant le théorème des accroissements finis trouver un encadrement de :

1. $\sqrt{500} - \sqrt{499}$

   On considère la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[499;500]$ de dérivée $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ qui est telle que, si $x \in [499;500]$, alors $\dfrac{1}{2\sqrt{500}} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{499}}$
   En appliquant le théorème des accroissements finis 13.4.5 sur l'intervalle $[499;500]$, il existe $c \in [499;500]$:
   $$\frac{\sqrt{500}-\sqrt{499}}{500-499} = \frac{1}{2\sqrt{c}} \iff \sqrt{500}-\sqrt{499} = \frac{1}{2\sqrt{c}}$$
   Or, $\dfrac{1}{2\sqrt{c}} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{499}}$.
   Nous avons donc $0 \leqslant \sqrt{500} - \sqrt{499} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{499}}$

2. $\ln(1001) - \ln(1000)$

   La méthode sera la même !! On considère la fonction $f(x) = \ln x$ sur l'intervalle $[1000;1001]$ de dérivée $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ qui est telle que, si $x \in [1000;1001]$, alors $\dfrac{1}{1001} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{1000}$
   En appliquant le théorème des accroissements finis 13.4.5 sur l'intervalle $[1000;1001]$, il existe $c \in [1000;1001]$:
   $$\frac{\ln(1001)-\ln(1000)}{1001-1000} = \frac{1}{c} \iff \ln(1001)-\ln(1000) = \frac{1}{c}$$
   Or, $\dfrac{1}{c} \leqslant \dfrac{1}{1000}$.
   Nous avons donc $0 \leqslant \ln(1001) - \ln(1000) \leqslant \dfrac{1}{1000}$

Exercice 17 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{1+\cos^2 x}$ Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, f' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $[a; a+2\pi]$

Assez simple ; la démonstration tient au fait que les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ sont périodiques et de période $frm{-}e\pi$. Soit donc $a \in \mathbb{R}$; alors :

$$f(a+2\pi) = \frac{\sin(a+2\pi)+\cos(a+2\pi)}{1+\cos^2(a+2\pi)} = \frac{\sin a + \cos a}{1+\cos^2 a} = f(a)$$

Donc, d'après le théorème de Rolle 13.4.3, il existe $c \in [a; a+2\pi]$ tel que $f'(c) = 0$.
Ce que nous voulions.

Exercice 18 :

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. Démontrer qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que :

$$\frac{f(a)}{f(b)} = \exp\left(\frac{f'(c)}{f(c)}(b-a)\right)$$

On considère donc la fonction $g(x) = \ln f(x)$ de dérivée $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.
En appliquant le théorème des accroissements finis 13.4.5 à g entre a et b, il existe $c \in]a;b[$ tel que :

$$\frac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(c) \Longleftrightarrow g(b)-g(a) = (b-a)\,g'(c) \Longleftrightarrow \ln\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right) = (b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}$$

En passant à l'exponentielle, nous avons :

$$\exp\left(\ln\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right)\right) = \exp\left((b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}\right) \Longleftrightarrow \frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left((b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}\right)$$

Ce que nous voulions.

Exercice 20 :

1. *Calculez les dérivées n-ièmes de x^α où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^{\star+}$*
   - ▷ La dérivée première de x^α est $\alpha x^{\alpha-1}$
   - ▷ La dérivée seconde de x^α est $\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$
   - ▷ On peut penser que, pour $n \geqslant 1$, la dérivée n-ième de x^α est $\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)\,x^{\alpha-n}$ et nous allons le démontrer par récurrence
     - Vérifions que c'est vrai pour $n=1$: $\prod_{k=0}^{0}(\alpha-k)\,x^{\alpha-1} = \alpha x^{\alpha-1}$
     - Supposons que, pour $n \geqslant 1$, la dérivée n-ième de x^α est $\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)\,x^{\alpha-n}$
     - Démontrons le à l'ordre $n+1$
       La dérivée $n+1$-ème de x^α est la dérivée première de la dérivée n-ième de x^α. Doonc :

$$\left(\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)\,x^{\alpha-n}\right)' = (\alpha-n)\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)\,x^{\alpha-n-1} = \prod_{k=0}^{n}(\alpha-k)\,x^{\alpha-(n+1)}$$

   Ce que nous voulions

   La dérivée *n-ièmes* de x^α où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^{\star+}$ est donc $\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)\,x^{\alpha-n}$

   Application : les dérivées n-ièmes de $R(x) = \sqrt{x}$
   Très simplement, $R(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Les dérivées n-ièmes de R sont donc :

$$R^{(n)}(x) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-k\right)x^{\frac{1}{2}-n} = \frac{(-1)^n}{2^n}\left(\prod_{k=0}^{n-1}(2k-1)\right)x^{\frac{1}{2}-n}$$

   En particulier la dérivée première

$$R'(x) = \frac{(-1)}{2}\left(\prod_{k=0}^{0}(2k-1)\right)x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{-1}{2}\times(-1)\times x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2. *Calculez les dérivées n-ièmes de a^x où $x \in \mathbb{R}$ et $a > 0$*

   Il est bien connu que l'on peut écrire $a^x = e^{x\ln a}$....Et que la dérivée n-ème de a^x est $(\ln a)^n e^{x\ln a} = (\ln a)^n a^x$ *(Se démontre par une récurrence sur n simple)*

3. *Rechercher les dérivées n-ièmes de $\log_a(x)$*

   Comme tout à l'heure, nous savons que $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$
   - ▷ La dérivée première de $\log_a(x)$ est donc $\log_a'(x) = \dfrac{1}{x\ln a} = \dfrac{1}{\ln a}x^{-1}$
   - ▷ La dérivée seconde de $\log_a(x)$ est donc $\dfrac{-1}{\ln a}x^{-2}$
   - ▷ On démontre, facilement, et par récurrence, que $\log_a^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{\ln a x^n}$

Exercice 22 :

L'objet de cet exercice est d'utiliser le rapport de dérivation pour lever des indéterminations ; c'est aussi l'outil utilisé pour donner les limites remarquables.

1. *Donner* $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{\ln x-1}$

   Nous sommes là, clairement devant une indétermination qu'il faut lever.

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{\ln x-1}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{x-e}\times\frac{x-e}{\ln x-1}$$

   Considérons, maintenant $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=\ln x$. Le rapport $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{\ln x-1}$ devient alors :

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{\ln x-1}=\frac{f(x)-f(e)}{x-e}\times\frac{x-e}{g(x)-g(e)}$$

   Or, f et g sont des fonctions dérivables en $x=e$ et nous avons :
   - $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{f(x)-f(e)}{x-e}=f'(e)=\dfrac{1}{2\sqrt{e}}$
   - $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{g(x)-g(e)}{x-e}=g'(e)=\dfrac{1}{e}$, ce qui nous donne $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{x-e}{g(x)-g(e)}=e$

   Donc, $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{\ln x-1}=\dfrac{e}{2\sqrt{e}}=\dfrac{\sqrt{e}}{2}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{c^x-d^x}$ *avec* $c\neq d$

   Il faut d'abord faire remarquer que $f_a(x)=a^x=e^{x\ln a}$, et c'est la même chose pour b^x, c^x et d^x
   - Nous pouvons, dans un premier temps écrire $\dfrac{a^x-b^x}{c^x-d^x}=\dfrac{a^x-b^x}{x}\times\dfrac{x}{c^x-d^x}$ et voir que $a^x-b^x=a^x-1+1-b^x$ de telle sorte que $\dfrac{a^x-b^x}{x}=\dfrac{a^x-1+1-b^x}{x}=\dfrac{a^x-1}{x}+\dfrac{1-b^x}{x}$
   - Etudions maintenant $\dfrac{a^x-1}{x}$. En fait : $\dfrac{a^x-1}{x}=\dfrac{f_a(x)-f_a(0)}{x}$

     Et donc
$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f_a(x)-f_a(0)}{x}=f_a'(0)=\ln a$$
     De même
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-b^x}{x}=\lim_{x\to 0}-\frac{b^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f_b(x)-f_b(0)}{x}=f_b'(0)=\ln b$$
     Et donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x-1}{x}+\dfrac{1-b^x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-b^x}{x}=\ln a-\ln b$
   - Et, pour poursuivre, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{c^x-d^x}=\dfrac{1}{\ln c-\ln d}$

   En conclusion, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{c^x-d^x}=\dfrac{\ln a-\ln b}{\ln c-\ln d}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^n-1}{kx}$ *où* $k\neq 0$

   Appelons $f_n(x)=(1+x)^n$. Alors, $\dfrac{(1+x)^n-1}{kx}=\dfrac{1}{k}\times\dfrac{f_n(x)-f_n(0)}{x}$

   Or, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f_n(x)-f_n(0)}{x}=f_n'(0)=n(1+0)^{n-1}=n$

   Donc, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^n-1}{kx}=\dfrac{n}{k}$

Exercice 23 :

On pose $f(x) = xe^x$ et $g(x) = x\sin(x)$. Calculer l'expression de $f^{(n)}(x)$ et $g^{(n)}(x)$

1. **Expression de $f^{(n)}(x)$**
   - ▹ Tout d'abord $f'(x) = xe^x + e^x = e^x(x+1)$ et $f''(x) = e^x + e^x(x+1) = e^x(x+2)$
   - ▹ On peut penser que $f^{(n)}(x) = e^x(x+n)$
   - ▹ Démontrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $f^{(n)}(x) = e^x(x+n)$
     - C'est évidemment vrai pour $n = 0$
     - Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = e^x(x+n)$
     - Alors, $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = e^x(x+n) + e^x = e^x(x+n+1)$

     Ce que nous voulions

   Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = e^x(x+n)$
2. **Expression de $g^{(n)}(x)$**

   ...Ici, de la nécessité de bien connaître les formules trigonométriques!!
   - ▹ Tout d'abord
     - $g'(x) = x\cos x + \sin x = \sin x + x\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ car, d'après les formules trigonométriques, $\cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$
     - Et $g''(x) = -x\sin x + \cos x + \cos x = 2\cos x - x\sin x = 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) + x\sin(x+\pi)$
     - Pour la dérivée troisième, nous avons :

$$\begin{aligned}
g^{(3)}(x) = &\ 2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(x+\pi) + x\cos(x+\pi) \\
= &\ -2\sin x - \sin x + x\cos(x+\pi) \text{ car } \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \text{ et } \sin(x+\pi) = -\sin x \\
= &\ -3\sin x - x\cos x \\
= &\ 3\sin(x+\pi) + x\sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ car } -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \\
= &\ 3\sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right) + x\sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

   - ▹ Nous sommes en droit de penser que $g^{(n)}(x) = n\sin\left(x + (n-1)\dfrac{\pi}{2}\right) + x\sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$
   - ▹ Démontrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $g^{(n)}(x) = n\sin\left(x + (n-1)\dfrac{\pi}{2}\right) + x\sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$
     - C'est évidemment vrai pour $n = 0$ puisque $g^{(0)}(x) = x\sin x = g(x)$
     - Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)}(x) = n\sin\left(x + (n-1)\dfrac{\pi}{2}\right) + x\sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$
     - Alors, $g^{(n+1)}(x) = \left(g^{(n)}\right)'(x) = n\cos\left(x + (n-1)\dfrac{\pi}{2}\right) + \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right) + x\cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

       Or, $\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)$. Donc :

$$\cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

       Et

$$\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

       D'où $g^{(n+1)}(x) = (n+1)\sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right) + x\sin\left(x + (n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)$

     Ce que nous voulions

   Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)}(x) = n\sin\left(x + (n-1)\dfrac{\pi}{2}\right) + x\sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

Exercice 25 :

Soit $\mathcal{P}$ le plan euclidien muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé. Pour un point A et une droite $\mathcal{D}$ donnés du plan, on définit la distance de A à $\mathcal{D}$ par $d(A;\mathcal{D}) = \inf\limits_{M\in\mathcal{D}} AM$. On pose $A(x_0; y_0)$ et $\mathcal{D} : y = ax + b$. Calculer $d(A;\mathcal{D})$

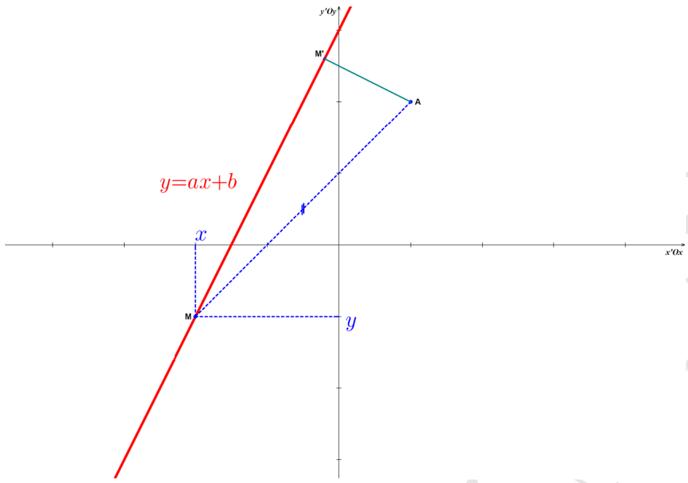


FIGURE 13.9 – Une visualisation de la situation

Exercice très intéressant !!
Soit $M(x,y) \in \mathcal{D}$; alors $y = ax+b$. Pour calculer $d(A;\mathcal{D})$, il faut minimiser la distance AM, ou, ce qui est équivalent, AM^2.
Or, de manière générale, $AM^2 = (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2$ et, ici, $AM^2 = (x-x_0)^2 + (ax+b-y_0)^2$. Il faut donc minimiser la fonction f, dépendante de $x \in \mathbb{R}$, définie par :

$$f(x) = (x-x_0)^2 + (ax+b-y_0)^2$$

Il faut donc étudier les variations de f. Assez simplement, la dérivée de f est

$$f'(x) = 2(x-x_0) + 2a(ax+b-y_0) = 2\left(1+a^2\right)x - 2(x_0+ay_0)$$

f' s'annule en $\omega = \dfrac{x_0+ay_0}{1+a^2}$

- Si $x \leqslant \omega$, alors $f'(x) \leqslant 0$ et f y est décroissante
- Si $x \geqslant \omega$, alors $f'(x) \geqslant 0$ et f y est croissante

Le minimum est donc atteint en $x = \alpha$

$$\begin{aligned}
f(\alpha) &= \left(\frac{x_0+ay_0}{1+a^2} - x_0\right)^2 + \left(a\frac{x_0+ay_0}{1+a^2} + b - y_0\right)^2 \\
&= \frac{a^2(ax_0-y_0)^2}{(1+a^2)^2} + \frac{\left(ax_0 - y_0 + b\left(1+a^2\right)\right)^2}{(1+a^2)^2} \\
&= \frac{a^2(ax_0-y_0)^2}{(1+a^2)^2} + \frac{(ax_0-y_0)^2 + b^2\left(1+a^2\right)^2 + 2b\left(1+a^2\right)(ax_0-y_0)}{(1+a^2)^2} \\
&= \frac{(ax_0-y_0)^2}{1+a^2} + \frac{b^2}{1+a^2} + \frac{2b(ax_0-y_0)}{1+a^2} \\
&= \frac{(ax_0+b-y_0)^2}{1+a^2}
\end{aligned}$$

Donc $d(A;\mathcal{D}) = \dfrac{|ax_0+b-y_0|}{\sqrt{1+a^2}}$

Remarque
En fait, $d(A;\mathcal{D}) = AM'$ où M' est la projection orthogonale de A sur la droite $\mathcal{D}$; et donc α est l'abscisse de M'

Exercice 26 :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\left\{\begin{array}{rcl} f_n : [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_n(x) = e^{-x}\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}\right)\end{array}\right.$

1. *Calculer $f_n'(x)$. Puis trouver un encadrement de f_n' sur $[0;1]$.*

   ▷ Pour calculer la dérivée, nous allons appeler $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$; de telle sorte que $f_n(x) = e^{-x} S_n(x)$

   La dérivée de f_n est donc : $f_n'(x) = e^{-x} S_n'(x) - e^{-x} S_n(x) = e^{-x}\left(S_n'(x) - S_n(x)\right)$

   Qu'est donc $S_n'(x)$?

   $$S_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$$

   Ainsi :

   $$S_n'(x) - S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = -\frac{x^n}{n!}$$

   Donc, $f_n'(x) = -e^{-x} \times \dfrac{x^n}{n!}$

   Ce qui montre que f_n' est négative sur l'intervalle $[0;1]$ et que f_n y est décroissante.

   Ainsi, pour tout $x \in [0;1]$, $f_n(1) \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(0) \Longleftrightarrow f_n(1) \leqslant f_n(x) \leqslant 1$

   ▷ Nous allons montrer que, pour tout $x \in [0;1]$, nous avons $f_n'(x) \geqslant -\dfrac{x^n}{n!}$

   Pour ce faire, étudions $f_n'(x) + \dfrac{x^n}{n!}$:

   $$f_n'(x) + \frac{x^n}{n!} = -e^{-x} \times \frac{x^n}{n!} + \frac{x^n}{n!} = \frac{x^n}{n!}\left(1 - e^{-x}\right)$$

   Comme, pour tout $x \in [0;1]$, nous avons $e^{-1} \leqslant e^{-x} \leqslant 1$, nous avons $1 - e^{-x} \geqslant 0$ et donc $f_n'(x) + \dfrac{x^n}{n!} \geqslant 0$, ce qui signifie que $f_n'(x) \geqslant -\dfrac{x^n}{n!}$

   En conclusion, nous avons $-\dfrac{x^n}{n!} \leqslant f_n'(x) \leqslant 0$

2. *Montrer que* $-\dfrac{1}{(n+1)!} \leqslant e^{-1}\left(1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}\right) - 1 \leqslant 0$

   Nous devons donc montrer que $-\dfrac{1}{(n+1)!} \leqslant f_n(1) - 1 \leqslant 0$

   ▷ Dans la question 1, nous avons établi que $f_n(1) \leqslant 1 \Longleftrightarrow f_n(1) - 1 \leqslant 0$

   ▷ Il faut, maintenant, montrer que $-\dfrac{1}{(n+1)!} \leqslant f_n(1) - 1$

   Nous allons utiliser une fonction auxiliaire Φ définie sur $[0;1]$ par :

   $$\Phi(x) = f_n(x) - 1 + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

   Alors, $\Phi'(x) = f_n'(x) + \dfrac{x^n}{n!}$. Et, de la question 1, où nous avons montré que, pour tout $x \in [0;1]$ $f_n'(x) \geqslant -\dfrac{x^n}{n!}$, nous avons, pour tout $x \in [0;1]$, $\Phi'(x) \geqslant 0$

   Ainsi, Φ est croissante sur $[0;1]$ et nous avons $\Phi(0) \leqslant \Phi(x) \leqslant \Phi(1)$

   Or : $\Phi(0) = f_n(0) - 1 = 0$ et $\Phi(1) = f_n(1) - 1 + \dfrac{1}{(n+1)!}$. Donc :

   $$\Phi(1) \geqslant 0 \Longleftrightarrow f_n(1) - 1 + \frac{1}{(n+1)!} \geqslant 0 \Longleftrightarrow f_n(1) - 1 \geqslant -\frac{1}{(n+1)!}$$

Nous avons donc démontré que $-\dfrac{1}{(n+1)!} \leqslant e^{-1}\left(1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}\right)-1 \leqslant 0$

3. *Calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$.

D'après l'inégalité $-\dfrac{1}{(n+1)!} \leqslant f_n(1)-1 \leqslant 0 \iff -\dfrac{1}{(n+1)!} \leqslant e^{-1}S_n(1)-1 \leqslant 0$ et le théorème des limites par encadrements 11.4.10, nous pouvons dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-1}S_n(1)-1=0$, c'est à dire :

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-1}S_n(1)-1=0 \iff \lim_{n\to+\infty} e^{-1}S_n(1)=1 \iff \lim_{n\to+\infty} S_n(1)=e$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}=e$

Exercice 27 :

Soit $a\in\mathbb{R}$ et f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $I=]a-\varepsilon;a+\varepsilon]$, où $\varepsilon>0$. On appelle dérivée centrale de f en a, le nombre $f_c(a)=\lim\limits_{\substack{h\to0\\h>0}} \dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ si cette limite existe.

1. *Montrer que si f est dérivable en a, alors elle admet une dérivée centrale en a*

   On suppose f dérivable en a, alors $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$. Or :

$$\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=\frac{1}{2}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\frac{f(a)-f(a-h)}{h}\right)$$

   Ainsi :

$$\lim_{\substack{h\to0\\h>0}} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=\frac{1}{2}\left(\lim_{\substack{h\to0\\h>0}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{\substack{h\to0\\h<0}}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\right)=\frac{1}{2}(2f'(a))=f'(a)$$

2. *N'est-il pas possible de donner une condition plus faible ?*

   Il est possible de ne se donner qu'une condition plus faible. Supposons que f admette en a, une dérivée à droite $f'_d(a)$ et une dérivée à gauche de a $f'_g(a)$ qui peuvent être différentes *(c'est à dire que f peut ne pas être dérivable)*

   Nous avons donc $\lim\limits_{\substack{h\to0\\h>0}} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'_d(a)$ et $\lim\limits_{\substack{h\to0\\h<0}} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'_g(a)$,ou, ce qui est équivalent, $\lim\limits_{\substack{h\to0\\h>0}} \dfrac{f(a-h)-f(a)}{-h}=f'_g(a)$

   A ce moment là,

$$\lim_{\substack{h\to0\\h>0}} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=\frac{1}{2}\left(\lim_{\substack{h\to0\\h>0}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{\substack{h\to0\\h>0}}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\right)=\frac{1}{2}\left(f'_d(a)+f'_g(a)\right)$$

3. *Avons-nous la réciproque ? (c'est à dire que si f admet une dérivée centrale en a, est-elle dérivable en a ?*

   La fonction $f(x)=|x|$ n'est pas dérivable en $x=0$. Au voisinage de 0 :

$$\frac{f(0+h)-f(0-h)}{2h}=\frac{|h|-|-h|}{2h}=0$$

   Donc, $f(x)=|x|$ admet une dérivée centrale en $x=0$, laquelle est nulle, alors qu'elle n'est pas dérivable en $x=0$

Exercice 28 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}=1$

Première remarque, c'est que cette équation a au moins 2 solutions : $x=0$ et $x=\dfrac{\pi}{2}$. Sont-les seules ?

Pour le savoir, considérons $f(x)=\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}$

- ▷ Intéressons nous au domaine de définition de f que nous notons $\mathcal{D}_f$

  Nous avons, bien entendu $x\in\mathcal{D}_f \iff \cos x\geqslant 0$ et $\sin x\geqslant 0 \iff 2k\pi\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{2}+2k\pi$

  Autrement dit, $\mathcal{D}_f=\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$
- ▷ D'autre part, f est périodique et de période 2π ; nous n'étudions donc f que sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$
- ▷ f est continue sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et dérivable sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

  Nous avons $f'(x)=\dfrac{-\sin x}{\sqrt{\cos x}}+\dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}=\dfrac{(\cos x)^{\frac{3}{2}}-(\sin x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\cos x}\sqrt{\cos x}}$
  - Si $0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4}$, alors $\cos x\geqslant\sin x$ et $f'(x)\geqslant 0$ et f y est croissante
  - Si $\dfrac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, alors $\cos x\leqslant\sin x$ et $f'(x)\leqslant 0$ et f y est décroissante
  - f atteint donc un maximum en $x=\dfrac{\pi}{4}$ et, pour tout $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, nous avons $f(x)\geqslant 1$. Sur l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, les seules valeurs telles que $f(x)=1$ sont $x=0$ et $x=\dfrac{\pi}{2}$

Toutes les solutions de l'équation $\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}=1$ sont donc de la forme $x=2k\pi$ ou $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Exercice 29 :

1. *Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$,*

$$\sqrt{2}\leqslant\cos x+\sin x\leqslant\sqrt{2}\ \textit{et}\ -\sqrt{2}\leqslant-\cos x+\sin x\leqslant\sqrt{2}$$

   Nous n'allons corriger que la proposition $\sqrt{2}\leqslant\cos x+\sin x\leqslant\sqrt{2}$ vraie pour tout $x\in\mathbb{R}$. L'autre proposition se démontre de la même manière.

   Nous posons $F(x)=\cos x+\sin x$. Cette fonction F est définie sur $\mathbb{R}$ en entier et est périodique et de période 2π et nous ne l'étudierons que sur l'intervalle $[0;2\pi]$

   Nous avons $F(x)=\cos x-\sin x$ et nous avons le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
f'	1	+	0	-	-	-	-	-	-	-	-1	-	0	+	+	+	1
f	$\nearrow$	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

   Ainsi, d'après le tableau ci-dessus, on peut déduire que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\sqrt{2}\leqslant\cos x+\sin x\leqslant\sqrt{2}$

2. *Pour $t\in\mathbb{R}$, on considère la fonction $f_t(x)=\cos tx+\sin tx$; montrer que si $|t|<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, alors l'équation $f_t(x)=x$ admet une unique solution*

   Supposons $|t|<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; ceci veut dire que $\dfrac{-1}{\sqrt{2}}<x<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Pour démontrer que $f_t(x)=x$ admet une unique solution, nous allons étudier la fonction $\Phi(x)=f_t(x)-x$.

   Il faut remarquer, pour tout $t\in\mathbb{R}$ et tout $x\in\mathbb{R}$, et d'après la première question, nous avons $-\sqrt{2}\leqslant\cos tx+\sin tx\leqslant\sqrt{2}$ bornée, et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Phi(x)=-\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\Phi(x)=+\infty$

   - ▷ Supposons $0\leqslant t<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

     Etudions la dérivée de $\Phi(x)$.

$$\Phi'(x)=f_t'(x)-1=t\cos tx-t\sin tx-1=t(\cos tx-\sin tx)-1$$

De $0 \leqslant t < \frac{1}{\sqrt{2}}$, nous déduisons $0 \leqslant t(\cos tx - \sin tx) \leqslant 1$, c'est à dire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi'(x) \leqslant 0$ et donc que Φ est décroissante et continue ; Φ est donc bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; il existe donc un seul nombre $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi(x_0) = 0 \Longleftrightarrow f_t(x_0) = x_0$

▷ Supposons maintenant que $-\frac{1}{\sqrt{2}} < t \leqslant 0$

Alors, de $-\sqrt{2} \leqslant \cos tx - \sin tx \leqslant +\sqrt{2}$, on tire $-1 \leqslant t(\cos tx - \sin tx) \leqslant +1$ et donc que $\Phi'(x) \leqslant 0$. Et nous concluons comme précédemment.

Ainsi, si $|t| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors l'équation $f_t(x) = x$ admet une unique solution.

Exercice 30 :

Soit $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\mu \geqslant 1$

1. *En étudiant les variations de la fonction $\varphi(x) = \frac{1+x^\mu}{(1+x)^\mu}$ définie pour $x \in [0;1]$, démontrer que, pour tout $x \in [0;1[$, nous avons : $2^{1-\mu} \leqslant \frac{1+x^\mu}{(1+x)^\mu} \leqslant 1$*

Soit donc $\varphi(x) = \frac{1+x^\mu}{(1+x)^\mu}$ dont nous allons calculer la dérivée :

$$\left\{\begin{array}{ll} u = 1+x^\mu & u' = \mu x^{\mu-1} \\ v = (1+x)^\mu & v' = \mu(1+x)^{\mu-1} \end{array}\right.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{\mu x^{\mu-1}(1+x)^\mu - \mu(1+x)^{\mu-1}(1+x^\mu)}{(1+x)^{2\mu}} \\ &= \frac{\mu(1+x)^{\mu-1}\left(x^{\mu-1}(1+x) - (1+x^\mu)\right)}{(1+x)^{2\mu}} \\ &= \frac{\mu\left(x^{\mu-1}(1+x) - (1+x^\mu)\right)}{(1+x)^{\mu+1}} \\ &= \frac{\mu\left(x^{\mu-1} - 1\right)}{(1+x)^{\mu+1}} \end{aligned}$$

De $\mu \geqslant 1$ et de $x \in [0;1]$, nous déduisons que $\mu\left(x^{\mu-1} - 1\right) \leqslant 0$, donc que φ est une fonction décroissante sur l'intervalle $[0;1]$. D'où :

$$\varphi(0) \geqslant \varphi(x) \geqslant \varphi(1) \Longleftrightarrow 1 \geqslant \frac{1+x^\mu}{(1+x)^\mu} \geqslant 2^{1-\mu}$$

Ce que nous voulions

<u>**Il est possible d'aller plus loin !**</u>

Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $x \geqslant 1$, alors $0 < \frac{1}{x} \leqslant 1$, et on peut alors appliquer à $\frac{1}{x}$ l'inégalité ci-dessus :

$$2^{1-\mu} \leqslant \frac{1+\left(\frac{1}{x}\right)^\mu}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^\mu} \leqslant 1 \Longleftrightarrow 2^{1-\mu} \leqslant \frac{x^\mu + 1}{(x+1)^\mu} \leqslant 1$$

On peut donc ainsi écrire que pour tout $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\mu \geqslant 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$2^{1-\mu} \leqslant \frac{1+x^\mu}{(1+x)^\mu} \leqslant 1$$

2. *De même, montrer que, pour tout $x \in [0;1[$, nous avons : $\frac{1-x^\mu}{(1-x)^\mu} \geqslant 1$*

De la même manière, nous considérons $\Phi(x) = \dfrac{1-x^\mu}{(1-x)^\mu}$ dont nous allons calculer la dérivée :

$$\begin{cases} u = 1 - x^\mu & u' = -\mu x^{\mu-1} \\ v = (1-x)^\mu & v' = -\mu(1-x)^{\mu-1} \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= \frac{-\mu x^{\mu-1}(1-x)^\mu + \mu(1-x)^{\mu-1}(1-x^\mu)}{(1-x)^{2\mu}} \\ &= \frac{\mu(1-x)^{\mu-1}\left(-x^{\mu-1}(1-x) + (1-x^\mu)\right)}{(1-x)^{2\mu}} \\ &= \frac{\mu\left(-x^{\mu-1}(1-x) + (1-x^\mu)\right)}{(1-x)^{\mu+1}} \\ &= \frac{\mu\left(1-x^{\mu-1}\right)}{(1-x)^{\mu+1}} \end{aligned}$$

De $\mu \geqslant 1$ et de $x \in [0;1[$, nous déduisons que $\mu\left(1-x^{\mu-1}\right) \geqslant 0$, donc que Φ est une fonction croissante sur l'intervalle $[0;1[$. D'où :

$$\varphi(0) \leqslant \varphi(x) \Longleftrightarrow 1 \leqslant \frac{1-x^\mu}{(1-x)^\mu}$$

Est-il possible d'itérer ce que nous avons fait dans la question précédente ?

Soit donc $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 1$; alors $0 < \dfrac{1}{x} < 1$, et on peut alors appliquer à $\dfrac{1}{x}$ l'inégalité juste ci-dessus :

$$1 \leqslant \frac{1-\left(\frac{1}{x}\right)^\mu}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^\mu} \Longleftrightarrow 1 \leqslant \frac{x^\mu - 1}{(x-1)^\mu}$$

Il n'y a pas de symétrie, mais on trouve une inégalité qui pourrait être intéressante.

Chapitre 14

Savoir étudier une courbe

L'étude d'une courbe est une question récurrente des programmes de Terminale ; elle a été parfois l'unique sujet d'un problème de bac. La conclusion de cette question était presque toujours **la représentation de cette fonction**. Cette représentation se faisait « à la main » ; nous avions ainsi une belle idée du comportement de la fonction.
Or, dans tous les cas, cette représentation ne pouvait être qu'approximative ; l'apparition des calculatrices graphiques, puis des logiciels « traceurs de courbes » a largement simplifié le travail mais n'en a pas, pour autant, gommé l'approximation ! !
Pour ma part, je ne crie pas sur l'utilisation de ces logiciels qui, objectivement, simplifient la vie des étudiants. Mais, j'insiste sur la nécessité absolue de « l'étude de la fonction » ; cette étude permet de comprendre le comportement de cette fonction, en un point précis ou encore à l'infini. Donc, d'abord l'étude de la fonction, puis la représentation graphique. **Jamais l'inverse ! !**
Etudier une fonction ne s'improvise pas, et une bonne étude suit un plan logique. C'est ce que nous allons essayer de présenter ci-après

14.1 Plan d'étude d'une fonction

14.1.1 Détermination de l'ensemble de définition

C'est le plus souvent un intervalle, une réunion d'intervalles

14.1.2 Etude de la continuité

Etude de la continuité et du domaine de continuité qui, le plus souvent, est inclus dans le domaine de définition.

14.1.3 Etude des limites

Etude des limites aux bornes de chacun des intervalles composant le domaine de définition.

14.1.4 Asymptotes

Détermination, s'il y a lieu des asymptotes, et position du graphe par rapport à ces asymptotes.

14.1.5 Dérivabilité

1. **Domaine de dérivabilité :** Etude du domaine de dérivabilité
2. **Calcul de dérivée :** Calcul de la dérivée et détermination du signe de la dérivée
3. **Etude aux bornes :** Etude de la dérivabilité aux bornes de chacun des intervalles composant le domaine de dérivabilité.

14.1.6 Etude des points singuliers

Etude des points singuliers : points d'inflexion, maxima, minima

14.1.7 Etablissement du tableau de variations

Le tableau de variations est la synthèse de tous les calculs

14.1.8 Construction du graphe

Construction du graphe à la main ou sur machine.
Attention : un graphe est toujours approximatif, et n'est jamais très précis ; il y a toujours des approxximations. S'il faut le faire le mieux possible, il y aura toujours des erreurs.

14.2 Etude des branches infinies

14.2.1 Définition

On dit que f, et par extension sa représentation graphique, admet une branche infinie en $x_0 \in \mathcal{D}_f$ si :
- x_0 est infini
- Ou bien x_0 est fini et la limite de f en x_0 est infinie.

Exercice 1 :

Etudier les branches infinies de $f(u) = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ et de $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

14.2.2 Définition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction numérique de domaine de définition $\mathcal{D}_f$ tel que $\mathcal{D}_f$ contienne un intervalle du type $[a\ +\infty[$ ou $]-\infty\ a]$.
Soit Γ sa courbe représentative ; on dit que la droite Δ d'équation $y = ax + b$ est asymptote à Γ si :

$$\lim_{|x|\to+\infty} \left(f(x) - (ax+b)\right) = 0$$

Remarque 1 :

Plus généralement :
2 fonctions f et g sont asymptotes au voisinage de l'infini, si $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \left(f(x) - g(x)\right) = 0$

Exercice 2 :

Soit $\mathcal{C}$ la représentation graphique dans un repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ de la fonction f.
Démontrez, dans les cas suivants, que $\mathcal{C}$ est asymptote à une parabole $\mathcal{P}$:

1. $f(x) = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5}{4x}$
2. $f(x) = -2x^2 + e^{-|x|}$
3. $f(x) = -\dfrac{x^4-1}{x^2+2}$

14.2.3 Comment trouver des droites asymptotes ?

1. **Si $x_0 \in \mathbb{R}$ et x_0 fini**

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} = \pm\infty$	La droite $x = x_0$ est asymptote à droite
$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} = \pm\infty$	La droite $x = x_0$ est asymptote à gauche

2. **Si $x_0 \in \mathbb{R}$ est infini :** $x_0 = \pm\infty$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}$ n'existe pas		Il n'y a pas de direction asymptotique
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} = \pm\infty$		Nous avons une branche parabolique de direction Oy
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} = a$ où a est fini		Nous avons une direction asymptotique de coefficient directeur a
	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = b$	La droite Δ d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de f
	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$	Nous avons une branche parabolique dans la direction de la droite $y = ax$
	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax)$ n'existe pas	Nous avons une direction asymptotique, sans asymptote ni branche parabolique

Exercice 3 :

Recherchez les éventuelles asymptotes des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x}$
2. $f(x) = x - \sqrt{x}$
3. $f(x) = x + \sin x$
4. $f(x) = x \sin x$

14.3 Un exemple d'étude de fonction

Etude et représentation de la fonction $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

14.3.1 Domaine de définition

De manière évidente, f est définie pour $x \neq -1$ et $\dfrac{x-1}{x+1} \geqslant 0$, c'est à dire que

$$\mathcal{D}_f =]-\infty\ -1[\cup [+1\ +\infty[$$

14.3.2 Domaine de continuité

f est continue sur $\mathcal{D}_f$ comme composée et produit de fonctions continues sur $\mathcal{D}_f$

14.3.3 Domaine de dérivabilité

Le seul problème concernant la dérivabilité concerne le point où la racine carrée s'annule ; ainsi, à priori, $\mathcal{D}_{f'} =]-\infty\ -1[\cup]+1\ +\infty[$; il restera à étudier la dérivabilité en $x = +1$; il faut remarquer que $f(1) = 0$

14.3.4 Etude des limites

1. **Etude en ∞**

   (a) <u>Etude en $+\infty$</u>

   Pour $x \neq 0$, on écrit différemment f :

$$\begin{aligned} f(x) = &\quad x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \\ = &\quad x\sqrt{\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}} \\ = &\quad x\sqrt{\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}} \end{aligned}$$

   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}} = 1$, et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

(b) Etude en $-\infty$
L'étude en $-\infty$ n'est pas moins difficile et est identique en ce qui concerne les factorisations ou autres. Nous avons donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

2. **Etude en $x = -1$**
Nous devons donc étudier $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)$. Il est assez facile de vérifier que $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} \dfrac{x-1}{x+1} = +\infty$, et donc que $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} = -\infty$

14.3.5 Etude des branches infinies

La courbe représentative de f admet 3 branches infinies en $x_0 = -1$, en $+\infty$ et en $-\infty$. En $x_0 = -1$, elle admet la droite $x_0 = -1$ comme asymptote.
Recherche des asymptotes en ∞

1. Pour trouver les asymptotes, nous calculons $\dfrac{f(x)}{x}$, puis nous en cherchons la limite en ∞ de $\dfrac{f(x)}{x}$.
Or, $\dfrac{f(x)}{x} = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$, donc, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}} = 1$.
Il y a donc une direction asymptotique de coefficient directeur 1
2. Etudions maintenant $f(x) - x$. Nous avons

$$\begin{aligned}
f(x) - x = &\ x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - x \\
= &\ x\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 1\right) \\
= &\ x\left(\frac{\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 1\right)\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1\right)}{\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1\right)}\right) \\
= &\ x\left(\frac{\left(\frac{x-1}{x+1} - 1\right)}{\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1\right)}\right) \\
= &\ x\left(\frac{(x-1-(x+1))}{(x+1)\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1\right)}\right) \\
= &\ x\left(\frac{-2}{(x+1)\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1\right)}\right)
\end{aligned}$$

Donc $f(x) - x = \dfrac{-2x}{(x+1)\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1\right)}$

3. Or, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-2x}{(x+1)} = -2$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1\right)} = \dfrac{1}{2}$, ainsi, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - x = -1$
4. Au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, Γ, la courbe représentative de f admet pour asymptote, la droite Δ d'équation $y = x - 1$

14.3.6 Etude de la dérivabilité

Posons $\alpha(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, pour $x \neq +1$; nous avons alors $f(x) = x\sqrt{\alpha(x)}$. Le choix de $x \neq +1$ n'est pas anodin puisque $\alpha(1) = 0$ et la fonction $\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en $x = 0$. Nous aurons donc à étudier la dérivabilité en $x = +1$

1. **Calcul de la dérivée sur** $]-\infty\ -1[\cup]+1\ +\infty[$
   Nous avons donc $f(x) = x\sqrt{\alpha(x)}$, d'où le calcul de $f'(x)$ nous donne :
$$f'(x) = \sqrt{\alpha(x)} + x\frac{\alpha'(x)}{2\sqrt{\alpha(x)}}$$
   Or, $\alpha'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$, donc
$$\begin{aligned} f'(x) = &\ \sqrt{\alpha(x)} + x\frac{\alpha'(x)}{2\sqrt{\alpha(x)}} \\ = &\ \sqrt{\alpha(x)} + \frac{x}{(x+1)^2\sqrt{\alpha(x)}} \\ = &\ \frac{\alpha(x)(x+1)^2 + x}{(x+1)^2\sqrt{\alpha(x)}} \\ = &\ \frac{\frac{x-1}{x+1}(x+1)^2 + x}{(x+1)^2\sqrt{\alpha(x)}} \\ = &\ \frac{(x-1)(x+1)+x}{(x+1)^2\sqrt{\alpha(x)}} \\ = &\ \frac{x^2+x-1}{(x+1)^2\sqrt{\alpha(x)}} \end{aligned}$$

2. **Signe de la dérivée**
   Comme $(x+1)^2$ et $\sqrt{\alpha(x)}$ sont strictement positifs, le signe de la dérivée ne dépend que de celui de x^2+x-1 qui est un polynôme du second degré dont nous connaissons facilement les racines $x_0 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ or, $x_0 \cong -1,618$ et $x_1 \cong 0,618$; nous avons $x_0 \in \mathcal{D}_f$ et $x_1 \notin \mathcal{D}_f$; en x_0, la dérivée s'annule en changeant de signe ; c'est donc un extrémum ; nous avons un extremum en $M\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\sqrt{2+\sqrt{5}}\right)$, c'est à dire, après calcul, en $M(-1,62, -3,33)$

14.3.7 Tableau de variations

Le tableau de variations représente donc la synthèse de l'étude.

x	$-\infty$		$x_0 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$		-1		$+1$			$+\infty$
$f'(x)$		$++$	0	$--$	$\Vert$	non définie	$\Vert$		$++$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow\nearrow$	M	$\searrow\searrow$	$\Vert$	non définie	$\vert\ 0$	$\nearrow$	$\nearrow$	∞

14.3.8 Points singuliers

Le point $A(1,0)$ est un point d'arrêt, et il est évidemment intéressant d'y étudier la dérivée :
$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x\to+1 \\ x>1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = &\ \lim_{\substack{x\to+1 \\ x>1}} x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \times \frac{1}{x-1} \\ = &\ \lim_{\substack{x\to+1 \\ x>1}} x\sqrt{\frac{1}{x^2-1}} \\ = &\ +\infty \end{aligned}$$

La fonction admet donc une tangente verticale à gauche.

14.3.9 Position par rapport à l'asymptote

Nous faisons donc la différence $f(x) - (x-1)$,

Position par rapport à l'asymptote pour $x > 1$

$$\begin{aligned} f(x) - (x-1) = &\ x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - (x-1) \\ = &\ \sqrt{x-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}} - \sqrt{x-1}\right) \\ = &\ \sqrt{x-1}\left(\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x+1}}\right) \end{aligned}$$

Le signe de cette quantité ne dépend que de celui de $x-\sqrt{x^2-1}$; or, pour $|x| \geqslant 1$, $\sqrt{x^2-1} < \sqrt{x^2} = |x|$, ce qui veut dire que si $x > 1$, alors $x - \sqrt{x^2-1} > 0$, et le graphe est au-dessus de l'asymptote

Position par rapport à l'asymptote pour $x < -1$

$$\begin{aligned} f(x) - (x-1) = &\ x\sqrt{-\frac{1-x}{x+1}} + (1-x) \\ = &\ \sqrt{1-x}\left(\frac{x}{\sqrt{-x-1}} + \sqrt{1-x}\right) \\ = &\ \sqrt{1-x}\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{-x-1}}\right) \end{aligned}$$

Le signe de cette quantité ne dépend que de celui de $x+\sqrt{x^2-1}$; or, pour $|x| \geqslant 1$, $\sqrt{x^2-1} < \sqrt{x^2} = |x|$, ce qui veut dire que si $x < -1$, alors $x + \sqrt{x^2-1} < 0$, et le graphe est au-dessous de l'asymptote

14.4 Graphe

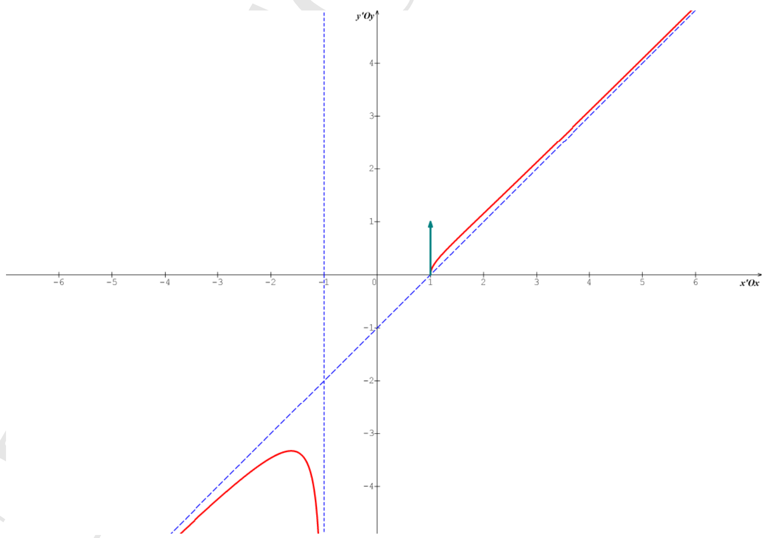


FIGURE 14.1 – Le graphe représentatif de f

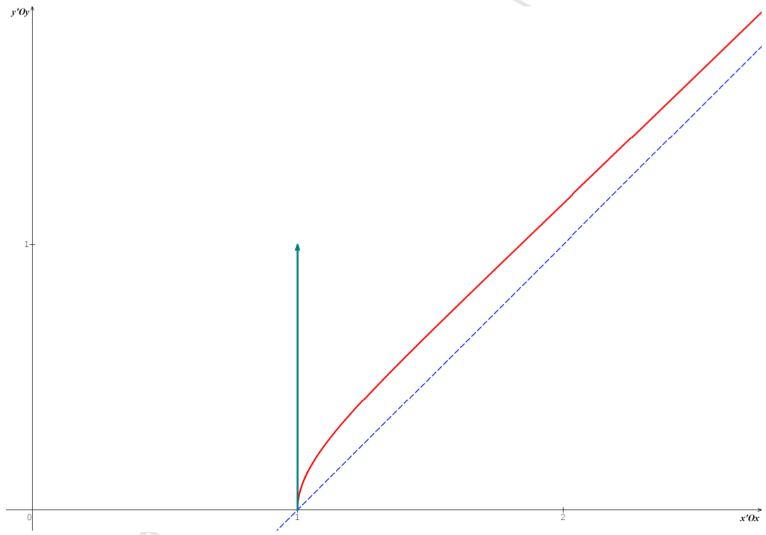


FIGURE 14.2 – Un agrandissement au voisinage de $x = 1$

Chapitre 15

Calcul intégral

Vous trouverez dans ce chapitre un exposé très élémentaire du calcul intégral. Un exposé rigoureux et plus général sera fait dans le cours L_1, et dans ce cours de L_1 nous justifierons des résultats admis en adoptant d'autres points de vue.

15.1 Primitives

Nous savons ce qu'est une fonction dérivée ; si $F(x) = x^3+3x-1$, sa fonction dérivée f est $f(x) = 3x^2+3$
Notre problème est :

Connaissant f, déterminer F que l'on appelle **primitive** de f.
En fait, on résoud l'équation différentielle $F' = f$

15.1.1 Définition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $[a; b]$. On dit que la fonction réelle F définie et dérivable sur $[a; b]$ est une primitive de f si, pour tout $x \in [a; b]$, $F'(x) = f(x)$

Exemple 1 :

1. $g(x) = \sin x$ est une primitive de $f(x) = \cos x$
2. $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ est une primitive de $f(x) = x^2$
3. Les primitives de $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ sont de la forme $f(x) = k$ où $k \in \mathbb{R}$

15.1.2 Théorème : il y a plusieurs primitives

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $[a; b]$. Supposons que f admette, sur cet intervalle, une primitive F
Alors f admet, sur cet intervalle, plusieurs primitives qui sont toutes de la forme $G = F + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

Démonstration

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, $F + \lambda$ est une primitive de f, car $(F+\lambda)' = F^{'} + \lambda^{'} = F^{'} = f$
2. Réciproquement, soit G une primitive de F, alors, $(G-F)^{'} = G^{'} - F^{'} = f - f = 0$; ce qui veut dire que $(G-F) = k$ où $k \in \mathbb{R}$ quelconque.
   Donc, $G = F + k$

Exemple 2 :

1. $g(x) = \sin x + k$ où $k \in \mathbb{R}$ décrit **toutes les primitives** de $f(x) = \cos x$
2. $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + k$ où $k \in \mathbb{R}$ décrit toutes les primitives de $f(x) = x^2$

15.1.3 Proposition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $[a; b]$ qui admette, sur cet intervalle, deux primitives F et G.
On suppose de plus, qu'il existe $x_0 \in [a; b]$ tel que $F(x_0) = G(x_0)$
Alors, pour tout $x \in [a; b]$ nous avons $F(x) = G(x)$

Démonstration

Il suffit de montrer que, pour tout $x \in [a; b]$ nous avons $F(x) - G(x) = 0$
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $G = F + \lambda$; ainsi, pour tout $x \in [a; b]$ nous avons $F(x) - G(x) = \lambda$; en particulier pour x_0. Nous aurons alors, $F(x_0) - G(x_0) = 0 = \lambda$
Donc, pour tout $x \in [a; b]$, $F(x) = G(x)$

Remarque 1 :

Ceci exprime que, si une fonction admet des primitives, il en existe une et une seule qui admet une valeur donnée, en un point donné.
Ce qui justifie l'expression :« La primitive qui s'annule en x_0 » par exemple.

15.1.4 Comment calculer des primitives ?

1. **Le polynômes**

   C'est bien entendu les plus simples : les primitives de Ax^n sont de la forme $A\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$ où $k \in \mathbb{R}$
2. **Les fonctions trigonométriques**
   (a) Les primitives de $\sin(ax + b)$ avec $a \neq 0$ sont de la forme $-\dfrac{1}{a}\cos(ax + b) + k$ où $k \in \mathbb{R}$
   (b) Les primitives de $\cos(ax + b)$ avec $a \neq 0$ sont de la forme $\dfrac{1}{a}\sin(ax + b) + k$ où $k \in \mathbb{R}$
   (c) Les primitives de $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ avec $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ sont de la forme $\tan x + k$ où $k \in \mathbb{R}$
3. **Les fonctions puissances**
   (a) Les primitives de x^n avec $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$ et $x \neq 0$ sont de la forme $\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$ où $k \in \mathbb{R}$
   (b) Les primitives de x^r avec $r \in \mathbb{Q}^+$ et $x > 0$ sont de la forme $\dfrac{x^{r+1}}{r+1}$ où $k \in \mathbb{R}$
   (c) Les primitives de x^r avec $r \in \mathbb{Q}^- - \{-1\}$et $x > 0$ sont de la forme $\dfrac{x^{r+1}}{r+1}$ où $k \in \mathbb{R}$
4. **Fonctions exponentielles et logarithmes**
   (a) Pourvu que les fonctions soient définies, les primitives des fonctions $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sont de la forme $\ln|u(x)| + k$ où $k \in \mathbb{R}$
   (b) Les primitives des fonctions $u'(x)\, e^{u(x)}$ sont de la forme $e^{u(x)} + k$ où $k \in \mathbb{R}$
   (c) Pourvu que les fonctions soient définies, les primitives des fonctions x^α où $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$ et $x \geq 0$ sont de la forme $\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k$ où $k \in \mathbb{R}$

Exercice 1 :

Donner l'ensemble des primitives des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \sin^4 x \cos x$,
2. $f_2(x) = \dfrac{1}{(2x+1)^2}$
3. $f_3(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,
4. $f_4(x) = xe^{-x^2}$
5. $f_5(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

15.2 Notion d'intégrale

15.2.1 Résultat admis

On admet que si une fonction f est continue sur un intervalle I, elle admet, sur I une primitive F

15.2.2 Définition

Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle $[a;b]$; soit F une primitive de f sur $[a;b]$; soit $c \in [a;b]$ et $d \in [a;b]$.
On appelle intégrale de c à d de la fonction f le réel $F(d) - F(c)$, et on note :

$$\boxed{\int_c^d f(t)\,dt = F(d) - F(c) = [F(t)]_c^d}$$

Remarque 2 :

1. Dans l'expression $\displaystyle\int_c^d f(t)\,dt$, t peut être remplacé par n'importe quelle lettre : on dit que t est **une variable muette**.

   Exemple : $\displaystyle\int_c^d f(t)\,dt = \int_c^d f(u)\,du$
2. Nous avons aussi $\displaystyle\int_a^a f(t)\,dt = 0$
3. De plus, $\displaystyle\int_c^d f(t)\,dt = F(d) - F(c) = -(F(c) - F(d)) = -\int_d^c f(t)\,dt$
4. On admet que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ **représente l'aire entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites** $x = a$ **et** $x = b$ (cf courbe 15.1)

Exemple 3 :

Quelques exemples très simples

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$
2. Le calcul de $\displaystyle\int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

15.2.3 Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, et soit $c \in [a;b]$
L'unique primitive F de f sur l'intervalle $[a;b]$ telle que $F(c) = 0$ est définie, pour tout $x \in [a;b]$ par :

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$$

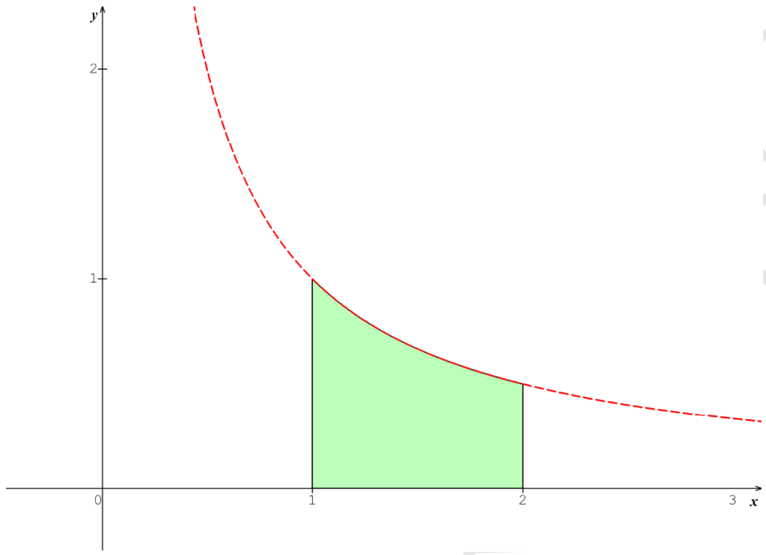


FIGURE 15.1 – $\int_1^2 \frac{1}{t} dt = \ln 2$ représente l'aire comprise entre la courbe $\frac{1}{t}$, l'axe des abscisses et les droites $x = 1$ et $x = 2$

Démonstration

Soit G une primitive de f. Alors, pour tout $x \in [a; b]$, $\int_c^x f(t)\, dt = G(x) - G(c)$
Donc, $F(x) = G(x) - G(c)$ avec $F(c) = 0$ et $F'(x) = G'(x) = f(x)$
Nous avons donc $F = G$
Ce que nous voulions.

Remarque 3 :

1. $\int_c^x f(t)\, dt$ est **LA** primitive de f qui s'annule en $x = c$
2. Pour $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{x}$ est une fonction continue ; cette fonction admet donc des primitives qui sont toutes de la forme : $L(x) = \int_c^x \frac{dt}{t}$ où $c > 0$ et $x > 0$; la primitive de $\frac{1}{x}$ qui s'annule en $x = 1$ est donnée par : $\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$

Exercice 2 :

Soit $F(x) = \int_2^x \frac{1}{1 + s^2 + s^3} ds$. Trouver $F'(3)$

Exercice 3 :

Soit f une fonction numérique réelle définie et continue sur l'intervalle fermé borné $[-1; +1]$. Démontrer que la fonction réelle F définie par

$$F(x) = \int_0^{\sin x} f(t)\, dt$$

est dérivable et vérifie la relation

$$F^{'}(x) = \cos x \times f(\sin x)$$

15.2.4 Relation de Chasles

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction continue sur I, et a, b et c, 3 points de I Alors,

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt}$$

Démonstration

La démonstration est simple. Soit F une primitive de f. Alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = (F(b) - F(c)) + (F(c) - F(a)) = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$

Remarque 4 :

Il est essentiel de noter que la relation de Chasles s'étend à tout triplet a, b et c de réels, dès que la fonction f est intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $[\min(a,b,c)\,;\sup(a,b,c)]$

15.2.5 Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I
Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\boxed{\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,dt = \lambda\int_a^b f(t)\,dt + \mu\int_a^b g(t)\,dt}$$

Démonstration

f et g étant continues sur I, y admettent des primitives appelées respectivement F et G. Alors, une primitive de la fonction $\lambda f + \mu g$ est donnée par $\lambda F + \mu G$. Donc,

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,dt &= [\lambda F(t) + \mu G(t)]_a^b \\
&= \lambda F(b) + \mu G(b) - (\lambda F(a) + \mu G(a)) \\
&= \lambda(F(b) - F(a)) + \mu(G(b) - G(a)) \\
&= \lambda\int_a^b f(t)\,dt + \mu\int_a^b g(t)\,dt
\end{aligned}$$

15.2.6 Synthèse

On appelle $\mathcal{C}([a;b])$ l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle $[a;b]$; alors :

1. $\mathcal{C}([a;b])$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$
2. L'application $\Phi : \mathcal{C}([a;b]) \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $f \in \mathcal{C}([a;b])$, $\Phi(f) = \int_a^b f(t)\,dt$ est une forme linéaire

Remarque 5 :

VOICI UNE REMARQUE IMPORTANTE :

Nous n'avons pas $\int_a^b (fg)(t)\,dt = \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\left(\int_a^b g(t)\,dt\right)$

Exemple : Si nous choisissons $f(t) = t$ et $g(t)\dfrac{1}{t}$ alors, $\int_1^2 (fg)(t)\,dt = \int_1^2 dt = 1$, alors que :

— $\displaystyle\int_1^2 f(t)\ dt = \int_1^2 t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^2 = \frac{3}{2}$

— $\displaystyle\int_1^2 g(t)\ dt = \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt = [\ln t]_1^2 = \ln 2$

15.2.7 Théorème : positivité de l'intégrale

Soit $f \in \mathcal{C}([a;b])$ une fonction continue sur $[a;b]$ (avec $a < b$)
Supposons que pour tout $x \in [a;b]$, nous avons $f(x) \geqslant 0$; alors

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0}$$

Démonstration

Soit F une primitive de f ; alors $F' = f$, et comme f est positive sur $[a;b]$, alors F est croissante sur $[a;b]$, et nous avons donc $F(b) \geqslant F(a)$

Comme $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$, nous avons le résultat.

Remarque 6 :

1. De la même manière, si, pour tout $x \in [a;b]$, nous avons $f(x) \leqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leqslant 0$
2. **La réciproque est fausse :**

   Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{+3} t^3\,dt$ est positive. $f(t) = t^3$ est-elle positive sur $[-1;3]$?

Exercice 4 :

Montrer que si f est positive sur un intervalle I, et que si $a \in I$, $b \in I$, $c \in I$ et $d \in I$ tels que $a < c < d < b$, alors

$$\int_c^d f(t)\,dt \leqslant \int_a^b f(t)\,dt$$

15.2.8 Corollaire

Soit $f \in \mathcal{C}([a;b])$ et $g \in \mathcal{C}([a;b])$ deux fonctions continues sur $[a;b]$ (avec $a < b$) telles que pour tout $x \in [a;b]$, nous avons $f(x) \leqslant g(x)$; alors

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt}$$

Démonstration

Il suffit d'applique le théorème 15.2.7 à la fonction $\Phi(x) = g(x) - f(x)$, puis utiliser la linéarité de l'intégrale (Théorème 15.2.5)

Remarque 7 :

1. On dit que l'intégrale **respecte la relation d'ordre**
2. Comme tout à l'heure, la réciproque est fausse : ce n'est pas parce que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ que nous avons $f(x) > g(x)$ [1]

1. Question posée au CAPES 2023

En effet, montrons le en prenant un contre-exemple :

→ Si $f(x) = x^2$ alors $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{-1}{3} = \frac{2}{3}$

→ Et maintenant, si $g(x) = x$ alors $\displaystyle\int_{-1}^{1} x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

→ Nous avons bien $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x) \,\mathrm{d}x > \int_{-1}^{1} g(x) \,\mathrm{d}x$, mais nous n'avons $f(x) > g(x)$ ni $g(x) > f(x)$ sur l'intervalle $[-1; +1]$

15.2.9 Théorème : intégrales et valeur absolue

Soit $f \in \mathcal{C}([a;b])$ une fonction continue sur $[a;b]$ alors,

$$\boxed{\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dt}$$

Démonstration

Pour tout $t \in [a;b]$, nous avons $-|f(t)| \leqslant f(t) \leqslant |f(t)|$
L'intégrale respectant la relation d'ordre, nous avons alors :

$$-\int_a^b |f(t)|\,dt \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$$

Dont nous déduisons :

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$$

15.2.10 Corollaire

Soit f continue sur un intervalle I, et on suppose que pour tout $x \in I$, $|f(x)| \leqslant M$; alors, pour tout $a \in I$ et tout $b \in I$,

$$\boxed{\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant M\,|a-b|}$$

Démonstration

Supposons $a < b$ Alors,d'après le théorème ci-dessus,

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f|(t)\,dt \leq M(b-a) = M\,|a-b|$$

Supposons $b < a$ Alors, $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \left|\int_b^a f(t)\,dt\right| \leq \int_b^a |f|(t)\,dt \leq M(a-b) = M\,|a-b|$

Ce que nous voulions

15.2.11 Valeur moyenne

Soit $f \in \mathcal{C}([a;b])$ une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$
On appelle valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a;b]$, le nombre μ tel que :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque 8 :

1. C'est une notion que l'on retrouve beaucoup en physique *(intensité, puissance moyenne)* ou même en probabilité.
2. Ce n'est pas non plus parce que la valeur moyenne d'une fonction est nulle que la fonction est nulle [2]

   Il suffit de prendre un contre exemple
   En effet, soit $f(x) = x$; alors, la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[-1;+1]$ est donnée par
   $$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0$$
   Alors que la fonction f est très loin d'être nulle sur l'intervalle $[-1;+1]$

15.2.12 Théorème

Soit $f \in \mathcal{C}([a;b])$, et m et M sont les bornes de f sur l'intervalle $[a;b]$
Alors, la valeur moyenne μ de f est telle que
$$m \leq \mu \leq M$$

Démonstration

On suppose $a < b$ Comme $m \leq f \leq M$, nous avons, en utilisant la positivité de l'intégrale $\int_a^b m dt \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b M dt$, c'est à dire $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant M(b-a)$; comme $b-a > 0$, on peut diviser par $b-a$ sans changer le sens des inégalités ; d'où le résultat.

On suppose $b < a$ La démonstration est en tout point semblable ; on part de $\int_b^a m dt \leqslant \int_b^a f(t)\,dt \leqslant \int_b^a M dt$, et on termine ensuite, en faisant attention au fait que $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt = \frac{1}{a-b}\int_b^a f(t)\,dt$

15.2.13 Corollaire

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$, alors, il existe $c \in]a;b[$ tel que
$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

Démonstration

f étant continue sur $[a;b]$ y est bornée, atteint ses bornes, et toutes les valeurs entre ses bornes *(c'est le théorème de la valeur intermédiaire)* ; comme $m \leqslant \mu \leqslant M$ il existe donc $c \in]a;b[$ tel que

15.3 Exercices sur le calcul intégral

Exercice 5 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'intégrale $I_n = \int_1^n \frac{\sin nx}{nx}\,dx$

1. Démontrer que $|I_n| \leqslant \int_1^n \frac{1}{nx}\,dx$
2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

2. Question posée au CAPES 2023

Exercice 6 :

Que pensez vous des égalités suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{\sin x} dx = 0$
2. $\displaystyle\int_{1}^{+2} \sqrt{1+x^8} dx = \frac{\sqrt{2}}{8}$
3. $\displaystyle\int_{1}^{+4} \left(e^x - x\right) dx = -1$
4. $\displaystyle\int_{-1}^{-2} \left(x^2+1\right) dx = \frac{-10}{3}$

Exercice 7 :

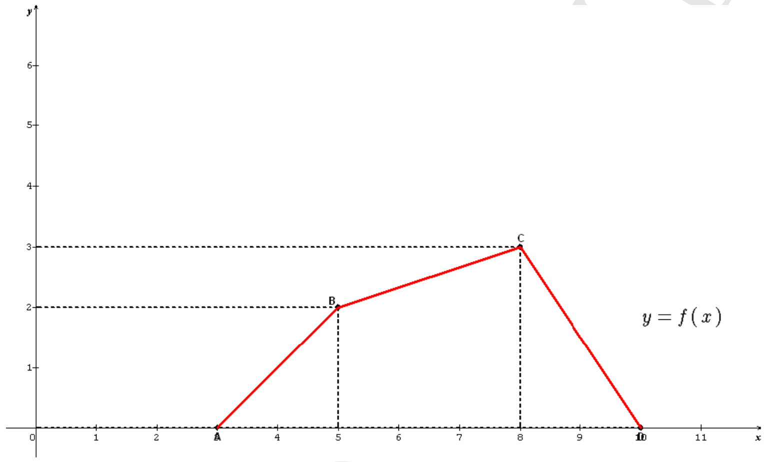


FIGURE 15.2 – Trouver une formule pour f

1. Trouver une expression de f dont le graphe est ligne brisée formant le quadrilatère $ABCD$ (figure 15.2)
2. Calculer $\displaystyle\int_{3}^{10} f(t)\, dt$
3. Trouver l'aire du quadrilatère $ABCD$ au moyen de la géométrie et comparer avec la question précédente

Exercice 8 :

Soit $f : [0;1] \to [0;1]$ une fonction intégrable sur l'intervalle $[0;1]$ et on appelle, pour $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$, $I_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} f(t)\, dt$

1. Montrez que pour $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$, $0 \leq I_n \leq 1$
2. Montrez que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}, n\geq 2}$ est croissante.
3. Montrez que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^1 f(t)\, dt$

Exercice 9 :

Trouver un encadrement de chacune des intégrales suivantes, si elles existent :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{(3+2\cos t)^2}$
2. $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^n}}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$; en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$

Exercice 10 :

Calculez $\displaystyle\int_{-3}^{+5} |x-1| + |x| + |x+1|\,dx$

Exercice 11 :

On suppose que :

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leqslant t \leqslant 5 \\ (t-6)^2 & \text{si } 5 \leqslant t \leqslant 6 \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[0,6]$
2. Trouver $\displaystyle\int_0^6 f(t)\,dt$
3. Trouver $\displaystyle\int_0^6 f(x)\,dx$
4. Soit $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)\,ds$. Donner la formule donnant $F(t)$ et tracer le graphe de F
5. Calculer $F'(t)$ pour $t \in [0,6]$

Exercice 12 :

Démontrer que si $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, alors, $\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}x \leq \sin x \leq x$; en déduire un encadrement de $\displaystyle\int_{0,3}^{0,7} \sin t dt$

Exercice 13 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous appelons $u_n = \displaystyle\int_0^n \frac{1}{1+t^2}\,dt$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée.

Exercice 14 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est défini par $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+2x+4x^2}\,dx$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $u_n \geqslant 0$
2. Etudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
3. Trouver un réel $a > 0$ tel que, pour tout $x \in [a;b]$, nous ayions $\dfrac{1}{1+2x+4x^2} \leqslant a$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 15 :

Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

On appelle $M = \sup\limits_{x\in[0;1]} f(x)$ et $m = \inf\limits_{x\in[0;1]} f(x)$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant -mM$

15.4 Etude de $\int_c^x f(t)\,dt$

Nous commençons par un outil très important et pourtant très simple, de calcul de primitives ; de plus la démonstration en est très élémentaire.

15.4.1 Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle $[a;b]$, et telles que les dérivées soient continues *(Dans ces cas, on dit que u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$)*
Alors, pour tout $x \in [a;b]$

$$\boxed{\int_a^x u(t)\,v'(t)\,dt = [u(t)\,v(t)]_a^x - \int_a^x u'(t)\,v(t)\,dt}$$

Démonstration

Nous avons :$(u(t)\,v(t))' = u(t)\,v'(t) + u'(t)\,v(t)$
Les dérivées étant continues, donc intégrables, nous pouvons écrire :

$$\int_a^x (u(t)\,v(t))'\,dt = [u(t)\,v(t)]_a^x = \int_a^x u(t)\,v'(t)\,dt + \int_a^x u'(t)\,v(t)\,dt$$

D'où le résultat.

Remarque 9 :

L'intégration par parties permet de calculer des intégrales peu commodes ! !

Exemple 4 :

Calculons $\int_0^x t\sin t dt$. Pour ce faire, on pose :

$$\left\{\begin{array}{ll} u(t) = t & u'(t) = 1 \\ v'(t) = \sin t & v(t) = -\cos t \end{array}\right\}$$

Donc,

$$\int_0^x t\sin t dt = [-t\cos t]_0^x - \int_0^x -\cos t dt = -x\cos x + \int_0^x \cos t dt = -x\cos x + \sin x$$

Toutes les primitives de $t\sin t$ sont donc de la forme $-x\cos x + \sin x + \lambda$

15.4.2 Lemme de Riemann-Lebesgue pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin nt dt = 0$

Démonstration

Faisons une intégration par parties en posant :

$$\begin{array}{ll} u(t) = f(t) & u'(t) = f'(t) \\ v'(t) = \sin nt & v(t) = -\dfrac{1}{n}\cos nt \end{array}$$

De telle sorte que

$$\int_a^b f(t)\sin nt dt = \left[-\frac{f(t)}{n}\cos nt\right]_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos nt dt$$

Or,

$$\left[-\frac{f(t)}{n}\cos nt\right]_a^b = \frac{f(a)\cos na - f(b)\cos nb}{n}$$

Et en utilisant la valeur absolue,

$$\left|\frac{f(a)\cos na - f(b)\cos nb}{n}\right| \leqslant \frac{|f(a)| + |f(b)|}{n}$$

Ce qui termine de montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{f(a)\cos na - f(b)\cos nb}{n} = 0$

Ensuite $\displaystyle\left|\frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos nt dt\right| \leqslant \frac{1}{n}\int_a^b \left|f'(t)\cos nt\right| dt \leqslant \frac{1}{n}\int_a^b \left|f'(t)\right| dt$

Par hypothèse, f est de classe $\mathcal{C}^1$, et donc, f', et par conséquent $\left|f'\right|$ sont intégrables sur $[a;b]$, ce qui montre que $\displaystyle\int_a^b \left|f'(t)\right| dt$ est un nombre fixe ; d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\int_a^b \left|f'(t)\right| dt = 0$

D'où, en faisant la synthèse des résultats, nous avons bien $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin nt dt = 0$

15.4.3 Changement de variables

Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I. Alors, pour toute fonction f définie et continue sur $\varphi(I)$, et tout $x_0 \in I$, nous avons :

$$\int_{x_0}^x f[\varphi(u)]\,\varphi'(u)\,du = \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(t)\,dt$$

Démonstration

Elle est très simple et s'obtient à partir de la dérivée des fonctions composées.

Remarque 10 :

Seuls les changements de variable monotone ont un intérêt pratique ; Dans ces cas, $\varphi([x_0;x]) = [\varphi(x_0);\varphi(x)]$ ou $\varphi([x_0;x]) = [\varphi(x);\varphi(x_0)]$ suivant que φ est croissante ou décroissante.

Exemple 5 :

La démarche de changement de variables est largement inspirée par celle des physiciens.

Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+\sqrt{1+t}}$

On effectue le changement de variables $z = \sqrt{1+t}$; nous calculons maintenant $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ qui se lit : **"dérivée de z par rapport à t"**

Donc, $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2\sqrt{1+t}} = \dfrac{1}{2z}$; donc, $\begin{cases} \mathrm{d}t = 2z\mathrm{d}z \\ t = z^2 - 1 \end{cases}$

Donc, $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+\sqrt{1+t}} = \int_1^{\sqrt{1+x}} \frac{2z\mathrm{d}z}{1+z}$ Il ne reste plus qu'à décomposer $\dfrac{2z}{1+z}$ en éléments simples ; or, $\dfrac{2z}{1+z} = 2 - \dfrac{2}{1+z}$, et nous en déduisons que $\displaystyle\int_1^{\sqrt{1+x}} \frac{2z\mathrm{d}z}{1+z} = \int_1^{\sqrt{1+x}} 2\mathrm{d}z - 2\int_1^{\sqrt{1+x}} \frac{\mathrm{d}z}{1+z}$

D'où

$$\boxed{\int_0^x \frac{dt}{1+\sqrt{1+t}} = 2\left[\sqrt{1+x} - 1\right] - 2\ln\left(\sqrt{1+x}+1\right) + 2\ln 2}$$

Exercice 16 :

1. Calculer $\displaystyle\int_2^5 \frac{t^3 dt}{\sqrt{t-1}}$ en effectuant le changement de variable $z = \sqrt{t-1}$
2. Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+\sqrt{t}}$
   Avant d'entamer la résolution, il faut se poser plusieurs questions : domaine de validité ? (ici, $x \geq 0$) Quel changement de variable ? Ici, le plus évident est $u = \sqrt{t}$

15.4.4 Exercice résolu

A l'aide du changement de variable $t = e^x$, calculer

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\, e^x\, dx$$

Le fait que le changement de variable nous soit donné nous simplifie grandement la vie ! !
Si $t = e^x$, alors $\dfrac{dt}{dx} = e^x$, ce qui veut dire que $dt = e^x dx$
D'autre part, si $0 \leq x \leq 1$, alors $1 \leq t \leq e$, et l'intégrale devient :

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\, e^x\, dx = \int_1^e \frac{t^2-1}{t^2+1}\, dt$$

Il faut donc, maintenant, décomposer en éléments simples $\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$, et c'est très facile, car

$$\frac{t^2-1}{t^2+1} = \frac{t^2+1-2}{t^2+1} = 1 - \frac{2}{t^2+1}$$

D'où, le calcul de l'intégrale nous donne :

$$\int_1^e \frac{t^2-1}{t^2+1}\, dt = \int_1^e 1\, dt - \int_1^e \frac{2}{t^2+1}\, dt$$

Ce qui nous donne

$$\int_1^e \frac{t^2-1}{t^2+1}\, dt = e - 1 - [2\arctan t]_1^e = e - 1 - 2\arctan e + \frac{\pi}{2}$$

Au final,

$$\boxed{\int_0^1 \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\, e^x\, dx = e - 1 - 2\arctan e + \frac{\pi}{2}}$$

15.4.5 Applications du changement de variables

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction paire ; soit $a > 0$, et on suppose $[-a; a] \subset I$; alors :
$$\int_{-a}^{+a} f(t)\, \mathrm{d}t = 2\int_0^{+a} f(t)\, \mathrm{d}t$$
2. Par contre, si f est impaire sur I, alors
$$\int_{-a}^{+a} f(t)\, \mathrm{d}t = 0$$
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique et de période T ;alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$
$$\int_a^{a+T} f(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\, \mathrm{d}t$$

Démonstration

1. $\int_{-a}^{+a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{+a} f(t)\,\mathrm{d}t$

   En effectuant le changement de variable $t = -u$ dans $\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$, et on obtient :

$$\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{a}^{0} f(-t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(-t)\,\mathrm{d}t$$

   Comme f est paire, nous avons $f(-t) = f(t)$, ce qui fait que

$$\int_{-a}^{+a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{+a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{+a} f(t)\,\mathrm{d}t$$

2. Si f est impaire, nous faisons le même changement de variable $t = -u$, mais, nous avons $f(-t) = -f(t)$, ce qui fait que :

$$\int_{-a}^{+a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} -f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{+a} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{0}^{+a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{+a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

3. En utilisant la relation de Chasles,

$$\int_{a}^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{T} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{T}^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t$$

   Dans l'intégrale $\int_{a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ nous faisons le changement de variable $u = x - T$ et donc $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ et si $a \in [a;0]$, alors $x \in [a+T;T]$, et

$$\int_{a}^{0} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_{a+T}^{T} f(u+T)\,\mathrm{d}u = \int_{a+T}^{T} f(u)\,\mathrm{d}u$$

   Ce qui termine de montrer que

$$\int_{a}^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{T} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple 6 :

Exemples d'applications

1. $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos u\mathrm{d}u = \int_{0}^{2\pi} \cos u\mathrm{d}u = 2\int_{0}^{+\pi} \cos u\mathrm{d}u$
2. $\int_{-1}^{+1} |u|\,\mathrm{d}u = 2\int_{0}^{1} u\mathrm{d}u$
3. $\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = 2\int_{0}^{+\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = [\arcsin u]_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{3}$
4. Pour f périodique et de période T, calculez $\int_{0}^{nT} f(t)\,dt$

15.5 Tableau donnant quelques primitives

Intervalle de définition	Fonction	Fonction primitive
$\mathbb{R}$	x^m avec $m \in \mathbb{N}$	$\dfrac{x^{m+1}}{m+1} + k$
$\mathbb{R}^*$	x^m avec $m \in \mathbb{Z}$ et $m < -1$	$\dfrac{x^{m+1}}{m+1} + k$
$]0,\ +\infty[$	x^α avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k$
$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\|x\| + k$
$\{x \in \mathbb{R}$ tq $u(x) \neq 0\}$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\|u(x)\| + k$
$\mathbb{R}$	e^x	$e^x + k$
$\mathbb{R}$	$u'(x)\, e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + k$
$\mathbb{R}$	a^x avec $a > 0$ et $a \neq +1$	$\dfrac{a^x}{\ln a} + k$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$-\cos x + k$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x + k$
$\left]-\dfrac{\pi}{2}\ \dfrac{\pi}{2}\right[$	$\tan x$	$-\ln\|\cos x\| + k$
$]-1\ \ +1[$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + k$
$]-1\ \ +1[$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x + k$
$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + k$
$x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) > 0$	$f'(x)\,(f(x))^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^* - \{-1\}$	$\dfrac{(f(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k$
$x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq 0$	$f'(x)\,(f(x))^n$ avec $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$	$\dfrac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + k$

15.6 Exercices sur le calcul intégral

Exercice 17 :

1. Trouver tous les polynômes P du second degré tels que $\displaystyle\int_x^{x+1} P(t)\,dt = x^2 + 1$
2. Donner une méthode pour calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$

Exercice 18 :

Calculs simples

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 t\left(t^2+1\right)dt$
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^1 t^2\sqrt{t^3+1}dt$
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{-2t}{3t^2+\sqrt{2}}dt$
4. $I_4 = \displaystyle\int_{-1}^0 \frac{t^2-1}{t+2}dt$
5. $I_5 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-2}{2t-3}dt$
6. $I_6 = \displaystyle\int_2^3 \frac{dt}{t(\ln t)^2}$
7. $I_7 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{e^t+1}dt$
8. $I_8 = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{e^t+1}$
9. $I_9 = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2}$
10. $I_{10} = \displaystyle\int_1^8 \frac{\theta^2+1}{\theta^4}d\theta$

11. $I_{11} = \int_2^1 (1-x)^6 \, dx$

Exercice 19 :

1. Calculez la dérivée de $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$
2. Trouvez $\int_0^1 \dfrac{3x^2+x^4}{(1+x^2)^2} dx$

Exercice 20 :

1. Montrer qu'il existe a, b et c tel que $\dfrac{2x^3+13x^2+24x+2}{(x+3)^2} = ax+b+\dfrac{c}{(x+3)^2}$.
2. En déduire une primitive de $\dfrac{2x^3+13x^2+24x+2}{(x+3)^2}$ sur $]-3;+\infty[$.
3. Avec la même méthode trouver une primitive de $\dfrac{4x^3+10x^2+3x-3}{(2x+3)^2}$ sur $\left]-\infty;-\dfrac{3}{2}\right[$.

Exercice 21 :

1. Montrer que : $x^2+1 = \dfrac{1}{2}\left((x+1)^2+(x-1)^2\right)$.
2. En déduire une primitive de $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$ sur $]-1;1[$.

Exercice 22 :

Intégration par parties

1. $I_1 = \int_1^2 \ln t dt$
2. $I_2 = \int_1^2 t^\alpha \ln t dt$ avec $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$
3. $I_3 = \int_1^2 \cos(\ln t) \, dt$
4. $I_4 = \int_0^1 \arctan t dt$
5. $I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos^2 t dt$
6. $I_6 = \int_0^1 t \arctan t dt$
7. $I_7 = \int_0^x t e^{-t} dt$
8. $I_8 = \int_0^\pi e^t \cos t dt$

Exercice 23 :

Changements de variables
A l'aide du changement de variables proposé, calculez :

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x} \sin x \; dx$ On posera $t = \cos x$
2. $\int_0^1 \dfrac{dx}{x^2+x+1}$ Poser $x = \dfrac{1}{2}\left(t\sqrt{3}-1\right)$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \dfrac{dx}{\cos x}$ Poser $\sin x = t$

Exercice 24 :

Calculer les intégrales suivantes, en utilisant un changement de variables :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{a^2+t^2}$ avec $a \neq 0$
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^6+1}dx$
3. $I_3 = \displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$
4. $I_4 = \displaystyle\int_0^x \frac{\tan t}{1+\sin^2 t}dt$
5. $I_5 = \displaystyle\int_0^x \frac{t^6}{t^4+1}dt$
6. $I_6 = \displaystyle\int_0^x \tan^2 t dt$

Exercice 25 :

Donner les dérivées des fonctions suivantes :

1. $F_1(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{3}{(x^4+x^3+1)^6}dx$
2. $F_2(t) = \displaystyle\int_3^t \frac{1}{x^4+x^6}dx$
3. $F_3(t) = \displaystyle\int_t^3 x^2(x+1)^5\, dx$
4. $F_4(t) = \displaystyle\int_t^4 \frac{u^4}{(u^2+1)^6}du$

Exercice 26 :

1. (a) Etudier les variations de la fonction $u(x) = 3x^2 - 3x^3$
   (b) Vérifier qu'en particulier $u\left(\left[\frac{-1}{2}, \frac{3}{2}\right]\right) \subset [0,1]$
   (c) Montrer, en particulier que le point $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de la fonction $u(x) = 3x^2 - 3x^3$

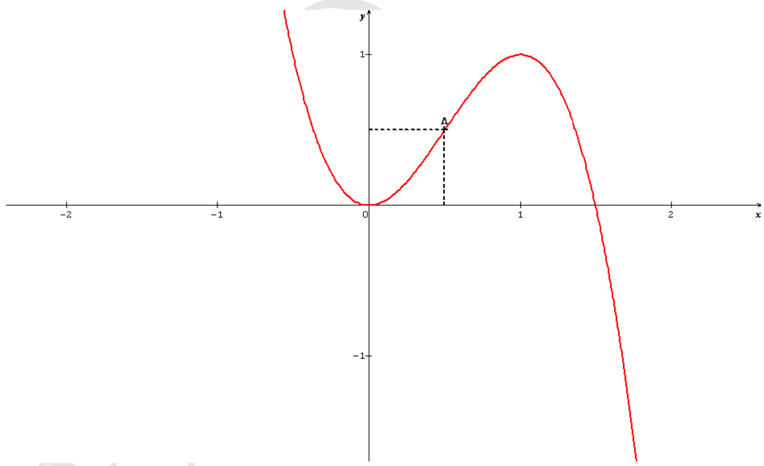


FIGURE 15.3 – Le graphe de la fonction $3x^2 - 3x^3$

2. Soit f continue sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère l'intégrale

$$\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{3}{2}} f\left(3x^2 - 3x^3\right) dx$$

   (a) En effectuant le changement de variable $u = x + \frac{1}{2}$, montrer que

$$\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} f\left(3x^2 - 3x^3\right) dx = \int_0^{+1} f\left(3x^2 - 3x^3\right) dx$$

(b) Trouver le changement de variables adéquat pour montrer que

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f\left(3x^2 - 3x^3\right) dx = \int_0^{+1} f\left(3x^2 - 3x^3\right) dx$$

3. Conclure que $\displaystyle\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{3}{2}} f\left(3x^2 - 3x^3\right) dx = 2\int_0^{+1} f\left(3x^2 - 3x^3\right) dx$

15.6.1 Exercices divers

Exercice 27 :

Soient f et g deux fonctions intégrables sur un intervalle $[a;b]$

1. Quel est le signe de $\displaystyle\int_a^b (f(t) + \lambda g(t))^2\, dt$ où λ désigne un nombre réel ?
2. En déduire l'inégalité *(appelée inégalité de Schwarz)*

$$\left(\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b (f(t))^2\, dt\right)\left(\int_a^b (g(t))^2\, dt\right)$$

qui peut encore être écrit :

$$\left|\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt\right| \leq \sqrt{\left(\int_a^b (f(t))^2\, dt\right)\left(\int_a^b (g(t))^2\, dt\right)}$$

(Développer $\displaystyle\int_a^b (f(t) + \lambda g(t))^2\, dt$ *et considérer cette expression comme un trinôme du second degré en* λ*)*

Exercice 28 :

Seconde formule de la moyenne
Soient a et b 2 nombres réels tels que $a < b$; on appelle $m = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ et $M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ où $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue
Soit $g : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction positive et intégrable.

1. Montrer que $F : [a;b] \to \mathbb{R}$ définie par : $F(x) = f(x)\displaystyle\int_a^b g(t)\, dt$ est continue, et trouver ses extrema en fonction de m et M
2. Montrer que nous avons $m\displaystyle\int_a^b g(t)\, dt \leq \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt \leq M\int_a^b g(t)\, dt$
3. En déduire qu'il existe $c \in [a;b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt = f(c)\int_a^b g(t)\, dt$

Exercice 29 :

1. Pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$, calculer $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(\cos t)^4}$
2. Calculer, pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ l'intégrale $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t}{(\cos t)^4} dt$

Exercice 30 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, et $\lambda \geq 1$ réel, on pose $I_n(\lambda) = \displaystyle\int_0^1 x^{\lambda-1}(1-x)^n \, dx$

1. En intégrant par parties, montrer que $I_n(\lambda) = \dfrac{n}{\lambda} I_{n-1}(\lambda+1)$
2. En déduire que $I_n(\lambda) = \dfrac{n!}{\prod\limits_{j=0}^{n}(\lambda+j)}$
3. Montrer que nous avons aussi $I_n(\lambda) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, \mathrm{C}_n^k \frac{1}{\lambda+k}$

Exercice 31 :

Pour $x > 0$ posons $F(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$

1. Trouver A et B tels que $\dfrac{1}{t(t+1)} = \dfrac{A}{t} + \dfrac{B}{(t+1)}$
2. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = -\ln 2$ *(Utiliser une intégration par parties pour calculer explicitement F)*

Exercice 32 :

1. Soit $G(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt$. Calculer explicitement G, puis donner $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x)$
2. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, étudier $\lim\limits_{x \to +\infty} G_\alpha(x)$ où $G_\alpha(x) = \displaystyle\int_1^x t^\alpha \ln t dt$

Exercice 33 :

Soit une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $g(x) = e^{-x^2}$

1. Etudier g et tracer sa représentation graphique
2. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x^2} \leqslant 1$
3. Soit $G(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} \, dt$ (on ne cherchera pas à calculer G))
   (a) Montrer que G est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$
   (b) Quel est le sens de variation de G ?
4. Etablir que, $(\forall x \in \mathbb{R}) \left(x \geqslant 1 \Rightarrow \displaystyle\int_1^x e^{-t^2} \, dt \leqslant \int_1^x e^{-t} \, dt \right)$
5. En déduire que la fonction G est bornée, et qu'elle admet une limite (qu'on ne calculera pas) lorsque x tend vers $+\infty$

Exercice 34 :

1. En faisant 2 intégrations par parties successives, calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \cos 2t \, dt$
2. En calculant $I + J$ et $I - J$, donner une valeur aux intégrales suivantes :
   $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} (\cos t)^2 \, dt$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} (\sin t)^2 \, dt$

Exercice 35 :

Dans tout le problème, on appelle E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ en entier et à valeurs dans $\mathbb{R}$
A toute fonction $f \in E$, on fait correspondre la fonction $L(f) = g$ où g est définie par

$$g(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,dt$$

1. (a) Montrer que pour tout $f \in E$, $L(f) = g$ est dérivable, et que

$$[L(f)]'(x) = g'(x) = f(x+1) - f(x)$$

   (b) Existe-t-il une fonction $f \in E$ telle que $|x| = \displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,dt$?

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et $C_\alpha(x) = \cos\alpha x$
   Calculer $L(C_\alpha)$, et trouver tous les $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $L(C_\alpha) = \mathcal{O}$ *(application nulle)*

3. Soit $f \in E$
   (a) Montrer que $L(f) = g$ est une constante, si et seulement si f est périodique et de période 1 ; faire le lien avec la question précédente.
   (b) Montrer que si f est périodique et de période 1, alors $[L(f)](x) = g(x) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$

4. Soit $s \in \mathbb{R}$ et f_s définie par $f_s(x) = e^{sx}$; on appelle

$$G = \{f \in E \text{ telle que } f = \lambda f_s \text{où } \lambda \in \mathbb{R}\}$$

   Montrer que si $f \in G$, alors $L(f) = g \in G$

Exercice 36 :

Calculez les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 e^{2t}\left(e^{2t}+1\right)^{1256}\,dt$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t}\cos t\,dt$

Exercice 37 :

Pour $t \in]0,1]$, on pose $\varphi(t) = \dfrac{t\ln t}{t^2-1}$ et $\psi_n(t) = t^{2n}\varphi(t)$

1. (a) Donner $\displaystyle\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{t\ln t}{t^2-1}$
   (b) Donner $\displaystyle\lim_{t\to 1} \frac{\ln t}{t-1}$ *(utiliser le "rapport de dérivation")*
   (c) En déduire $\displaystyle\lim_{t\to 1} \frac{t\ln t}{t^2-1}$

2. (a) Montrer qu'en posant $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = \dfrac{1}{2}$, on prolonge φ par continuité en $t = 0$, et $t = 1$
   (b) Donner alors $\psi_n(0)$ et $\psi_n(1)$,et montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n}\ln t}{t^2-1}\,dt$ est bien définie.

3. (a) Etudier les variations de φ sur $]0,1]$, et en déduire que pour tout $t \in]0,1]$, nous avons $0 \leqslant \varphi(t) \leqslant \dfrac{1}{2}$
   (b) En déduire que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{2(2n+1)}$
   (c) Donner $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$

Exercice 38 :

L'objet de ce problème est d'étudier la fonction :

$$F(x) = \int_{e^{-x}}^{e^x} \sqrt{1 + (\ln t)^2}\ dt$$

1. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x)$ est définie.
2. Etudier la parité de F
3. Démontrer que $F'(x) = \sqrt{1 + x^2}\,(e^x + e^{-x})$; en déduire les variations de F
4. **Etude des limites**
   (a) Démontrer que, pour tout $x \geqslant 0$,
   $$\int_1^{e^x} \ln t\ dt \leqslant \int_1^{e^x} \sqrt{1 + (\ln t)^2}\ dt \leqslant F(x)$$
   (b) Calculer explicitement $\displaystyle\int_1^{e^x} \ln t\ dt$, et en déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x)$
   (c) Donner $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} F(x)$
   (d) Donner $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x}$
5. Dresser le tableau de variations de F, puis donner une "allure " de la représentation graphique de F

Exercice 39 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les intégrales I_n et J_n, définies par :

$$I_n = \int_0^1 \left(1 - t^2\right)^{\frac{n}{2}}\ dt \qquad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^n\ du$$

1. En faisant le changement de variables $t = \cos u$, démontrez que $I_n = J_{n+1}$
2. Démontrez que nous avons $0 \leqslant J_{n+1} \leqslant J_n$
3. (a) Montrer que nous avons $J_n = J_{n-2} - \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{n-2} \cos^2 u\ du$
   (b) On appelle $K_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{n-2} \cos^2 u\ du$; en intégrant par parties, montrez que $K_n = \dfrac{1}{n-1} J_n$
   (c) En déduire que $J_n = \dfrac{n-1}{n} J_{n-2}$ et que $I_n = \dfrac{n}{n+1} I_{n-2}$
4. (a) En déduire que $I_{2p} = \dfrac{(2^p \times p!)^2}{(2p+1)!}$
   (b) En déduire que $I_{2p+1} = \dfrac{(2p+2)!}{\left(2^{p+1}(p+1)!\right)^2} \dfrac{\pi}{2}$
   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n I_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$

Exercice 40 :

1. (a) Démontrer que la fonction $\ln\left(1 + x^2\right)$ est croissante sur l'intervalle $[0;1]$ et démontrer l'inégalité, vraie pour tout $x \in [0;1]$
   $$0 \leqslant \ln\left(1 + x^2\right) \leqslant \ln 2$$

(b) En déduire l'inégalité :

$$0 \leqslant \int_0^1 \ln\left(1+x^2\right) dx \leqslant \ln 2 \tag{15.1}$$

2. Pour $u \geqslant 0$, on considère la fonction numérique suivante $f(u) = \ln(1+u) - u$
   (a) Calculer f', la dérivée de f
   (b) Etudier les variations de f
   (c) En déduire que pour tout $u \geqslant 0$, $\ln(1+u) \leqslant u$
3. Pour $u \geqslant 0$, on considère la fonction numérique suivante $g(u) = \ln(1+u) - u + \dfrac{u^2}{2}$
   (a) Calculer g', la dérivée de g
   (b) Etudier les variations de g
   (c) En déduire que pour tout $u \geqslant 0$, $\ln(1+u) \geqslant u - \dfrac{u^2}{2}$
   (d) En déduire que nous avons la double inégalité :

$$x^2 - \frac{x^4}{2} \leqslant \ln\left(1+x^2\right) \leqslant x^2 \tag{15.2}$$

4. (a) Utiliser l'inégalité (15.8) pour démontrer que :

$$\frac{7}{30} \leqslant \int_0^1 \ln\left(1+x^2\right) dx \leqslant \frac{1}{3} \tag{15.3}$$

   (b) Quel est le meilleur encadrement de $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right) dx$?
   — L'encadrement (15.9) ?
   — L'encadrement (15.7) ?
   Justifiez votre réponse
5. (a) Trouver $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$ tels que $\dfrac{2t^2}{1+t^2} = A + \dfrac{B}{1+t^2}$
   (b) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2} dt = 2 - \frac{\pi}{2}$
   (c) En faisant une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right) dx$

15.7 Intégrales et évaluation d'aires

*Lorsqu'on parlera d'aire, nous entendrons un **nombre positif**. Nous pouvons aussi être amenés à considérer 2 types d'aires :*
— *L'aire algébrique qui est un nombre qui a un signe (positif ou négatif)*
— *L'aire géométrique qui est toujours positive*

15.7.1 Théorème

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ avec $a < b$. Alors
L'aire de l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $a \leqslant x \leqslant b$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$ est donné par :

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

Démonstration

Nous admettons ce théorème

Exemple 7 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x$. L'aire de l'ensemble

$$\{M(x,y) \text{ tels que } -1 \leqslant x \leqslant +1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant e^x\}$$

est donnée par $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^x\,dx = [e^x]_{-1}^{+1} = e - e^{-1}$

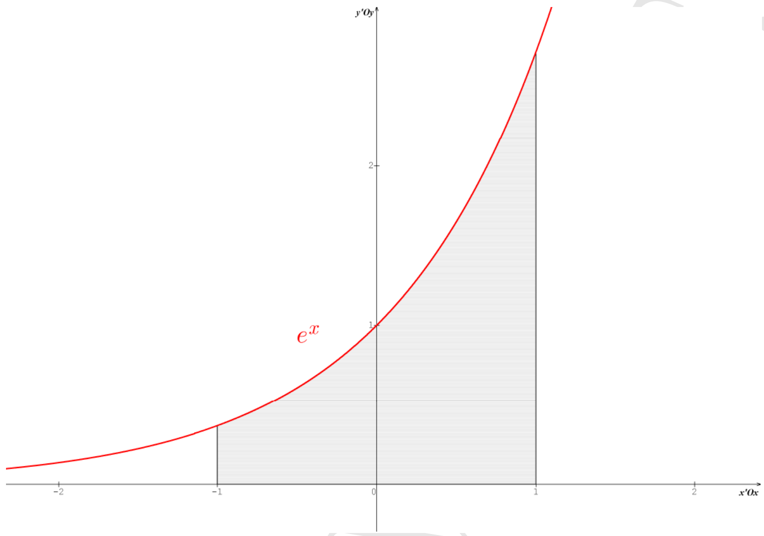


FIGURE 15.4 – Une représentation de l'ensemble dont on a calculé l'aire

15.7.2 Théorème

Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a;b]$ avec $a < b$. Alors
L'aire de l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $a \leqslant x \leqslant b$ et $f(x) \leqslant y \leqslant 0$ est donné par :

$$\int_a^b -f(x)\,dx$$

Démonstration

Nous admettons ce théorème

Exemple 8 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - x$. L'aire de l'ensemble

$$\{M(x,y) \text{ tels que } 0 \leqslant x \leqslant +1 \text{ et } f(x) \leqslant y \leqslant 0\}$$

est donnée par $\displaystyle\int_0^1 -\left(x^2 - x\right)\,dx = I_0^1 x - x^2\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{+1} = \frac{1}{6}$

15.7.3 Synthèse

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ avec $a < b$. Alors
L'aire de l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $a \leqslant x \leqslant b$ et $f(x) \leqslant y \leqslant 0$ ou $0 \leqslant y \leqslant f(x)$ est donné par :

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

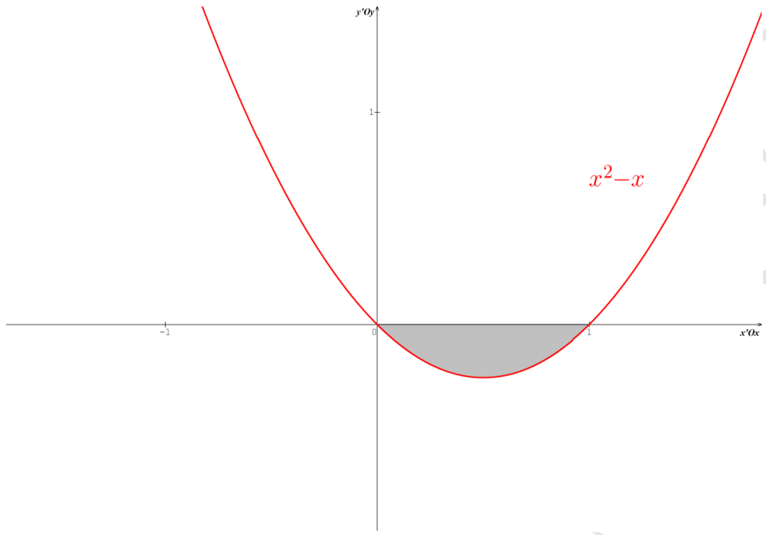


FIGURE 15.5 – Une représentation de l'ensemble dont on a calculé l'aire

Exemple 9 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos x$. L'aire de l'ensemble

$$\{M(x,y) \text{ tels que } 0 \leqslant x \leqslant \pi \text{ et } f(x) \leqslant y \leqslant 0 \text{ ou } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

est donnée par

$$\begin{aligned}\int_0^\pi |\cos x| \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x| \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi |\cos x| \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi -\cos x \, dx \\ &= [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\sin t]_{\frac{\pi}{2}}^\pi \\ &= 1 - (-1) = 2\end{aligned}$$

Remarque 11 :

Le vocabulaire d'aire géométrique et d'aire algébrique prend ici tout son sens :

- ▷ L'aire géométrique est donc $\displaystyle\int_0^\pi |\cos x| \, dx == 2$
- ▷ L'air ealgébrique est donc $\displaystyle\int_0^\pi \cos x \, dx = 0$

15.7.4 Application

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ avec $a < b$.Supposons que pour tout $x \in [a;b]$, nous ayions $f(x) \leqslant g(x)$ Alors
L'aire de l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $a \leqslant x \leqslant b$ et $f(x) \leqslant y \leqslant g(x)$ est donné par :

$$\int_a^b (g(x) - f(x)) \, dx$$

Remarque 12 :

On peut aussi écrire que cette aire est donnée par $\displaystyle\int_a^b |g(x) - f(x)| \, dx$

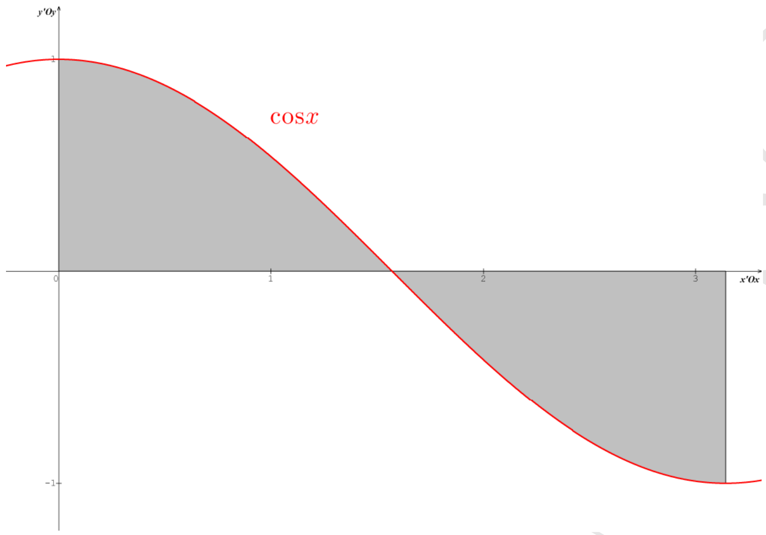


FIGURE 15.6 – Une représentation de la fonction $\cos x$ entre 0 et π et de l'ensemble dont on a calculé l'aire

Exemple 10 :

Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - x$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = -x^2 + 2x$. Nous avons :

$$f(x) \leqslant g(x) \Longleftrightarrow x^2 - x \leqslant -x^2 + 2x \Longleftrightarrow 2x^2 - 3x \leqslant 0 \Longleftrightarrow x \in \left[0; \frac{3}{2}\right]$$

Ainsi, l'aire des points $M(x, y)$ tels que $0 \leqslant x \leqslant +1$ et $f(x) \leqslant y \leqslant g(x)$ est donnée par :

$$\int_0^1 (f(x) - g(x))\, dx = \int_0^1 \left(-2x^2 + 3x\right) dx = \frac{5}{6}$$

Par contre l'aire des points $M(x, y)$ tels que :

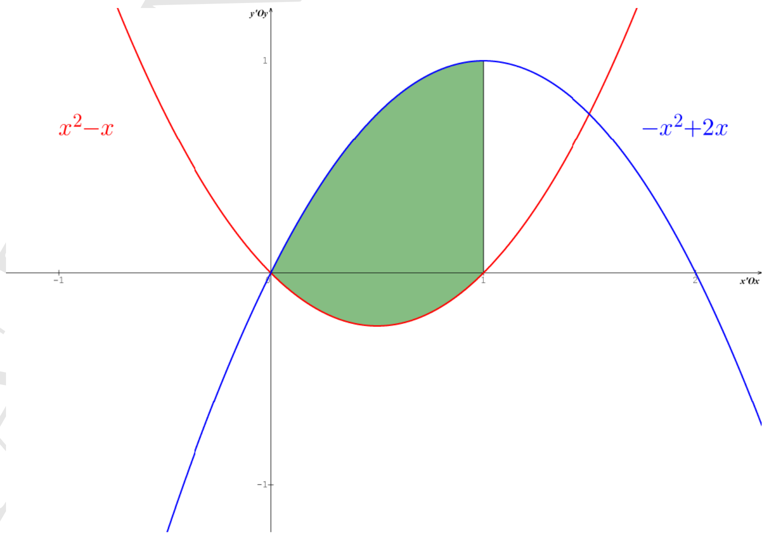


FIGURE 15.7 – Une représentation de l'aire des points $M(x, y)$ tels que $0 \leqslant x \leqslant +1$ et $f(x) \leqslant y \leqslant g(x)$

$$\left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ \text{et } f(x) \leqslant y \leqslant g(x) \\ \text{ou } g(x) \leqslant y \leqslant f(x) \end{array}\right.$$

est donnée par : $\displaystyle\int_0^2 |f(x) - g(x)|\, dx = \frac{19}{12}$

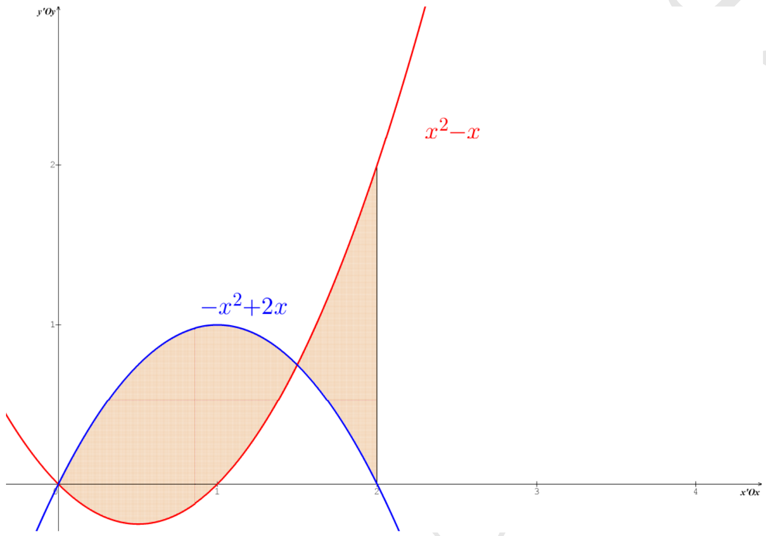


FIGURE 15.8 – Une représentation de l'aire géométrique entre les points $M(x,y)$ tels que $0 \leqslant x \leqslant +1$ et $f(x) \leqslant y \leqslant g(x)$ ou $g(x) \leqslant y \leqslant f(x)$

Exercice 41 :

On considère l'application f définie sue $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \left\{\begin{array}{l} x^2 \ln x \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$; est-elle dérivable sur $\mathbb{R}^+$?
2. Etudier f et tracer sa courbe représentative (Γ) dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$
3. Soit $\alpha > 0$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^\alpha f(x)\, dx$
4. En déduire l'aire géométrique du domaine $\mathcal{D}$ défini par :

$$\mathcal{D} = \{0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } f(x) \leqslant y \leqslant 0\}$$

15.8 Calculs approchés

Ce qui va vous être présenté ici s'approche de l'approximation par la ***méthode des rectangles****, qui sera approfondie en L_1. Ceci n'en est donc qu'une introduction*

15.8.1 Premiers exemples

1. En comparant les puissances de x pour $x > 1$, encadrer $\ln 2$

   Nous savons que $\ln 2 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t}\, dt$

Pour $t \geqslant 1$, nous avons $\sqrt{t} \leqslant t \leqslant t^2$ et donc $\dfrac{1}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et donc, par la positivité de l'intégrale :

$$\int_1^2 \frac{1}{t^2}\,dt \leqslant \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt \leqslant \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \iff [\frac{-1}{t}]_1^2 \leqslant \ln 2 [2\sqrt{t}]_1^2 \iff \frac{1}{2} \leqslant \ln 2 \leqslant 2\left(\sqrt{2}-1\right)$$

C'est à dire $0,5 \leqslant \ln 2 \leqslant 0,82$

2. En utilisant une méthode de rectangles, encadrer $\ln 2$

Nous partons toujours de $\ln 2 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt$. Nous partageons le segment $[1;2]$ en 4 parties de longueur égale

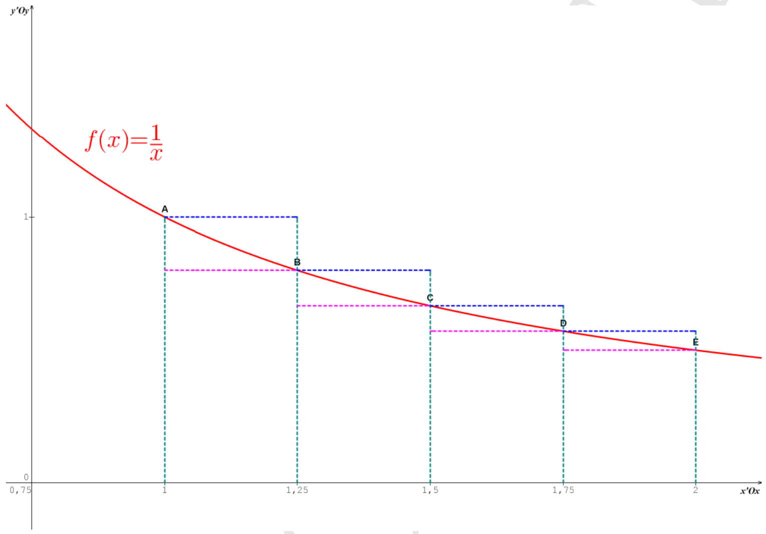


FIGURE 15.9 – Visualisation du graphe de $\dfrac{1}{t}$ sur l'intervalle $[1;2]$ et la subdivision de $[1;2]$ en 4 parties de longueur égale

En faisant des condidération d'aires, nous avons :

$$\frac{1}{1,25} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{1,5} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{1,75} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} < \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt < 1 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{1,25} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{1,5} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{1,75} \times \frac{1}{4}$$

C'est à dire $0,634 < \ln 2 < 0,759$

3. Est-il possible d'obtenir un encadrement de $\ln 2$ aussi précis que nous le souhaitons ?

Nous allons réutiliser la méthode précédente en faisant n subdivisions de l'intervalle $[1;2]$ en n parties de longueur égale à $\dfrac{1}{n}$.

Nous construisons donc une suite finie $(x_k)_{k=0,\ldots,n}$ telle que :

$$x_0 = 1 \quad x_n = 2 \quad x_{k+1} - x_k = \frac{1}{n}$$

La suite finie $(x_k)_{k=0,\ldots,n}$ est donc une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{n}$ et donc $x_k = x_0 + \dfrac{k}{n} = 1 + \dfrac{k}{n}$.

La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur l'intervalle $[1;2]$, et donc, en particulier, pour tout k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur l'intervalle $[x_k; x_{k+1}]$.

Ainsi, pour tout $t \in [x_k; x_{k+1}]$, nous avons $\dfrac{1}{x_{k+1}} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{x_k}$, et donc, par la positivité de l'intégrale,

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{x_{k+1}}\,dt \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{t}\,dt \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{x_k}\,dt$$

C'est à dire :

$$\frac{1}{x_{k+1}}\left(x_{k+1}-x_k\right) \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{t}\, dt \leqslant \frac{1}{x_k}\left(x_{k+1}-x_k\right) \Longleftrightarrow \frac{1}{x_{k+1}} \times \frac{1}{n} \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{t}\, dt \leqslant \frac{1}{x_k} \times \frac{1}{n}$$

En passant à la sommation, nous avons :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_{k+1}} \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{t}\, dt \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k}$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{t}\, dt = \int_1^2 \frac{1}{t}\, dt = \ln 2$, nous obtenons donc :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_{k+1}} \leqslant \ln 2 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k}$$

Nous avons $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k} + \frac{1}{2} - 1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k} - \frac{1}{2}$, de telle sorte que nous obtenons l'inégalité :

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k} - \frac{1}{2}\right) \leqslant \ln 2 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k}$$

Et donc

$$0 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x_k} - \ln 2 \leqslant \frac{1}{2n} \Longleftrightarrow 0 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} - \ln 2 \leqslant \frac{1}{2n} \Longleftrightarrow 0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} - \ln 2 \leqslant \frac{1}{2n}$$

Ce qui montre que l'on peut approcher $\ln 2$ de manière aussi proche que l'on souhaite :

- ▷ A 10^{-2} près, c'est à dire si $\dfrac{1}{2n} \leqslant 10^{-2}$ et donc $n \geqslant 50$, nous obtenons $\ln 2 \approx 0,588$
- ▷ A 10^{-3} près, c'est à dire si $\dfrac{1}{2n} \leqslant 10^{-3}$ et donc $n \geqslant 500$, nous obtenons $\ln 2 \approx 0,6926$

Remarque 13 :

L'idée intéressante, serait de généraliser cette situation pour toute fonction. C'est très difficile ; nous nous restreignons au cas où f est dérivable et de dérivée bornée.

15.8.2 Théorème des sommes de Riemann

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$, dérivable sur $[a;b]$ telle que, il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in [a;b]$, nous avons $|f'(x)| < M$

Soit $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ une suite finie de points de l'intervalle $[a;b]$ qui partagent l'intervalle $[a;b]$ en n subdivisions de longueur égale, c'est à dire telles que :

Pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$, nous avons $x_k < x_{k+1}$ et $x_k = a + \dfrac{k(b-a)}{n}$

Alors $S_n^1 = \dfrac{(b-a)}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ et $S_n^2 = \dfrac{(b-a)}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})$ sont des valeurs approchées de $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ à $M\dfrac{(b-a)^2}{n}$ près

Autrement dit : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n^1 = \lim_{n\to+\infty} S_n^2 = \int_a^b f(t)\, dt$

Démonstration

Cette démonstration est assez typique de ce qui se fait en mathématiques : on pose le problème général, puis, nous imposons des conditions *(c'est à dire que nous restreignons les possibilités)* qui doivent nous conduire au résultat.

1. **Tout d'abord, nous construisons une subdivision quelconque de l'intervalle $[a;b]$**
   - C'est à dire, qu'en particulier, les subdivisions ne sont pas de longueur égale.
     Soit donc $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ une suite finie de points de l'intervalle $[a;b]$ tels que $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ telle que $x_0 = a$ et $x_n = b$
     On appelle $m_k = \inf\limits_{x\in[x_k;x_{k+1}]} f(x)$ et $M_k = \sup\limits_{x\in[x_k;x_{k+1}]} f(x)$
     f étant continue sur $[a;b]$ l'est, en particulier sur les intervalles $[x_k;x_{k+1}] \subset [a;b]$, et donc la borne inférieure m_k existe tout comme la borne supérieure M_k.
     f continue sur $[x_k;x_{k+1}]$ et bornée et atteint ses bornes ; nous pouvons donc écrire qu'il existe $c_k \in [x_k;x_{k+1}]$ tel que $f(c_k) = m_k$ et qu'il existe $d_k \in [x_k;x_{k+1}]$ tel que $f(d_k) = M_k$
   - Maintenant, sur l'intervalle $[x_k;x_{k+1}]$, nous avons :
     $$\int_{x_k}^{x_{k+1}} m_k\,dt \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} M_k\,dt$$
     C'est à dire :
     $$m_k(x_{k+1}-x_k) \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt \leqslant M_k(x_{k+1}-x_k)$$
     Et en passant à la sommation :
     $$\sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1}-x_k) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1}-x_k)$$
     Or, nous avons, par la relation de Chasles : $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$, et donc, en conclusion :
     $$\sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1}-x_k) \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1}-x_k)$$
   - Nous appelons $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1}-x_k)$ *(Remarquez l'analogie avec S_n^1 et S_n^2)*
     Alors :
     $$\begin{gathered}\sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1}-x_k) - T_n \leqslant \int_a^b f(t)\,dt - T_n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1}-x_k) - T_n \\ \Longleftrightarrow \\ \sum_{k=0}^{n-1}(m_k - f(x_k))(x_{k+1}-x_k) \leqslant \int_a^b f(t)\,dt - T_n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}(M_k - f(x_k))(x_{k+1}-x_k)\end{gathered} \tag{15.4}$$
2. **Prenons, maintenant, le cas particulier où la subdivision divise l'intervalle $[a;b]$ en n parties de longueur égale à $\dfrac{b-a}{n}$**
   Alors, dans ce cas, $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1}-x_k) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x_k)\left(\dfrac{b-a}{n}\right) = \left(\dfrac{b-a}{n}\right)\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x_k) = S_n^2$
   Les inégalités (15.4) deviennent :
   $$\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1}(m_k - f(x_k)) \leqslant \int_a^b f(t)\,dt - S_n^2 \leqslant \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1}(M_k - f(x_k))$$

C'est à dire

$$\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(c_k\right)-f\left(x_k\right)\right)\leqslant\int_a^b f\left(t\right)\,dt-S_n^2\leqslant\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(d_k\right)-f\left(x_k\right)\right)$$

Et donc, nous avons, en remarquant que $m_k=f\left(c_k\right)\leqslant f\left(x_k\right)\leqslant M_k=f\left(d_k\right)$

$$\left|\int_a^b f\left(t\right)\,dt-S_n^2\right|\leqslant\left(\frac{b-a}{n}\right)\sup\left\{\sum_{k=0}^{n-1}f\left(x_k\right)-f\left(c_k\right);\sum_{k=0}^{n-1}f\left(d_k\right)-f\left(x_k\right)\right\}$$

3. **Suposons maintenant f dérivable et que il existe $M>0$ tel que, pour tout $x\in[a;b]$ nous avons $\left|f'\left(x\right)\right|<M$**

D'après le théorème des accroissements finis, et surtout sa conséquence, l'inégalité des accroissements finis,nous avons :

$$\left(\forall x\in[a;b]\right)\left(\forall y\in[a;b]\right)\left(\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|\leqslant M\left|x-y\right|\right)$$

Donc, pour tout $k=0,\cdots,n-1$,

$$\left|f\left(c_k\right)-f\left(x_k\right)\right|=f\left(x_k\right)-f\left(c_k\right)\leqslant M\left|x_k-c_k\right|\leqslant M\left(x_{k+1}-x_k\right)$$

Donc :

- ▷ $f\left(x_k\right)-f\left(c_k\right)\leqslant M\dfrac{b-a}{n}$
- ▷ Et, de même, $f\left(d_k\right)-f\left(x_k\right)\leqslant M\dfrac{b-a}{n}$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(x_k\right)-f\left(c_k\right)\right)\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\left(M\frac{b-a}{n}\right)=M\left(b-a\right)$, et, de même, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(d_k\right)-f\left(x_k\right)\right)\leqslant M\left(b-a\right)$ et donc, $\displaystyle\sup\left\{\sum_{k=0}^{n-1}f\left(x_k\right)-f\left(c_k\right);\sum_{k=0}^{n-1}f\left(d_k\right)-f\left(x_k\right)\right\}\leqslant M\left(b-a\right)$, ce qui montre que :

$$\left|\int_a^b f\left(t\right)\,dt-S_n^2\right|\leqslant M\left(\frac{\left(b-a\right)^2}{n}\right)$$

Et donc, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n^2=\int_a^b f\left(t\right)\,dt$

On démontrerait de même que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n^1=\int_a^b f\left(t\right)\,dt$

Exemple 11 :

Evaluer $\ln 1,1$

Remarquons, pour commencer, que $\ln 1,1=\ln\dfrac{11}{10}=\ln 11-\ln 10=\displaystyle\int_{10}^{11}\frac{dt}{t}$

D'après ce qui vient d'être montré, nous avons : $\ln 1,1=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{11-10}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(10+\frac{k}{n}\right)$, c'est à dire :

$$\ln 1,1=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{10+\frac{k}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{10n+k}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{10n+k}$$

Lorsque nous calculons jusqu'à l'ordre n, l'approximation sera faite avec une incertitude d'ordre $\dfrac{M}{n}$ où M est un majorant de la dérivée sur l'intervalle $[10;11]$. Or, comme la dérivée de $\dfrac{1}{t}$ est $\dfrac{-1}{t^2}$, nous avons $M=\dfrac{1}{100}$

Ainsi, pour $n=10$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{9}\frac{1}{100+k}$ est une valeur approchée de $\ln 1,1$ à 10^{-3} près. Nous avons $\ln 1,1\approx 0,095$

Exercice 42 :

1. Justifier l'existence de l'intégrale $I = \int_0^1 xe^{-x}\,dx$
2. Calculer I
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} e^{\frac{-k}{n}}$. Etudier $\lim_{n\to+\infty} S_n$

15.8.3 Utilisation d'intégrales pour étudier la convergence de suites

L'utilisation d'intégrales pour prouver qu'une suite est convergente ou non est fréquente en analyse.

1. Nous allons montrer que la suite $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ est divergente

Nous allons toujours utiliser la méthode des rectangles ainsi que la décroissance de la fonction $\frac{1}{x}$ lorsque $x \geqslant +1$ *(Voir figure 15.10)*

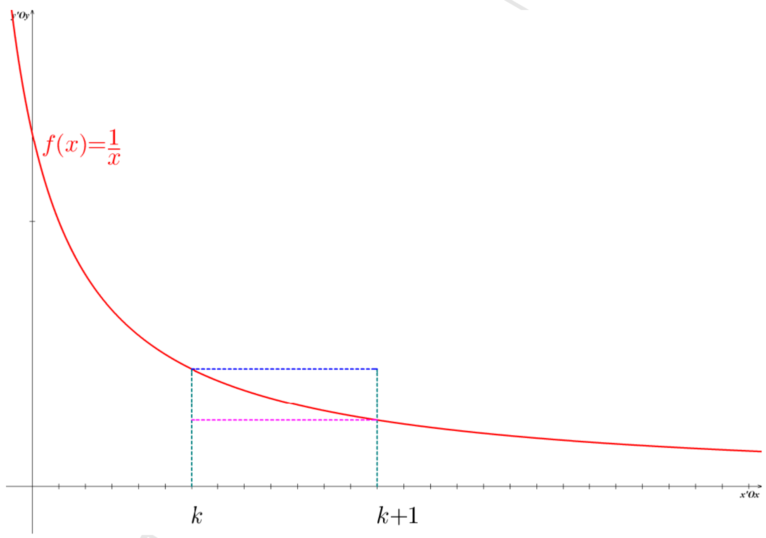


FIGURE 15.10 – Visualisation du graphe de $\frac{1}{t}$ sur l'intervalle $[k; k+1]$

Nous avons $\ln n = \int_1^n \frac{dx}{x} = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x}$

Comme $\frac{1}{x}$ est décroissante sur $[k; k+1]$, nous avons, pour tout $x \in [k; k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}$, et, par des considérations d'aires et de positivité de l'intégrale :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dx \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dx \Longleftrightarrow \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leqslant \frac{1}{k}$$

En passant à la sommation, nous avons :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \ln n \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n}$

Nous avons donc $\ln n \leqslant H_n - \dfrac{1}{n} \iff \ln n + \dfrac{1}{n} \leqslant H_n$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln n + \dfrac{1}{n} = +\infty$, nous déduisons que $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.

La suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc divergente

2. Nous allons montrer que la suite $R_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$ est convergente

▷ Il est clair que la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

En effet, $R_{n+1} - R_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$

▷ Montrons que la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée

Nous allons toujours utiliser la méthode des rectangles ainsi que la décroissance de la fonction $\dfrac{1}{x^2}$ lorsque $x \geqslant +1$

Nous avons $\displaystyle\int_1^n \frac{dx}{x^2} = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2}$

Comme $\dfrac{1}{x^2}$ est décroissante sur $[k;k+1]$, nous avons, pour tout $x \in [k;k+1]$

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{k^2}$$

Par des considérations d'aires et de positivité de l'intégrale :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^2}\,dx \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k^2}\,dx \iff \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} \leqslant \frac{1}{k^2}$$

En passant à la sommation, nous avons :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} \iff \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \int_1^n \frac{dx}{x^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}$$

Or, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} = R_n - 1$

Nous avons donc $R_n - 1 \leqslant \displaystyle\int_1^n \frac{dx}{x^2} \iff R_n \leqslant \int_1^n \frac{dx}{x^2} + 1$

Comme $\displaystyle\int_1^n \frac{dx}{x^2} = \left[\frac{-1}{t}\right]_1^n = 1 - \frac{1}{n}$, nous avons $R_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{n} \leqslant 2$

La suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc majorée

La suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant croissante et majorée est donc convergente.

Un autre problème est d'en calculer la limite

15.9 Problèmes

Exercice 43 :

Nous commençons simplement !

1. On considère la fonction f définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f :]-1;+1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) \end{array}\right.$$

(a) Dire pourquoi f est bien définie sur l'intervalle $]-1;+1[$

(b) Donner $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<+1}} f(x)$, puis $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)$

(c) Calculez $f'(x)$ la dérivée de $f(x)$ et en étudier le signe

(d) Démontrer que f induit une bijection de $]-1;+1[$ dans $\mathbb{R}$

(e) En exprimant x en fonction de y dans l'expression $y = f(x)$ donner l'expression de f^{-1}, la bijection réciproque de f

2. Démontrer que $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}\,dx = \ln 3$

3. On appelle $H_n(x) = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^{2k}$.

(a) Démontrer que pour $x \neq +1$ et $x \neq -1$

$$\frac{1}{1-x^2} - H_n(x) = \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}$$

(b) En déduire que si $x \in \left[-\frac{1}{2};+\frac{1}{2}\right]$, nous avons la double inégalité :

$$0 \leqslant \frac{1}{1-x^2} - H_n(x) \leqslant \frac{4}{3}x^{2n+2} \qquad (I)$$

4. On appelle $U_n = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} H_n(x)\ dx$.

(a) En utilisant l'inégalité (I), démontrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et en donner la limite.

(b) Calculer U_2, et donner un encadrement de $\ln 3$

Exercice 44 :

Sur la constante d'Euler

Que se passe-t-il lorsque nous additionnons 2 suites divergentes ? Eh bien, nous n'en savons rien ! ! Nous avons montré dans le cours que la suite $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ *est divergente. Qu'en est-il du comportement de la suite* $u_n = H_n - \ln n$ *; le problème suivant tente d'y répondre.*

Soit $(u_n)_{n\geqslant 2}$ la suite de terme général :

$$u_n = H_n - \ln n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$$

1. Montrer, à l'aide de la méthode des rectangles, que, pour tout $n \geqslant 2$, nous avons :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} < \int_1^n \frac{dt}{t} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

2. En déduire que pour tout $n \geqslant 2$, nous avons $0 < u_n < 1$, puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{H_n}{\ln n} = 1$

3. (a) Démontrer que pour tout $n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{n+1} < \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t} < \frac{1}{n}$

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante et converge vers un nombre $\gamma \in [0;+1]$ appelé **constante d'Euler**

4. (a) Soit $(v_n)_{n\geqslant 2}$ la suite définie par $v_n = u_n - \dfrac{1}{n}$. démontrer que les suites $(v_n)_{n\geqslant 2}$ et $(u_n)_{n\geqslant 2}$ sont adjacentes

(b) En déduire que pour tout $n \geqslant 2$, nous avons $0 \leqslant u_n - \gamma \leqslant \dfrac{1}{n}$

5. Quelle valeur faut-il donner à n pour être sûr d'avoir une valeur approchée par excès de γ à 10^{-1} près
6. A l'aide d'un programme Python, donner cette valeur approchée.

Exercice 45 :

Dans ce problème, on s'intéresse à l'exponentielle définie comme limite d'une suite et non plus comme fonction inverse de la fonction logarithme

1. En utilisant une intégration par parties, démontrez que
$$\int_0^a te^t\,dt = ae^a - \int_0^a e^t\,dt$$
En déduire que $e^a = 1 + a + \displaystyle\int_0^a (a-t)\,e^t\,dt$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; nous posons $I_n = \displaystyle\int_0^a \frac{(a-t)^n}{n\,!}e^t\,dt$. Démontrez que :
$$I_n = \frac{a^{n+1}}{(n+1)\,!} + I_{n+1}$$
3. Démontrez par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$
$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2\,!} + \cdots + \frac{a^n}{n\,!} + I_n$$
4. Démontrez que $0 \leqslant |I_n| \leqslant \left|\dfrac{a^n}{n\,!}\,(e^a - 1)\right|$
5. Nous posons $u_n = \dfrac{a^n}{n\,!}$. Calculez $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ et montrez qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier n tel que si $n \geqslant n_0$ alors $|u_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{2}\,|u_n|$
6. En déduire que si $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant n_0$, alors $0 \leqslant |u_n| \leqslant |u_{n_0}| \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-n_0}$
7. En déduire :
   (a) Les limites de u_n et I_n lorsque n tend vers $+\infty$
   (b) Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1 + a + \frac{a^2}{2\,!} + \cdots + \frac{a^n}{n\,!}\right) = e^a$

Exercice 46 :

Fonction ζ de Rieman

Nous avons montré que la suite $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ était divergente alors que la suite $R_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ était convergente. Qu'en est-il des suites $\zeta_n(s) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s}$ où $s \in \mathbb{R}^{*+} \setminus \{+1\}$? Les questions suivantes y répondent.

Soit s un réel strictement positif et différent de 1. On considère la suite $(\zeta_n(s))_{n\geqslant 1}$ dont le terme général est donné par :
$$\zeta_n(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s}$$

1. Etudier les variations de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^s}$ pour $x > 0$

2. Utiliser la méthode des rectangles pour démontrer que pour $n \geqslant 2$:
$$\zeta_n(s) - 1 \leqslant \int_1^n \frac{dx}{x^s} \leqslant \zeta_{n-1}(s)$$
3. Calculer $\displaystyle\int_1^n \frac{dx}{x^s}$
4. On suppose que $0 < s < 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \zeta_n(s) = +\infty$
5. On suppose que $s > 1$. Montrer que la suite $(\zeta_n(s))_{n\geqslant 1}$ est bornée. En déduire qu'elle converge.

Nous venons de montrer que :
- ▷ *Si* $0 < s \leqslant 1$, *la suite* $(\zeta_n(s))_{n\geqslant 1}$ *diverge*
- ▷ *Si* $s > 1$, *la suite* $(\zeta_n(s))_{n\geqslant 1}$ *converge*

Pour $s > 1$, *la limite de* $\zeta_n(s)$ *est notée* $\zeta(s)$. *La fonction numérique* $\zeta(s) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}$ *s'appelle* ***fonction*** ζ ***de Riemann***

Exercice 47 :

On vient de montrer que si $s > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}$ *existe ; mais savons nous la calculer ? Le problème suivant calcule* $\zeta(2)$ *avec des moyens très rustiques. Une méthode plus rapide et tout autant rigoureuse sera vue dans le cours de* L_2

1. Démontrer que si f est continuement dérivable *(f est de classe* $\mathcal{C}^1$*)*, alors :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t) \sin nt\, dt = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t) \cos nt\, dt = 0$$
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos kt$
3. Montrer que la fonction $g(t) = \left(t - \dfrac{t^2}{2\pi}\right) \cot\left(\dfrac{t}{2}\right)$ est bornée sur $[0; \pi]$
4. Trouver 2 réel a et b tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:
$$\int_0^\pi \left(at + bt^2\right) \cos kt\, dt = \frac{1}{k^2}$$
5. Ecrire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ sous forme d'intégrale et démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Nous avons donc $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$

Exercice 48 :

Le problème suivant s'intéresse à une approximation de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ *en démontrant qu'elle est la limite de la suite* $(u_n)_{n\geqslant 2}$ *de terme général*
$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)^2}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On appelle Q_{n-2} la fonction polynômiale de la variable réelle t donnée par :
$$Q_{n-2}(t) = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-2} t^{n-2}$$

(a) Démontrer que, pour tout $t \neq -1$, $Q_{n-2}(t) = \dfrac{1-(-1)^{n-1} t^{n-1}}{1+t}$

(b) En déduire que :

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-2} t^{n-2} + (-1)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{1+t} = Q_{n-2}(t) + (-1)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{1+t}$$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leqslant x \leqslant 1$. Démontrer que :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-2} \frac{x^{n-1}}{n-1} + (-1)^{n-1} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}\, dt \tag{15.5}$$

Pour simplifier, nous poserons

$$P_{n-1}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-2} \frac{x^{n-1}}{n-1}$$

2. (a) On considère la fonction $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ définie pour $x > 0$; démontrer que l'on peut prolonger f par continuité en $x = 0$ et qu'il est alors possible de calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$

(b) On considère, maintenant $\theta(x) = \ln(1+x) - x$. En étudiant les variations de θ, démontrer que, pour tout $x \geqslant 0$, nous avons $0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$

(c) En déduire que, pour tout $x \in [0;1]$, nous avons $0 < f(x) \leqslant 1$

(d) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\, dx \leqslant \frac{1}{n}$

(e) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx$

3. (a) Démontrer que, pour tout $x \in [0;1]$, nous avons $\displaystyle\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}\, dt \leqslant \int_0^x t^{n-1}\, dt$

(b) En déduire que, pour tout $x \in [0;1]$, nous avons $\displaystyle\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}\, dt \leqslant \frac{1}{n}$

(c) En utilisant la relation 15.5 démontrer que, pour tout $x \in [0;1]$, nous avons

$$\frac{-1}{nx} \leqslant f(x) - \frac{P_{n-1}(x)}{x} \leqslant \frac{1}{nx}$$

(d) En intégrant sur le segment $\left[\dfrac{1}{n};1\right]$, établir la relation :

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)\, dx - \frac{1}{n}\ln n + S_n\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant S_n(1) \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)\, dx + \frac{1}{n}\ln n + S_n\left(\frac{1}{n}\right) \tag{15.6}$$

Où nous avons posé, pour $n \geqslant 2$,

$$S_n(x) = x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \cdots + (-1)^{n-2} \frac{x^{n-1}}{(n-1)^2} = \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-2} \frac{x^{k-1}}{(k-1)^2}$$

(e) Démontrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0;1]$, nous avons $\dfrac{x^{p+1}}{(p+1)^2} \leqslant \dfrac{x^p}{p^2}$

(f) Démontrer que pour tout $n \geqslant 2$ et tout $x \in [0;1]$, nous avons $0 \leqslant S_n(x)$

On pourra écrire $S_1(x)$, $S_2(x) = \left(x - \dfrac{x^2}{2^2}\right)$, $S_3(x) = \left(x - \dfrac{x^2}{2^2}\right) + \dfrac{x^3}{3^2}$, $S_4(x) = \left(x - \dfrac{x^2}{2^2}\right) + \left(\dfrac{x^3}{3^2} - \dfrac{x^4}{4^2}\right)$, etc...

(g) Démontrer que pour tout $n \geqslant 2$ et tout $x \in [0;1]$, nous avons $S_n(x) \leqslant x$

(h) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$

(i) Déduire des résultats précédents que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$

4. Nous avons $S_n(1) = 1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{4^2} + \cdots + (-1)^{n-2}\dfrac{1}{(n-1)^2} = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-2}\frac{1}{(k-1)^2}$

(a) Démontrer que, pour tout $n \geqslant 5$, nous avons :

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \leqslant S_n(1) \leqslant 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}$$

(b) En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$

15.10 Correction de quelques exercices

Exercice 15 :

Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue et telle que* $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. *On appelle* $M = \sup_{x\in[0;1]} f(x)$ *et* $m = \inf_{x\in[0;1]} f(x)$.

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant -mM$

Premièrement, f étant continue sur un fermé borné compact de $\mathbb{R}$, m et M existent.
D'autre part, comme $m \leqslant f(t) \leqslant M$, nous avons $(f(t)-M)(f(t)-m) \leqslant 0$ et donc :

$$(f(t)-M)(f(t)-m) = f^2(t) - mf(t) - Mf(t) + mM \leqslant 0$$

En passant à l'intégrale :

$$\int_0^1 \left(f^2(t) - mf(t) - Mf(t) + mM\right)\mathrm{d}t \leqslant 0$$

En utilisant la linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^1 \left(f^2(t) - mf(t) - Mf(t) + mM\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t - (m+M)\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + mM\int_0^1 \mathrm{d}t$$

Des égalités $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}t = 1$, nous tirons

$$\int_0^1 \left(f^2(t) - mf(t) - Mf(t) + mM\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t + mM$$

D'où :

$$\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t + mM \leqslant 0 \Longleftrightarrow \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant -mM$$

Exercice 40 :

1. (a) *Démontrer que la fonction* $\ln\left(1+x^2\right)$ *est croissante sur l'intervalle* $[0;1]$

   Il y a deux façons de répondre à la question : par un calcul de dérivée ou par une utilisation de la composition de fonctions croissantes.

   $\longrightarrow$ Utilisation de la dérivée

   La dérivée de $\ln\left(1+x^2\right)$ est $\dfrac{2x}{1+x^2}$, laquelle est positive sur l'intervalle $[0;1]$. La fonction $\ln\left(1+x^2\right)$ est donc croissante sur l'intervalle $[0;1]$

   $\longrightarrow$ Utilisation de la composition de fonctions croissantes

   La fonction $1+x^2$ est croissante sur l'intervalle $[0;1]$. $\ln x$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$, donc $\ln\left(1+x^2\right)$ est croissante sur l'intervalle $[0;1]$ comme composée de fonctions croissantes.

   (b) *En déduire l'inégalité :*

   $$0 \leqslant \int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx \leqslant \ln 2 \qquad (15.7)$$

   Comme la fonction $\ln\left(1+x^2\right)$ est croissante sur l'intervalle $[0;1]$, nous avons, pour tout $x \in [0;1]$,

   $$0 \leqslant \ln\left(1+x^2\right) \leqslant \ln 2$$

   Comme l'intégrale respecte la relation d'ordre, nous avons :

   $$\int_0^1 0dx \leqslant \int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx \leqslant \int_0^1 \ln 2dx \Longleftrightarrow 0 \leqslant \int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx \leqslant \ln 2$$

   Ce que nous voulions

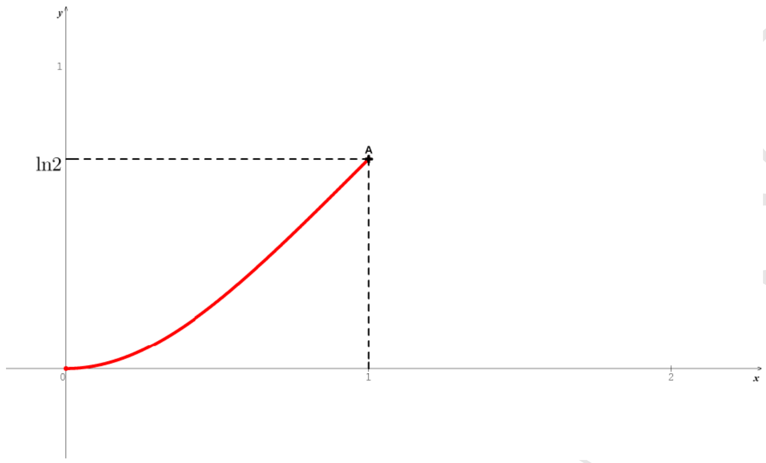


FIGURE 15.11 – La courbe représentative de $\ln\left(1+x^2\right)$

2. *Pour $u \geqslant 0$, on considère la fonction numérique suivante $f(u) = \ln(1+u) - u$*

   (a) *Calculer f', la dérivée de f*

   C'est très simple : $f'(u) = \dfrac{1}{1+u} - 1 = \dfrac{-u}{1+u}$

   (b) *Etudier les variations de f*

   Comme $f'(u) = \dfrac{-u}{1+u}$, nous avons, pour tout $u \geqslant 0$, $f'(u) \leqslant 0$, et donc f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

   (c) *En déduire que pour tout $u \geqslant 0$, $\ln(1+u) \leqslant u$*

   De cette décroissance, on tire que pour tout $u \geqslant 0$, $f(u) \leqslant f(0) = \ln(1+0) - 0 = 0$, c'est à dire $\ln(1+u) - u \leqslant 0$, ce qui est équivalent à $\ln(1+u) \leqslant u$

3. *Pour $u \geqslant 0$, on considère la fonction numérique suivante $g(u) = \ln(1+u) - u + \dfrac{u^2}{2}$*

   (a) *Calculer g', la dérivée de g*

   C'est toujours très simple : $g'(u) = \dfrac{1}{1+u} - 1 + u = \dfrac{u^2}{1+u}$

   (b) *Etudier les variations de g*

   Comme $g'(u) = \dfrac{u^2}{1+u}$, nous avons, pour tout $u \geqslant 0$, $g'(u) \geqslant 0$, et donc g est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

   (c) *En déduire que pour tout $u \geqslant 0$, $\ln(1+u) \geqslant u - \dfrac{u^2}{2}$*

   De cette croissance, on tire que pour tout $u \geqslant 0$, $g(u) \geqslant g(0) = 0$, c'est à dire

   $$\ln(1+u) - u + \frac{u^2}{2} \geqslant 0$$

   Ce qui est équivalent à $\ln(1+u) \geqslant u - \dfrac{u^2}{2}$

   (d) *En déduire que nous avons la double inégalité :*

   $$x^2 - \frac{x^4}{2} \leqslant \ln\left(1+x^2\right) \leqslant x^2 \tag{15.8}$$

   Il suffit de remplacer u par x^2, et, comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$, nous avons, pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'inégalité demandée.

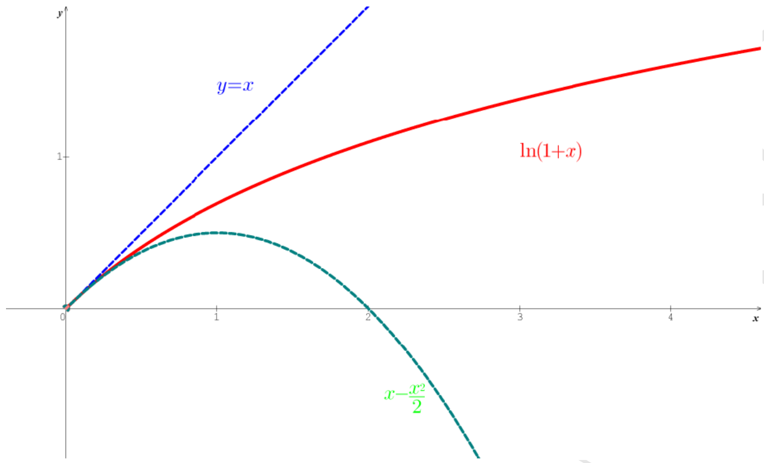


FIGURE 15.12 – Une visualisation des encadrements démontrés. Nous avons :$u - \dfrac{u^2}{2} \leqslant \ln(1+u) \leqslant u$

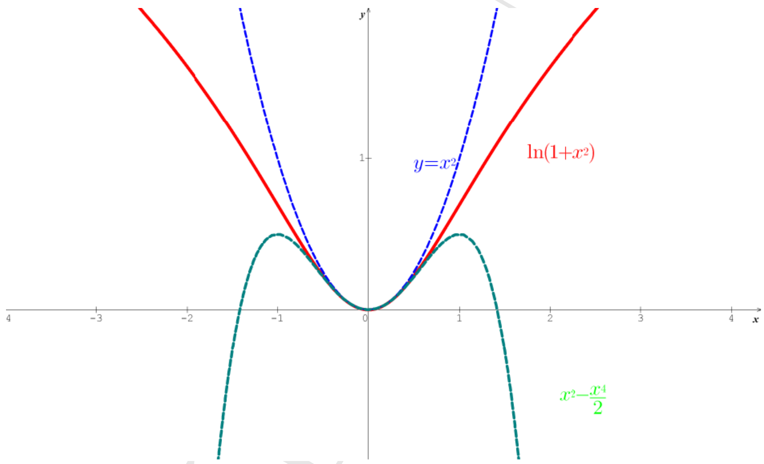


FIGURE 15.13 – Une visualisation des encadrements démontrés. Nous avons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, :$x^2 - \dfrac{x^4}{2} \leqslant \ln\left(1+x^2\right) \leqslant x^2$

4. (a) *Utiliser l'inégalité (15.8) pour démontrer que :*

$$\frac{7}{30} \leqslant \int_0^1 \ln\left(1+x^2\right) dx \leqslant \frac{1}{3} \tag{15.9}$$

Nous utilisons, une nouvelle fois la positivité de l'intégrale :
Comme $x^2 - \dfrac{x^4}{2} \leqslant \ln\left(1+x^2\right) \leqslant x^2$, nous avons :

$$\int_0^1 x^2 - \frac{x^4}{2} dx \leqslant \int_0^1 \ln\left(1+x^2\right) dx \leqslant \int_0^1 x^2 dx$$

— Calculons $\displaystyle\int_0^1 x^2 - \frac{x^4}{2} dx$. Nous avons donc :

$$\int_0^1 x^2 - \frac{x^4}{2} dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{10}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{10} = \frac{7}{30}$$

— Calculons $\int_0^1 x^2 dx$. Nous avons donc : $\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

Nous avons donc bien l'encadrement : $\frac{7}{30} \leqslant \int_0^1 \ln\left(1+x^2\right) dx \leqslant \frac{1}{3}$

(b) *Quel est le meilleur encadrement de $\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right) dx$?*

— L'encadrement (15.9) ?
— L'encadrement (15.7) ?
Justifiez votre réponse

C'est l'encadrement (15.9) qui est le meilleur, puisque la différence entre le majorant et le minorant est la plus petite.

5. (a) *Trouver $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{2t^2}{1+t^2} = A + \frac{B}{1+t^2}$*

C'est une classique question de décomposition en éléments simples en utilisant l'identification.

Nous avons, en réduisant au même dénominateur, $A + \frac{B}{1+t^2} = \frac{A+B+At^2}{1+t^2}$

En identifiant, nous obtenons le système linéaire :

$$\left\{\begin{array}{rl} A+B = & 0 \\ A = & 2 \end{array}\right.$$

D'où on tire $A = 2$ et $B = -2$ et donc $\boxed{\frac{2t^2}{1+t^2} = 2 - \frac{2}{1+t^2}}$

(b) *En déduire que $\int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2} dt = 2 - \frac{\pi}{2}$*

D'après la question précédente, nous avons :

$$\int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2} dt = \int_0^1 2 - \frac{2}{1+t^2} dt = \int_0^1 2dt - 2\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$$

Or, $\int_0^1 2dt = 2$ et $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan t]_0^1 = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

Donc, $\int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2} dt = 2 - 2 \times \frac{\pi}{4} = 2 - \frac{\pi}{2}$

(c) *En faisant une intégration par parties, calculer $\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right) dx$*

Pour faire cette intégration par parties, nous posons :

$$\begin{array}{ll} u' = 1 & u = x \\ v = \ln\left(1+x^2\right) & v' = \frac{2x}{1+x^2} \end{array}$$

Donc :

$$\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right) dx = \left[x \ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2} dx = \ln 2 + 2 - \frac{\pi}{2}$$

Nous avons donc : $\boxed{\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right) dx = \ln 2 + 2 - \frac{\pi}{2}}$

Troisième partie

Géométrie

Chapitre 16

Le groupe orthogonal

DANS CE CHAPITRE, NOUS NE NOUS INTÉRESSERONS QU'AUX $\mathbb{R}$-ESPACE VECTORIEL , DANS LE BUT DE RÉELLEMENT MAÎTRISER CE QUI SE PASSE AU NIVEAU DES RÉELS. LES DÉFINITIONS OU THÉORÈMES SERONT PARFOIS ÉNONCÉS DANS UN CADRE DE DIMENSION QUELCONQUE ; LA PLUPART DU TEMPS, NOUS SERONS EN DIMENSION FINIE

16.1 Produit scalaire

16.1.1 Définition de produit scalaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel .
Une application $\Phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad (x, y) \quad \longmapsto \quad \Phi\left[(x, y)\right] = \langle x \mid y \rangle \end{cases}$$

est appelée produit scalaire si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. Elle est bilinéaire
   C'est à dire que pour tout $x \in E$, tout $y \in E$ et tout $z \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $\mu \in \mathbb{R}$:
   $$\Phi\left[(\lambda x + \mu y, z)\right] = \lambda \Phi\left[(x, z)\right] + \mu \Phi\left[(y, z)\right] \Longleftrightarrow \langle \lambda x + \mu y \mid z \rangle = \lambda \langle x \mid z \rangle + \mu \langle y \mid z \rangle$$
   Et
   $$\Phi\left[(x, \lambda y + \mu z)\right] = \lambda \Phi\left[(x, y)\right] + \mu \Phi\left[(x, z)\right] \Longleftrightarrow \langle x \mid \lambda y + \mu z \rangle = \lambda \langle x \mid y \rangle + \mu \langle x \mid z \rangle$$
2. Elle est symétrique
   C'est à dire que pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$:
   $$\Phi\left[(x, y)\right] = \Phi\left[(y, x)\right] \Longleftrightarrow \langle x \mid y \rangle = \langle y \mid x \rangle$$
3. Elle est positive
   C'est à dire que pour tout $x \in E$:
   $$\Phi\left[(x, x)\right] \geqslant 0 \Longleftrightarrow \langle x \mid x \rangle \geqslant 0$$
4. Elle est « définie »
   C'est à dire que pour tout $x \in E$:
   $$\Phi\left[(x, x)\right] = 0 \Longleftrightarrow x = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow \langle x \mid x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = \overrightarrow{0}$$

Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est appelé espace euclidien

Remarque 1 :

1. Φ étant bilinéaire, nous avons toujours, et pour tout $x \in E$, $\Phi\left[\left(x, \overrightarrow{0}\right)\right] = \Phi\left[\left(\overrightarrow{0}, x\right)\right] = 0$

   En effet, pour tout $x \in E$, nous avons $\Phi\left[\left(x, \overrightarrow{0}\right)\right] = \Phi\left[(x, y-y)\right] = \Phi\left[(x,y)\right] - \Phi\left[(x,y)\right] = 0$.

   Une autre méthode de démonstration est de voir que si $\langle \lambda x \mid y\rangle = \lambda \langle x \mid y\rangle$, en faisant $\lambda = 0$, nous avons $\langle 0 \times x \mid y\rangle = 0 \times \langle x \mid y\rangle \iff \left\langle \overrightarrow{0} \mid y\right\rangle = 0$
2. Donc, pour tout $x \in E$, nous avons $\left\langle x \mid \overrightarrow{0}\right\rangle = \left\langle \overrightarrow{0} \mid x\right\rangle = 0$
3. Pour le produit scalaire, nous utiliserons toujours la notation $\langle u \mid v\rangle$

Exemple 1 :

Des exemples et des contre-exemples

1. Dans $\mathbb{R}^2$, pour $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ l'application $\Phi\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = xx_1 + yy_1$ est un produit scalaire. On l'appelle souvent le produit scalaire canonique
2. Toujours dans $\mathbb{R}^2$, pour $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, l'application $\Phi\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = xy_1 - yx_1$ n'est pas un produit scalaire. C'est une forme bilinéaire, qui n'est pas définie car si $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ mais $\Phi\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}\right) = 1 \times 0 - 0 \times 1 = 0$; elle est cependant positive, car pour tout $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\Phi\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}\right) = xy - yx = 0 \geqslant 0$
3. Encore dans $\mathbb{R}^2$, pour $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, l'application $\Phi\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = xx_1 - yy_1$ n'est pas un produit scalaire. C'est une forme bilinéaire, qui n'est pas définie car si $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ mais $\Phi\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}\right) = 1 \times 1 - 1 \times 1 = 0$; elle n'est pas plus positive, car si $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\Phi\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}\right) = 0 - 1 = -1 < 0$
4. Et, pour terminer, une nouvelle fois dans $\mathbb{R}^2$, pour $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, l'application $\Phi\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = xy_1$ n'est pas un produit scalaire. C'est une forme bilinéaire, qui n'est pas symétrique car si $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et si $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors $\Phi\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = 1 \times 1 = 1$ et $\Phi\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}\right) = 0 \times 0 = 0$

Exercice 1 :

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère la fonction, définie, pour $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ par :

$$\Phi\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = (x+y)(x_1+y_1) + 2yy_1$$

Est-ce un produit scalaire ?

Exercice 2 :

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère la fonction, définie, pour $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ par :

$$\Phi\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = xx_2 + \frac{1}{2}(xy_1 + x_1 y) + yy_1$$

Montrer que Φ est un produit scalaire.

Exercice 3 :

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
On considère, dans $\mathbb{R}^2$, pour $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ l'application Φ définie par :

$$\Phi\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = xx_1 e^{a^2} + (xy_1 + x_1 y)\, e^{ab} + yy_1 e^{b^2}$$

Démontrer que Φ est un produit scalaire

16.1.2 Définition de norme

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel .
On appelle norme sur E une application $\|\bullet\|$ de E dans $\mathbb{R}^+$:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \|x\| \end{array} \right.$$

qui admet les propriétés suivantes :

1. Pour tout $v \in E$, $(\|v\| = 0) \Longleftrightarrow \left(v = \overrightarrow{0}\right)$
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $v \in E$, nous avons : $\|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\|$
3. Inégalité triangulaire :
$$(\forall u \in E)\,(\forall v \in E)\,(\|u + v\| \leqslant \|v\| + \|v\|)$$

16.1.3 Lemme de Schwarz

Soir E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien.
Nous notons $\mathcal{N}(x) = \sqrt{\langle x \mid x\rangle}$
Alors, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, nous avons :

$$|\langle x \mid y\rangle| \leqslant \mathcal{N}(x)\,\mathcal{N}(y)$$

Nous avons $|\langle x \mid y\rangle| = \mathcal{N}(x)\,\mathcal{N}(y)$ si et seulement si, x et y sont linéairement indépendants

Démonstration

1. Tout d'abord, $\mathcal{N}(x) = \sqrt{\langle x \mid x\rangle}$ est bien défini, puisque, pour tout $x \in E$, $\langle x \mid x\rangle \geqslant 0$
2. Soient $x \in E$ et $y \in E$
Considérons, maintenant, l'application φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, par
$$\varphi(\lambda) = (\mathcal{N}(x + \lambda y))^2 = \langle x + \lambda y \mid x + \lambda y\rangle$$
   - ▷ A priori, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, nous avons $\varphi(\lambda) \geqslant 0$ puisque φ est définie par un carré.
   - ▷ Ecrivons différemment $(\mathcal{N}(x + \lambda y))^2$:
$$\begin{aligned} (\mathcal{N}(x + \lambda y))^2 &= \langle x + \lambda y \mid x + \lambda y\rangle \\ &= \langle x \mid x\rangle + \lambda \langle x \mid y\rangle + \lambda \langle y \mid x\rangle + \lambda^2 \langle y \mid y\rangle \\ &= \langle x \mid x\rangle + 2\lambda \langle x \mid y\rangle + \lambda^2 \langle y \mid y\rangle \\ &= \mathcal{N}^2(x) + 2\lambda \langle x \mid y\rangle + \lambda^2 \mathcal{N}^2(y) \end{aligned}$$
   $\varphi(\lambda)$ apparaît donc comme un polynôme du second degré, à coefficients réels, toujours positif ou nul de disriminant Δ négatif ou nul
   - ▷ Donc, comme $\Delta = (\langle x \mid y\rangle)^2 - \mathcal{N}^2(x)\,\mathcal{N}^2(y)$, de $\Delta \leqslant 0$, nous tirons :
$$(\langle x \mid y\rangle)^2 \leqslant \mathcal{N}^2(x)\,\mathcal{N}^2(y) \Longleftrightarrow |\langle x \mid y\rangle| \leqslant \mathcal{N}(x)\,\mathcal{N}(y)$$

3. De $\Delta = 0$, nous tirons $|\langle x \mid y\rangle| = \mathcal{N}(x)\mathcal{N}(y)$ et il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(\lambda_0) = 0$.
   Dès lors, nous avons :
   $$\mathcal{N}(x+\lambda_0 y) = \sqrt{\langle x+\lambda_0 y \mid x+\lambda_0 y\rangle} = 0 \iff \langle x+\lambda_0 y \mid x+\lambda_0 y\rangle = 0 \implies x+\lambda_0 y = 0$$
   Ce qui signifie que x et y sont colinéaires *(ou dépendants)*
   Réciproquement, si x et y sont colinéaires, et que donc $x = \mu y$ avec $\mu \in \mathbb{R}$, alors :
   $$|\langle x \mid y\rangle| = |\langle \mu y \mid y\rangle| = |\mu|\,|\langle y \mid y\rangle| = |\mu|\mathcal{N}^2(y) = |\mu|\mathcal{N}(y) \times \mathcal{N}(y)$$
   Il faut maintenant remarquer que
   $$\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(\mu y) = \sqrt{\langle \mu y \mid \mu y\rangle} = \sqrt{\mu^2 \langle y \mid y\rangle} = |\mu|\sqrt{\langle y \mid y\rangle} = |\mu|\mathcal{N}(y)$$
   Et donc $\mathcal{N}(x)\mathcal{N}(y) = |\mu|\mathcal{N}(y)\mathcal{N}(y) = |\langle x \mid y\rangle|$

16.1.4 Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien.
Alors, l'application $\mathcal{N}$ définie pour tout $x \in E$ par $\mathcal{N}(x) = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ est une norme appelée norme euclidienne.
Désormais, nous noterons cette norme : $\mathcal{N}(x) = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \|x\|$

Démonstration

Nous allons donc vérifier que la fonction $\mathcal{N}$ vérifie les axiômes de norme

1. Dans un premier temps, pour tout $x \in E$, $\mathcal{N}(x) = \sqrt{\langle x, x\rangle} \geqslant 0$
2. D'autre part, et clairement, $\mathcal{N}(x) = 0 \iff \langle x \mid x\rangle = 0 \iff x = \overrightarrow{0}$
3. Ensuite, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathcal{N}(\lambda x) = \sqrt{\langle \lambda x \mid \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x \mid x\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x \mid x\rangle} = |\lambda|\mathcal{N}(x)$
4. Montrons l'inégalité triangulaire
   Soient $x \in E$ et $y \in E$. On s'intéresse à $\mathcal{N}^2(x+y)$.
   $$\begin{aligned} \mathcal{N}^2(x+y) &= \langle x+y \mid x+y\rangle \\ &= \langle x \mid x\rangle + \langle x \mid y\rangle + \langle y \mid x\rangle + \langle y \mid y\rangle \\ &= \mathcal{N}^2(x) + 2\langle x \mid y\rangle + \mathcal{N}^2(y) \end{aligned}$$
   D'après le lemme de Schwarz 16.1.3 nous avons $2\langle x \mid y\rangle \leqslant \mathcal{N}(x)\mathcal{N}(y)$ et donc :
   $$\mathcal{N}^2(x+y) \leqslant \mathcal{N}^2(x) + 2\mathcal{N}(x)\mathcal{N}(y) + \mathcal{N}^2(y) = (\mathcal{N}(x)+\mathcal{N}(y))^2$$
   De $\mathcal{N}^2(x+y) \leqslant (\mathcal{N}(x)+\mathcal{N}(y))^2$, nous déduisons $\mathcal{N}(x+y) \leqslant \mathcal{N}(x)+\mathcal{N}(y)$
   L'inégalité triangulaire est donc démontrée, et $\mathcal{N}$ est une norme

Remarque 2 :

Remarque importante : Le lemme de Schwarz 16.1.3 s'écrit alors :

$$\boxed{|\langle x \mid y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|}$$

Exercice 4 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien. Démontrer que si, pour tout $x \in E$, tout $y \in E$ et tout $z \in E$, $\langle x \mid z\rangle = \langle y \mid z\rangle$, alors $x = y$

16.1.5 Orthogonalité

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien

1. Deux vecteurs $x \in E$ et $y \in E$ sont dits orthogonaux si et seulement si $\langle x \mid y \rangle = 0$. Dans ce cas, on note souvent $x \perp y$
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E et $x \in E$. On dit que le vecteur x est orthogonal à F, si et seulement si, pour tout $y \in F$, $\langle x \mid y \rangle = 0$
3. Soient F et G 2 sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont orthogonaux, et on note alors $F \perp G$, si et seulement si, pourtout $x \in F$ et tout $y \in E$, $\langle x \mid y \rangle = 0$

16.1.6 Proposition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien et $X \subset E$, un sous-ensemble de E. On appelle $X^\perp$ l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de X, c'est à dire :

$$X^\perp = \{y \in E \text{ tels que pour tout } x \in X \text{ nous ayions } \langle x \mid y \rangle = 0\}$$

Alors $X^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E

Démonstration

- Tout d'abord $X^\perp \neq \emptyset$ puisque $\overrightarrow{0} \in X^\perp$; en effet, pour tout $x \in X$ nous avons $\left\langle x \mid \overrightarrow{0} \right\rangle = 0$
- Soient $y \in X^\perp$, $y_1 \in X^\perp$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Nous allons montrer que $\lambda y + \mu y_1 \in X^\perp$
  Soit $x \in X$; alors $\langle x \mid y \rangle = \langle x \mid y_1 \rangle = 0$ et :

$$\langle x \mid \lambda y + \mu y_1 \rangle = \lambda \langle x \mid y \rangle + \mu \langle x \mid y_1 \rangle = 0$$

  Donc $\lambda y + \mu y_1 \in X^\perp$

Et $X^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E

Remarque 3 :

C'est tout aussi vrai si $X = \{x\}$ où $x \neq \overrightarrow{0}$; X n'est pas un sous-espace vectoriel , mais $X^\perp$ est le sous-espace vectoriel de E de tous les vecteurs de E qui sont orthogonaux à x

Exercice 5 :

1. Démontrer que si Δ est la droite vectorielle engendrée par x, alors $\{x\}^\perp = \Delta^\perp$
2. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien, $x \in E$ et $y \in E$ tels que $\|x\| = \|y\|$. Montrer que les vecteurs $x + y$ et $x - y$ sont orthogonaux

16.1.7 Le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$

Dans $\mathbb{R}^n$, on introduit le produit scalaire canonique :

Pour tout $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique est donné par :

$$\langle u \mid v \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = u^T v$$

Remarque 4 :

1. Il est facile de démontrer que $\langle u \mid v\rangle = u^T v = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ est bien un produit scalaire
2. Dans $\mathbb{R}^3$, si $u = (x, y, z)$ et $v = (x_1, y_1, z_1)$
   (a) $\langle u \mid v\rangle = xx_1 + yy_1 + zz_1$
   (b) $u \perp v \iff \langle u \mid v\rangle = 0 \iff xx_1 + yy_1 + zz_1 = 0$
   (c) $\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
   (d) Si $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ et $k = (0, 0, 1)$, nous avons :
   $$\|i\| = \|j\| = \|k\| = 1 \text{ et } \langle i \mid j\rangle = \langle i \mid k\rangle = \langle k \mid j\rangle = 0$$

Exercice 6 :

1. Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique,
   (a) Quel est l'ensemble des vecteurs qui sont orthogonaux au vecteur $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
   (b) De manière générale, quel est l'ensemble des vecteurs qui sont orthogonaux au vecteur $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
2. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique,
   (a) Quel est l'ensemble des vecteurs qui sont orthogonaux au vecteur $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$
   (b) De manière générale, quel est l'ensemble des vecteurs qui sont orthogonaux au vecteur $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

16.1.8 Identité du parallélogramme

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien ; alors, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, nous avons :
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

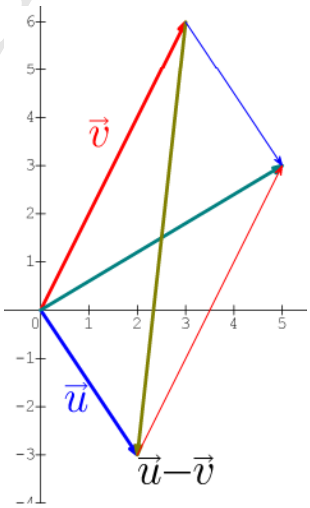


FIGURE 16.1 – Une visualisation de l'identité du parallélogramme

Démonstration

Soient $x \in E$ et $y \in E$; alors :
- ▷ $\|x+y\|^2 = \langle x+y \mid x+y \rangle = \langle x \mid x \rangle + 2\langle x \mid y \rangle + \langle y \mid y \rangle$
- ▷ De même $\|x-y\|^2 = \langle x-y \mid x-y \rangle = \langle x \mid x \rangle - 2\langle x \mid y \rangle + \langle y \mid y \rangle$

En additionnant, nous obtenons $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\langle x \mid x \rangle + 2\langle y \mid y \rangle = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$
Ce que nous voulions

Remarque 5 :

Toutes les normes ne proviennent pas de produits scalaires. Les normes issues du produit scalaire vérifient la propriété du parallélogramme et il y a des normes qui ne vérifient pas la propriété du parallélogramme, et on peut donc affirmer avec certitude qu'elles ne proviennent pas d'un produit scalaire.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$, on construit la norme $\|\bullet\|_1$ par :

$$\|u\|_1 = |x| + |y| \text{ pour } u = (x, y)$$

On peut démontrer que $\|\bullet\|_1$ vérifie bien les axiômes de norme[1], mais ce n'est certainement pas une norme issue d'un produit scalaire puisque ne vérifiant pas l'identité du parallélogramme. En effet :

Soient $u = (1, 2)$ et $v = (1, -1)$; alors :
- ▷ $\|u+v\|_1 = \|(2,1)\|_1 = 3$ et donc $\|u+v\|_1^2 = 9$
- ▷ $\|u-v\|_1 = \|(0,3)\|_1 = 3$ et donc $\|u-v\|_1^2 = 9$
- ▷ Nous avons aussi : $\|u\|_1 = \|(1,2)\|_1 = 3$ avec $\|u\|_1^2 = 9$
- ▷ Et $\|v\|_1 = \|(1,-1)\|_1 = 2$ avec $\|v\|_1^2 = 4$

Or $\|u+v\|_1^2 + \|u-v\|_1^2 = 18$ et $2\|u\|_1^2 + 2\|v\|_1^2 = 26$

Nous avons donc $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \neq 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ et on montre ainsi que la norme $\|\bullet\|_1$ ne provient pas d'un produit scalaire

16.1.9 Corollaire : formule de Polarisation

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien. Alors, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, nous avons :

$$\langle x \mid y \rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}$$

Démonstration

Dans 16.1.8, nous avons démontré que $\langle x+y \mid x+y \rangle = \langle x \mid x \rangle + 2\langle x \mid y \rangle + \langle y \mid y \rangle$; et c'est facile de terminer ! !

16.1.10 Proposition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien.

1. On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que, pour tout $y \in E$, nous ayions $\langle x \mid y \rangle = 0$; alors $x = \overrightarrow{0}$
2. On suppose qu'il existe $x \in E$ et $x' \in E$ tel que, pour tout $y \in E$, nous ayions $\langle x \mid y \rangle = \langle x' \mid y \rangle$; alors $x = x'$

Démonstration

1. Soit $x \in E$ tel que, pour tout $y \in E$, nous ayions $\langle x \mid y \rangle = 0$; alors, pour $y = x$, nous avons $\langle x \mid x \rangle = \|x\|^2 = 0$, et donc $x = \overrightarrow{0}$

1. Le faire en exercice

2. Soient $x \in E$ et $x' \in E$ tel que, pour tout $y \in E$, nous ayions $\langle x \mid y \rangle = \langle x' \mid y \rangle$; alors :

$$\langle x \mid y \rangle = \langle x' \mid y \rangle \Longleftrightarrow \langle x - x' \mid y \rangle = 0$$

Donc, $x - x' = \overrightarrow{0}$, et donc $x = x'$

16.1.11 Angle non orienté de 2 vecteurs

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien. Soient $u \in E$ et $v \in E$, 2 vecteurs de E non nuls tous les deux. On appelle angle non orienté de u et v un nombre $\alpha \in [0; \pi]$ tel que

$$\cos \alpha = \frac{\langle u \mid v \rangle}{\|u\| \, \|v\|}$$

Remarque 6 :

Ce nombre α existe, puisque d'après le lemme de Schwarz 16.1.3, nous avons $\left| \dfrac{\langle u \mid v \rangle}{\|u\| \, \|v\|} \right| \leqslant 1$

16.1.12 Théorème de Pythagore

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien

1. Pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, nous avons l'équivalence :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Longleftrightarrow \langle x \mid y \rangle = 0$$

2. Si $x_1 \in E \ldots x_n \in E$ sont des vecteurs orthogonaux deux à deux, *(c'est à dire que si $i \neq j$, alors $\langle x_i \mid x_j \rangle = 0$)* alors :

$$\|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$$

Démonstration

Il suffit d'utiliser les carrés à l'aide des produits scalaires

1. Nous avons $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \langle x \mid y \rangle + \|y\|^2$
   - ▷ Donc, si $\langle x \mid y \rangle = 0$, alors $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$
   - ▷ Et, réciproquement, si $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, alors, bien évidemment,$\langle x \mid y \rangle = 0$
2. De la même manière, nous avons :

$$\|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \langle x_1 + \cdots + x_n \mid x_1 + \cdots + x_n \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x_k \mid x_k \rangle + 2 \sum_{i \neq j} \langle x_i \mid x_j \rangle$$

De $\langle x_i \mid x_j \rangle = 0$, nous tirons le résultat

Remarque 7 :

Dans le second point de 16.1.12, il n'y a pas d'équivalence. En effet, pour plus de 3 vecteurs, la réciproque est fausse, c'est à dire, si $\|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$, avons nous $\langle x_i \mid x_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$? ? ? La réponse est non.

Exemple :

Dans $\mathbb{R}^2$, prenons les vecteurs $u = (1, 0)$, $v = (0, 1)$ et $w = (1, -1)$

Alors :

▷ Nous avons $\|u\|^2 = 1$, $\|v\|^2 = 1$ et $\|w\|^2 = 2$ et donc : $\|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2 = 4$

▷ Maintenant, $\|u+v+w\|^2 = \|(1,0)+(0,1)+(1,-1)\|^2 = \|(2,0)\|^2 = 4$
Nous avons bien $\|u+v+w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2$, mais $\langle u \mid v\rangle = 0$, $\langle u \mid w\rangle = 1$ et $\langle w \mid v\rangle = -1$; les vecteurs ne sont pas 2 à 2 orthogonaux

16.1.13 Orthogonalité et liberté

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien.
Soit $X = \{x_1 \dots x_n\}$ une famille de n vecteurs deux à deux orthogonaux et non nuls, c'est à dire :

$$\text{pour tout } i, x_i \neq \overrightarrow{0} \text{ et } i \neq j \Longrightarrow \langle x_i \mid x_j\rangle = 0$$

Alors, la famille X est une famille libre

Démonstration

Soient $\lambda_1, \dots \lambda_n$, n réels tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \overrightarrow{0}$
Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\begin{aligned} 0 = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \mid x_k \right\rangle &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle x_j \mid x_k\rangle \\ &= \lambda_k \langle x_k \mid x_k\rangle \\ &= \lambda_k \|x_k\|^2 \end{aligned}$$

Comme $x_k \neq \overrightarrow{0}$, nous avons $\|x_k\|^2 \neq 0$ et de l'équation $\lambda_k \|x_k\|^2 = 0$, nous déduisons $\lambda_k = 0$, et ceci pour tout k.
Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. La famille X est donc une famille libre

16.1.14 Notion de base orthonormée

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie n

1. Une base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ est dite orthogonale lorsque

$$\langle e_i \mid e_j\rangle = 0 \text{ si } i \neq j$$

2. Une base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ est dite orthonormée lorsque

$$\langle e_i \mid e_j\rangle = 0 \text{ si } i \neq j \text{ et } \langle e_i \mid e_i\rangle = 1 \Longleftrightarrow \|e_i\| = 1$$

Remarque 8 :

1. Il faut remarquer que nous ne nous posons pas la question de l'existence de ces bases orthonormées. Nous le ferons dans un cours ultérieur.
2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie n de base orthonormée $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$.

Soient $x \in E$ et $y \in E$ tels que $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ et $y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$. Alors :

$$\begin{aligned}
\langle x \mid y \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \mid \sum_{k=1}^{n} y_k e_k \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k \left\langle e_k \mid \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \langle e_k \mid e_j \rangle \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \langle e_k \mid e_k \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k
\end{aligned}$$

Nous retrouvons ici, le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$

16.1.15 Proposition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie n et de base orthonormée $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$
Alors, pour tout $x \in E$, nous avons :

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle e_i \text{ et } \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle x \mid e_i \rangle|^2$$

Démonstration

Soit $x \in E$

1. On écrit $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$. Alors, pour $i = 1, \cdots, n$, nous avons :

$$\langle x \mid e_i \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \mid e_i \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle e_k \mid e_i \rangle = \lambda_i$$

   Donc, $\lambda_i = \langle x \mid e_i \rangle$; ce que nous voulions.

2. D'autre part, $\|x\|^2 = \langle x \mid x \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \mid \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\rangle$.

   La famille $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ étant orthonormée, d'après le théorème de Pythagore 16.1.12, nous avons :

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \mid \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle^2$$

   Ce que nous voulions

Remarque 9 :

Nous retrouvons ces résultats dans les problèmes d'approximation et d'analyse de Fourier.

16.1.16 Proposition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie et $F \subset E$, un sous-espace vectoriel de E. Alors :

1. E est somme directe de F et $F^\perp$, c'est à dire $E = F \oplus F^\perp$
2. Nous avons $\left(F^\perp\right)^\perp = F$

Démonstration

1. Montrons que $E = F \oplus F^{\perp}$
   (a) Nous avons déjà montré en 16.1.6 que si $X \subset E$, alors $X^{\perp}$ était un sous-espace vectoriel de E ; à plus forte raison si, F est un sous-espace vectoriel de E, $F^{\perp}$ est aussi un sous-espace vectoriel de E.
   (b) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E. Dans tous les cas, nous avons $F \cap F^{\perp} = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$
   → F et $F^{\perp}$ étant des sous-espace vectoriel , nous avons $\overrightarrow{0} \in F$ et $\overrightarrow{0} \in F^{\perp}$; donc $\overrightarrow{0} \in F \cap F^{\perp}$
   → Réciproquement, si $x \in F \cap F^{\perp}$, alors $x \in F$ et $x \in F^{\perp}$ et donc $\langle x \mid x\rangle = 0$, c'est à dire $x = \overrightarrow{0}$
   (c) Supposons que $\dim F = p$
   → Alors, dans un premier temps, on peut supposer que $\dim F^{\perp} \leqslant \dim E - p$
   → Soit $\{e_1, \ldots, e_p\}$ une base de F. On construit une application $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de la manière suivante :
   $$\left\{\begin{array}{ccl} \Phi : E & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ x & \longmapsto & \Phi(x) = (\langle x \mid e_1\rangle, \langle x \mid e_2\rangle, \cdots, \langle x \mid e_p\rangle) \end{array}\right.$$
   ⋆ Il est facile de démontrer que Φ est linéaire
   ⋆ Nous avons aussi $F^{\perp} \subset \ker \Phi$
   ⋆ Réciproquement, si $x \in \ker \Phi$, alors $\Phi(x) = (0, 0, \cdots, 0)$, ce qui signifie que, pour tout $i = 1, \cdots, p$, $\langle x \mid e_i\rangle = 0$, et par bilinéarité du produit scalaire, que x est orthogonal à tout vecteur de F, c'est à dire que $x \in F^{\perp}$ et donc $\ker \Phi \subset F^{\perp}$
   ⋆ Donc $\ker \Phi = F^{\perp}$
   → Comme, à priori, $\dim \mathrm{Im}\Phi \leqslant p$, du théorème du rang 8.4.2 $\dim \ker \Phi + \dim \mathrm{Im}\Phi = \dim E$, nous avons donc $\dim \ker \Phi = \dim E - \dim \mathrm{Im}\Phi$.
   De $\dim \mathrm{Im}\Phi \leqslant p$ et $\dim \ker \Phi = \dim E - \dim \mathrm{Im}\Phi$, nous tirons que que $\dim \ker \Phi \geqslant \dim E - p$.
   En synthèse, nous avons $\dim F^{\perp} \leqslant \dim E - p$ et $\dim F^{\perp} \geqslant \dim E - p$ et donc $\dim F^{\perp} = \dim E - p$ et donc $E = F \oplus F^{\perp}$
2. Démontrer que $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$ est simple et laissée au lecteur

Remarque 10 :

Le fait que $E = F \oplus F^{\perp}$ montre que tout $x \in E$ peut s'écrire de manière unique $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^{\perp}$. Nous avons alors $\langle x_2 \mid x_1\rangle = 0$

Exercice 7 :

Dans cet exercice, nous allons redémontrer 16.1.16 dans des cas particuliers. On peut remarquer que E n'est donné de dimension finie.

1. E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien et $D \subset E$ est une droite vectorielle de base i. On suppose $\|i\| = 1$. Comme d'habitude, nous notons $D^{\perp}$ le sous-espace vectoriel des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tout vecteur de D
   (a) Démontrez que, pour tout vecteur $u \in E$, les deux vecteurs $u_1 = \langle u \mid i\rangle\, i$ et $u_2 = u - u_1$ sont tels que :
   $$u_1 \in D \quad \text{et } u_2 \in D^{\perp}$$
   (b) Démontrer que D et $D^{\perp}$ sont 2 sous-espaces vectoriels supplémentaires de E
2. E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien et $P \subset E$ est un plan vectoriel de base orthonormée $\{i, j\}$. Nous notons $P^{\perp}$ le sous-espace vectoriel des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tout vecteur de P
   (a) Démontrez que, pour tout vecteur $u \in E$, les deux vecteurs $u_1 = \langle u \mid i\rangle\, i + \langle u \mid j\rangle\, j$ et $u_2 = u - u_1$ sont tels que :
   $$u_1 \in P \quad \text{et } u_2 \in P^{\perp}$$
   (b) Démontrer que P et $P^{\perp}$ sont 2 sous-espaces vectoriels supplémentaires de E

16.1.17 Définition de projection orthogonale

Etant donné que F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires, d'après 8.11.1, il est possible de considérer une projection sur F, parallèlement à $F^{\perp}$

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie et $F \subset E$, un sous-espace vectoriel de E. On sait que tout $x \in E$ peut s'écrire de manière unique $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^{\perp}$
On appelle projection orthogonale sur F la projection sur F, parallèlement à $F^{\perp}$, c'est à dire une application p_F définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} p_F : E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & p_F(x) = x_1 \end{array} \right.$$

Remarque 11 :

Si nous suivons cette définition, nous avons $x = p_F(x) + x_2$, et que, donc $x_2 = x - p_F(x)$, à savoir que tout $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$ et que $\langle p_F(x) \mid x - p_F(x) \rangle = 0$

16.1.18 Théorème *(Propriétés des projections orthogonales)*

Beaucoup des items ci-après sont une redite de 8.11.2

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie et $F \subset E$, un sous-espace vectoriel de E. p_F est la projection orthogonale sur F. Alors :

1. Pour tout $x \in E$, $x - p_F(x) \in F^{\perp}$ et $x = p_F(x) + p_{F^{\perp}}(x)$
2. Pour tout $x \in E$, nous avons $\|p_F(x)\| \leqslant \|x\|$
3. p_F est une application linéaire de E dans E ($p_F \in \mathcal{L}(E)$)
4. Si $\mathcal{B}_0 = \{f_1, \ldots, f_k\}$ est une base orthonormée de F, alors, pour tout $x \in E$, nous avons :
$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle x \mid f_i \rangle f_i$$
5. Si p_F est une projection orthogonale sur F, sous-espace vectoriel de E, alors $p_F \circ p_F = p_F$
6. Réciproquement, si p est un endomorphisme de E vérifiant $p \circ p = p$, et si, en plus, $\mathrm{Im}\, p \perp \ker p$, alors p est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\, p$
7. Propriété de minimalité : Pour tout $x \in E$, $\|x - p_F(x)\| = \inf\limits_{w \in F} \|x - w\|$

Démonstration

1. Le premier point est la redite de la remarque
2. Pour le second point point, comme $x = p_F(x) + x - p_F(x)$ et que $\langle p_F(x) \mid x - p_F(x) \rangle = 0$, d'après le théorème de Pythagorre 16.1.12, $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2$, d'où $\|p_F(x)\|^2 \leqslant \|x\|^2$, c'est à dire $\|p_F(x)\| \leqslant \|x\|$
3. p_F est une application linéaire
Nous retrouvons la démonstration de 8.11.2
Soient $x \in E$ et $y \in E$. Alors :
   - $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$ et $y = p_F(y) + (y - p_F(y))$. Et donc
$$x + y = p_F(x) + p_F(y) + (x - p_F(x)) + (y - p_F(y))$$
F est un sous-espace vectoriel de E et donc $p_F(x) + p_F(y) \in F$.
D'autre part, $(x - p_F(x)) \in F^{\perp}$ et $(y - p_F(y)) \in F^{\perp}$. $F^{\perp}$ est aussi un sous-espace vectoriel de E et donc $(x - p_F(x)) + (y - p_F(y)) \in F^{\perp}$, de telle sorte que :
$$p_F(x + y) = p_F(x) + p_F(y)$$

- ▷ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; alors, $\lambda x = \lambda p_F(x) + \lambda(x - p_F(x))$
  Des structures de sous-espace vectoriel de F et $F^\perp$, nous avons $\lambda p_F(x) \in F$ et $\lambda(x - p_F(x)) \in F^\perp$ et donc :
  $$p_F(\lambda x) = \lambda p_F(x)$$

  La projection orthogonale p_F est bien une application linéaire

4. Soit $x \in E$.
   Nous avons $x - p_F(x) \in F^\perp$ et donc, pour tout j tel que $1 \leqslant j \leqslant k$, nous avons $\langle x - p_F(x) \mid f_j\rangle = 0$, c'est à dire $\langle x \mid f_j\rangle = \langle p_F(x) \mid f_j\rangle$

   Nous écrivons $p_F(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i$.

   Alors, $\langle p_F(x) \mid f_j\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i \mid f_j \right\rangle = \lambda_j$. Ainsi, $\langle x \mid f_j\rangle = \lambda_j$.

   D'où $p_F(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle x \mid f_j\rangle f_i$
5. <u>Montrons que $p_F \circ p_F = p_F$</u>
   Soit $x \in E$
   Alors $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$ et $p_F(x)$ se décompose de manière unique en $p_F(x) = p_F(x) + \overrightarrow{0}$ avec $\overrightarrow{0} \in F^\perp$
   Donc, $p_F(p_F(x)) = p_F(x)$, et donc $p_F \circ p_F = p_F$
6. <u>Réciproquement, soit p est un endomorphisme de E vérifiant $p \circ p = p$, et tel que $\mathrm{Im}p \perp \ker p$</u>
   Nous allons montrer que $\mathrm{Im}p$ et $\ker p$ sont en somme directe et de l'orthogonalité $\mathrm{Im}p \perp \ker p$, nous déduirons que p est une projection orthogonale sur $\mathrm{Im}p$
   Soit $x \in E$ Alors, $x = p(x) + x - p(x)$ et nous avons $p(x) \in \mathrm{Im}p$. Montrons que $x - p(x) \in \ker p$
   $$p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p \circ p(x) = p(x) - p(x) = \overrightarrow{0}$$
   Démontrons que $\mathrm{Im}p \cap \ker p = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$
   Soit donc $u \in \mathrm{Im}p \cap \ker p$. Alors :
   - ▷ Basiquement, $p(u) = \overrightarrow{0}$
   - ▷ Comme $u \in \mathrm{Im}p$, il existe $z \in E$ tel que $p(z) = u$.

   Donc :
   $$p(u) = p(p(z)) = p \circ p(z) = p(z) = u$$
   Donc, $p(u) = u$ et comme $p(u) = \overrightarrow{0}$, nous avons $u = \overrightarrow{0}$.
   Ainsi $\mathrm{Im}p \cap \ker p = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ et nous avons $E = \mathrm{Im}p \oplus \ker p$ et p est ainsi une projection orthogonale sur $\mathrm{Im}p$
7. <u>Propriété de minimalité</u>
   Soit $x \in E$.
   Pour tout $w \in F$, nous avons : $\|x - w\|^2 = \|x - p_F(x) + p_F(x) - w\|^2$
   - ▷ Tout d'abord $x - p_F(x) \in F^\perp$
   - ▷ Et des propriétés de sous-espace vectoriel de F, nous avons $p_F(x) - w \in F$
   - ▷ Donc, d'après le théorème de pythagorre, $\|x - p_F(x) + p_F(x) - w\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - w\|^2$; donc $\|x - w\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - w\|^2$, de telle sorte que $\|x - w\|^2 \geqslant \|x - p_F(x)\|^2$, et ce, pour tout $x \in E$ et tout $w \in F$

   Nous avons donc bien, pour tout $x \in E$, $\|x - p_F(x)\| = \inf_{w \in F} \|x - w\|$

Remarque 12 :

On vient de montrer 2 choses

1. Si p_F est une projection orthogonale sur F, alors les éléments de F sont invariants par p_F

2. Si p est un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$, alors, les éléments de $\mathrm{Im}p$ sont invariants
3. La propriété de minimalité est un cas particulier de projection sur les convexes *(un sous-espace vectoriel est un convexe particulier)*. Cette propriété de minimalité a son importance dans les problèmes d'approximation.

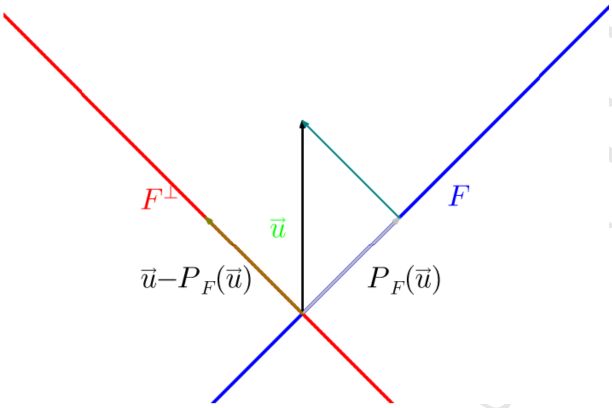


FIGURE 16.2 – Une visualisation des projections orthogonales

16.1.19 Définition de symétrie orthogonale

Comme dans la définition des projections orthogonales, étant donné que F et $F^\perp$ sont supplémentaires, d'après 8.11.4, il est possible de considérer une symétrie par rapport à F, parallèlement à $F^\perp$

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie et $F \subset E$, un sous-espace vectoriel de E. On sait que tout $x \in E$ peut s'écrire de manière unique $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^\perp$
On appelle symétrie orthogonale par rapport à F une application σ_F définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \sigma_F : E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \sigma_F(x) = x_1 - x_2 \end{array} \right.$$

Remarque 13 :

En d'autre termes, comme, pour tout $x \in E$, nous pouvons écrire $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$ avec $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$, nous avons $\sigma_F(x) = p_F(x) - (x - p_F(x)) = 2p_F(x) - x$, ce qui donne, en termes d'applications linéaire : $\sigma_F = 2p_F - \mathrm{Id}_E$

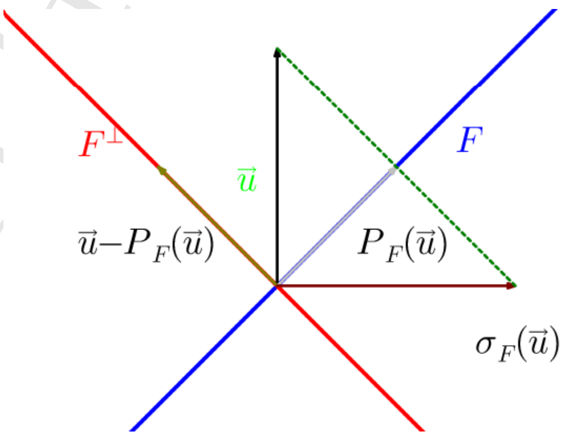


FIGURE 16.3 – Une visualisation des projections orthogonales et de la symétrie orthogonale

16.1.20 Théorème *(Propriétés des symétries orthogonales)*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie et $F \subset E$, un sous-espace vectoriel de E. σ_F est la symétrie orthogonale par rapport à F. Alors :

1. Pour tout $x \in E$, nous avons $\|\sigma_F(x)\| = \|x\|$
2. σ_F est une application linéaire de E dans E ($\sigma_F \in \mathcal{L}(E)$)
3. Si σ_F est une symétrie orthogonale par rapport à F sous-espace vectoriel de E, alors $\sigma_F \circ \sigma_F = \mathrm{Id}_E$.
   On dit que σ_F est involutive ou que c'est une involution

Démonstration

1. Montrons que, pour tout $x \in E$, $\|\sigma_F(x)\| = \|x\|$
   Il suffit d'utiliser le théorème de Pythagore 16.1.12.
   Soit $x \in E$; alors $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^{\perp}$ et $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$
   De même, comme $\sigma_F(x) = x_1 - x_2$, nous avons $\|\sigma_F(x)\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$.
   D'où le résultat
2. σ_F est clairement une application linéaire de E dans E
3. σ_F est involutive
   Soit $x \in E$; il faut montrer que $\sigma_F \circ \sigma_F(x) = x$
   Nous avons $\sigma_F(x) = x_1 - x_2 = x_1 + (-x_2)$ et $\sigma_F(\sigma_F(x)) = x_1 - (-x_2) = x_1 + x_2 = x$
   Ce que nous voulions

   On pouvait aussi le démontrer autrement
   En utilisant le fait qu'en termes d'applications linéaire : $\sigma_F = 2p_F - \mathrm{Id}_E$. nous avons alors :

$$\sigma_F \circ \sigma_F = (2p_F - \mathrm{Id}_E) \circ (2p_F - \mathrm{Id}_E) = 4p_F \circ p_F - 2p_F - 2p_F + \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E$$

16.1.21 Quelques exercices résolus

Dans ces exercices, nous parlerons beaucoup de définition analytique. Qu'est ce que c'est ?
C'est trouver une relation entre les coordonnées..
Définir analytiquement une transformation, c'est donner les coordonnées de l'image en fonction de celles de l'antécédent. Pour une application linéaire, c'est aussi donner la matrice de cette application linéaire.

1. **Dans le plan**
   Donner la définition analytique de la projection orthogonale sur la droite Δ d'équation $y = x$
   Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$, alors, sa projection sur Δ sera $p_\Delta(u) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$
   Comme $p_\Delta(u) \in \Delta$, nous avons $x' = y'$.
   D'autre part, $u - p_\Delta(u)$ est orthogonal à Δ, et si u_Δ est un vecteur de base de Δ, on peut choisir $u_\Delta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nous devons donc avoir $\langle u - p_\Delta(u) \mid u_\Delta \rangle = 0$, c'est à dire $(x - x') + (y - y') = 0 \iff x' + y' = x + y$
   Nous avons donc le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& y' \\ x' + y' &=& x + y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& y' \\ 2x' &=& x + y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& \dfrac{x+y}{2} \\ y' &=& \dfrac{x+y}{2} \end{array} \right.$$

   Nous avons ainsi la définition analytique de p_Δ
   La matrice de p_Δ est donc $M(p_\Delta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Comme la symétrie par rapport à Δ est donnée par $\sigma_\Delta = 2p_\Delta - \mathrm{Id}_2$, la matrice est donc donnée par :

$$M(\sigma_\Delta) = 2M(p_\Delta) - \mathrm{Id}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. **Dans l'espace**

Donner la définition analytique de la projection orthogonale sur le plan Π d'équation $x = 0$

La méthode sera identique.

Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$, alors, sa projection sur Π sera $p_\Pi(u) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

Comme $p_\Pi(u) \in \Pi$, nous avons $x' = 0$.

D'autre part, $u - p_\Pi(u)$ est orthogonal à Π, Π étant un plan, admet 2 vecteurs de base. Nous pouvons choisir $u_\Pi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_\Pi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteurs de base.

Nous devons donc avoir $\langle u - p_\Pi(u) \mid u_\Pi \rangle = 0$ et $\langle u - p_\Pi(u) \mid v_\Pi \rangle = 0$, c'est à dire :

$$y - y' = 0 \text{ et } z - z' = 0$$

Nous avons donc le système :

$$\begin{cases} x' = & 0 \\ y' = & y \\ z' = & z \end{cases}$$

Nous avons ainsi la définition analytique de p_Π

La matrice de p_Π est donc $M(p_\Pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Comme la symétrie par rapport à Π est donnée par $\sigma_\Pi = 2p_\Pi - \mathrm{Id}_3$, la matrice est donc donnée par :

$$M(\sigma_\Pi) = 2M(p_\Pi) - \mathrm{Id}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

16.1.22 Exercices

Exercice 8 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$. Soit $D \subset E$ une droite vectorielle incluse dans E. On désigne par ϖ la projection orthogonale de E sur D

1. La droite vectorielle D étant définie par l'une de ses bases u, définir analytiquement ϖ dans les cas suivants :

(a) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ (b) $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (c) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (d) $u = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

2. La droite vectorielle D étant définie par 2 équations cartésiennes, définir analytiquement ϖ dans les cas suivants :

(a) $D : \begin{cases} x - 2y = & 0 \\ x + y + z = & 0 \end{cases}$ (c) $D : \begin{cases} x + y - z = & 0 \\ 2x + y + z = & 0 \end{cases}$

(b) $D : \begin{cases} x + z = & 0 \\ x = & 0 \end{cases}$ (d) $D : \begin{cases} x = & az + b \\ y = & cz + d \end{cases}$

3. Dans les situations précédentes, définir σ_D, la symétrie orthogonale par rapport à D

Exercice 9 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$. Soit $P \subset E$ un plan vectoriel incluse dans E. On désigne par ϖ la projection orthogonale de E sur P

1. Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur unitaire *(c'est à dire que* $\|\overrightarrow{n}\| = 1$*)* de la droite D orthogonale à P. Démontrer que, pour tout $u \in E$:
$$\varpi(u) = u - \langle u \mid \overrightarrow{n} \rangle \overrightarrow{n}$$
2. La plan P étant défini par 1 équation cartésienne, définir analytiquement ϖ dans les cas suivants :

(a) $P: \ 2x - y + 2z = 0$ (b) $P: \ x - y = 0$ (c) $P: \ y = 0$ (d) $P: \ ax + by + cz = 0$

3. La plan P étant défini par une de ses bases $\{u_1; u_2\}$, définir analytiquement ϖ dans les cas suivants :

(a) $P: \ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (c) $P: \ u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(b) $P: \ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (d) $P: \ u_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$

4. Dans les situations précédentes, définir σ_P, la symétrie orthogonale par rapport à P

16.2 Groupe Orthogonal

16.2.1 Définition

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie et $\Phi \in \mathcal{L}(E)$
On dit que Φ est un endomorphisme orthogonal si et seulement si Φ conserve le produit scalaire, c'est à dire :
$$(\forall u \in E)\,(\forall v \in E)\,(\langle \Phi(u) \mid \Phi(v) \rangle = \langle u \mid v \rangle)$$

Remarque 14 :

Cette définition est encore valable si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel quelconque, pas forcément de dimension finie.

Exemple 2 :

1. **Une projection orthogonale n'est pas un endomorphisme orthogonal**
Dans un plan E de dimension 2 muni d'une base $\{i, j\}$ orthonormée. Considérons la projection orthogonale p sur la droite Δ d'équation $y = x$.
Nous avons $p(i) = p(j) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et donc $\langle p(i) \mid p(j) \rangle = \dfrac{1}{2}$, alors que $\langle i \mid j \rangle = 0$
Une projection ne conserve donc pas le produit scalaire et n'est pas un endomorphisme orthogonal (cf figure 16.4
2. **Une symétrie orthogonale est un endomorphisme orthogonal**
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E. On considère σ_F la symétrie orthogonale par rapport à F
Soient $u \in E$ et $v \in E$. Alors, $u = u_F + u_{F^\perp}$ et $v = v_F + v_{F^\perp}$
Donc, $\sigma_F(u) = u_F - u_{F^\perp}$, tout comme $\sigma_F(v) = v_F - v_{F^\perp}$.
Alors, comme $\langle u_F \mid v_{F^\perp} \rangle = \langle v_F \mid u_{F^\perp} \rangle = 0$

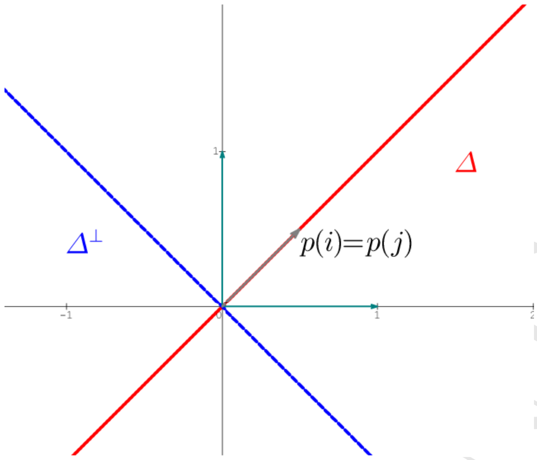


FIGURE 16.4 – Une projection ne conserve pas le produit scalaire et n'est pas un endomorphisme orthogonal

- $\langle u \mid v\rangle = \langle u_F + u_{F^\perp} \mid v_F + v_{F^\perp}\rangle = \langle u_F \mid v_F\rangle + \langle u_{F^\perp} \mid v_{F^\perp}\rangle$
- $\langle \sigma_F(u) \mid \sigma_F(v)\rangle = \langle u_F - u_{F^\perp} \mid v_F - v_{F^\perp}\rangle = \langle u_F \mid v_F\rangle + \langle u_{F^\perp} \mid v_{F^\perp}\rangle$

Et nous avons dons $\langle u \mid v\rangle = \langle \sigma_F(u) \mid \sigma_F(v)\rangle$; σ_F conserve donc le produit scalaire et est un endomorphisme orthogonal

16.2.2 Théorème

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie et $\Phi \in \mathcal{L}(E)$; Alors
Φ est un endomorphisme orthogonal si et seulement si Φ conserve la norme, c'est à dire :

$$(\forall u \in E)\,(\|\Phi(u)\| = \|u\|)$$

Démonstration

1. On suppose que Φ est orthogonal, et nous allons démontrer que Φ conserve la norme
   Soit $u \in E$; Φ étant un endomorphisme orthogonal, nous avons : $\langle \Phi(u) \mid \Phi(u)\rangle = \langle u \mid u\rangle$, c'est à dire $\|\Phi(u)\|^2 = \|u\|^2$. Autrement dit, $\|\Phi(u)\| = \|u\|$, c'est à dire Φ conserve la norme
2. On suppose que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$ conserve la norme
   Montrons que Φ conserve le produit scalaire.
   D'après 16.1.9, nous avons pour tout $u \in E$ et tout $v \in E$:

$$\langle u \mid v\rangle = \frac{\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2}{2}$$

et

$$\langle \Phi(u) \mid \Phi(v)\rangle = \frac{\|\Phi(u)+\Phi(v)\|^2 - \|\Phi(u)\|^2 - \|\Phi(v)\|^2}{2}$$

Φ conservant la norme, $\|\Phi(u)\|^2 = \|u\|^2$ et $\|\Phi(v)\|^2 = \|v\|^2$
Φ étant linéaire, $\Phi(u)+\Phi(v) = \Phi(u+v)$ et donc $\|\Phi(u)+\Phi(v)\|^2 = \|\Phi(u+v)\|^2$.
Réitérons le fait que Φ conserve la norme et nous avons : $\|\Phi(u+v)\|^2 = \|u+v\|^2$; et nous avons alors :

$$\langle \Phi(u) \mid \Phi(v)\rangle = \frac{\|\Phi(u)+\Phi(v)\|^2 - \|\Phi(u)\|^2 - \|\Phi(v)\|^2}{2} = \frac{\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2}{2} = \langle u \mid v\rangle$$

Ainsi, Φ endomorphisme conservant la norme conserve aussi le produit scalaire.

16.2.3 Définition

On appelle <u>isométrie</u> un endomorphisme qui conserve la norme

Remarque 15 :

1. Une isométrie est donc forcément une application linéaire
2. En restreignant à un endomorphisme, nous avons pris, ici, une *définition restrictive* de l'isométrie. On peut rencontrer des isométries d'un ensemble vers un autre [2]

Exercice 10 :

Démontrer qu'une isométrie est forcément injective

Exercice 11 :

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien

1. Démontrer que si Φ est un endomorphisme orthogonal de E, alors $-\Phi$ en est un aussi
2. Soit Φ un endomorphisme orthogonal de E
   (a) Démontrer que s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et un vecteur $u \in E$, non nul, tels que $\Phi(u) = \lambda u$, alors $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$
   (b) Démontrer que si 2 vecteurs $u \in E$ et $v \in E$ non nuls tous les deux, tels que $\Phi(u) = u$ et $\Phi(v) = -v$, alors u et v sont orthogonaux

16.2.4 Théorème

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie et $\Phi : E \longrightarrow E$ une application quelconque ; Alors Φ est un endomorphisme orthogonal si et seulement si Φ conserve le produit scalaire

<u>Démonstration</u>

1. <u>Supposons que Φ soit un endomorphisme orthogonal</u>
   Par définition d'endomorphisme orthogonal, Φ est linéaire et conserve le produit scalaire
2. <u>Supposons que Φ, application quelconque conserve le produit scalaire</u>
   - Tout d'abord, Φ conservant le produit scalaire, conserve aussi la norme, puisque, pour tout $u \in E$, npous avons :
   $$\|\Phi(u)\|^2 = \langle \Phi(u) \mid \Phi(u) \rangle = \langle u \mid u \rangle = \|u\|^2$$
   C'est à dire $\|\Phi(u)\| = \|u\|$
   - Nous allons montrer que Φ est linéaire
     ▷ Montrons que, pour tout $u \in E$ et tout $v \in E$, nous avons $\Phi(u+v) = \Phi(u) + \Phi(v)$
     Pour ce faire, nous allons montrer que $\|\Phi(u+v) - \Phi(u) - \Phi(v)\| = 0$
     $$\begin{aligned} \|\Phi(u+v) - \Phi(u) - \Phi(v)\|^2 &= \langle \Phi(u+v) - \Phi(u) - \Phi(v) \mid \Phi(u+v) - \Phi(u) - \Phi(v) \rangle \\ &= \langle \Phi(u+v) \mid \Phi(u+v) \rangle - \langle \Phi(u+v) \mid \Phi(u) \rangle - \langle \Phi(u+v) \mid \Phi(v) \rangle \\ &\quad - \langle \Phi(u) \mid \Phi(u+v) \rangle + \langle \Phi(u) \mid \Phi(u) \rangle + \langle \Phi(u) \mid \Phi(v) \rangle \\ &\quad - \langle \Phi(v) \mid \Phi(u+v) \rangle + \langle \Phi(v) \mid \Phi(u) \rangle + \langle \Phi(v) \mid \Phi(v) \rangle \\ &= \|\Phi(u+v)\|^2 - \langle \Phi(u+v) \mid \Phi(u) \rangle - \langle \Phi(u+v) \mid \Phi(v) \rangle \\ &\quad - \langle \Phi(u) \mid \Phi(u+v) \rangle + \|\Phi(u)\|^2 + \langle \Phi(u) \mid \Phi(v) \rangle \\ &\quad - \langle \Phi(v) \mid \Phi(u+v) \rangle + \langle \Phi(v) \mid \Phi(u) \rangle + \|\Phi(v)\|^2 \\ &= \|\Phi(u+v)\|^2 + \|\Phi(u)\|^2 + \|\Phi(v)\|^2 \\ &\quad -2\langle \Phi(u) \mid \Phi(u+v) \rangle - 2\langle \Phi(v) \mid \Phi(u+v) \rangle + 2\langle \Phi(v) \mid \Phi(u) \rangle \end{aligned}$$
     Φ conservant le produit scalaire,conserve aussi la norme et nous avons :
     $$\|\Phi(u+v)\|^2 + \|\Phi(u)\|^2 + \|\Phi(v)\|^2 = \|u+v\|^2 + \|u\|^2 + \|v\|^2$$

2. Mais, c'est une autre question !!

Φ conservant le produit scalaire,nous avons :

$-\langle \Phi(u) \mid \Phi(u+v)\rangle - \langle \Phi(v) \mid \Phi(u+v)\rangle + \langle \Phi(v) \mid \Phi(u)\rangle = -\langle u \mid u+v\rangle - \langle v \mid u+v\rangle + \langle v \mid u\rangle$

La bilinéarité du produit scalaire nous montre que :

$-\langle u \mid u+v\rangle - \langle v \mid u+v\rangle + \langle v \mid u\rangle = -\langle u \mid u\rangle - \langle u \mid v\rangle - \langle v \mid u\rangle - \langle v \mid v\rangle + \langle v \mid u\rangle = -\|u\|^2 - \|v\|^2 - \langle u \mid v\rangle$

Et donc :

$$\|\Phi(u+v) - \Phi(u) - \Phi(v)\|^2 = \|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 - 2\langle u \mid v\rangle$$

Or :

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v \mid u+v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u \mid v\rangle$$

Et donc, en synthèse, nous avons :

$$\|\Phi(u+v) - \Phi(u) - \Phi(v)\|^2 = \|u+v\|^2 - \|u+v\|^2 = 0$$

C'est à dire $\Phi(u+v) = \Phi(u) + \Phi(v)$

▷ Montrons que, pour tout $u \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, nous avons $\Phi(\lambda u) = \lambda \Phi(u)$
Pour ce faire, nous allons montrer que $\|\Phi(\lambda u) - \lambda\Phi(u)\| = 0$
Comme tout à l'heure :

$$\begin{aligned}
\|\Phi(\lambda u) - \lambda\Phi(u)\|^2 &= \langle \Phi(\lambda u) - \lambda\Phi(u) \mid \Phi(\lambda u) - \lambda\Phi(u)\rangle \\
&= \langle \Phi(\lambda u) \mid \Phi(\lambda u)\rangle - 2\lambda\langle \Phi(\lambda u) \mid \Phi(u)\rangle + \lambda^2\langle \Phi(u) \mid \Phi(u)\rangle \\
&= \langle \lambda u \mid \lambda u\rangle - 2\lambda\langle \lambda u \mid u\rangle + \lambda^2\langle u \mid u\rangle \\
&= \lambda^2\langle u \mid u\rangle - 2\lambda^2\langle u \mid u\rangle + \lambda^2\langle u \mid u\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi, $\|\Phi(\lambda u) - \lambda\Phi(u)\|^2 = 0$ et donc $\Phi(\lambda u) = \lambda\Phi(u)$

Ainsi, l'application Φ est linéaire et donc $\Phi \in \mathcal{L}(E)$

Remarque 16 :

1. Nous avons les équivalences suivantes :
   (a) Φ application quelconque qui conserve le produit scalaire $\Longleftrightarrow$ Φ endomorphisme orthogonal
   (b) Φ isométrie vectorielle $\Longleftrightarrow$ Φ endomorphisme orthogonal
2. **Nous n'avons pas :** Φ application qui conserve la norme $\Longrightarrow$ Φ endomorphisme orthogonal

   Exemple

   Dans le plan vectoriel, assimilé à $\mathbb{R}^2$, nous considérons la droite vectorielle D définie par :

   $$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } y = x\right\}$$

   On considère l'application F définie par :
   — $\mathrm{F}(u) = -u$ *si* $u \in D$
   — $\mathrm{F}(u) = u$ *si* $u \notin D$
   Clairement, cette application F conserve la norme, mais elle n'est pas linéaire

   En effet, $\mathrm{F}[(1,1)] = (1,1)$ et $\mathrm{F}[(1,-1)] = (-1,1)$ et $\mathrm{F}[(1,1)+(1,-1)] = \mathrm{F}[(2,0)] = (-2,0)$, alors que $\mathrm{F}[(1,1)] + \mathrm{F}[(1,-1)] = (1,1) + (-1,1) = (0,2)$.
   Nous avons donc $\mathrm{F}[(1,1)+(1,-1)] \neq \mathrm{F}[(1,1)] + \mathrm{F}[(1,-1)]$. F n'est donc pas linéaire.

Exercice 12 :

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien et $\Phi : E \longrightarrow E$ une application quelconque. On suppose :

$$\Phi\left(\overrightarrow{0}\right) = \overrightarrow{0} \text{ et } ((\forall u \in E)(\forall v \in E)\, \|\Phi(u) - \Phi(v)\| = \|u - v\|)$$

1. Démontrer que Φ conserve la norme et le produit scalaire
2. En déduire que Φ est un endomorphisme orthogonal de E

16.2.5 Proposition

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie et $\Phi \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme orthogonal
Alors, Φ est bijectif, c'est à dire que $\Phi \in \mathrm{GL}(E)$

Démonstration

Soit $\Phi \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme orthogonal. Pour montrer que Φ est bijectif, il suffit de montrer que $\ker \Phi = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.
Soit donc $u \in \ker \Phi$; alors, $\Phi(u) = \overrightarrow{0}$, c'est à dire $\|\Phi(u)\| = 0$. Φ étant un endomorphisme orthogonal, conserve la norme, et donc $\|\Phi(u)\| = \|u\| = 0$, et d'après les axiômes de normes, $u = \overrightarrow{0}$.
Ainsi $\ker \Phi = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ et Φ est une bijection.

Remarque 17 :

Une projection orthogonale n'est pas bijective et ne peut donc être un endomorphisme orthogonal ; on retrouve ici, l'exemple de la définition 16.2.1

16.2.6 Théorème

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie. On appelle $\mathrm{O}(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E. Alors,
$(\mathrm{O}(E), \circ)$ muni de la loi de composition des applications est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$
$\mathrm{O}(E)$ est appelé le groupe orthogonal

Démonstration

Nous allons faire la démonstration classique et établirons ainsi des résultats importants ; dans tous les cas, la composition des applications est associative

1. Tout d'abord, $\mathrm{O}(E) \neq \emptyset$
   De manière évidente, l'application identique Id_E est un endormorphisme qui conserve le produit scalaire, et donc $\mathrm{Id}_E \in \mathrm{O}(E)$
2. Montrons que la loi $\circ$ est interne
   C'est à dire que si f et g sont des endomorphismes orthogonaux, alors $f \circ g$ en est aussi un.
   Soient $u \in E$ et $v \in E$. Alors :
   $$\langle f(g(u)) \mid f(g(v)) \rangle = \langle g(u) \mid g(v) \rangle = \langle u \mid v \rangle$$
   Ce qui montre que $f \circ g$ conserve le produit scalaire, et donc $f \circ g \in \mathrm{O}(E)$
3. Montrons que si $\Phi \in \mathrm{O}(E)$, alors $\Phi^{-1} \in \mathrm{O}(E)$
   Tout d'abord, nous savons que si $\Phi \in \mathrm{O}(E)$, alors Φ est bijective, et donc que Φ^{-1} existe. Il faut simplement montrer que $\Phi^{-1} \in \mathrm{O}(E)$
   Soient $u \in E$ et $v \in E$. Alors :
   $$\langle u \mid v \rangle = \left\langle \Phi \circ \Phi^{-1}(u) \mid \Phi \circ \Phi^{-1}(v) \right\rangle = \left\langle \Phi^{-1}(u) \mid \Phi^{-1}(v) \right\rangle$$
   Donc Φ^{-1} conserve le produit scalaire. Ainsi $\Phi^{-1} \in \mathrm{O}(E)$

Donc $(\mathrm{O}(E), \circ)$ muni de la loi de composition des applications est un groupe ; il faut remarquer que **ce n'est pas un groupe commutatif**

16.2.7 Théorème

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie. Alors,
$\Phi \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme orthogonal si et seulement si
Φ transforme toute base orthonormée en une base orthonormée

Démonstration

1. Supposons que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$ soit un endomorphisme orthogonal
   Alors, Φ conserve le produit scalaire et la norme ; donc transforme une base orthonormée en une base orthonormée
2. Réciproquement, supposons que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$ transforme toute base orthonormée en une base orthonormée
   Soit $\{a_1, \ldots, a_n\}$ une base orthonormée de E ; alors $\{\Phi(a_1), \ldots, \Phi(a_n)\}$ est aussi une base orthonormée.
   Soit $x \in E$, alors $x = \sum_{k=1}^{n} x_k a_k$, et la base $\{a_1, \ldots, a_n\}$ étant une base orthonormée de E, d'après 16.1.15, nous avons $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$
   Nous avons aussi $\Phi(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k \Phi(a_k)$, et toujours d'après 16.1.15, nous avons $\|\Phi(x)\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$
   D'où $\|x\| = \|\Phi(x)\|$, et d'après 16.2.4, Φ est un endomorphisme orthogonal

16.2.8 Corollaire

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie. Alors, étant données deux bases orthonormées $\{a_1, \ldots, a_n\}$ et $\{b_1, \ldots, b_n\}$ de E, il n'existe qu'un et un seul endomorphisme orthogonal qui transforme la base $\{a_1, \ldots, a_n\}$ en la $\{b_1, \ldots, b_n\}$

Exercice 13 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $\{i, j, k\}$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ de matrice, dans la base $\{i, j, k\}$:

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Montre que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme orthogonal

16.2.9 Proposition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien
Les seuls endomorphismes orthogonaux involutifs sont les symétries orthogonales
Autrement dit :
σ est un endomorphisme orthogonal involutif si et seulement si σ est une symétrie orthogonale

Démonstration

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E et σ une symétrie orthogonale par rapport à F
   Nous avons déjà démontré que σ est un endomorphisme orthogonal
2. Réciproquement, soit σ un endomorphisme orthogonal involutif
   Nous allons montrer que σ est une symétrie orthogonale.
   Tout d'abord, σ est un endomorphisme involutif, et donc, d'après 8.11.6, σ est une symétrie vectorielle par rapport à $\mathcal{V}$ parallèlement à $\mathcal{V}_1$ où :
   - $\mathcal{V}$ est le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants par σ
   - $\mathcal{V}_1$ est le sous-espace vectoriel des vecteurs transformés en leur opposé par σ
   - Nous avons $E = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}_1$

Nous souhaiterions montrer que $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}^{\perp}$.
Pour cela, nous allons montrer que pour tout $x \in \mathcal{V}$ et tout $y \in \mathcal{V}_1$, nous avons $\langle x \mid y \rangle = 0$, et d'après la définition 16.1.5, nous aurons $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}^{\perp}$.
Soient donc $x \in \mathcal{V}$ et $y \in \mathcal{V}_1$. Alors :
Comme σ est un endomorphisme orthogonal, $\langle \sigma(x) \mid \sigma(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle$
D'autre part, $\sigma(x) = x$ et $\sigma(y) = -y$, et donc $\langle \sigma(x) \mid \sigma(y) \rangle = \langle x \mid -y \rangle = -\langle x \mid y \rangle$
En conclusion, nous avons $\langle x \mid y \rangle = -\langle x \mid y \rangle$ et donc, $\langle x \mid y \rangle = 0$
Ce que nous voulions

16.2.10 Exercices

Exercice 14 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien. Est-ce qu'une homothétie de E est un endomorphisme orthogonal ?

Exercice 15 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3, rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$.
Définir analytiquement la symétrie orthogonale σ par rapport au plan P d'équation $x - y + z = 0$

Exercice 16 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3, rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$. Soit f l'endomorphisme de E $(f \in \mathcal{L}(E))$ dont la matrice dans la base $\{i, j, k\}$ est :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Démontrer que f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite $D \subset E$

Exercice 17 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3, rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$. Soit φ l'endomorphisme de E $(\varphi \in \mathcal{L}(E))$ dont la matrice dans la base $\{i, j, k\}$ est :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que l'endomorphisme φ est orthogonal
2. Démontrer que l'ensemble des vecteurs invariants par φ est une droite vectorielle D dont on déterminera une base u
3. Démontrer que, pour tout vecteur unitaire v orthogonal à u, le produit scalaire $\langle v \mid \varphi(v) \rangle$ est constant.
4. Déterminer l'ensemble des vecteurs $w \in E$ tels que $\varphi(w) = -w$
5. Déterminer B la matrice de l'endomorphisme φ^{-1} dans la base $\{i, j, k\}$; quelle relation y-a-t-il entre A et B ?

Exercice 18 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien. Soit $i \in E$, un vecteur unitaire *(c'est à dire tel que $\|i\| = 1$)*. On désigne par f l'application de E dans E, par :

$$\begin{cases} f : E & \longrightarrow & E \\ \quad u & \longmapsto & f(u) = 2\langle u \mid i \rangle i - u \end{cases}$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme orthogonal involutif de E
2. Quel est l'ensemble des vecteurs invariants ? En déduire la nature de f
3. On appelle $D^{\perp}$ l'ensemble des vecteurs orthogonaux à la droite D de base i. Démontrer que l'application τ de E dans E, définie pour tout $u \in E$ par $\tau(u) = -f(u)$ est une symétrie orthogonale par rapport à $D^{\perp}$
4. Dans cette question, on suppose $\dim E = 2$ et que E est rapporté à une base orthonormée $\{i, j\}$. Utiliser les résultats précédents pour définir analytiquement la symétrie orthogonale par rapport à la droite D_u engendrée par le vecteur u, dans les cas suivants :

   (a) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (b) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (c) $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (d) $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

5. Dans cette question, on suppose $\dim E = 3$ et que E est rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$. Utiliser les résultats précédents pour définir analytiquement la symétrie orthogonale par rapport à la droite D_u engendrée par le vecteur u, dans les cas suivants :

   (a) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (b) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (c) $u = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (d) $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

6. Dans cette question, on suppose $\dim E = 3$ et que E est rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$. Utiliser les résultats précédents pour définir analytiquement la symétrie orthogonale par rapport au plan P dont une équation cartésienne est :

   (a) $z = 0$ (b) $x + y = 0$ (c) $x + y + z = 0$ (d) $ax + by + cz = 0$

Exercice 19 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien tel que $\dim E = 3$ et E est rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$. On appelle D_i, la droite vectorielle engendrée par i, D_j, la droite vectorielle engendrée par j et D_k, la droite vectorielle engendrée par k.
On appelle :

- ▷ σ_i, la symérie orthogonale par rapport à D_i
- ▷ σ_j, la symérie orthogonale par rapport à D_j
- ▷ σ_k, la symérie orthogonale par rapport à D_k

1. Démontrez que nous avons $\sigma_i \circ \sigma_j = \sigma_j \circ \sigma_i = \sigma_k$
2. On considère l'ensemble $\{\mathrm{Id}_E, \sigma_i, \sigma_j, \sigma_k\}$ muni de la composition des applications. Montrer que c'est un sous-groupe de $(\mathrm{O}(E), \circ)$ le groupe orthogonal de E

Exercice 20 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 1. Démontrez que les seuls endomorphismes orthogonaux de E sont Id_E et $-\mathrm{Id}_E$

Exercice 21 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien et $f \in \mathrm{O}(E)$. On appelle I l'ensemble des vecteurs invariants par f, c'est à dire :

$$I = \{u \in E \text{ tels que } f(u) = u\}$$

Démontrer que $f\left(I^{\perp}\right) \subset I^{\perp}$

16.3 Groupe Orthogonal du plan vectoriel *(dimension 2)*

Dans cette section, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2 *(c'est donc un plan)* rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B}_0 = \{i, j\}$

16.3.1 Introduction, notations

1. On appelle toujours $\mathrm{O}(E)$ le groupe orthogonal de E
2. A chaque endomorphisme $f \in \mathrm{O}(E)$, on fait correspondre une matrice carrée, dépendante de la base $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(f) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
3. On appelle $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 qui sont les matrices d'un endomorphisme orthogonal $f \in \mathrm{O}(E)$
4. Etant donné l'isomorphisme entre $\mathrm{O}(E)$ et $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, étudier $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, c'est aussi étudier $\mathrm{O}(E)$

16.3.2 Proposition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2 rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B}_0 = \{i, j\}$. Alors :

$$f \in \mathrm{O}(E) \Longleftrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ ou } \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \text{ avec } a^2 + b^2 = 1$$

Autrement dit :

$$A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \text{ avec } a^2 + b^2 = 1$$

Démonstration

Soit $f \in \mathrm{O}(E)$ de matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$
Nous avons donc : $f(i) = ai + bj$ et $f(j) = ci + dj$
Comme f est un endomorphisme orthogonal, $\|f(i)\| = \|f(j)\| = 1$ et $\langle f(i) \mid f(j) \rangle = \langle i \mid j \rangle = 0$, autrement dit, $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ et $ac + bd = 0$. Nous avons donc un système de 3 équations à 4 inconnues.

▷ Supposons $a = 0$
Alors, le système devient :

$$\begin{cases} b^2 = & 1 \\ c^2 + d^2 = & 1 \\ bd = & 0 \end{cases}$$

D'où nous tirons tout de suite : $b = \pm 1$ et $d = 0$ et donc $c = \pm 1$. D'où nous obtenons ainsi 4 premières matrices :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons que nous avons $A_4 = -A_1$ et $A_2 = -A_3$

▷ Supposons maintenant que $a \neq 0$
Alors, le système devient :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = & 1 \\ c^2 + d^2 = & 1 \\ ac + bd = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = & 1 \\ c^2 + d^2 = & 1 \\ c = & \dfrac{-bd}{a} \end{cases}$$

Remplaçons la valeur de c dans l'équation $c^2 + d^2 = 1$. nous avons alors :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = & 1 \\ c^2 + d^2 = & 1 \\ c = & \dfrac{-bd}{a} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = & 1 \\ \dfrac{b^2 d^2}{a^2} + d^2 = & 1 \\ c = & \dfrac{-bd}{a} \end{cases}$$

Or, $\dfrac{b^2d^2}{a^2} + d^2 = 1 \iff b^2d^2 + a^2d^2 = a^2 \iff d^2\left(a^2+b^2\right) = a^2 \iff d^2 = a^2$. D'où $d = \pm a$
Si $d = a$, alors $c = -b$ et si $d = -a$, alors $c = b$. D'où nous tirons 2 types de matrices :

$$B_1 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \text{ avec } a^2 + b^2 = 1$$

▷ Les matrices A_1 et A_4 sont du type B_2 avec $a = 0$ et $b = 1$ pour A_1 et $a = 0$ et $b = -1$ pour A_4 alors que les matrices A_2 et A_3 sont du type B_1 avec $a = 0$ et $b = 1$ pour A_2 et $a = 0$ et $b = -1$ pour A_3

Remarque 18 :

1. On peut remarquer que pour toute matrice $A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, $\det A = \pm 1$ et que $A^{-1} = A^t$ où A^t est la matrice transposée de A
2. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; ce n'est pas parce que $\det A = 1$ que c'est une matrice orthogonale *(ou que $A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$)*

   En effet :

   Supposons que $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, nous avons $\det A = 1$, mais A n'est pas la matrice d'un endomorphisme orthogonal
3. On appelle groupe spécial linéaire et on le note $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\det A = 1$

Exercice 22 :

Démontrer que $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$, le groupe linéaire d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Rappel : $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$, le groupe linéaire est l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. C'est un groupe non forcément commutatif

16.3.3 Proposition

1. On appelle $\mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ telles que $\det A = +1$
   Alors, $\left(\mathrm{O}_2^+(\mathbb{R}), \times\right)$ est un sous-groupe commutatif et distingué de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$
2. Les éléments de $\mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$ sont appelés rotations ou isométries positives

Démonstration

1. **Montrons que $\left(\mathrm{O}_2^+(\mathbb{R}), \times\right)$ est un sous-groupe de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$**

   (a) Premièrement, $\mathrm{O}_2^+(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ puisque $\mathrm{Id}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ et $\det \mathrm{Id}_2 = 1$

   On démontrerait de même que $-\mathrm{Id}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$

   (b) La multiplication des matrices est interne puisque si $A \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$ et $B \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$, alors :

   $$\det(A \times B) = \det A \times \det B = 1 \times 1 = 1$$

   Donc, le produit $A \times B \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$

   (c) Soit $A \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$, alors $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$ et donc, $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$ et donc $A^{-1} \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$

   Ce qui montre que $\left(\mathrm{O}_2^+(\mathbb{R}), \times\right)$ est un sous-groupe de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$

2. **Montrons que $\left(\mathrm{O}_2^+(\mathbb{R}), \times\right)$ est un sous-groupe commutatif de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$**

   Il suffit d'utiliser le calcul matriciel pour le montrer : si $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$ et $X = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ avec $x^2 + y^2 = 1$, nous avons

   - $A \times X = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by & -ay - bx \\ bx + ay & -by + ax \end{pmatrix}$
   - $X \times A = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa - yb & -xb - ay \\ ya + xb & -yb + xa \end{pmatrix}$

   Nous avons bien $A \times X = X \times A$. Le sous-groupe $\left(\mathrm{O}_2^+(\mathbb{R}), \times\right)$ est bien un sous-groupe commutatif de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$

3. **$\left(\mathrm{O}_2^+(\mathbb{R}), \times\right)$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$**

   Soit donc $A \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$ et $X \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$; il faut donc montrer que $X \times A \times X^{-1} \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$. Or :

   $$\det\left(X \times A \times X^{-1}\right) = \det X \times \det A \times \det X^{-1} = \det A \times \det X \times \det X^{-1} = 1$$

   puisque $\det A = 1$ et $\det X \times \det X^{-1} = 1$

   Donc $X \times A \times X^{-1} \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$

Remarque 19 :

1. Les applications $f \in \mathrm{O}(E)$ telles que $\mathcal{M}(f) \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$ sont aussi appelées <u>rotations</u>
2. En utilisant l'isomorphisme avec $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, l'ensemble des rotations de $\mathrm{O}(E)$ forme, pour la composition des applications, un sous-groupe commutatif et distingué de $\mathrm{O}(E)$ noté, par analogie, $\mathrm{O}^+(E)$
3. Id_E et $-\mathrm{Id}_E$ sont des rotations involutives
4. Si $f \in \mathrm{O}^+(E)$ et $f \neq \mathrm{Id}_E$, le seul vecteur invariant par f est le vecteur nul $\overrightarrow{0}$

16.3.4 Théorème

1. On appelle $\mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ telles que $\det A = -1$
2. On appelle $\mathrm{O}^-(E)$ les endomorphismes $f \in \mathrm{O}(E)$ dont la matrice $\mathcal{M}(f) \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$. Les éléments de $\mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$ sont appelés <u>isométries négatives</u>

Soit f un endomorphisme orthogonal du plan. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $f \in \mathrm{O}^-(E)$
2. $f \neq \mathrm{Id}_E$ et $f \neq -\mathrm{Id}_E$ et f est involutive
3. f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle
4. Le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants est une droite vectorielle

<u>**Démonstration**</u>

1. **On suppose que $f \in \mathrm{O}^-(E)$, et on démontre que $f \neq \mathrm{Id}_E$ et $f \neq \mathrm{Id}_E$ et f est involutive**

   Si $f \in \mathrm{O}^-(E)$, alors $\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$

   ▷ De par la forme de la matrice, $f \neq \mathrm{Id}_E$ et $f \neq \mathrm{Id}_E$. D'autre part, $\det \mathrm{Id}_2 = \det(-\mathrm{Id}_2) = 1$ et donc sont des éléments de $\mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$ [3], alors que $\det \mathcal{M}(f) = -1$

   ▷ Calculons $\mathcal{M}(f \circ f) = \mathcal{M}\left(f^2\right) = (\mathcal{M}(f))^2$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ab - ba \\ ba - ab & b^2 + a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

3. En utilisant les déterminants, il est aisé de montrer que $\mathrm{O}_2^-(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R}) = \emptyset$

Donc $(\mathcal{M}(f))^2 = \mathrm{Id}_2$ et donc $f \circ f = \mathrm{Id}_E$; f est donc involutive

2. **Supposons $f \neq \mathrm{Id}_E$ et $f \neq -\mathrm{Id}_E$ et f est involutive**
   f étant un endomorphisme orthogonal involutif, alors f est une symétrie orthogonale d'axe l'ensemble des vecteurs invariants de f. On appelle I l'ensemble des vecteurs invariants par f. I est un sous-espace vectoriel de E
   - Si $\dim I = 2$, alors $I = E$ et $f = \mathrm{Id}_E$; ce qui est impossible
   - Si $\dim I = 0$, alors $I = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ et donc $f = -\mathrm{Id}_E$, ce qui est impossible.
   - Donc, $\dim I = 1$ et f est une symétrie orthogonale par rapport à I
3. **Supposons que f soit une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle**
   Soit D cette droite vectorielle ; par définition des symétries, D est aussi l'ensemble des vecteurs invariants.
4. **Soit f un endomorphisme orthogonal du plan tel que le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants soit une droite vectorielle**
   Alors, la matrice de f est de 2 formes :
   - La première : $\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $a^2+b^2 = 1$, mais c'est impossible puisque le seul vecteur invariant pour cette matrice est le vecteur nul
   - Il n'y a donc pas d'autre solution pour la matrice de f qui sera donc $\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, avec $a^2 + b^2 = 1$ et donc $f \in \mathrm{O}^-(E)$

16.3.5 Proposition

1. Pour toute matrice $A \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$ et toute matrice $B \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$, le produit $A \times B \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$
2. Pour toute matrice $A \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$ et toute matrice $B \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$, le produit $A \times B \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$

Démonstration

Pour cette démonstration l'utilisation des déterminants est insuffisante. Nous ferons une *(rapide)* démonstration pour le premier cas. Le second est similaire.

Soit donc $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \beta_2 & -\alpha_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$ avec $\alpha_1^2 + \beta_1^2 = \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1$. Alors :

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \beta_2 & -\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 & \beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2 \\ \beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2 & \beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2 \end{pmatrix}$$

La matrice AB est bien du type $AB = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$; il faut donc, maintenant montrer que $a^2 + b^2 = 1$

$$\begin{aligned}
(\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2)^2 + (\beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2)^2 &= \alpha_1^2\alpha_2^2 + \beta_1^2\beta_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 + \beta_1^2\alpha_2^2 + \alpha_1^2\beta_2^2 + 2\beta_1\alpha_2\alpha_1\beta_2 \\
&= \alpha_1^2\alpha_2^2 + \beta_1^2\beta_2^2 + \beta_1^2\alpha_2^2 + \alpha_1^2\beta_2^2 \\
&= \alpha_1^2\left(\alpha_2^2 + \beta_2^2\right) + \beta_1^2\left(\beta_2^2 + \alpha_2^2\right) \\
&= \left(\alpha_2^2 + \beta_2^2\right)\left(\left(\alpha_1^2 + \beta_1^2\right)\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Remarque 20 :

Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2, on peut, d'ores et déjà, par isomorphisme, reporter ce résultat aux endomorphismes de $\mathrm{O}^-(E)$ et $\mathrm{O}^+(E)$

16.3.6 Théorème

Toute rotation $A \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$ est la composée de 2 symétries orthogonales de $\mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$, l'une d'entre elles pouvant être choisie arbitrairement

Démonstration

Soit $A \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$ et $S \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$. Alors, d'après 16.3.5 le produit $A \times S \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$. Il existe donc $S_1 \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$ tel que $A \times S = S_1$
Comme $S^2 = \mathrm{Id}_2$, nous avons :

$$(A \times S) \times S = S_1 \times S \iff A \times (S \times S) = S_1 \times S \iff A = S_1 \times S$$

Ce que nous voulions

Remarque 21 :

Il est très possible de démontrer différemment, et nous avons, alors, un résultat complémentaire :
- De $S^2 = \mathrm{Id}_2$, nous avons $A = A \times S \times S$ et donc $A = (A \times S) \times S$. Comme $A \times S \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$, en posant $S_1 = A \times S$, nous avons $A = S_1 \times S$
- Toujours parce que $S^2 = \mathrm{Id}_2$, nous avons $A = S \times S \times A$ et donc $A = S \times (S \times A)$. Comme $S \times A \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$, en posant $S_2 = S \times A$, nous avons $A = S \times S_2$

A priori, bien entendu, nous avons $S_1 \neq S_2$

16.3.7 Corollaire

Soit $A \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$. Alors $A^{-1} = S \times A \times S$ où S est un élément quelconque de $\mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$

Démonstration

Soit $A \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$
Alors, pour tout $S \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$, nous avons $A \times S \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$, et donc $(A \times S) \times (A \times S) = \mathrm{Id}_2$, c'est à dire :

$$(A \times S) \times (A \times S) = \mathrm{Id}_2 \iff A \times (S \times A \times S) = \mathrm{Id}_2$$

Et donc, nous avons bien $A^{-1} = S \times A \times S$

16.3.8 Proposition

1. Toutes les matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ sont du type :
$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \text{ avec } \theta \in \mathbb{R}$$
2. Si $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, alors $A \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$
3. Si $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, alors $A \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$

Démonstration

1. Toutes les matrices $A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ s'écrivent $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$
De l'égalité $a^2 + b^2 = 1$, nous tirons l'inégalité $0 \leqslant a^2 \leqslant 1 \iff -1 \leqslant a \leqslant +1$
Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos\theta$; en fait, ce θ n'est pas unique : il est défini à $2k\pi$ près.
2. Alors, comme $b^2 = 1 - a^2$, $b^2 = 1 - \cos^2\theta \iff b^2 = \sin^2\theta \iff |b| = |\sin\theta|$
Nous obtenons alors plusieurs cas :
$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Nous pouvons faire remarquer que

$$A_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

et que $A_2 = A_1^{-1}$
De même

$$A_4 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & -\cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

Nous avons $A_1 \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$, $A_2 \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$, $A_3 \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$ et $A_4 \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$

16.3.9 Proposition

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2
Etant donnés 2 vecteurs u et v, non nuls et de même norme, alors :

1. Il existe une et une seule rotation $\rho \in \mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$ tel que $\rho(u) = v$
2. Il existe une et une seule symétrie orthogonale $\sigma \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$ tel que $\sigma(u) = v$

Démonstration

1. On suppose $\|u\| = \|v\| = n$, et $n > 0$ puisqu'aucun des 2 vecteurs u et v ne sont nuls. En posant $u' = \dfrac{1}{n}u$ et $v' = \dfrac{1}{n}v$, nous nous ramenons à u et v tels que $\|u\| = \|v\| = 1$
2. Il existe un vecteur $u_1 \in E$ tel que $\mathcal{B}_1 = \{u, u_1\}$ soit une base orthonormée de E. Alors, $v = au+bu_1$ avec $a^2 + b^2 = 1$
   (a) Alors, si ρ est une rotation telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(\rho) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, ρ est telle que $\rho(u) = v$
   (b) De même, si σ est une symétrie orthogonale telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(\sigma) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, σ est telle que $\sigma(u) = v$

16.3.10 Exercices

Exercice 23 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 euclidien rapporté à une base orthonormée $\{i, j\}$. ρ et σ sont respectivement la rotation et la symétrie orthogonale transformant le vecteur u en le vecteur u', avec $\|u\| = \|u'\| \neq 0$
Déterminer les matrices de ρ et σ dans les cas suivants

1. $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. $u = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $u' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $u' = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$

Exercice 24 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2 rapporté à une base orthonormée $\{i, j\}$. Soit D une droite de E. Démontrer que si σ_D est la symétrie orthogonale par rapport à la droite D, alors $-\sigma_D$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $D^\perp$

Exercice 25 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2 rapporté à une base orthonormée $\{i, j\}$. On note Id_E l'application identique de E

1. Déterminer l'ensemble des rotations vectorielles ρ telles que $\rho^3 = \mathrm{Id}_E$
2. Démontrer que l'ensemble précédent, muni de la composition des applications, est un groupe commutatif. En donner la table de composition

Exercice 26 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2 rapporté à une base orthonormée $\{i, j\}$. D et D_1 sont 2 droites vectorielles de E. On appelle σ_D et σ_{D_1} les symétries orthogonales respectives par rapport à D ou D_1

1. Démontrer l'équivalence : $(\sigma_D \circ \sigma_{D_1} = \sigma_{D_1} \circ \sigma_D) \Longleftrightarrow (D = D_1 \text{ ou } D \perp D_1)$
2. On suppose, dans cette question, les droites D et D_1 distinctes et $\sigma_D \circ \sigma_{D_1} = \sigma_{D_1} \circ \sigma_D$
   (a) Définir $\sigma_D \circ \sigma_{D_1}$
   (b) Quel est le plus petit sous-groupe orthogonal de $\mathrm{O}(E)$ contenant σ_D et σ_{D_1} ?

Exercice 27 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2 rapporté à une base orthonormée $\{i, j\}$. D et D_1 sont 2 droites vectorielles de E. On appelle σ_D et σ_{D_1} les symétries orthogonales respectives par rapport à D ou D_1
$u \in D$ et $v \in D_1$ sont 2 vecteurs unitaires.
Démontrer que $\sigma_D + \sigma_{D_1}$ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ si et seulement si $|\langle u \mid v\rangle| = \dfrac{1}{2}$

Exercice 28 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2 rapporté à une base orthonormée $\{i, j\}$ et soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E de matrice, dans la base $\{i, j\}$:

$$\mathcal{M}_{\{i,j\}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer qu'il existe un endomorphisme $\varphi^* \in \mathcal{L}(E)$ et un seul, tel que :

$$(\forall u \in E)(\forall v \in E)(\langle \varphi(u) \mid v\rangle = \langle u \mid \varphi^*(v)\rangle)$$

2. Déterminer la matrice de φ^* dans la base $\{i, j\}$

Exercice 29 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2 rapporté à une base orthonormée $\{i, j\}$.
On donne les vecteurs $u = 3i + j$ et $v = \sqrt{2}i + \alpha j$ où $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$

1. (a) Comment faut-il choisir α pour qu'il existe une rotation vectorielle ρ telle que $\rho(u) = v$
   (b) Cet α étant choisi, donner la matrice de ρ dans la base $\{i, j\}$
2. (a) On considère le vecteur $w = -i + 3j$. Montrez qu'il existe une symétrie orthogonale S et une seule, telle que $w = S \circ \rho(u)$
   (b) Donner la matrice de S dans la base $\{i, j\}$

Exercice 30 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2. u_1 et u_2 sont 2 vecteurs linéairement indépendants de E et de même norme. Soit $\mathcal{S}$ la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par $u_1 + u_2$. Il faut montrer que $\mathcal{S}(u_1) = u_2$

Exercice 31 :

On considère E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2 rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B}_0 = \{i, j\}$ et ρ une rotation ayant pour matrice dans la base $\mathcal{B}_0$:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(\rho) = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Etant donnée une droite D engendrée par le vecteur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, définissant la symétrie orthogonale par rapport à D, S_D, trouvez la symétrie orthogonale Σ telle que $\Sigma \circ S_D = \rho$

Exercice 32 :

On considère E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2 rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B}_0 = \{i, j\}$
On considère les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. u engendre la droite vectorielle D_u et v, la droite vectorielle D_v.
S_{D_u} est la symétrie orthogonale par rapport à D_u et S_{D_v} est la symétrie orthogonale par rapport à D_v.
Quelles sont les matrices des rotations vectorielles $\rho_1 = S_{D_v} \circ S_{D_u}$ et $\rho_2 = S_{D_u} \circ S_{D_v}$
Quelle relation existe-t-il entre ρ_1 et ρ_2 ?

Exercice 33 :

Soit E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2. On considère, dans E, trois vecteurs u, v et w tels que :

- u et v sont linéairement indépendants
- $u + v + w = \overrightarrow{0}$

On considère un endomorphisme L tel que :

$$\|L(u)\| = \|u\| \qquad \|L(v)\| = \|v\| \qquad \|L(w)\| = \|w\|$$

1. Démontrer que $\langle L(u) \mid L(v) \rangle = \langle u \mid v \rangle$
2. Démontrer que L est une transformation orthogonale de E

Exercice 34 :

Soit E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2 rapporté à une base orthonormée $\{i, j\}$.
On considère la rotation vectorielle ρ qui a pour matrice $A = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$
Déterminer les matrices, dans la base $\{i, j\}$ des rotations vectorielles r telles que $r^2 = r \circ r = \rho$

Exercice 35 :

Soit E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2 rapporté à une base orthonormée $\{i, j\}$.
On considère les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et les droites D_u et D_v que ces vecteurs déterminent.
Quelles sont les matrices, dans la base orthonormée $\{i, j\}$ des transformations orthogonales L telles que $L(D_u) = D_v$

16.4 Groupe Orthogonal en dimension 3

Dans cette section, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B}_0 = \{i, j, k\}$

16.4.1 Proposition *(Rappel)*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathrm{O}(E)$. On appelle F l'ensemble des vecteurs invariants par f, c'est à dire :

$$F = \{u \in E \text{ tels que } f(u) = u\}$$

Alors :

1. F est un sous-espace vectoriel de E
2. $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel stable par f, c'est à dire :

$$\left(\forall u \in F^{\perp}\right)\left(f(u) \in F^{\perp}\right)$$

Démonstration

1. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de E
   C'est une démonstration qui a déjà été faite.
   - ▷ Tout d'abord, $F \neq \emptyset$ puisque $\overrightarrow{0} \in F$; en effet, f étant linéaire, $f\left(\overrightarrow{0}\right) = \overrightarrow{0}$
   - ▷ Soient $u \in F$, $v \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Avons nous $\lambda u + \mu v \in F$?
     Pour cela, il faut regarder $f(\lambda u + \mu v)$
     - f étant linéaire, $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$
     - Comme $u \in F$ et $v \in F$, $f(u) = u$ et $f(v) = v$
     - Donc, $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v) = \lambda u + \mu v$

     Ainsi, $\lambda u + \mu v \in F$

   Et donc, F est un sous-espace vectoriel de E
2. Montrons que $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel stable par f
   Soit $u \in F^{\perp}$; il faut donc démontrer que $f(u) \in F^{\perp}$, c'est à dire que, pour tout $v \in F$, $\langle f(u) \mid v\rangle = 0$.
   Comme $v \in F$, $f(v) = v$; Donc :

$$\langle f(u) \mid v\rangle = \langle f(u) \mid f(v)\rangle = \langle u \mid v\rangle = 0$$

   Donc, $f(u) \in F^{\perp}$ et $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel stable par f

Remarque 22 :

Il importe de se remémorer que, si $u \in F^{\perp}$, nous n'avons pas forcément $f(u) = u$; on dit que $F^{\perp}$ est globalement invariant

Nous allons maintenant étudier les transformations orthogonale de E en considérant le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants et sa dimension

16.4.2 Théorème : cas où $\dim F = 2$

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 et $f \in \mathrm{O}(E)$
f est une symétrie orthogonale par rapport à un plan vectoriel de E si et seulement si le sous-espace vectoriel F des vecteurs invariants est de dimension 2

Démonstration

Nous ferons beaucoup référence à 16.2.9

1. Si $f \in \mathrm{O}(E)$ est une symétrie orthogonale par rapport à un plan, alors, le sous-espace vectoriel F des vecteurs invariants est de dimension 2
2. Réciproquement, supposons que le sous-espace vectoriel F des vecteurs invariants est de dimension 2
   Considérons $F^{\perp}$ qui est un sous-espace vectoriel supplémentaire de F, et donc $\dim F^{\perp} = 1$; c'est donc une droite vectorielle.

Considérons, maintenant φ, la restriction de f à $F^{\perp}$, c'est à dire : $\varphi = f_{/F^{\perp}}$. Alors, φ est un endomorphisme orthogonal de la droite $F^{\perp}$, et il y a donc 2 possibilités : $\varphi = \mathrm{Id}_{/F^{\perp}}$ ou $\varphi = -\mathrm{Id}_{/F^{\perp}}$

- Si $\varphi = \mathrm{Id}_{/F^{\perp}}$, alors $f = \mathrm{Id}_E$ et la dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants est 3 ; impossible.
- Donc $\varphi = -\mathrm{Id}_{/F^{\perp}}$, et f apparaît bien comme étant une symétrie orthogonale par rapport à F

16.4.3 Proposition : cas où $\dim F = 1$

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 et $f \in \mathrm{O}(E)$
Si le sous-espace vectoriel F des vecteurs invariants est de dimension 1, alors, la restriction de f à $F^{\perp}$ est une rotation plane différente de l'identité

Remarque 23 :

Autrement dit, $f_{/F^{\perp}} \in \mathrm{O}^{+}\left(F^{\perp}\right)$

Démonstration

Si $\dim F = 1$, alors, $\dim F^{\perp} = 2$ et $F^{\perp}$ est un plan globalement invariant par f
Si $\varphi = f_{/F^{\perp}}$, alors φ est un endomorphisme orthogonal du plan $F^{\perp}$.

- Si $\varphi = \mathrm{Id}_{F^{\perp}}$ alors le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants est E entier, ce qui est impossible
- Supposons maintenant que φ soit une symétrie orthogonale par rapport à une doite de $F^{\perp}$.
  Soit Δ cette droite de vecteur directeur u_{Δ}. Posons aussi u_F un vecteur directeur de F. Alors $\mathrm{Vect}\left(\{u_F, u_{\Delta}\}\right)$ qui est le sous-espace vectoriel engendré par F et Δ est un espace de dimension 2, de base $\{u_{\Delta}, u_F\}$ qui est lui aussi invariant par f, parce que u_F et u_{Δ} sont aussi invariants par f ; donc $\dim\left(\mathrm{vect}\left(\{u_F, \Delta\}\right)\right) = 2$
  C'est impossible. Donc, φ ne peut être une symétrie orthogonale par rapport à une doite de $F^{\perp}$
- φ n'a d'autre choix que d'être une rotation du plan $F^{\perp}$

16.4.4 Définition de rotation en dimension 3

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3
On appelle rotation vectorielle de E

1. Ou bien Id_E, l'application identique de E
2. Ou bien, un transformation orthogonale $R \in \mathrm{O}(E)$ dont la dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants est 1. Dans ce cas, le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants est appelé axe de la rotation

16.4.5 Théorème de décomposition d'une rotation

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 et $\Delta \subset E$ une droite vectorielle de E
Alors, toute rotation vectorielle $R \in \mathrm{O}(E)$ d'axe Δ peut se décomposer en un produit de 2 symétries orthogonales par rapport à des plans vectoriels contenant la droite Δ, l'une de ces symétries pouvant être choisie arbitrairement

Démonstration

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 et R une rotation de E.
Soit Δ l'axe de cette rotation ; $\Delta^{\perp}$ est le plan orthogonal à Δ.
Quelques rappels :

1. $\Delta^{\perp}$ est globalement invariant par R
2. D'après 16.4.3, $\rho = R_{/_{\Delta^{\perp}}}$ est une rotation plane

Soit (P) un plan vectoriel quelconque contenant Δ. Alors, l'intersection de (P) avec $\Delta^{\perp}$ est une droite que nous appelons (D) ; donc $(D) = (P) \cap \Delta^{\perp}$. Nous appellerons S_P, la symétrie orthogonale par rapport à (P). Il faut remarquer que la restriction de S_P à $\Delta^{\perp}$ est la symétrie orthogonale plane σ_D
Autre rappel :
D'après 16.3.6, toute rotation vectorielle plane peut se décomposer en un produit de 2 symétries orthogonales planes.
Il existe donc une droite $D_1 \subset \Delta^{\perp}$ telle que $R_{\diagup_{\Delta^{\perp}}} = \rho = \sigma_D \circ \sigma_{D_1}$, et cette droite D_1 est orthogonale à Δ puisqu'incluse dans $\Delta^{\perp}$
<u>Nous allons considérer l'endomorphisme orthogonal $S_P \circ R$</u>
Nous appelons (P') le plan vectoriel contenant D_1 et Δ ; en fait, ce plan vectoriel est unique et très bien déterminé par D_1 et Δ. Nous considérons aussi S'_P, la symétrie orthogonale par rapport au plan (P'). Il faut aussi remarquer que la restriction de S'_P à $\Delta^{\perp}$ est la symétrie orthogonale plane σ_{D_1}.
D'autre part, si u est une base de Δ et v une base de D_1 ;, la famille $\{u, v\}$ est une base de du plan vectoriel (P')

- ⋆ Pour u, base de Δ, nous avons
  - ▷ $S_P(u) = u$, car $u \in \Delta$ et $\Delta \subset (P)$
  - ▷ $R(u) = u$, car $u \in \Delta$ et Δ est le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants par R

  Donc $S_P \circ R(u) = u$
- ⋆ Pour v, base de D_1
  - ▷ Comme $v \in D_1$, que $D_1 \subset \Delta^{\perp}$, $R(v) = \sigma_D \circ \sigma_{D_1}(v) = \sigma_D(v)$, et $\sigma_D(v) \in \Delta^{\perp}$
  - ▷ Donc, $S_P \circ R(v) = S_P \circ \sigma_D(v)$. Comme $\sigma_D(v) \in \Delta^{\perp}$, que la restriction de S_P à $\Delta^{\perp}$ est la symétrie orthogonale plane σ_D, nous avons : $S_P \circ R(v) = S_P \circ \sigma_D(v) = \sigma_D \circ \sigma_D(v) = v$
  - ▷ v apparaît donc comme un vecteur invariant de $S_P \circ R$

Ainsi, si u et v sont invariants par $S_P \circ R$, la famille $\{u, v\}$ étant une base de du plan vectoriel (P'), tout le plan (P') est invariant par $S_P \circ R$, endomorphisme orthogonal. Ainsi, d'après 16.4.2 $S_P \circ R$ est une symétrie orthogonale. C'est la symétrie orthogonale par rapport au plan vectoriel (P'). Donc :

$$S_P \circ R = S'_P \Longleftrightarrow R = S_p \circ S'_P$$

Ce que nous voulions

16.4.6 Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3. Alors
La composée de 2 symétries orthogonales planes de E est une rotation vectorielle de E

Démonstration

Soient P_1 et P_2 2 plans de E, S_{P_1}, la symétrie orthogonale par rapport à P_1 et S_{P_2}, la symétrie orthogonale par rapport à P_2. Nous allons donc étudier $S_{P_1} \circ S_{P_2}$

1. Si $P_1 = P_2$, alors $S_{P_1} \circ S_{P_2} = \mathrm{Id}_E$ qui est bien une rotation
2. Supposons maintenant $P_1 \neq P_2$ et appelons $\Delta = P_1 \cap P_2$
   (a) Si $u \in \Delta$, alors $u \in P_1$ et $u \in P_2$ et donc $S_{P_1} \circ S_{P_2}(u) = u$. C'est à dire que tous les vecteurs de Δ sont invariants
   (b) Réciproquement, soit u un vecteur invariant par $S_{P_1} \circ S_{P_2}$.
   Δ et $\Delta^{\perp}$ étant des sous-espace vectoriel supplémentaires, nous pouvons écrire $u = u_{\Delta} + u_{\Delta^{\perp}}$. Donc :

$$u = S_{P_1} \circ S_{P_2}(u) = S_{P_1} \circ S_{P_2}(u_{\Delta}) + S_{P_1} \circ S_{P_2}(u_{\Delta^{\perp}}) = u_{\Delta} + S_{P_1} \circ S_{P_2}(u_{\Delta^{\perp}})$$

   De l'égalité $u = S_{P_1} \circ S_{P_2}(u)$, nous déduisons $u_{\Delta} + u_{\Delta^{\perp}} = u_{\Delta} + S_{P_1} \circ S_{P_2}(u_{\Delta^{\perp}})$, c'est à dire $u_{\Delta^{\perp}} = S_{P_1} \circ S_{P_2}(u_{\Delta^{\perp}})$; $u_{\Delta^{\perp}}$ est donc aussi invariant par $S_{P_1} \circ S_{P_2}$
   Nous appellons σ_1 la restriction de S_{P_1} à $\Delta^{\perp}$ et σ_2 la restriction de S_{P_2} à $\Delta^{\perp}$. Nous appelons aussi $D_1 = P_1 \cap \Delta^{\perp}$ et $D_2 = P_2 \cap \Delta^{\perp}$.
   Les vecteurs de D_1 sont invariants par S_{P_1} et σ_1 est donc la symétrie orthogonale par rapport à D_1 ; de même pour D_2 et σ_2.

Donc, $u_{\Delta^\perp} = S_{P_1} \circ S_{P_2}(u_{\Delta^\perp}) = \sigma_1 \circ \sigma_2 (u_{\Delta^\perp})$. Or, comme $\sigma_1 \circ \sigma_2 \in \mathrm{O}^+(\Delta^\perp)$, et le seul vecteur invariant, dans $\Delta^\perp$ de $\sigma_1 \circ \sigma_2$ est le seul vecteur nul $\overrightarrow{0}$, et donc $u_{\Delta^\perp} = \overrightarrow{0}$.
Ainsi, si u est invariant par $S_{P_1} \circ S_{P_2}$, alors $u = u_\Delta$ et donc $u \in \Delta$

Donc, Δ est le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants par $S_{P_1} \circ S_{P_2}$ et $S_{P_1} \circ S_{P_2}$ est une rotation d'axe Δ

16.4.7 Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3.
L'ensemble des rotations vectorielles de E, noté $\mathrm{O}^+(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{O}(E)$, groupe des endomorphismes orthogonaux de E

Démonstration

1. Tout d'abord, $\mathrm{O}^+(E) \neq \emptyset$ puisque $\mathrm{Id}_E \in \mathrm{O}^+(E)$
2. Montrons que la composition des rotations de $\mathrm{O}^+(E)$ est interne.
   Soient $R_1 \in \mathrm{O}^+(E)$ et $R_2 \in \mathrm{O}^+(E)$. Nous allons montrer que $R_1 \circ R_2 \in \mathrm{O}^+(E)$
   Soit Δ_1 l'axe de la rotation R_1 et Δ_2 celui de la rotation R_1. On appelle P, le plan contenant Δ_1 et Δ_2. D'après 16.4.5, nous pouvons écrire :
   $$R_1 = S_\Pi \circ S_P \quad \text{et} \quad R_2 = S_P \circ S_{\Pi_1}$$
   Donc :
   $$R_1 \circ R_2 = (S_\Pi \circ S_P) \circ (S_P \circ S_{\Pi_1}) = S_\Pi \circ (S_P \circ S_P) \circ S_{\Pi_1} = S_\Pi \circ S_{\Pi_1}$$
   Ainsi, $R_1 \circ R_2$ est la composée de 2 symétries orthogonales planes et est donc une rotation
3. L'inverse d'une rotation est une rotation
   Soient $R \in \mathrm{O}^+(E)$; d'après 16.4.5, il existe 2 plans P_1 et P_2 tels que $R = S_{P_1} \circ S_{P_2}$. Alors :
   $$R^{-1} = (S_{P_2})^{-1} \circ (S_{P_1})^{-1} = S_{P_2} \circ S_{P_1}$$
   R^{-1} est donc une rotation

Remarque 24 :

Il est évident que la composition **d'un nombre pair** de symétries orthogonales est une rotation de $\mathrm{O}^+(E)$

16.4.8 Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3. Soit $\Delta \subset E$ une droite vectorielle de E
On appelle retournement ou demi-tour d'axe Δ la symétrie orthogonale d'axe Δ
Un retournement est donc une rotation

16.4.9 Cas où $\dim F = 0$

C'est donc le cas où $F = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 et $\varphi \in \mathrm{O}(E)$ qui admet $\overrightarrow{0}$ comme seul vecteur invariant. Alors :
φ est la composée de 3 symétries orthogonales de E

Démonstration

Soit $u \in E$ un vecteur de E non nul et considérons $\varphi(u)$
$\varphi(u) \neq u$ et, comme $\varphi \in \mathrm{O}(E)$, nous avons $\|\varphi(u)\| = \|u\|$
Il existe une symétrie orthogonale place σ_P telle que $\sigma_p(u) = \varphi(u)$, et nous avons :

$$\sigma_P(\varphi(u)) = u \Longleftrightarrow \sigma_P \circ \varphi(u) = u$$

En fait, c'est assez simple!!
Si Π_P est la projection orthogonale sur P, alors, pour tout $w \in E$:
* $w = \Pi_P(w) + (w - \Pi_P(w))$
* $\sigma_P(w) = 2\Pi_P(w) - w$

De telle sorte que $w - \sigma_P(w) = 2(w - \Pi_P(w))$. Or, $w - \Pi_P(w) \in P^{\perp}$
Donc, pour notre $u \in E$, choisi, $P = (u - \varphi(u))^{\perp}$

C'est à dire que u est un vecteur invariant par $\sigma_P \circ \varphi$ et $\sigma_P \circ \varphi \in \mathrm{O}(E)$
La droite Δ engendrée par u est, elle aussi invariante par $\sigma_P \circ \varphi$. Appelons, comme jusqu'ici, F le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants par $\sigma_P \circ \varphi$; alors $\dim F \geqslant 1$

- ▷ Nous ne pouvons avoir $\dim F = 3$ puisqu'alors $\sigma_P \circ \varphi = \mathrm{Id}_E$ et donc $\varphi = \sigma_P$, ce qui est impossible
- ▷ Nous ne pouvons pas plus avoir $\dim F = 2$ puisqu'alors $\sigma_P \circ \varphi$ est une symétrie orthogonale σ_Π par rapport à un plan Π de E et de $\sigma_P \circ \varphi = \sigma_\Pi$, nous déduisons que $\varphi = \sigma_P \circ \sigma_\Pi$;φ apparaît alors comme la composée de 2 symétries orthogonales planes et est donc une rotation ; ce qui est contradictoire avec le fait que φ n'admet que $\overrightarrow{0}$ comme seul vecteur invariant.

Donc $\dim F = 1$, et donc $\sigma_P \circ \varphi$ est une rotation. Une rotation se décompose en 2 symétries orthogonales planes. Nous avons donc :

$$\sigma_P \circ \varphi = S_{P_1} \circ S_{P_2} \Longleftrightarrow \varphi = \sigma_P \circ S_{P_1} \circ S_{P_2}$$

φ est donc la composéede 3 symétries orthogonales planes ; ce que nous voulions

16.4.10 Corollaire

Si φ est une transformation orthogonale de $\mathrm{O}(E)$ n'admettant que $\overrightarrow{0}$ comme seul vecteur invariant alors $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ est une rotation

Démonstration

En effet, d'après 16.4.9, φ peut se décomposer en le produit de 3 symétries orthogonales planes ; $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ se décompose en le produit de 6 symétries orthogonales planes *(un nombre pair de symétries orthogonales)* ; c'est donc une rotation.

16.4.11 Proposition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3. Soit $\Delta \subset E$ une droite de E et $P = \Delta^{\perp}$ le plan orthogonal à Δ
On appelle R_Δ la rotation d'axe Δ et S_P la symétrie orthogonale par rapport à P. Alors :

$$R_\Delta \circ S_P = S_P \circ R_\Delta$$

C'est à dire que la rotation d'axe Δ et la symétrie orthogonale par rapport à $P = \Delta^{\perp}$ commutent

Démonstration

Soit $\{i\}$ un vecteur normé qui est une base de Δ et $\{j, k\}$ une base orthonormée de P.
Comme $\langle i \mid j\rangle = \langle i \mid k\rangle = \langle k \mid j\rangle = 0$, ces 3 vecteurs sont linéairement indépendants et forment une base de E.
Nous avons :

- $R_\Delta(i) = i$
- $R_\Delta(j) \in P$
- $R_\Delta(k) \in P$
- $S_P(i) = -i$
- $S_P(j) = j$
- $S_P(k) = k$

1. **Etudions** $R_\Delta \circ S_P$
   (a) $R_\Delta \circ S_P(i) = R_\Delta[S_P(i)] = R_\Delta[-i] = -R_\Delta[i] = -i$
   (b) $R_\Delta \circ S_P(j) = R_\Delta[S_P(j)] = R_\Delta[j]$
   (c) $R_\Delta \circ S_P(k) = R_\Delta[S_P(k)] = R_\Delta[k]$
2. **Etudions** $S_P \circ R_\Delta$
   (a) $S_P \circ R_\Delta(i) = S_P[R_\Delta(i)] = S_P[i] = -i$
   (b) $S_P \circ R_\Delta(j) = S_P[R_\Delta(j)] = R_\Delta(j)$ car $R_\Delta(j) \in P$
   (c) $S_P \circ R_\Delta(k) = S_P[R_\Delta(k)] = R_\Delta(k)$ car $R_\Delta(k) \in P$
3. **Conclusion**
   Nous avons :

   ▷ $R_\Delta \circ S_P(i) = S_P \circ R_\Delta(i)$ ▷ $R_\Delta \circ S_P(j) = S_P \circ R_\Delta(j)$ ▷ $R_\Delta \circ S_P(k) = S_P \circ R_\Delta(k)$

   Nous avons donc, pour tout $u \in E$, $R_\Delta \circ S_P(u) = S_P \circ R_\Delta(u)$, c'est à dire $R_\Delta \circ S_P = S_P \circ R_\Delta$

16.4.12 Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 et $\varphi \in \mathrm{O}(E)$, telle que $\varphi \neq -\mathrm{Id}_E$ qui admet $\overrightarrow{0}$ comme seul vecteur invariant. Alors :
φ est, de manière unique, la composée d'une rotation et d'une symétries orthogonales plane de E
L'axe de la rotation et le plan de la symétrie orthogonale sont orthogonaux. Ces deux transformations sont donc permutables

Démonstration

1. **Existence**
   D'après 16.4.10, φ^2 est une rotation vectorielle d'axe Δ. Soit $u \in \Delta$ une base de Δ.
   On appelle σ_P, la symétrie orthogonale plane par rapport au plan P telle que $\sigma_P(u) = \varphi(u)$; en fait, σ_P échange u et $\varphi(u)$ et $P = \{u - \varphi(u)\}^\perp$
   Alors, comme dans 16.4.9, $\varphi \circ \sigma_P$ est une rotation vectorielle ρ, d'axe Δ, puisque :
   $$\rho(u) = \varphi \circ \sigma_P(u) = \varphi[\sigma_P(u)] = \varphi[\varphi(u)] = \varphi^2(u) = u$$
   D'autre part :
   $$\rho[\varphi(u)] = \varphi \circ \sigma_P[\varphi(u)] = \varphi[\sigma_P[\varphi(u)]] = \varphi(u)$$
   Ce qui montre que $\varphi(u)$ est invariant par ρ et donc que $\varphi(u) \in \Delta$
   Ainsi, le plan P est-il le plan orthogonal à Δ
   De l'égalité $\rho = \varphi \circ \sigma_P$, nous déduisons $\varphi = \rho \circ \sigma_P$ et de 16.4.11, nous avons aussi $\varphi = \sigma_P \circ \rho$
2. **Unicité**
   Supposons que $\varphi = \sigma \circ \rho$ où σ est une symétrie orthogonale par rapport à un plan P et ρ une rotation d'axe D tel que $P = D^\perp$.
   Pour $x \in D$, nous avons $\varphi(x) = \rho \circ \sigma_P(x) = \rho(-x) = -\rho(x) = -x$, et donc $\varphi^2(x) = \varphi \circ \varphi(x) = x$
   D'après 16.4.10, φ^2 est une rotation vectorielle.
   (a) Premièrement, $\varphi^2 \neq \mathrm{Id}_E$, car si $\varphi^2 = \mathrm{Id}_E$, comme $\varphi \in \mathrm{O}(E)$, alors $\varphi = \mathrm{Id}_E$ ou $\varphi = -\mathrm{Id}_E$, ce qui n'est pas possible
   (b) Comme $\varphi^2(x) = \varphi \circ \varphi(x) = x$, φ^2 est une rotation vectorielle d'axe D
   Ainsi, le choix de l'axe de la rotation et de l'axe de la rotation est entièrement déterminé par φ *(ou φ^2)* et est donc unique, de même que $P = D^\perp$
   Ainsi, ρ et σ_P sont-ils uniques.

16.5 Groupe Orthogonal en dimension 3 : le point de vue matriciel

16.5.1 Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3. Soit φ un endomorphisme orthogonal de E,c'est à dire $\varphi \in \mathrm{O}(E)$.

1. Si φ admet au moins un vecteur non nul invariant, alors il existe une base orthonormée $\{i, j, k\}$ dans laquelle la matrice A de φ est de la forme :

$$R = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } S = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $a^2 + b^2 = 1$
2. Si la matrice A de φ est de la forme R, le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants est de dimension 1 ou 3 et φ est donc une rotation
3. Si la matrice A de φ est de la forme S, le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants est de dimension 2 et φ est donc une symétrie orthogonale par rapport à un plan P

Démonstration

Soit u ce vecteur non nul invariant. Alors, la droite $\overrightarrow{D}$ engendrée par u est, elle aussi invariante par φ. On appelle $k = \dfrac{1}{\|u\|} u$; alors k est un vecteur unitaire générant aussi la droite $\overrightarrow{D}$. Appellons $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{D}^{\perp}$

- ▷ $\overrightarrow{P}$ est invariant par φ, en ce sens que si $v \in \overrightarrow{P}$, alors $\varphi(v) \in \overrightarrow{P}$
- ▷ Soit $\Psi : \overrightarrow{P} \longrightarrow \overrightarrow{P}$ ainsi définie :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Psi : \overrightarrow{P} & \longrightarrow & \overrightarrow{P} \\ u & \longmapsto & \Psi(u) = \varphi(u) \end{array} \right.$$

  En fait, Ψ est la restriction de φ à $\overrightarrow{P}$
- ▷ Ψ est un endomorphisme orthogonal de $\overrightarrow{P}$; nous avons donc 2 possibilités :
  - ⋆ Ou bien $\Psi \in \mathrm{O}^{+}\left(\overrightarrow{P}\right)$ et Ψ est une rotation vectorielle de $\overrightarrow{P}$
  - ⋆ Ou bien $\Psi \in \mathrm{O}^{-}\left(\overrightarrow{P}\right)$ et Ψ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite $\Delta \in \overrightarrow{P}$

1. **Supposons que Ψ soit une rotation vectorielle de $\overrightarrow{P}$**

   Il existe alors une base orthonormée $\{i, j\}$ de $\overrightarrow{P}$ telle que la matrice de Ψ dans cette base $\{i, j\}$ soit $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $a^2 + b^2 = 1$

   Il est bien évident que la famille $\{i, j, k\}$ forme une base orthonomée de E.
   - Quelle est la matrice de φ dans cette base $\{i, j, k\}$?
     Nous avons : $\varphi(k) = k$, $\varphi(i) = \Psi(i) = ai + bj$ et $\varphi(j) = \Psi(j) = -bi + aj$, de telle sorte que la matrice de φ dans cette base $\{i, j, k\}$ est :

$$M = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   - Recherche des points invariants de φ
     En utilisant le calcul matriciel, nous avons :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} x = & ax - by \\ y = & bx + ay \\ z = & z \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} (a-1)x - by = & 0 \\ bx + (a-1)y = & 0 \\ z = & z \end{array} \right.$$

En ne retenant que les deux premières lignes du système, nous obtenons un sous-système :

$$\begin{cases} (a-1)\,x - by = & 0 \\ bx + (a-1)\,y = & 0 \end{cases}$$

Dont le déterminant est donné par $\delta = \begin{vmatrix} (a-1) & -b \\ b & (a-1) \end{vmatrix} = (a-1)^2 + b^2$.

- ◇ Ce déterminant δ ne s'annule que si et seulement si $a = 1$ et $b = 0$, et à ce moment là, le système admet une infinité de solutions. La matrice M est donc :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_3$$

  C'est l'application identique, et E en entier est l'ensemble des vecteurs invariants
- ◇ Si $a \neq 1$ ou $b \neq 0$, alors $\delta \neq 0$ et les solutions du système sont de la forme $(0, 0, z)$. Seule la droite $\overrightarrow{D}$ est invariante et la dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants par φ est donc 1

2. <u>**Supposons que Ψ soit une symétrie orthogonale parr apport à une droite $\Delta \in \overrightarrow{P}$**</u>
Il existe un vecteur unitaire j_1 base de Δ telle que $\Psi\,(j_1) = j_1$.
Soit $i_1 \in\in \overrightarrow{P}$, unitaire, tel que $\Psi\,(i_1) = -i_1$; nous avons $\langle i_1 \mid j_1 \rangle = 0$
Donc :

$$\begin{cases} \varphi\,(i_1) = & \Psi\,(i_1) = -i_1 \\ \varphi\,(j_1) = & \Psi\,(j_1) = j_1 \\ \varphi\,(k) = & k \end{cases}$$

La matrice de φ dans la base $\{i_1, j_1, k\}$ est :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

φ transforme donc la base orthonormée $\{i_1, j_1, k\}$ en la base orthonormée $\{-i_1, j_1, k\}$ et laisse le plan engendré par $\{j_1, k\}$ invariant. la dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants est donc 2 ; φ est la symétrie orthogonale par rapport au plan engendré par $\{j_1, k\}$
Il existe une base $\{e_1, e_2\}$ de $\overrightarrow{P}$ dans laquelle, la matrice de Ψ est donnée par $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$
Il existe donc une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de φ peut s'écrire $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Remarque 25 :

1. Nous venons de montrer que si $\varphi \in \mathrm{O}\,(E)$ est une symétrie orthogonale plane, alors la matrice de φ est semblable à la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. On note $\mathrm{O}^+\,(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux qui sont des rotations vectorielles ; on les appelle les isométries positives.
3. On note $\mathrm{O}^-\,(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux qui ne sont pas des rotations vectorielles ; ce sont les isométries négatives
4. Ainsi :
   - ⋆ Ainsi, une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle est une rotation.
   - ⋆ Une symétrie orthogonale par rapport à un plan vectoriel est une isométrie négative.
   - ⋆ $-\mathrm{Id}_E$ est aussi une isométrie négative

5. Il est facile de démontrer que :

   $\varphi \in \mathrm{O}(E)$ est une rotation vectorielle si et seulement si
   Il existe une base orthonormée $\{i, j, k\}$ dans laquelle, la matrice de φ est donnée par :
   $$M = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } a^2 + b^2 = 1$$

   On remarque que $\det M = 1$
6. Il est tout aussi facile de démontrer que :

   $\varphi \in \mathrm{O}(E)$ est une symétrie orthogonale par rapport à un plan si et seulement si
   Il existe une base orthonormée $\{i, j, k\}$ dans laquelle, la matrice de φ est donnée par :
   $$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } a^2 + b^2 = 1$$

   On remarque que $\det M = -1$
7. La composition de 2 isométries négatives donne une isométrie positive *(rotation)*

Exercice 36 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$. Soit φ dont la matrice dans la base $\{i, j, k\}$ est :
$$M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

Il faut démontrer que φ est une rotation vectorielle

Corrigé

1. φ est un endomorphisme orthogonal

   En lisant la matrice, nous connaissons les coordonnées de $\varphi(i)$, $\varphi(j)$, $\varphi(k)$:
   $$\varphi(i) = \begin{pmatrix} -\frac{8}{9} \\ \frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix} \qquad \varphi(j) = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{7}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix} \qquad \varphi(k) = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} \end{pmatrix}$$
   Il est tout à fait facile de vérifier, par le calcul que :
   $$\|\varphi(i)\| = \|\varphi(j)\| = \|\varphi(k)\| = 1$$
   Et
   $$\langle \varphi(i) \mid \varphi(j)\rangle = \langle \varphi(i) \mid \varphi(k)\rangle = \langle \varphi(k) \mid \varphi(j)\rangle = 0$$
   Nous avons donc $\{\varphi(i), \varphi(j), \varphi(k)\}$ base orthonormée de E et, φ transformant une base orthonormée de E en une autre base orthonormée de E est bien un endomorphisme orthogonal de E
2. φ est une rotation vectorielle

   La définition analytique de cet endormorphisme orthogonal est donnée par :
   $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x' = \frac{1}{9}(-8x + 4y + z) \\ y' = \frac{1}{9}(4x + 7y + 4z) \\ z' = \frac{1}{9}(x + 4y - 8z) \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{I}$ le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants par φ.Pour $u \in \overrightarrow{I}$, les coordonnées de u vérifient :

$$x' = x \qquad y' = y \qquad z' = z$$

Ce qui nous donne donc le système :

$$\begin{cases} x = & \frac{1}{9}(-8x + 4y + z) \\ y = & \frac{1}{9}(4x + 7y + 4z) \\ z = & \frac{1}{9}(x + 4y - 8z) \end{cases} \iff \begin{cases} 17x - 4y - z = & 0 \\ 2x - y + 2z = & 0 \\ x + 4y - 17z = & 0 \end{cases}$$

En prenant la première équation, nous avons : $z = 17x - 4y$, et en remplaçant z par sa valeur dans les deux autres équations, nous obtenons :

$$\begin{cases} 17x - 4y = & z \\ 2x - y + 2(17x - 4y) = & 0 \\ x + 4y - 17(17x - 4y) = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 17x - 4y = & z \\ 36x - 9y = & 0 \\ -288x + 72y = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 17x - 4y = & z \\ 4x - y = & 0 \\ -4x + y = & 0 \end{cases}$$

Nous en tirons donc $y = 4x$ et $z = x$

Il en résulte donc que $\overrightarrow{I}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1, de base $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et φ est une rotation vectorielle de E

16.5.2 Quelques exercices

Exercice 37 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$. Soit φ dont la matrice dans la base $\{i, j, k\}$ est :

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que φ est une rotation vectorielle
2. Déterminer une base orthonormée $\{i', j', k'\}$ de E telle que le vecteur k' soit invariant par φ.
3. Quelle est la matrice de φ dans la base $\{i', j', k'\}$?

Exercice 38 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. Trouvez toutes les rotations vectorielles involutives de E

Exercice 39 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$. Soit σ dont la matrice dans la base $\{i, j, k\}$ est :

$$M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que σ est une symétrie orthogonale par rapport à un plan $\overrightarrow{P}$
2. Déterminer une base orthonormée $\{i', j', k'\}$ de E dans laquelle la matrice de σ soit :

$$\mathcal{M}_{\{i', j', k'\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 40 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et D une droite vectorielle incluse dans E.
Démontrer que l'ensemble des rotations vectorielles φ de E telles que $\varphi(D) = D$ est un sous-groupe de $\mathrm{O}^+(E)$, groupe des rotations de E. Ce groupe est-il commutatif ?

Exercice 41 :

Soit E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$.
On appelle <u>retournement</u> d'axe D une symétrie orthogonale par rapport à une droite D ; c'est en fait une rotation d'axe D et d'angle π ; *(voir 16.4.8)*

1. Soit r un retournement d'axe D engendré par un vecteur u. Démontrer que, pour tout vecteur $v \in E$, $v' = r(v)$ est caractérisée par :
   (a) $\langle v' - v \mid u \rangle = 0$
   (b) Les vecteurs $v' + v$ et u sont linéairement dépendants
2. Soit r un retournement d'axe D engendré par le vecteur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donner les coordonnées de v' en fonction de celles de v
3. Quelle est la matrice de r ?

Exercice 42 :

Soit E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$.
On considère le plan vectoriel P engendré par les vecteurs linéairement indépendants u et v
On appelle S_P la symétrie orthogonale par rapport à P
Montrer que, pour tout vecteur $x \in E$, l'image $x' = S_P(x)$ par la symétrie orthogonale S_P est caractérisée par :

1. $\langle x' - x \mid u \rangle = 0$ et $\langle x' - x \mid v \rangle = 0$
2. Les vecteurs $v' + v$, u et v sont linéairement dépendants

Exercice 43 :

Soit E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$.
On considère le vecteur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $H = u^\perp$
Donner la matrice de S_H, la symétrie orthogonale par rapport à H

Exercice 44 :

Soit E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$.

1. Montrer que la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{2}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$
est, dans la base $\{i, j, k\}$ la matrice d'une transformation orthogonale f de E
2. Montrer que f admet $\overrightarrow{0}$ comme seul vecteur invariant
3. De la question précédente et d'après 16.4.12, f peut s'écrire, et de manière unique, $f = \rho \circ \sigma$ où ρ est une rotation, σ une symétrie orthogonale. L'axe de ρ est orthogonal au plan de la symétrie σ

(a) Déterminer un vecteur directeur de l'axe de la rotation ρ *(Rappel : l'axe de ρ est celui de la rotation vectorielle f^2)*

(b) Montrer que, pour tout $v \in E$, l'image $v' = \sigma(v)$ d'un vecteur v par σ est caractérisée par :
- $v' - v$ et u sont linéairement dépendants
- $\langle v + v' \mid u \rangle = 0$

(c) Déterminer la matrice de σ dans la base orthonormée $\{i, j, k\}$

(d) En déduire la matrice de ρ dans la base orthonormée $\{i, j, k\}$

16.6 Exercices pour aller plus loin

Exercice 45 :

1. E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3, rapporté à une base $\{u, v, w\}$. Construire, à partir de la base $\{u, v, w\}$ une base orthonormée $\{u_1, v_1, w_1\}$
2. $\mathbb{R}_2[X]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2

(a) On construit, dans $\mathbb{R}_2[X]$, l'application Φ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto & \Phi[(P, Q)] = \displaystyle\int_{-1}^{+1} P(t) Q(t)\, dt \end{array} \right.$$

Montrer que Φ est un produit scalaire

(b) On considère la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par $\{P_0, P_1, P_2\}$ où :

$$P_0(t) = 1 \qquad P_1(t) = t \qquad P_2(t) = t^2$$

Construire, à partir de la base $\{P_0, P_1, P_2\}$ une base orthonormée $\{P_0', P_1', P_2'\}$ relativement au produit scalaire défini par Φ

Exercice 46 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E vérifiant :

$$(\forall (x, y) \in E \times E)\,(\langle x \mid u(y) \rangle = \langle u(x) \mid y \rangle)$$

On suppose, de plus, que pour tout $x \neq \overrightarrow{0}$, $\langle x \mid u(x) \rangle > 0$

1. On considère l'application Φ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Phi : E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \Phi(x, y) = \langle x \mid u(y) \rangle \end{array} \right.$$

Démontrer que Φ est un produit scalaire sur E

2. Etablir l'inégalité vraie pour tout $x \in E$:

$$\|u(x)\|^4 \leqslant \langle u(x) \mid x \rangle \left\langle u^2(x) \mid u(x) \right\rangle$$

Exercice 47 :

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3, rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$
Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\{i, j, k\}$ est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Démontrer que l'endomorphisme φ^* dont la matrice dans la base orthonormée $\{i, j, k\}$ est A^T, la transposée de A est tel que :

$$(\forall u \in E)\,(\forall v \in E)\,(\langle \varphi(u) \mid v \rangle = \langle u \mid \varphi^*(v) \rangle)$$

Démontrer que φ^* est le seul endomorphisme de E vérifiant cette propriété.

2. En généralisant, nous prenons E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.
   (a) Montrer que l'on peut définir un endomorphisme $\widetilde{u}$ de E en posant, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$:
   $$\langle x \mid u(y) \rangle = \langle \widetilde{u}(x) \mid y \rangle$$
   (b) Etablir que les propriétés suivantes sont équivalentes :
      i. $u \circ \widetilde{u} = \widetilde{u} \circ u$
      ii. Pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, $\langle u(x) \mid u(y) \rangle = \langle \widetilde{u}(x) \mid \widetilde{u}(y) \rangle$
      iii. Pour tout $x \in E$, nous avons $\|u(x)\| = \|\widetilde{u}(x)\|$
   (c) Démontrer que pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ et $v \in \mathcal{L}(E)$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:
   $$\widetilde{u+v} = \widetilde{u} + \widetilde{v} \qquad \widetilde{\lambda u} = \lambda \widetilde{u} \qquad \widetilde{u \circ v} = \widetilde{v} \circ \widetilde{u}$$
   (d) Soit φ un automorphisme de E *(C'est à dire* $\varphi \in \mathrm{GL}(E)$*)*. Démontrer l'équivalence :
   $$\varphi^{-1} = \widetilde{\varphi} \Longleftrightarrow \varphi \text{ est un endomorphisme orthogonal}$$
   (e) Soit A la matrice de u dans une base orthonormée $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E. Comparer la matrice A et la matrice $\widetilde{A}$ de $\widetilde{u}$ dans cette même base
   (f) En déduire que si A est la matrice de $u \in \mathrm{O}(E)$, endomorphisme orthogonal, dans une base orthonormée $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E, alors $A^{-1} = A^T$
   (g) En déduire que si A est la matrice de $u \in \mathrm{O}(E)$, endomorphisme orthogonal involutif, dans une base orthonormée $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E, alors $A = A^T$

16.7 Corrections de quelques exercices

16.7.1 Produit scalaire

Exercice 1 :

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère la fonction, définie, pour $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ par :

$$\Phi\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = (x + y)(x_1 + y_1) + 2yy_1$$

Est-ce un produit scalaire ?

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ 3 vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On suppose :

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

1. **On vérifie la bilinéarité de Φ**
   - ▷ Etudions $\Phi\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$. Nous avons :

   $$\begin{aligned} \Phi\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right) = & \ (x_1 + x_2 + y_1 + y_2)(x_3 + y_3) + 2(y_1 + y_2)y_3 \\ = & \ (x_1 + y_1)(x_3 + y_3) + (x_2 + y_2)(x_3 + y_3) + 2y_1y_3 + 2y_2y_3 \\ = & \ (x_1 + y_1)(x_3 + y_3) + 2y_1y_3 + (x_2 + y_2)(x_3 + y_3) + 2y_2y_3 \\ = & \ \Phi\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right) + \Phi\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right) \end{aligned}$$

   Nous avons donc $\Phi\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right) = \Phi\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right) + \Phi\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$
   - ▷ Nous démontrerions, de la même manière

   $$\Phi\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\right) = \Phi\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) + \Phi\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right)$$

   - ▷ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et nous allons étudier $\Phi\left(\lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right)$. Nous avons donc :

   $$\begin{aligned} \Phi\left(\lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right) = & \ (\lambda x_1 + \lambda y_1)(x_3 + y_3) + 2\lambda y_1y_3 \\ = & \ \lambda\left((x_1 + y_1)(x_3 + y_3) + 2y_1y_3\right) \\ = & \ \lambda\Phi\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right) \end{aligned}$$

   Donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\Phi\left(\lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right) = \lambda\Phi\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right)$.
   Nous démontrerions, de la même manière, que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\Phi\left(\overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{w}\right) = \lambda\Phi\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right)$.
2. **L'application Φ est clairement symétrique**
3. **Montrons que l'application Φ est positive**

   Soit $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et regardons $\Phi\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}\right)$:

   $$\Phi\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}\right) = (x_1 + y_1)^2 + 2y_1^2 \geqslant 0$$

4. **Montrons que l'application Φ est définie**

   Soit $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ telle que $\Phi\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}\right) = 0$; alors :

   $$\Phi\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}\right) = (x_1 + y_1)^2 + 2y_1^2 = 0 \Longleftrightarrow y_1 = 0 \text{ et } x_1 + y_1 = 0 \Longleftrightarrow x_1 = y_1 = 0$$

   Donc, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

Φ est donc bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$

Exercice 2 :

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. On considère, dans $\mathbb{R}^2$, pour $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ l'application Φ définie par :

$$\Phi\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = xx_1e^{a^2} + (xy_1 + x_1y)\, e^{ab} + yy_1e^{b^2}$$

Démontrer que Φ est un produit scalaire

1. Démontrer la bilinéarité et la symétrie de Φ n'est pas très compliquée.
2. **Démontrons que Φ est positive**

   Autrement dit, pour $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$, avons nous $\Phi\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}\right) \geqslant 0$.

   Soit $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors $\Phi\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}\right) = x^2e^{a^2} + 2xye^{ab} + y^2e^{b^2}$

   Considérons le polynôme d'indéterminée x $P(x) = x^2e^{a^2} + 2xye^{ab} + y^2e^{b^2}$. Le discriminant de ce polynôme est donné par $\Delta = y^2e^{2ab} - e^{a^2}y^2e^{b^2} = y^2\left(e^{2ab} - e^{a^2+b^2}\right)$

   Nous avons toujours $\Delta \leqslant 0$
   En effet, de l'identité $(a-b)^2 \geqslant 0$, nous tirons $2ab \leqslant a^2+b^2$, c'est à dire, puisque la fonction exponentielle est croissante $e^{2ab} \leqslant e^{a^2+b^2}$ et donc $y^2\left(e^{2ab} - e^{a^2+b^2}\right) \leqslant 0$ avec $\Delta = 0$ si et seulement si $y = 0$ ou $a = b$; sinon, $\Delta < 0$

   Comme $\Delta \leqslant 0$, $P(x)$ est toujours du signe de e^{a^2}, et donc $P(x) \geqslant 0$, c'est à dire $\Phi\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}\right) \geqslant 0$
3. **Démontrons que Φ est définie**

   Supposons donc que $\Phi\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}\right) = 0$ et donc que $P(x) = x^2e^{a^2} + 2xye^{ab} + y^2e^{b^2} = 0$.
   En réutilisant la question précédente, si $\Delta < 0$, $P(x)$ ne s'annule jamais ; donc, si $P(x) = 0$, alors $\Delta = 0$.
   - ⋆ Supposons $y = 0$; alors $P(x) = 0 \Longleftrightarrow x^2e^{a^2} = 0$ et donc $x = 0$, et donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
   - ⋆ Supposons $a = b$; alors $P(x) = 0 \Longleftrightarrow x^2e^{a^2} + 2xye^{a^2} + y^2e^{a^2} = 0 \Longleftrightarrow e^{a^2}(x+y)^2 = 0 \Longleftrightarrow x = -y$

   Donc Φ n'est pas définie et donc, Φ n'est pas un produit scalaire

A quelles conditions Φ est-il un produit scalaire ?
Clairement, pour que Φ soit un produit scalaire, il faut que $a \neq b$ et alors $\Phi\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}\right) = 0 \Longleftrightarrow x = y = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

Exercice 3 :

Démontrer que si Δ est la droite vectorielle engendrée par x, alors $\{x\}^\perp = \Delta^\perp$

Voilà un exercice assez marrant, puisqu'il part d'un seul eélément qui définit un ensemble ! ! C'est une jolie application de 16.1.6

1. Premièrement, $\Delta = \{\lambda x \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $\{x\}^\perp = \{u \text{ tels que } \langle u \mid x\rangle = 0\}$; d'après 16.1.6, $\{x\}^\perp$ est un sous-espace vectoriel .
2. Montrons que $\{x\}^\perp \subset \Delta^\perp$

   Soit $u \in \{x\}^\perp$; alors $\langle u \mid x\rangle = 0$. Soit $v \in \Delta$, alors, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = \lambda x$, et $\langle u \mid v\rangle = \langle u \mid \lambda x\rangle = \lambda \langle u \mid x\rangle = 0$.
   Ainsi, u est orthogonal à tout vecteur de Δ et donc $u \in \Delta^\perp$; d'où $\{x\}^\perp \subset \Delta^\perp$
3. Montrons que $\Delta^\perp \subset \{x\}^\perp$

   Soit $v \in \Delta^\perp$; comme x engendre Δ, nous avons, en particulier $\langle v \mid x\rangle = 0$ et donc $v \in \{x\}^\perp$, et nous avons donc $\Delta^\perp \subset \{x\}^\perp$

Nous avons donc bien $\{x\}^\perp = \Delta^\perp$

Exercice 4 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien. Démontrer que si, pour tout $x \in E$, tout $y \in E$ et tout $z \in E$, $\langle x \mid z\rangle = \langle y \mid z\rangle$, alors $x = y$

Soient $x \in E$, $y \in E$ tels que pour tout $z \in E$ $\langle x \mid z\rangle = \langle y \mid z\rangle$.
Alors $\langle x \mid z\rangle - \langle y \mid z\rangle = \langle x - y \mid z\rangle = 0$.
En particulier si $z = x - y$ et nous avons alors $\langle x - y \mid x - y\rangle = \|x - y\|^2 = 0$, c'est à dire $x - y = 0 \Longleftrightarrow x = y$

Exercice 6 :

Dans cet exercice, nous allons montrer 16.1.16 dans des cas particuliers. On peut remarquer que E n'est donné de dimension finie.

1. *E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien et $D \subset E$ est une droite vectorielle de base i. On suppose $\|i\| = 1$. Comme d'habitude, nous notons $D^\perp$ le sous-espace vectoriel des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tout vecteur de D*

   (a) *Démontrez que, pour tout vecteur $u \in E$, les deux vecteurs $u_1 = \langle u \mid i\rangle\, i$ et $u_2 = u - u_1$ sont tels que :*

   $$u_1 \in D \quad \text{et } u_2 \in D^\perp$$

   ▷ Que $u_1 \in D$ est une évidence, puisque $u_1 = \langle u \mid i\rangle\, i$; comme $\langle u \mid i\rangle \in \mathbb{R}$, u_1 est colinéaire à i et est donc dans D

   ▷ D'autre part, il faut évaluer $\langle u_2 \mid i\rangle$; nous avons donc :

   $$\langle u_2 \mid i\rangle = \langle u - u_1 \mid i\rangle = \langle u \mid i\rangle - \langle u_1 \mid i\rangle$$

   Or, $\langle u_1 \mid i\rangle = \langle \langle u \mid i\rangle\, i \mid i\rangle = \langle u \mid i\rangle \langle i \mid i\rangle = \langle u \mid i\rangle$ car $\langle i \mid i\rangle = \|i\|^2 = 1$.
   Donc, $\langle u_2 \mid i\rangle = \langle u \mid i\rangle - \langle u \mid i\rangle = 0$, et ainsi, $u_2 \in D^\perp$

   (b) *Démontrer que D et $D^\perp$ sont 2 sous-espaces vectoriels supplémentaires de E*

   Soit $u \in E$, alors, en gardant les notions ci-dessus, $u = u_1 + u_2$; donc, $u \in D + D^\perp$, et comme $D \cap D^\perp = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, nous avons bien D et $D^\perp$ sous-espaces vectoriels supplémentaires de E

2. *E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien et $P \subset E$ est un plan vectoriel de base orthonormée $\{i, j\}$. Nous notons $P^\perp$ le sous-espace vectoriel des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tout vecteur de P*

   Que $\{i, j\}$ soit une base orthonormée de P signifie que $\|i\| = \|j\| = 1$ et que $\langle i \mid j\rangle = 0$

   (a) *Démontrez que, pour tout vecteur $u \in E$, les deux vecteurs $u_1 = \langle u \mid i\rangle\, i + \langle u \mid j\rangle\, j$ et $u_2 = u - u_1$ sont tels que : $u_1 \in P$ et $u_2 \in P^\perp$*

   ▷ Que $u_1 \in P$ est une évidence, c'est la même démonstration que ci-dessus : u_1 est combinaison linéaire de i et j.

   ▷ D'autre part, il faut évaluer $\langle u_2 \mid i\rangle$ et $\langle u_2 \mid j\rangle$; nous avons donc :

   ⋆ $\langle u_2 \mid i\rangle = \langle u - u_1 \mid i\rangle = \langle u \mid i\rangle - \langle u_1 \mid i\rangle$
   Or
   $$\langle u_1 \mid i\rangle = \langle \langle u \mid i\rangle\, i + \langle u \mid j\rangle\, j \mid i\rangle = \langle u \mid i\rangle \langle i \mid i\rangle + \langle u \mid j\rangle \langle j \mid i\rangle = \langle u \mid i\rangle$$
   car $\langle i \mid i\rangle = \|i\|^2 = 1$ et $\langle i \mid j\rangle = 0$.
   Donc, $\langle u_2 \mid i\rangle = \langle u \mid i\rangle - \langle u \mid i\rangle = 0$, et ainsi, $u_2 \in \{i\}^\perp$

   ⋆ De même,$\langle u_2 \mid j\rangle = \langle u - u_1 \mid j\rangle = \langle u \mid j\rangle - \langle u_1 \mid j\rangle$
   Or,
   $$\langle u_1 \mid j\rangle = \langle \langle u \mid i\rangle\, i + \langle u \mid j\rangle\, j \mid j\rangle = \langle u \mid i\rangle \langle i \mid j\rangle + \langle u \mid j\rangle \langle j \mid j\rangle = \langle u \mid j\rangle$$
   car $\langle j \mid j\rangle = \|j\|^2 = 1$ et $\langle i \mid j\rangle = 0$.
   Donc, $\langle u_2 \mid j\rangle = \langle u \mid j\rangle - \langle u \mid j\rangle = 0$, et ainsi, $u_2 \in \{j\}^\perp$

   Donc comme $u_2 \perp i$ et $u_2 \perp j$, u_2 est orthogonal à toute combinaison linéaire de i et j, donc à tout vecteur de P, et donc $u_2 \in P^\perp$

(b) *Démontrer que P et $P^{\perp}$ sont 2 sous-espaces vectoriels supplémentaires de E*

C'est donc la même démonstration que tout à l'heure :
Si $u \in E$, alors, en gardant les notions ci-dessus, $u = u_1 + u_2$; donc, $u \in P + P^{\perp}$, et comme $P \cap P^{\perp} = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, la décomposition est unique et nous avons bien P et $P^{\perp}$ sous-espaces vectoriels supplémentaires de E

Exercice 7 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$. Soit $D \subset E$ une droite vectorielle incluse dans E. On désigne par ϖ la projection orthogonale de E sur D

1. (a) *La droite vectorielle D étant définie par sa base $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, définir analytiquement ϖ :*

Nous commençons par quelque chose de facile ! !

Soit $\overrightarrow{X}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et nous allons appeler $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ les coordonnées de $\varpi\left(\overrightarrow{X}\right)$

▷ Tout d'abord $\varpi\left(\overrightarrow{X}\right)$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires et il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varpi\left(\overrightarrow{X}\right) = \lambda\overrightarrow{u}$, ce qui donne, au niveau des coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{rl} x' = & 0 \\ y' = & \lambda \\ z' = & 0 \end{array}\right.$$

▷ D'autre part, $\overrightarrow{X} - \varpi\left(\overrightarrow{X}\right)$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$, c'est à dire :

$$\left\langle \overrightarrow{X} - \varpi\left(\overrightarrow{X}\right) \mid \overrightarrow{u} \right\rangle = 0$$

Nous avons donc : $(x' - x) \times 0 + (y' - y) \times 1 + (z' - z) \times 0 = 0$, c'est à dire $y' = y$

▷ La définition analytique de ϖ est donc :

$$\left\{\begin{array}{rl} x' = & 0 \\ y' = & y \\ z' = & z \end{array}\right.$$

La matrice de ϖ dans la base orthonormée $\{i, j, k\}$ est donc $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) *La droite vectorielle D étant définie par sa base $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, définir analytiquement ϖ :*

Soit $\overrightarrow{X}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et nous allons appeler $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ les coordonnées de $\varpi\left(\overrightarrow{X}\right)$

▷ Tout d'abord $\varpi\left(\overrightarrow{X}\right)$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires et il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varpi\left(\overrightarrow{X}\right) = \lambda\overrightarrow{u}$, ce qui donne, au niveau des coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{rl} x' = & \lambda\alpha \\ y' = & \lambda\beta \\ z' = & \lambda\gamma \end{array}\right.$$

Comme nous avons $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, nous avons $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$ ou $\gamma \neq 0$. Supposons pour simplifier que $\alpha \neq 0$. Alors, nous avons :

$$\lambda = \frac{x'}{\alpha} \text{ puis } y' = \frac{\beta}{\alpha}x' \text{ et, pour terminer } z' = \frac{\gamma}{\alpha}x'$$

▷ D'autre part, $\overrightarrow{X} - \varpi\left(\overrightarrow{X}\right)$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$, c'est à dire :

$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{X} - \varpi\left(\overrightarrow{X}\right) \mid \overrightarrow{u}\right\rangle = 0 &\iff (x-x')\times\alpha + (y-y')\times\beta + (z-z')\times\gamma = 0\\ &\iff \alpha x' + \beta y' + \gamma z' = \alpha x + \beta y + \gamma z\end{aligned}$$

En remplaçant y' et z' par leur valeur trouvée précédemment, nous avons :

$$\alpha x' + \frac{\beta^2}{\alpha}x' + \frac{\gamma^2}{\alpha}x' = \alpha x + \beta y + \gamma z \iff x'\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha}\right) = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

▷ D'où nous tirons :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& \dfrac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}(\alpha x+\beta y+\gamma z)\\ y' &=& \dfrac{\beta}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}(\alpha x+\beta y+\gamma z)\\ z' &=& \dfrac{\gamma}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}(\alpha x+\beta y+\gamma z)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x' &=& \dfrac{\alpha}{\|\overrightarrow{u}\|^2}(\alpha x+\beta y+\gamma z)\\ y' &=& \dfrac{\beta}{\|\overrightarrow{u}\|^2}(\alpha x+\beta y+\gamma z)\\ z' &=& \dfrac{\gamma}{\|\overrightarrow{u}\|^2}(\alpha x+\beta y+\gamma z)\end{array}\right.$$

La matrice de ϖ dans la base orthonormée $\{i, j, k\}$ est donc $A = \dfrac{1}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\begin{pmatrix}\alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma\\ \alpha\beta & \beta^2 & \beta\gamma\\ \alpha\gamma & \gamma\beta & \gamma^2\end{pmatrix}$

On peut remarquer que la matrice A est symétrique. La matrice aurait eu une autre forme, mais semblable, si nous avions choisi $\beta \neq 0$ ou $\gamma \neq 0$

2. *La droite vectorielle D étant définie par 2 équations cartésiennes, définir analytiquement ϖ dans les cas suivants :*

(a) $D : \left\{\begin{array}{rl} x-2y = & 0\\ x+y+z = & 0\end{array}\right.$

⋆ Des équations $D : \left\{\begin{array}{rl} x-2y = & 0\\ x+y+z = & 0\end{array}\right.$, nous tirons $x = 2y$ et $3y = z$ et un vecteur directeur de D est donc $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$

⋆ Comme tout à l'heure, soit $\overrightarrow{X}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et nous allons appeler $\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ les coordonnées de $\varpi\left(\overrightarrow{X}\right)$

⋆ Comme $\varpi\left(\overrightarrow{X}\right) \in D$, nous avons :

$$\left\{\begin{array}{rl} x'-2y' = & 0\\ x'+y'+z' = & 0\end{array}\right. \iff x' = 2y' \text{ et } 3y' + z' = 0$$

⋆ D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{X} - \varpi\left(\overrightarrow{X}\right) \mid \overrightarrow{u}\right\rangle = 0 &\iff 2(x-x') + (y-y') - 3(z-z') = 0\\ &\iff 2x' + y' - 3z' = 2x + y - 3z\end{aligned}$$

En remplaçant x' et z' par leur valeur trouvée précédemment, nous avons :

$$4y' + y' + 9y' = 2x + y - 3z \iff 14y' = 2x + y - 3z$$

⋆ D'où nous tirons :

$$\left\{\begin{array}{rl} x' = & \dfrac{1}{7}(2x+y-3z) \\ y' = & \dfrac{1}{14}(2x+y-3z) \\ z' = & \dfrac{-3}{14}(2x+y-3z) \end{array}\right.$$

(b) $D : \left\{\begin{array}{rl} x = & az+b \\ y = & cz+d \end{array}\right.$

⋆ Des équations $\left\{\begin{array}{rl} x = & az+b \\ y = & cz+d \end{array}\right.$, nous tirons un vecteur directeur de D est donc $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \\ 1 \end{pmatrix}$

⋆ Comme d'habitude, soit $\overrightarrow{X}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et nous allons appeler $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ les coordonnées de $\varpi\left(\overrightarrow{X}\right)$

⋆ Comme $\varpi\left(\overrightarrow{X}\right) \in D$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varpi\left(\overrightarrow{X}\right) = \lambda\overrightarrow{u}$, et donc

$$\left\{\begin{array}{rl} x' = & \lambda(a+b) \\ y' = & \lambda(c+d) \\ z' = & \lambda \end{array}\right. \Longleftrightarrow x' = z'(a+b) \text{ et } y' = z'(c+d)$$

⋆ D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{X} - \varpi\left(\overrightarrow{X}\right) \mid \overrightarrow{u} \right\rangle = 0 \Longleftrightarrow\ & (a+b)(x-x') + (c+d)(y-y') + (z-z') = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & (a+b)x' + (c+d)y' + z' = (a+b)x + (c+d)y + z \end{aligned}$$

En remplaçant x' et y' par leur valeur en fonction de z' trouvée précédemment, nous avons :

$$(a+b)x'+(c+d)y'+z' = (a+b)x+(c+d)y+z \Longleftrightarrow z'\left((a+b)^2+(c+d)^2+1\right) = (a+b)x+(c+d)y+z$$

⋆ D'où nous tirons :

$$\left\{\begin{array}{rl} x' = & \dfrac{a+b}{(a+b)^2+(c+d)^2+1}((a+b)x+(c+d)y+z) \\ y' = & \dfrac{c+d}{(a+b)^2+(c+d)^2+1}((a+b)x+(c+d)y+z) \\ z' = & \dfrac{1}{(a+b)^2+(c+d)^2+1}((a+b)x+(c+d)y+z) \end{array}\right.$$

3. *Dans les situations précédentes, définir σ_D, la symétrie orthogonale par rapport à D*

Nous ne le ferons pas pour toutes les droites, seulement pour une seule.

▷ Pour tout $\overrightarrow{X} \in E$, nous avons :

$$\overrightarrow{X} = \varpi\left(\overrightarrow{X}\right) + \left(\overrightarrow{X} - \varpi\left(\overrightarrow{X}\right)\right) \text{ et } \sigma_D\left(\overrightarrow{X}\right) = \varpi\left(\overrightarrow{X}\right) - \left(\overrightarrow{X} - \varpi\left(\overrightarrow{X}\right)\right)$$

De telle sorte que :

$$\sigma_D\left(\overrightarrow{X}\right) = 2\varpi\left(\overrightarrow{X}\right) - \overrightarrow{X}$$

▷ Si, comme d'habitude, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de $\overrightarrow{X}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ celles de $\varpi\left(\overrightarrow{X}\right)$, on appelle $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ les coordonnées de $\sigma_D\left(\overrightarrow{X}\right)$, nous avons :

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1 = & 2x'-x \\ y_1 = & 2y'-y \\ z_1 = & 2z'-z \end{array}\right.$$

▷ Etudions la symétrie par rapport à la droite D définie par :

$$D : \left\{ \begin{array}{rl} x-2y= & 0 \\ x+y+z= & 0 \end{array} \right.$$

La définition analytique de la projection ϖ est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{rl} x' = & \dfrac{1}{7}(2x+y-3z) \\ y' = & \dfrac{1}{14}(2x+y-3z) \\ z' = & \dfrac{-3}{14}(2x+y-3z) \end{array} \right.$$

Donc, la définition analytique de la symétrie orthogonale est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{rl} x_1 = & 2x'-x \\ y_1 = & 2y'-y \\ z_1 = & 2z'-z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} x_1 = & \dfrac{2}{7}(2x+y-3z)-x \\ y_1 = & \dfrac{2}{14}(2x+y-3z)-y \\ z_1 = & \dfrac{-6}{14}(2x+y-3z)-z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} x_1 = & \dfrac{1}{7}(-3x+2y-6z) \\ y_1 = & \dfrac{1}{7}(2x-6y-3z) \\ z_1 = & \dfrac{1}{7}(-6x-3y+2z) \end{array} \right.$$

Exercice 8 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$. Soit $P \subset E$ un plan vectoriel inclus dans E. On désigne par ϖ la projection orthogonale de E sur P

1. *Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur unitaire (c'est à dire que $\|\overrightarrow{n}\| = 1$) de la droite D orthogonale à P. Démontrer que, pour tout $u \in E$: $\varpi(u) = u - \langle u \mid \overrightarrow{n} \rangle \overrightarrow{n}$*

   Pour tout $u \in E$, nous avons $u = \varpi(u) + (u - \varpi(u))$ avec $\varpi(u) \in P$ et $u - \varpi(u) = \lambda \overrightarrow{n}$, et donc

   $$\varpi(u) = u + (\varpi(u) - u)$$

   Il faut donc, maintenant, calculer λ. Or, $\langle u - \varpi(u) \mid \overrightarrow{n} \rangle = \langle u \mid \overrightarrow{n} \rangle - \langle \varpi(u) \mid \overrightarrow{n} \rangle$
   Or, comme $\varpi(u) \in P$, nous avons $\langle \varpi(u) \mid \overrightarrow{n} \rangle = 0$, et donc $\langle u - \varpi(u) \mid \overrightarrow{n} \rangle = \langle u \mid \overrightarrow{n} \rangle$
   Nous avons aussi : $\langle u - \varpi(u) \mid \overrightarrow{n} \rangle = \langle \lambda \overrightarrow{n} \mid \overrightarrow{n} \rangle = \lambda \langle \overrightarrow{n} \mid \overrightarrow{n} \rangle = \lambda$.
   Ainsi, nous avons $\lambda = \langle u \mid \overrightarrow{n} \rangle$, de telle sorte que nous pouvons écrire

   $$\varpi(u) = u - \langle u \mid \overrightarrow{n} \rangle \overrightarrow{n}$$

2. *La plan P étant défini par 1 équation cartésienne, définir analytiquement ϖ dans les cas suivants :*

   Comme tout à l'heure, nous n'allons pas résoudre toutes les questions. Commençons par donner notre méthode de résolution. Soit $u \in E$ de coordonnées $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ avec $\varpi(u) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$; nous allons utiliser la relation $\varpi(u) = u - \langle u \mid \overrightarrow{n} \rangle \overrightarrow{n}$ pour définir les coordonnées de $\varpi(u)$

   (a) *$P :\ 2x - y + 2z = 0$*

   ⋆ Le vecteur $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur orthogonal au plan (P) ; alors $\overrightarrow{n} = \dfrac{1}{\left\|\overrightarrow{X}\right\|}\overrightarrow{X}$ est un vecteur normal à (P) ; comme $\left\|\overrightarrow{X}\right\| = 3$, nous avons $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

⋆ Nous devons, maintenant, calculer $\langle u \mid \overrightarrow{n} \rangle$ Nous avons :

$$\langle u \mid \overrightarrow{n} \rangle = \frac{2x}{3} - \frac{y}{3} + \frac{2z}{3}$$

Nous avons donc :

$$\begin{cases} x' = & x - \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2x}{3} - \dfrac{y}{3} + \dfrac{2z}{3}\right) \\ y' = & y + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2x}{3} - \dfrac{y}{3} + \dfrac{2z}{3}\right) \\ z' = & z - \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2x}{3} - \dfrac{y}{3} + \dfrac{2z}{3}\right) \end{cases} \iff \begin{cases} x' = & \dfrac{1}{9}(5x + 2y - 4z) \\ y' = & \dfrac{1}{9}(2x + 8y + 2z) \\ z' = & \dfrac{1}{9}(-4x + 2y + 5z) \end{cases}$$

La matrice de ϖ dans la base orthonormée $\{i, j, k\}$ est donnée par $A = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 8 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ on peut, une nouvelle fois, remarquer que A est une matrice symétrique

(b) $P:\ ax + by + cz = 0$

⋆ Le vecteur $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur orthogonal au plan (P) ; alors $\overrightarrow{n} = \dfrac{1}{\left\|\overrightarrow{X}\right\|}\overrightarrow{X}$ est un vecteur normal à (P) ; comme $\left\|\overrightarrow{X}\right\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$, nous avons $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{pmatrix}$

⋆ Nous devons, maintenant, calculer $\langle u \mid \overrightarrow{n} \rangle$ Nous avons :

$$\langle u \mid \overrightarrow{n} \rangle = \frac{ax}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + \frac{by}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + \frac{cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Nous avons donc :

$$\begin{cases} x' = & x - \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\left(\dfrac{ax}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + \dfrac{by}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + \dfrac{cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right) \\ y' = & y - \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\left(\dfrac{ax}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + \dfrac{by}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + \dfrac{cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right) \\ z' = & z - \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\left(\dfrac{ax}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + \dfrac{by}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + \dfrac{cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right) \end{cases}$$

D'où nous déduisons :

$$\begin{cases} x' = & \dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}\left(\left(b^2+c^2\right)x - aby - acz\right) \\ y' = & \dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}\left(-abx + \left(a^2+c^2\right)y - bcz\right) \\ z' = & \dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}\left(-acx - bcy + \left(a^2+b^2\right)z\right) \end{cases}$$

La matrice de ϖ dans la base orthonormée $\{i, j, k\}$ est donnée par

$$A = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}\begin{pmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

On peut, une nouvelle fois, remarquer que A est une matrice symétrique

16.7.2 Groupe orthogonal

Exercice 9 :

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien

1. *Démontrer que si Φ est un endomorphisme orthogonal de E, alors $-\Phi$ en est un aussi*

   Nous allons redéfinir ce qu'est $-\Phi$. C'est très simple :

   $$(\forall u \in E)\left((-\Phi)(u) = -\Phi(u)\right)$$

   Alors, pour tout $u \in E$ et tout $v \in E$, nous avons :

   $$\langle (-\Phi)(u) \mid (-\Phi)(v) \rangle = \langle -\Phi(u) \mid -\Phi(v) \rangle = \langle \Phi(u) \mid \Phi(v) \rangle = \langle u \mid v \rangle$$

   Donc, $-\Phi$ est un endomorphisme orthogonal de E

2. *Soit Φ un endomorphisme orthogonal de E*

   (a) *Démontrer que s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et un vecteur $u \in E$, non nul, tels que $\Phi(u) = \lambda u$, alors $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$*

   Φ endomorphisme orthogonal conserve la norme donc $\|\Phi(u)\| = \|u\|$.
   Comme $\Phi(u) = \lambda u$, nous avons :

   $$\|\Phi(u)\| = \|u\| \Longleftrightarrow \|\lambda u\| = \|u\| \Longleftrightarrow |\lambda| \, \|u\| = \|u\| \Longleftrightarrow |\lambda| = 1$$

   C'està dire $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$

   (b) *Démontrer que si 2 vecteurs $u \in E$ et $v \in E$ non nuls tous les deux, tels que $\Phi(u) = u$ et $\Phi(v) = -v$, alors u et v sont orthogonaux*

   Point très difficile!! Nous avons :

   $$\langle u \mid v \rangle = \langle \Phi(u) \mid \Phi(=) \rangle = \langle u \mid -v \rangle = -\langle u \mid v \rangle$$

   C'est à dire que $\langle u \mid v \rangle = -\langle u \mid v \rangle$, et que donc, $\langle u \mid v \rangle = 0$. u et v sont donc orthogonaux

Cet exercice nous autorise à donner un prolongement aux $\mathbb{R}$-espaces vectorielsde dimension 1

Proposition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1. Alors, les seuls endomorphismes orthogonaux de E sont Id_E ou $-\mathrm{Id}_E$

En effet, soit $u \neq \overrightarrow{0}$ une base de E, et Φ un endomorphisme orthogonal de E. Alors, $\Phi(u) = \lambda u$. Φ endomorphisme orthogonal conserve aussi la norme. Donc :

$$\|\Phi(u)\| = \|u\| \Longleftrightarrow \|\lambda u\| = \|u\| \Longleftrightarrow |\lambda| \, \|u\| = \|u\| \Longleftrightarrow |\lambda| = 1$$

C'est à dire $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$ et donc $\Phi(u) = -u$ ou $\Phi(u) = u$, c'est à dire $\Phi = \mathrm{Id}_E$ ou $\Phi = -\mathrm{Id}_E$

Exercice 10 :

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien et $\Phi : E \longrightarrow E$ une application quelconque. On suppose :

$$\Phi\left(\overrightarrow{0}\right) = \overrightarrow{0} \text{ et } \left((\forall u \in E)(\forall v \in E) \, \|\Phi(u) - \Phi(v)\| = \|u - v\|\right)$$

1. *Démontrer que Φ conserve la norme et le produit scalaire*

- ▷ **On démontre que Φ conserve la norme**
  Soit $u \in E$; alors $u = u - \overrightarrow{0}$; de plus, comme $\Phi\left(\overrightarrow{0}\right) = \overrightarrow{0}$, nous avons $\Phi\left(\overrightarrow{u}\right) = \Phi\left(\overrightarrow{u}\right) - \Phi\left(\overrightarrow{0}\right)$; donc :
  $$\left\|\Phi\left(\overrightarrow{u}\right)\right\| = \left\|\Phi\left(\overrightarrow{u}\right) - \Phi\left(\overrightarrow{0}\right)\right\| = \left\|u - \overrightarrow{0}\right\| = \|u\|$$
  Ainsi, pour tout $u \in E$, nous avons $\left\|\Phi\left(\overrightarrow{u}\right)\right\| = \|u\|$ et donc Φ conserve la norme.
- ▷ **On démontre que Φ conserve le produit scalaire**
  Pour tout $u \in E$ et tout $v \in E$, nous avons $\|\Phi(u) - \Phi(v)\| = \|u - v\|$, et en élevant au carré, nous avons aussi $\|\Phi(u) - \Phi(v)\|^2 = \|u - v\|^2$
  - ⋆ Nous avons $\|u - v\|^2 = \langle u - v \mid u - v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u \mid v\rangle$
  - ⋆ De même :
  $$\|\Phi(u) - \Phi(v)\|^2 = \langle \Phi(u) - \Phi(v) \mid \Phi(u) - \Phi(v)\rangle = \|\Phi(u)\|^2 + \|\Phi(v)\|^2 + 2\langle \Phi(u) \mid \Phi(v)\rangle$$
  - ⋆ De l'égalité $\|\Phi(u) - \Phi(v)\|^2 = \|u - v\|^2$, nous avons :
  $$\|\Phi(u)\|^2 + \|\Phi(v)\|^2 - 2\langle \Phi(u) \mid \Phi(v)\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u \mid v\rangle$$
  Comme Φ conserve la norme, nous avons :$\langle \Phi(u) \mid \Phi(v)\rangle = \langle u \mid v\rangle$, ce qui montre que Φ conserve le produit scalaire.

2. *En déduire que Φ est un endomorphisme orthogonal de E*
   Il suffit d'appliquer 16.2.4 : Φ est une application quelconque qui conserve le produit scalaire ; c'est donc un endomorphisme orthogonal

Exercice 11 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien. Est-ce qu'une homothétie de E est un endomorphisme orthogonal ?
Soit h une homothétie de E de rapport $k \in \mathbb{R}$; ce qui veut dire que, pour tout $u \in E$, $h(u) = ku$.
Si h est un endomorphisme orthogonoal, alors h conserve la norme et donc :

$$\|h(u)\| = \|u\| \iff \|ku\| = \|u\| \iff |k|\,\|u\| = \|u\| \iff |k| = 1$$

Ainsi :
- ⋆ Si $k = 1$, alors $h = \mathrm{Id}_E$
- ⋆ Si $k = -1$, alors $h = -\mathrm{Id}_E$

Ainsi, de manière générale, sauf si $k = \pm 1$, **une homothétie** de rapport k **n'est pas un endomorphisme orthogonal**

Exercice 12 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3, rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$. Définir analytiquement la symétrie orthogonale σ par rapport au plan P d'équation $x - y + z = 0$
Appelons ϖ la projection orthogonale sur P. Nous avons alors, pour tout $u \in E$, $\sigma(u) = 2\varpi(u) - u$, et pour donner la définition analytique de σ, nous allons rechercher la définition analytique de ϖ

1. **Définition analytique de ϖ**
   Pour tout vecteur $\overrightarrow{X} \in E$, de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, si $\varpi\left(\overrightarrow{X}\right)$ est la projection de $\overrightarrow{X}$ sur le plan P, nous posons $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ les coordonnées de $\varpi\left(\overrightarrow{X}\right)$
   - ⋆ Une base de P est donnée par $\{u, v\}$ où $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Le vecteur $\overrightarrow{X} - \varpi\left(\overrightarrow{X}\right)$ est orthogonal au plan P, et donc, nous avons :

$$\left\langle \overrightarrow{X} - \varpi\left(\overrightarrow{X}\right) \mid u \right\rangle = 0 \text{ et } \left\langle \overrightarrow{X} - \varpi\left(\overrightarrow{X}\right) \mid v \right\rangle = 0$$

Ce qui se traduit par :

$$(x - x') + (y - y') = 0 \text{ et } (z - z') + (y - y') = 0$$

D'autre part, $\varpi\left(\overrightarrow{X}\right) \in P$ et donc $x' - y' + z' = 0$

$\star$ Nous avons donc le système :

$$\left\{\begin{array}{rl} x' - y' + z' = & 0 \\ (x - x') + (y - y') = & 0 \\ (z - z') + (y - y') = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x' - y' + z' = & 0 \\ x' + y' = & x + y \\ y' + z' = & y + z \end{array}\right.$$

D'où nous tirons la définition analytique de ϖ

$$\left\{\begin{array}{rl} x' = & \frac{1}{3}(2x + y - z) \\ y' = & \frac{1}{3}(x + 2y + z) \\ z' = & \frac{1}{3}(-x + y + 2z) \end{array}\right.$$

2. **Définition analytique de σ**

   Nous en déduisons, en utilisant la relation $\sigma = 2\varpi - \mathrm{Id}_E$, la définition analytique de σ

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1 = & \frac{1}{3}(x + 2y - 2z) \\ y_1 = & \frac{1}{3}(2x + y + 2z) \\ z_1 = & \frac{1}{3}(-2x + 2y + z) \end{array}\right.$$

3. La matrice de σ dans la base orthonomée $\{i, j, k\}$ est donc :

$$\{_{\{i,j,k\}}(\sigma) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   On peut faire remarquer que $\{_{\{i,j,k\}}(\sigma)$ est symétrique

Exercice 13 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3, rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$. Soit f l'endomorphisme de E ($f \in \mathcal{L}(E)$) dont la matrice dans la base $\{i, j, k\}$ est :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Démontrer que f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite $D \subset E$

Ce n'est pas un exercice très difficile ; nous allons le résoudre en reprenant la définition de symétrie orthogonale. Tous les calculs ne seront pas exposés. Ils sont simples, et le lecteur pourra les faire seul.

1. Par calcul, on montre facilement que $\{f(i), f(j), f(k)\}$ forme une base othonormée, et donc f est bien un endomorphisme orthogonal.
2. D'autre part, par un calcul matriciel simple, on montre que $A^2 = \mathrm{Id}_2$ et donc que f est involutive. Ainsi, f est une symétrie orthogonale.

3. Recherchons les vecteurs invariants. Si $\overrightarrow{I}$ est un vecteur invariant, ses coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{rl} x = & \frac{1}{3}(-x+2y+2z) \\ y = & \frac{1}{3}(2x-y+2z) \\ z = & \frac{1}{3}(2x+2y-z) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} 3x = & -x+2y+2z \\ 3y = & 2x-y+2z \\ 3z = & 2x+2y-z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rll} 2x-y-z = & 0 & (L_1) \\ x-2y+z = & 0 & (L_2) \\ x+y-2z = & 0 & (L_3) \end{array} \right.$$

Clairement, nous avons $L_3 = L_1 - L_2$.

Ainsi, les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vérifient : $\left\{ \begin{array}{rl} 2x-y-z = & 0 \\ x-2y+z = & 0 \end{array} \right.$ qui est l'équation d'une droite de vecteur directeur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. Ainsi, f est une symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ de base $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 14 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3, rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$. Soit φ l'endomorphisme de E ($\varphi \in \mathcal{L}(E)$) dont la matrice dans la base $\{i, j, k\}$ est :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Démontrer que l'endomorphisme φ est orthogonal*

   Par calcul, on montre facilement que $\{\varphi(i), \varphi(j), \varphi(k)\}$ forme une base othonormée, et donc φ est bien un endomorphisme orthogonal.

2. *Démontrer que l'ensemble des vecteurs invariants par φ est une droite vectorielle D dont on déterminera une base u*

   Si $\overrightarrow{I}$ est un vecteur invariant, ses coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vérifient :

$$\left\{ \begin{array}{rl} x = & \frac{1}{3}(2x-2y+z) \\ y = & \frac{1}{3}(x+2y+2z) \\ z = & \frac{1}{3}(-2x-y+2z) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} 3x = & 2x-2y+z \\ 3y = & x+2y+2z \\ 3z = & -2x-y+2z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rll} x+2y-z = & 0 & L_1 \\ -x+y-2z = & 0 & L_2 \\ 2x+y+z = & 0 & L_3 \end{array} \right.$$

   Il est évident que $L_3 = L_1 - L_2$ et que nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{rl} x+2y-z = & 0 \\ -x+y-2z = & 0 \\ 2x+y+z = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} x+2y-z = & 0 \\ -x+y-2z = & 0 \end{array} \right.$$

   L'ensemble des vecteurs invariants par φ est donc une droite vectorielle d'équation cartésienne $D : \left\{ \begin{array}{rl} x+2y-z = & 0 \\ -x+y-2z = & 0 \end{array} \right.$.

   Une base de cette droite est donc formée par le vecteur $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. *Démontrer que, pour tout vecteur unitaire v orthogonal à u, le produit scalaire $\langle v \mid \varphi(v)\rangle$ est constant.*

   Les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ des vecteurs orthogonaux à u vérifient $-x+y+z=0$; c'est l'expression du produit scalaire.
   L'ensemble des vecteurs orthogonaux à D est donc un plan $D^{\perp}$ d'équation $-x+y+z=0$.
   Une base de $D^{\perp}$ est donc donnée par $\{v;w\}$ où $\overrightarrow{X}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{Y}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et tout vecteur $v\in D^{\perp}$ s'écrit $u=\lambda\overrightarrow{X}+\mu\overrightarrow{Y}=\begin{pmatrix} \lambda+\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$, et si u a pour norme 1, alors $(\lambda+\mu)^2+\lambda^2+\mu^2=1$, c'est à dire : $\lambda^2+\mu^2+\lambda\mu=\dfrac{1}{2}$
   Pour calculer $\langle v \mid \varphi(v)\rangle$, il nous faut connaître les coordonnées de $\varphi(v)$. Par le calcul matriciel, nous avons :

$$\varphi(v)=\begin{pmatrix} \mu \\ \lambda+\mu \\ -\lambda \end{pmatrix}$$

   D'où :

$$\begin{aligned} \langle v \mid \varphi(v)\rangle &= (\lambda+\mu)\times\mu+(\lambda+\mu)\times\lambda-\lambda\mu \\ &= \lambda\mu+\mu^2+\lambda^2+\lambda\mu-\lambda\mu \\ &= \lambda\mu+\mu^2+\lambda^2=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

   Donc, le produit scalaire $\langle v \mid \varphi(v)\rangle$ est constant

4. *Déterminer l'ensemble des vecteurs $w\in E$ tels que $\varphi(w)=-w$*

   Si w a pour coordonnées $w=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors, nous avons :

$$\begin{aligned} \varphi(w)=-w &\Longleftrightarrow \begin{cases} -x = \frac{1}{3}(2x-2y+z) \\ -y = \frac{1}{3}(x+2y+2z) \\ -z = \frac{1}{3}(-2x-y+2z) \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} -3x = 2x-2y+z \\ -3y = x+2y+2z \\ -3z = -2x-y+2z \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} 5x-2y+z = 0 & L_1 \\ x+5y+2z = 0 & L_2 \\ -2x-y+5z = 0 & L_3 \end{cases} \end{aligned}$$

   En faisant des combinaisons linéaires sur les lignes : $L_1'=L_1$, $L_2'=L_1-5L_2$ et $L_3'=2L_1+5L_3$, nous obtenons :

$$\begin{cases} 5x-2y+z = 0 & L_1 \\ x+5y+2z = 0 & L_2 \\ -2x-y+5z = 0 & L_3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 5x-2y+z = 0 & L_1' \\ -27y-9z = 0 & L_2' \\ -9y+27z = 0 & L_3' \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 5x-2y+z = 0 & L_1' \\ 3y+z = 0 & L_2' \\ y+3z = 0 & L_3' \end{cases}$$

   En résolvant le système donné par L_2' et L_3', nous obtenons $y=z=0$, et donc $x=0$.
   Ainsi, le seul vecteur $w\in E$ tel que $\varphi(w)=-w$ est le vecteur nul $\overrightarrow{0}$

5. *Déterminer B la matrice de l'endomorphisme φ^{-1} dans la base $\{i,j,k\}$; quelle relation y-a-t-il entre A et B ?*

Si $\overrightarrow{X} \in E$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, nous appelons $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ les coordonnées de $\varphi\left(\overrightarrow{X}\right)$, et nous aurons :

$$\begin{cases} x' = & \frac{1}{3}(2x - 2y + z) \\ y' = & \frac{1}{3}(x + 2y + 2z) \\ z' = & \frac{1}{3}(-2x - y + 2z) \end{cases}$$

Pour trouver la matrice de φ^{-1} dans la base $\{i, j, k\}$ nous allons exprimer x, y et z en fonction de x', y' et z'. Nous avons :

$$\begin{cases} x' = & \frac{1}{3}(2x - 2y + z) \\ y' = & \frac{1}{3}(x + 2y + 2z) \\ z' = & \frac{1}{3}(-2x - y + 2z) \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 2y + z = & 3x' & L_1 \\ x + 2y + 2z = & 3y' & L_2 \\ -2x - y + 2z = & 3z' & L_3 \end{cases}$$

Nous allons faire des combinaisons linéaires entre les lignes : $L'_1 = L_1$, $L'_2 = L_1 - 2L_2$ et $L'_3 = L_3 + L_1$. Nous obtenons alors :

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = & 3x' & L'_1 \\ -6y - 3z = & 3x' - 6y' & L'_2 \\ -3y + 3z = & 3x' + 3z' & L'_3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 2y + z = & 3x' & L'_1 \\ 2y + z = & -x' + 2y' & L'_2 \\ -y + z = & x' + z' & L'_3 \end{cases}$$

Nous itérons des combinaisons linéaires entre les lignes : $L''_1 = L'_1$, $L''_2 = L'_2$ et $L''_3 = 2L'_3 + L_1$; nous obtenons :

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = & 3x' & L''_1 \\ 2y + z = & -x' + 2y' & L''_2 \\ 3z = & x' + 2y' + 2z' & L''_3 \end{cases}$$

D'où, nous obtenons $z = \frac{1}{3}(x' + 2y' + 2z')$, puis, en remontant :

$$\begin{aligned} 2y = & -x' + 2y' - z \\ = & -x' + 2y' - \frac{1}{3}(x' + 2y' + 2z') \\ = & \frac{1}{3}(-4x' + 4y' - 2z') \end{aligned}$$

D'où, $y = \frac{1}{3}(-2x' + 2y' - z')$ Et, pour terminer :

$$\begin{aligned} 2x = & 3x' + 2y - z \\ = & 3x' + \frac{2}{3}(-2x' + 2y' - z') - \frac{1}{3}(x' + 2y' + 2z') \\ = & \frac{1}{3}(4x' + 2y' - 4z') \end{aligned}$$

D'où $x = \frac{1}{3}(2x' + y' - 2z')$.
Matriciellement, nous avons :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

En appelant B la matrice de l'endomorphisme φ^{-1} dans la base $\{i, j, k\}$, nous avons $B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; nous pouvons remarquer que $B = A^{-1} = A^T$. B et A sont transposées l'une de l'autre

Exercice 15 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien. Soit $i \in E$, un vecteur unitaire (c'est à dire tel que $\|i\| = 1$). *On désigne par f l'application de E dans E, par :*

$$\begin{cases} f : E & \longrightarrow & E \\ \quad u & \longmapsto & f(u) = 2\langle u \mid i\rangle i - u \end{cases}$$

1. *Démontrer que f est un endomorphisme orthogonal involutif de E*

   ▷ **f est involutif**

   Soit $u \in E$; il faut montrer que $f \circ f(u) = u$

   $$f \circ f(u) = f[f(u)] = 2\langle f(u) \mid i\rangle i - f(u)$$

   Calculons $\langle f(u) \mid i\rangle i$. Nous avons :

   $$\langle f(u) \mid i\rangle i = \langle 2\langle u \mid i\rangle i - u \mid i\rangle i = 2\langle u \mid i\rangle \langle i \mid i\rangle i - \langle u \mid i\rangle i = \langle u \mid i\rangle i \text{ car } \langle i \mid i\rangle = 1$$

   Donc $2\langle f(u) \mid i\rangle i = 2\langle u \mid i\rangle i$

   D'où :

   $$f \circ f(u) = 2\langle u \mid i\rangle i - (2\langle u \mid i\rangle i - u) = u$$

   f est bien involutive

   ▷ **f conserve le produit scalaire**

   Soient $u \in E$ et $v \in E$. Pour montrer que f est un endomorphisme orhogonal, il faut démontrer que $\langle f(u) \mid f(v)\rangle = \langle u \mid v\rangle$

   $$\begin{aligned} \langle f(u) \mid f(v)\rangle = & \ \langle 2\langle u \mid i\rangle i - u \mid 2\langle v \mid i\rangle i - v\rangle \\ = & \ 4\langle u \mid i\rangle \langle v \mid i\rangle \langle i \mid i\rangle - 2\langle v \mid i\rangle \langle i \mid v\rangle \\ & \quad -2\langle v \mid i\rangle \langle u \mid i\rangle + \langle u \mid v\rangle \ \text{ par bilinéairité} \end{aligned}$$

   Comme $\langle i \mid i\rangle = 1$, nous avons $4\langle u \mid i\rangle \langle v \mid i\rangle \langle i \mid i\rangle - 2\langle v \mid i\rangle \langle i \mid v\rangle - 2\langle v \mid i\rangle \langle u \mid i\rangle = 0$ et donc

   $$\langle f(u) \mid f(v)\rangle = \langle u \mid v\rangle$$

   f est donc un endomorphisme orthogonal involutif

2. *Quel est l'ensemble des vecteurs invariants ? En déduire la nature de f*

   Les vecteurs invariants par f sont tels que $f(u) = u$. Or :

   $$f(u) = u \Longleftrightarrow 2\langle u \mid i\rangle i - u = u \Longleftrightarrow 2\langle u \mid i\rangle i = 2u \Longleftrightarrow u = \langle u \mid i\rangle i$$

   L'ensemble des vecteurs invariants par f est la droite D de base i

   f est donc la symétrie orthogonale par rapport à D

   Remarque

   Si i est un vecteur unitaire, pour tout vecteur $u \in E$, l'expression $\langle u \mid i\rangle i$ est la projection orthogonale de u sur la droite D de base i. Ainsi, on retouve, dans l'expression de f, la symétrie orthogonale : $\sigma = 2\varpi - \mathrm{Id}_E$

3. *On appelle $D^\perp$ l'ensemble des vecteurs orthogonaux à la droite D de base i. Démontrer que l'application τ de E dans E, définie pour tout $u \in E$ par $\tau(u) = -f(u)$ est une symétrie orthogonale par rapport à $D^\perp$*

   Il y a, vraiment, plusieurs façons de résoudre la question.

   Tout d'abord, on peut remarquer que $\tau = -f$; comme f est un endomorphisme orthogonal, $-f$, donc τ en est aussi un.

   S'autre part, $\tau \circ \tau = (-f) \circ (-f) = \mathrm{Id}_E$, ce qui montre que τ est une symétrie orthogonale. Il faut rechercher les vecteurs invariants :

   $$\tau(u) = u \Longleftrightarrow u - 2\langle u \mid i\rangle i = u \Longleftrightarrow \langle u \mid i\rangle i = 0$$

   C'est à dire que u est ortogonal à D, c'est à dire que $u \in D^\perp$.

   Réciproquent, de manière évidente, si $u \in D^\perp$ alors $\tau(u) = u$

   τ est donc une symétrie orthogonale par rapport à $D^\perp$

4. *Dans cette question, on suppose $\dim E = 2$ et que E est rapporté à une base orthonormée $\{i, j\}$. Utiliser les résultats précédents pour définir analytiquement la symétrie orthogonale par rapport à la droite D_u engendrée par le vecteur u, dans les cas suivants :*

   Bien entendu que nous allons utiliser les questions précédentes!!

   (a) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   Le vecteur u est un vecteur unitaire, et la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par u est définie, pour tout vecteur $\overrightarrow{X} \in E$ par :

$$\sigma\left(\overrightarrow{X}\right) = 2\left\langle \overrightarrow{X} \mid u \right\rangle u - \overrightarrow{X}$$

   En posant $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées de $\overrightarrow{X}$, nous avons $\left\langle \overrightarrow{X} \mid u \right\rangle = x$, et si $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de $\sigma\left(\overrightarrow{X}\right)$, nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} x' = & 2x - x = x \\ y' = & -y \end{cases}$$

   D'où la matrice de cette symétrie : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

   (b) $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

   u n'est pas un vecteur unitaire ; c'est le vecteur $i = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ qui l'est.

   En posant, comme précédemment $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées de $\overrightarrow{X}$, nous avons $\left\langle \overrightarrow{X} \mid i \right\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(xa+yb)$, et si $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de $\sigma\left(\overrightarrow{X}\right)$, nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} x' = & \dfrac{2}{\sqrt{a^2+b^2}}(xa+yb)\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} - x \\ y' = & \dfrac{2}{\sqrt{a^2+b^2}}(xa+yb)\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} - y \end{cases} \iff \begin{cases} x' = & \dfrac{1}{a^2+b^2}\left(2a(ax+by) - \left(a^2+b^2\right)x\right) \\ y' = & \dfrac{1}{a^2+b^2}\left(2b(ax+by) - \left(a^2+b^2\right)y\right) \end{cases}$$

   D'où nous tirons :

$$\begin{cases} x' = & \dfrac{1}{a^2+b^2}\left(2a^2x + 2aby - a^2x - b^2x\right) = \dfrac{1}{a^2+b^2}\left(\left(a^2-b^2\right)x + 2aby\right) \\ y' = & \dfrac{1}{a^2+b^2}\left(2abx + 2b^2y - a^2y - b^2y\right) = \dfrac{1}{a^2+b^2}\left(2abx + \left(b^2-a^2\right)y\right) \end{cases}$$

   D'où la matrice de cette symétrie est : $\dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2-b^2 & 2ab \\ 2ab & b^2-a^2 \end{pmatrix}$

5. *Dans cette question, on suppose $\dim E = 3$ et que E est rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$. Utiliser les résultats précédents pour définir analytiquement la symétrie orthogonale par rapport au plan P dont une équation cartésienne est :*

   (a) $x + y = 0$

   Si i est un vecteur normal à P, la symétrie par rapport à P est definie comme la fonction τ par :

$$\tau\left(\overrightarrow{X}\right) = \overrightarrow{X} - 2\left\langle \overrightarrow{X} \mid i \right\rangle i$$

   Pour le plan P d'équation $x + y = 0$, nous avons $i = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Alors, en posant, comme précédemment $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ les coordonnées de $\overrightarrow{X}$, nous avons $\left\langle \overrightarrow{X} \mid i \right\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$, et si $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de $\tau\left(\overrightarrow{X}\right)$, nous pouvons écrire :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& x - \dfrac{2}{\sqrt{2}}(x+y) \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y' &=& y - \dfrac{2}{\sqrt{2}}(x+y) \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ z' &=& z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& -y \\ y' &=& -x \\ z' &=& z \end{array} \right.$$

D'où la matrice M de τ dans la base orthonormée $\{i, j, k\}$ est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut remarquer que $M = M^T$ où M^T est la transposée de M

(b) $x + y + z = 0$

Pour le plan P d'équation $x + y + z = 0$, nous avons $i = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Alors, en posant, comme précédemment $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ les coordonnées de $\overrightarrow{X}$, nous avons $\left\langle \overrightarrow{X} \mid i \right\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z)$, et si $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de $\tau\left(\overrightarrow{X}\right)$, nous pouvons écrire :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& x - \dfrac{2}{\sqrt{3}}(x+y+z) \times \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ y' &=& y - \dfrac{2}{\sqrt{3}}(x+y+z) \times \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ z' &=& z - \dfrac{2}{\sqrt{3}}(x+y+z) \times \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& \dfrac{1}{3}(x - 2y - 2z) \\ y' &=& \dfrac{1}{3}(-2x + y - 2z) \\ z' &=& \dfrac{1}{3}(-2x - 2y + z) \end{array} \right.$$

D'où la matrice M de τ dans la base orthonormée $\{i, j, k\}$ est donnée par :

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut remarquer à nouveau que $M = M^T$ où M^T est la transposée de M

Exercice 16 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien tel que $\dim E = 3$ et E est rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$. On appelle D_i, la droite vectorielle engendrée par i, D_j, la droite vectorielle engendrée par j et D_k, la droite vectorielle engendrée par k. On appelle :

- ▷ *σ_i, la symérie orthogonale par rapport à D_i*
- ▷ *σ_j, la symérie orthogonale par rapport à D_j*
- ▷ *σ_k, la symérie orthogonale par rapport à D_k*

1. *Démontrez que nous avons $\sigma_i \circ \sigma_j = \sigma_j \circ \sigma_i = \sigma_k$*

   Ce n'est pas un exercice qui pose de grosses difficultés. Nous allons considérer les matrices de ces 3 différentes symétries dans la base orthonormée $\{i, j, k\}$

▷ $\mathcal{M}(\sigma_i)$, la matrice de la symérie orthogonale σ_i est donnée par : $\mathcal{M}(\sigma_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

▷ $\mathcal{M}(\sigma_j)$, la matrice de la symérie orthogonale σ_j est donnée par : $\mathcal{M}(\sigma_j) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

▷ $\mathcal{M}(\sigma_k)$, la matrice de la symérie orthogonale σ_k est donnée par : $\mathcal{M}(\sigma_k) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a) La matrice de $\sigma_i \circ \sigma_j$ est $\mathcal{M}(\sigma_i \circ \sigma_j) = \mathcal{M}(\sigma_i) \times \mathcal{M}(\sigma_j)$. Tous calculs faits, nous avons :

$$\mathcal{M}(\sigma_i \circ \sigma_j) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{M}(\sigma_k)$$

Nous avons donc $\sigma_i \circ \sigma_j = \sigma_k$

(b) De même, par calcul matriciel, nous obtenons $\mathcal{M}(\sigma_j \circ \sigma_i) = \mathcal{M}(\sigma_j) \times \mathcal{M}(\sigma_i) = \mathcal{M}(\sigma_k)$
Donc $\sigma_j \circ \sigma_i = \sigma_k$

2. *On considère l'ensemble $\{\mathrm{Id}_E, \sigma_i, \sigma_j, \sigma_k\}$ muni de la composition des applications. Montrer que c'est un sous-groupe de $(\mathrm{O}(E), \circ)$ le groupe orthogonal de E*

Faisons la table de multiplications ; auparavant, il y a quelques calculs à faire :

⋆ Le calcul de $\sigma_i \circ \sigma_k$

$$\sigma_i \circ \sigma_k = \sigma_i \circ (\sigma_i \circ \sigma_j) = (\sigma_i \circ \sigma_i) \circ \sigma_j = \sigma_j$$

⋆ Par les mêmes méthodes, nous avons $\sigma_k \circ \sigma_i = \sigma_j$ et $\sigma_k \circ \sigma_j = \sigma_j \circ \sigma_k = \sigma_i$

⋆ D'où nous obtenons la table de multiplication :

	Id_E	σ_i	σ_j	σ_k
Id_E	Id_E	σ_i	σ_j	σ_k
σ_i	σ_i	Id_E	σ_k	σ_j
σ_j	σ_j	σ_k	Id_E	σ_i
σ_k	σ_k	σ_j	σ_i	Id_E

On voit que la loi est interne, que le tableau est symétrique ; c'est donc un groupe commutatif. C'est donc un sous-groupe de $(\mathrm{O}(E), \circ)$

Exercice 17 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien et $f \in \mathrm{O}(E)$. On appelle I l'ensemble des vecteurs invariants par f, c'est à dire :

$$I = \{u \in E \text{ tels que } f(u) = u\}$$

Démontrer que $f(I^\perp) \subset I^\perp$

Soit $z \in f(I^\perp)$; il faut donc démontrer que $z \in I^\perp$, c'est à dire que, pour tout $x \in I$, $\langle z \mid x \rangle = 0$
Comme $z \in f(I^\perp)$, il existe $y \in I^\perp$ tel que $z = f(y)$
Soit $x \in I$; x étant invariant par f, alors $x = f(x)$

$$\langle z \mid x \rangle = \langle f(y) \mid x \rangle = \langle f(y) \mid f(x) \rangle = \langle y \mid x \rangle = 0$$

Donc $\langle z \mid x \rangle = 0$ et $z \in I^\perp$

16.7.3 Groupe orthogonal du plan

Exercice 18 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 euclidien rapporté à une base orthonormée $\{i, j\}$. ρ et σ sont respectivement la rotation et la symétrie orthogonale transformant le vecteur u en le vecteur u', avec $\|u\| =$

$\|u'\| \neq 0$

Déterminer les matrices de ρ et σ dans le cas où $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $u' = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$

Premièrement, remarquons que $\|u\| = \|u'\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

1. S'il existe une rotation ρ telle que $\rho(u) = u'$, alors la matrice de ρ dans la base orthonormée $\{i, j\}$ est donnée par $\mathcal{M}_{\{i,j\}}(\rho) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

   Et nous avons avons alors, matriciellement : $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

   Ce qui nous donne le système d'inconnues α et β :

$$\left\{ \begin{array}{rl} b = & \alpha a - \beta b \\ a = & \beta a + \alpha b \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} \alpha a - \beta b = & b \\ \alpha b + \beta a = & a \end{array} \right.$$

   Le déterminant du système est donné par $\delta = a^2 + b^2$; d'où $\alpha = \dfrac{\delta_\alpha}{\delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} b & -b \\ a & a \end{vmatrix}}{a^2 + b^2} = \dfrac{2ab}{a^2 + b^2}$ et $\beta = \dfrac{\delta_\beta}{\delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}}{a^2 + b^2} = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$.

   D'où la matrice de ρ est donnée par :

$$\mathcal{M}_{\{i,j\}}(\rho) = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} 2ab & -\left(a^2 - b^2\right) \\ a^2 - b^2 & 2ab \end{pmatrix}$$

2. S'il existe une symétrie orthogonale σ telle que $\sigma(u) = u'$, alors la matrice de σ dans la base orthonormée $\{i, j\}$ est donnée par $\mathcal{M}_{\{i,j\}}(\sigma) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$

   Et nous avons avons alors, matriciellement : $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

   Ce qui nous donne le système d'inconnues α et β :

$$\left\{ \begin{array}{rl} b = & \alpha a + \beta b \\ a = & \beta a - \alpha b \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} \alpha a + \beta b = & b \\ -\alpha b + \beta a = & a \end{array} \right.$$

   Le déterminant du système est donné par $\delta = a^2 + b^2$; d'où $\alpha = \dfrac{\delta_\alpha}{\delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} b & b \\ a & a \end{vmatrix}}{a^2 + b^2} = 0$ et $\beta = \dfrac{\delta_\beta}{\delta} = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}}{a^2 + b^2} = \dfrac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$.

   D'où la matrice de ρ est donnée par : $\mathcal{M}_{\{i,j\}}(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 22 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2 rapporté à une base orthonormée $\{i, j\}$. On note Id_E l'application identique de E Déterminer l'ensemble des rotations vectorielles ρ telles que $\rho^3 = \mathrm{Id}_E$

On a vu, dans le cours, qu'une rotation ρ peut s'écrire, dans une base orthonormée $\{i, j\}$: $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Si $\rho^3 = \mathrm{Id}_E$, alors $\mathcal{M}_{\{i,j\}}\left(\rho^3\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; mais, par calcul, nous avons aussi $\mathcal{M}_{\{i,j\}}\left(\rho^3\right) = \begin{pmatrix} \cos 3\theta & -\sin 3\theta \\ \sin 3\theta & \cos 3\theta \end{pmatrix}$.
Et donc, $\cos 3\theta = 1$ et $\sin 3\theta = 0$. Nous avons :

$$\cos 3\theta = 1 \iff \theta = \frac{2k\pi}{3} et \sin 3\theta = 0 \iff \theta = \frac{k\pi}{3}$$

Nous en déduisons que $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ ou $\theta = \dfrac{4\pi}{3}$ ou $\theta = 0$.
Nous avons donc 3 rotations telles que $\rho^3 = \mathrm{Id}_E$. Elles ont pour matrice :

$$\mathcal{M}_{\{i,j\}}\left(\mathrm{Id}_E\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{M}_{\{i,j\}}\left(\rho\right) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \mathcal{M}_{\{i,j\}}\left(\rho^2\right) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

L'ensemble $\left\{\mathrm{Id}_E, \rho, \rho^2\right\}$ muni de la loi $\circ$ est un sous-groupe cyclique de $\mathrm{O}_2\left(E\right)$. En voici la table de multiplications :

	Id_E	ρ	ρ^2
Id_E	Id_E	ρ	ρ^2
ρ	ρ	ρ^2	Id_E
ρ^2	ρ^2	Id_E	ρ

Exercice 23 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2 rapporté à une base orthonormée $\{i, j\}$. D et D_1 sont 2 droites vectorielles de E. On appelle σ_D et σ_{D_1} les symétries orthogonales respectives par rapport à D ou D_1

1. *Démontrer l'équivalence : $\left(\sigma_D \circ \sigma_{D_1} = \sigma_{D_1} \circ \sigma_D\right) \Longleftrightarrow \left(D = D_1 \text{ ou } D \perp D_1\right)$*
   - **Supposons, dans un premier temps que $D = D_1$ ou $D \perp D_1$**
     - ⋆ Si $D = D_1$, alors $\sigma_D \circ \sigma_{D_1} = \sigma_{D_1} \circ \sigma_D = \mathrm{Id}_E$
     - ⋆ Si, cette fois ci, $D \perp D_1$, alors nous avons $\sigma_{D_1} = -\sigma_D$ et donc $\sigma_D \circ \sigma_{D_1} = \sigma_D \circ (-\sigma_D) = -\mathrm{Id}_E$, de même que $\sigma_{D_1} \circ \sigma_D = (-\sigma_D) \circ \sigma_D = -\mathrm{Id}_E$
       Et donc $\sigma_D \circ \sigma_{D_1} = \sigma_{D_1} \circ \sigma_D$

     Ainsi, si $D = D_1$ ou $D \perp D_1$ alors $\sigma_D \circ \sigma_{D_1} = \sigma_{D_1} \circ \sigma_D$
   - **Réciproquement, supposons, que $\sigma_D \circ \sigma_{D_1} = \sigma_{D_1} \circ \sigma_D$**
     Soit i une base de D, c'est à dire un vecteur non nul tel que $\sigma_D\left(i\right) = i$. Alors :
     $$\sigma_{D_1} \circ \sigma_D\left(i\right) = \sigma_{D_1}\left(i\right) = \sigma_D \circ \sigma_{D_1}\left(i\right) = \sigma_D\left(\sigma_{D_1}\left(i\right)\right)$$
     Ce qui sous-entend que $\sigma_{D_1}\left(i\right)$ est invariant par σ_D. Alors, σ_{D_1} étant un endomorphisme orthogonal, conserve la norme et donc $\sigma_{D_1}\left(i\right) = i$ ou $\sigma_{D_1}\left(i\right) = -i$
     - ⋆ Si $\sigma_{D_1}\left(i\right) = i$, alors la droite D est invariante par σ_{D_1} et donc $D = D_1$
     - ⋆ Si $\sigma_{D_1}\left(i\right) = -i$, alors $i \perp D_1$ et donc $D \perp D_1$

     Ainsi, si $\sigma_D \circ \sigma_{D_1} = \sigma_{D_1} \circ \sigma_D$, alors $D = D_1$ ou $D \perp D_1$

   Nous venons de démontrer que $\sigma_D \circ \sigma_{D_1} = \sigma_{D_1} \circ \sigma_D$ si et seulement si $D = D_1$ ou $D \perp D_1$
2. *On suppose, dans cette question, les droites D et D_1 distinctes et $\sigma_D \circ \sigma_{D_1} = \sigma_{D_1} \circ \sigma_D$*
   (a) *Définir $\sigma_D \circ \sigma_{D_1}$*
   Si $D \neq D_1$ et $\sigma_D \circ \sigma_{D_1} = \sigma_{D_1} \circ \sigma_D$, alors $D \perp D_1$ et $\sigma_D \circ \sigma_{D_1} = -\mathrm{Id}_E$
   (b) *Quel est le plus petit sous-groupe orthogonal de $\mathrm{O}\left(E\right)$ contenant σ_D et σ_{D_1} ?*
   Pas très difficile ! ! Ce sous-groupe est $G = \{\mathrm{Id}_E, -\mathrm{Id}_E, \sigma_D, \sigma_{D_1}\}$. On peut donc faire une table de multiplication du groupe :

	Id_E	$-\mathrm{Id}_E$	σ_D	σ_{D_1}
Id_E	Id_E	$-\mathrm{Id}_E$	σ_D	σ_{D_1}
$-\mathrm{Id}_E$	$-\mathrm{Id}_E$	Id_E	σ_{D_1}	σ_D
σ_D	σ_D	σ_{D_1}	Id_E	$-\mathrm{Id}_E$
σ_{D_1}	σ_{D_1}	σ_D	$-\mathrm{Id}_E$	Id_E

Exercice 24 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2 rapporté à une base orthonormée $\{i, j\}$. D et D_1 sont 2 droites vectorielles de E. On appelle σ_D et σ_{D_1} les symétries orthogonales respectives par rapport à D ou D_1 $u \in D$ et $v \in D_1$ sont 2 vecteurs unitaires. Démontrer que $\sigma_D + \sigma_{D_1}$ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ si et seulement si $|\langle u \mid v\rangle| = \dfrac{1}{2}$

1. Nous allons appeler $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ les coordonnées de u et $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$; comme u et v sont des vecteurs unitaires, nous avons $a^2 + b^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 1$
2. Dans un exercice précédent, nous avions montré que, pour tout $e \in E$, $\sigma_D(e) = 2\langle e \mid u\rangle u - e$ et $\sigma_{D_1}(e) = 2\langle e \mid v\rangle v - e$, de telle sorte que nous pouvions calculer les matrices des 2 symétries :
$$\mathcal{M}_{\{i,j\}}(\sigma_D) = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 2ab \\ 2ab & b^2 - a^2 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{M}_{\{i,j\}}(\sigma_{D_1}) = \begin{pmatrix} \alpha^2 - \beta^2 & 2\alpha\beta \\ 2\alpha\beta & \beta^2 - \alpha^2 \end{pmatrix}$$
De telle sorte que $\mathcal{M}_{\{i,j\}}(\sigma_D + \sigma_{D_1}) = \begin{pmatrix} a^2 + \alpha^2 - \beta^2 - b^2 & 2ab + 2\alpha\beta \\ 2ab + 2\alpha\beta & b^2 + \beta^2 - \alpha^2 - a^2 \end{pmatrix}$
Cette matrice est une matrice d'un symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ si et seulement si :
$$\left(a^2 + \alpha^2 - \beta^2 - b^2\right)^2 + 4(ab + \alpha\beta)^2 = 1$$
3. En développant $\left(a^2 + \alpha^2 - \beta^2 - b^2\right)^2 + 4(ab + \alpha\beta)^2$, nous arrivons à l'identité $(a\alpha + b\beta)^2 = \dfrac{1}{4}$, c'est à dire $|a\alpha + b\beta| = \dfrac{1}{2}$, autrement dit $|\langle u \mid v\rangle| = \dfrac{1}{2}$
Ce que nous voulions

Exercice 25 :

Nous allons présenter l'exercice de manière différente

1. *Soit E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. On définit l'application φ^* par :*
$$\begin{cases} \varphi^* : E & \longrightarrow & E \\ \quad v & \longmapsto & \varphi^*(v) \end{cases}$$
où φ^* est définie par : $(\forall u \in E)(\forall v \in E)(\langle \varphi(u) \mid v\rangle = \langle u \mid \varphi^*(v)\rangle)$
   (a) *Démontrons que φ^* est linéaire*
   - ▷ **Soient $v_1 \in E$ et $v_2 \in E$**
   Montrons que $\varphi^*(v_1 + v_2) = \varphi^*(v_1) + \varphi^*(v_2)$
   Pour tout $u \in E$, nous avons $\langle \varphi(u) \mid v_1 + v_2\rangle = \langle u \mid \varphi^*(v_1 + v_2)\rangle$
   Or,
$$\begin{aligned} \langle \varphi(u) \mid v_1 + v_2\rangle &= \langle \varphi(u) \mid v_1\rangle + \langle \varphi(u) \mid v_2\rangle \\ &= \langle u \mid \varphi^*(v_1)\rangle + \langle u \mid \varphi^*(v_2)\rangle \\ &= \langle u \mid \varphi^*(v_1) + \varphi^*(v_1)\rangle \end{aligned}$$
   C'est à dire que
$$\langle u \mid \varphi^*(v_1 + v_2)\rangle = \langle u \mid \varphi^*(v_1) + \varphi^*(v_1)\rangle \Longleftrightarrow \langle u \mid \varphi^*(v_1 + v_2) - \varphi^*(v_1) + \varphi^*(v_1)\rangle = 0$$
   D'après la proposition 16.1.10, nous déduisons $\varphi^*(v_1 + v_2) = \varphi^*(v_1) + \varphi^*(v_1)$
   - ▷ **Soient $v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$**
   Montrons que $\varphi^*(\lambda v) = \lambda\varphi^*(v)$
   Pour tout $u \in E$, nous avons $\langle \varphi(u) \mid \lambda v\rangle = \langle u \mid \varphi^*(\lambda v)\rangle$
   Or,
$$\begin{aligned} \langle \varphi(u) \mid \lambda v\rangle &= \lambda\langle \varphi(u) \mid v\rangle \\ &= \lambda\langle u \mid \varphi^*(v)\rangle \\ &= \langle u \mid \lambda\varphi^*(v)\rangle \end{aligned}$$

C'est à dire que $\langle \varphi(u) \mid \lambda v\rangle = \langle u \mid \varphi^*(\lambda v)\rangle = \langle u \mid \lambda\varphi^*(v)\rangle \iff \langle u \mid \varphi^*(\lambda v) - \lambda\varphi^*(v)\rangle = 0$
Toujours d'après la proposition 16.1.10, nous déduisons $\varphi^*(\lambda v) = \lambda\varphi^*(v)$

φ^* est donc linéaire et $\varphi^* \in \mathcal{L}(E)$

(b) *φ^* est unique*

Supposons qu'il existe une seconde fonction $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que, pour tout $u \in E$ et tout $v \in E$:

$$\langle \varphi(u) \mid v\rangle = \langle u \mid \varphi^*(v)\rangle = \langle u \mid f(v)\rangle$$

Alors, $\langle u \mid \varphi^*(v)\rangle = \langle u \mid f(v)\rangle$ et d'après 16.1.10, pour tout $v \in E$, $\varphi^*(v) = f(v)$, c'est à dire, qu'en terme de fonctions $\varphi^* = f$

φ^* est donc unique

(c) *Démontrer que* $\ker\varphi^* = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$

⋆ Soit $y \in \ker\varphi^*$; alors, $\varphi^*(y) = 0$, et, pour tout $x \in E$, nous avons :

$$\langle \varphi(x) \mid y\rangle = \langle x \mid \varphi^*(y)\rangle = 0$$

Donc, le vecteur y est orthogonal à $\varphi(x)$ pour tout $x \in E$, c'est à dire $y \in (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$

⋆ Réciproquement, soit $y \in (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$, alors, pour tout $x \in E$, $\langle \varphi(x) \mid y\rangle = 0$; comme, pour tout $x \in E$, $\langle \varphi(x) \mid y\rangle = 0 = \langle x \mid \varphi^*(y)\rangle$ donc, $\varphi^*(y) = \overrightarrow{0}$ et $y \in \ker\varphi^*$

D'où nous déduisons que $\ker\varphi^* = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$

Nous démontrerions de la même manière que $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi^*)^\perp$

2. *Cette fois -ci, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2 rapporté à une base orthonormée $\{i,j\}$ et soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E de matrice, dans la base $\{i,j\}$:*

$$\mathcal{M}_{\{i,j\}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit $\varphi^* \in \mathcal{L}(E)$ telle que : $(\forall u \in E)(\forall v \in E)(\langle \varphi(u) \mid v\rangle = \langle u \mid \varphi^*(v)\rangle)$
Déterminer la matrice de φ^* dans la base $\{i,j\}$

On appelle $\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ les coordonnées de u, $\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$ les coordonnées de v, et $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice de φ^* dans la base $\{i,j\}$

Les coordonnées de $\varphi(u)$ sont : $\begin{pmatrix} x_u - 3y_u \\ -2x_u + 2y_u \end{pmatrix}$ et les coordonnées de $\varphi^*(v)$ sont : $\begin{pmatrix} ax_v + by_v \\ cx_v + dy_v \end{pmatrix}$

Nous avons

$$\langle \varphi(u) \mid v\rangle = x_v(x_u - 3y_u) + y_v(-2x_u + 2y_u) = x_vx_u - 3y_ux_v - 2x_uy_v + 2y_uy_v$$

Et nous avons

$$\langle u \mid \varphi^*(v)\rangle = x_u(ax_v + by_v) + y_u(cx_v + dy_v) = ax_ux_v + bx_uy_v + cy_ux_v + dy_uy_v$$

En identifiant, nous avons $a = 1$, $b = -2$, $c = -3$ et $d = 2$, d'où $\mathcal{M}_{\{i,j\}}(\varphi^*) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

On peut remarquer que $\mathcal{M}_{\{i,j\}}(\varphi^*)$ est la matrice transposée de $\mathcal{M}_{\{i,j\}}(\varphi)$

Exercice 26 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2 rapporté à une base orthonormée $\{i,j\}$. On donne les vecteurs $u = 3i + j$ et $v = \sqrt{2}i + \alpha j$ où $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$

1. (a) *Comment faut-il choisir α pour qu'il existe une rotation vectorielle ρ telle que $\rho(u) = v$*

S'il existe une rotation ρ telle que $\rho(u) = v$, alors, en considérant les normes de ces vecteurs, nous avons :

$$\|u\| = \|\rho(u)\| = \|v\|$$

Or, $\|u\|^2 = 10$ et $\|v\|^2 = 2 + \alpha^2$, d'où $\alpha^2 = 8$ et $\alpha = 2\sqrt{2}$ ou $\alpha = -2\sqrt{2}$

(b) *Cet α étant choisi, donner la matrice de ρ dans la base $\{i, j\}$*

La matrice d'une telle rotation ρ est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$

- **Supposons que** $v = \sqrt{2}i + 2\sqrt{2}j$
  Ce qui veut dire que, matriciellement, nous avons :
$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} \sqrt{2} = & 3a - b \\ 2\sqrt{2} = & 3b + a \end{array} \right.$$
  D'où nous obtenons $a = b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et la matrice $\mathcal{M}_{\{i,j\}}(\rho) = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$
- **Supposons maintenant que** $v = \sqrt{2}i - 2\sqrt{2}j$
  Ce qui veut dire que, matriciellement, nous avons :
$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} \sqrt{2} = & 3a - b \\ -2\sqrt{2} = & 3b + a \end{array} \right.$$
  D'où nous obtenons $a = \dfrac{\sqrt{2}}{10}$, $b = \dfrac{-7\sqrt{2}}{10}$ et la matrice $\mathcal{M}_{\{i,j\}}(\rho) = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{10} & -\dfrac{7\sqrt{2}}{10} \\ \dfrac{-7\sqrt{2}}{10} & \dfrac{\sqrt{2}}{10} \end{pmatrix}$

2. *On considère le vecteur $w = -i + 3j$. Montrez qu'il existe une symétrie orthogonale S et une seule, telle que $w = S \circ \rho(u)$ Donner la matrice de S dans la base $\{i, j\}$*

S'il existe une symétrie orthogonale S telle que $w = S \circ \rho(u)$, en composant à gauche par S, nous avons
$$S(w) = S \circ S \circ \rho(u) \Longleftrightarrow S(w) = \rho(u) = v$$
Comme $\|w\| = \|v\| = 10$, il existe bien une et une seule symétrie orthogonale S telle que $S(w) = v$.

S a une matrice dans la base $\{i, j\}$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$. Nous devons donc trouver a et b.

Nous avons, par calcul matriciel, $S(w) = \begin{pmatrix} -a + 3b \\ -b - 3a \end{pmatrix}$

- **Cas où** $v = \sqrt{2}i + 2\sqrt{2}j$
  Nous avons donc à résoudre le système d'équations :
$$\left\{ \begin{array}{rl} -a + 3b = & \sqrt{2} \\ -3a - b & 2\sqrt{2} \end{array} \right.$$
  D'où on tire $a = \dfrac{-7\sqrt{2}}{10}$ et $b = \dfrac{\sqrt{2}}{10}$ d'où la matrice de S est donnée par :
$$\mathcal{M}_{\{i,j\}}(S) = \begin{pmatrix} \dfrac{-7\sqrt{2}}{10} & \dfrac{\sqrt{2}}{10} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{10} & \dfrac{7\sqrt{2}}{10} \end{pmatrix}$$
- **Cas où** $v = \sqrt{2}i - 2\sqrt{2}j$
  Nous avons donc à résoudre le système d'équations :
$$\left\{ \begin{array}{rl} -a + 3b = & \sqrt{2} \\ -3a - b & -2\sqrt{2} \end{array} \right.$$
  D'où on tire $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d'où la matrice de S est donnée par :
$$\mathcal{M}_{\{i,j\}}(S) = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 27 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2. u_1 et u_2 sont 2 vecteurs linéairement indépendants de E et de même norme. Soit $\mathcal{S}$ la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par $u_1 + u_2$. Il faut montrer que $\mathcal{S}(u_1) = u_2$

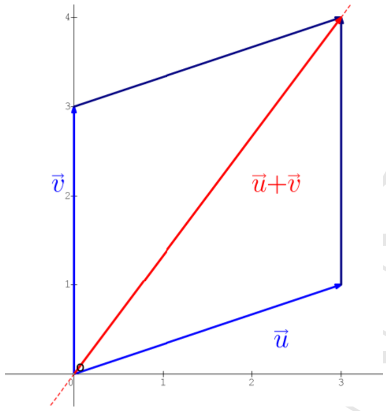


FIGURE 16.5 – Une petite figure, qu'est ce que ça aide !!

Premièrement, comme $\|u\| = \|v\|$, nous avons $(u+v) \perp (u-v)$. Pour le démontrer, il suffit d'utiliser le produit scalaire :

$$\langle u+v \mid u-v\rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0$$

Secondement, d'après ce que nous venons de voir, $S(u+v) = u+v$ et $S(u-v) = -(u-v) = v-u$. Il ne reste plus, maintenant qu'à calculer $S(u)$ et $S(v)$

- Nous avons $u = \dfrac{u+v}{2} + \dfrac{u-v}{2}$ et donc,

$$S(u) = S\left(\frac{u+v}{2}\right) + S\left(\frac{u-v}{2}\right) = \frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2} = v$$

- De même, nous avons $v = \dfrac{u+v}{2} - \dfrac{u-v}{2}$ et donc,

$$S(v) = S\left(\frac{u+v}{2}\right) - S\left(\frac{u-v}{2}\right) = \frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2} = u$$

Ce que nous voulions, donc....

Exercice 28 :

On considère E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2 rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B}_0 = \{i, j\}$ et ρ une rotation ayant pour matrice dans la base $\mathcal{B}_0$:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(\rho) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Etant donnée une droite D engendrée par le vecteur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, définissant la symétrie orthogonale par rapport à D, S_D, trouvez la symétrie orthogonale Σ telle que $\Sigma \circ S_D = \rho$

En composant à droite, nous avons : $\Sigma \circ S_D = \rho \iff \Sigma \circ S_D \circ S_D = \rho \circ S_D \iff \Sigma = \rho \circ S_D$, ce qui n'est en rien surprenant puisque nous savons que la composée d'une rotation avec une symétrie orthogonale donne une symétrie orthogonale.
Il faut donc trouver la matrice de cette symétrie orthogonale.

Dans un exercice précédent, nous avons démontré que la symétrie par rapport à la droite D de base $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est donnée par $\dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2-b^2 & 2ab \\ 2ab & b^2-a^2 \end{pmatrix}$

Ici, nous avons $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et donc, la matrice de S sera donc : $\mathcal{M}(S) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

D'où, la matrice de Σ sera donc :

$$\mathcal{M}(\Sigma) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(\rho) \times \mathcal{M}(S) = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{-\sqrt{2}}{2} & \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

L'axe de symétrie de Σ est la droite Δ d'équation $\left(1-\sqrt{2}\right)x + \sqrt{2}y = 0$

Exercice 29 :

On considère E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2 rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B}_0 = \{i, j\}$ On considère les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. u engendre la droite vectorielle D_u et v, la droite vectorielle D_v.

S_{D_u} est la symétrie orthogonale par rapport à D_u et S_{D_v} est la symétrie orthogonale par rapport à D_v. Quelles sont les matrices des rotations vectorielles $\rho_1 = S_{D_v} \circ S_{D_u}$ et $\rho_2 = S_{D_u} \circ S_{D_v}$ Quelle relation existe-t-il entre ρ_1 et ρ_2 ?

C'est le type d'exercice un peu répétitif. Inutile ? Pas tant puisqu'il aborde une notion non encore étudiée.

1. Que $S_{D_v} \circ S_{D_u}$ et $S_{D_u} \circ S_{D_v}$ soient des rotations, c'est du cours : la composée de 2 symétries orthogonales est une rotation
2. Comme S_{D_u} et S_{D_v} sont des involutions, ρ_1 et ρ_2 sont inverses l'un de l'autre : $(\rho_1)^{-1} = \rho_2$
3. Nous ne calculerons donc qu'une seule matrice de rotation, ρ_1, par exemple ! ! Et ρ_2 sera très facile à en déduire ! !
   (a) D'après les travaux précédents, nous avons :
   $$\mathcal{M}(S_{D_u}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{M}(S_{D_v}) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$
   (b) D'où, nous avons $\mathcal{M}(\rho_1)$
   $$\mathcal{M}(\rho_1) = \mathcal{M}(S_{D_v} \circ S_{D_u}) = \mathcal{M}(S_{D_v}) \times \mathcal{M}(S_{D_u}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$
   (c) Donc $\mathcal{M}(\rho_1) = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{M}(\rho_2) = \mathcal{M}\left(\rho_1^{-1}\right) = \left(\mathcal{M}(\rho_1)\right)^{-1} = \mathcal{M}(\rho_1)^T = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

Exercice 30 :

Soit E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2. On considère, dans E, trois vecteurs u, v et w tels que :

- *u et v sont linéairement indépendants*
- *$u + v + w = \overrightarrow{0}$*

On considère un endomorphisme L tel que :

$$\|L(u)\| = \|u\| \qquad \|L(v)\| = \|v\| \qquad \|L(w)\| = \|w\|$$

De l'identité $u + v + w = \overrightarrow{0}$, nous tirons $w = -(u+v)$, et donc, comme $\|L(w)\| = \|w\|$, nous avons $\|L(u+v)\| = \|u+v\|$, et de la linéarité de L, nous avons aussi $\|L(u) + L(v)\| = \|u+v\|$

1. *Démontrer que $\langle L(u) \mid L(v)\rangle = \langle u \mid v\rangle$*

   Nous allons utiliser la formule de polarisation 16.1.9
   Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\langle L(u) \mid L(v)\rangle &= \frac{\|L(u)+L(v)\|^2 - \|L(u)\|^2 - \|L(v)\|^2}{2}\\ &= \frac{\|L(u+v)\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2}{2}\\ &= \frac{\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2}{2}\\ &= \langle u \mid v\rangle\end{aligned}$$

2. *Démontrer que L est une transformation orthogonale de E*

   Il faut démontrer que, pour tout $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$, nous avons :

$$\left\langle L\left(\overrightarrow{X}\right) \mid L\left(\overrightarrow{Y}\right)\right\rangle = \left\langle \overrightarrow{X} \mid \overrightarrow{Y}\right\rangle$$

   u et v étant linéairement indépendants et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, la famille $\{u, v\}$ forme une base de E.
   Il existe donc a, b, c et d tels que $\overrightarrow{X} = au + bv$ et $\overrightarrow{X} = cu + dv$.
   L étant linéaire, $L\left(\overrightarrow{X}\right) = aL(u) + bL(v)$ et $L\left(\overrightarrow{Y}\right) = cL(u) + dL(v)$
   Alors :

$$\begin{aligned}\left\langle L\left(\overrightarrow{X}\right) \mid L\left(\overrightarrow{Y}\right)\right\rangle &= \langle aL(u) + bL(v) \mid cL(u) + dL(v)\rangle\\ &= ac\langle L(u) \mid L(u)\rangle + (ad+bc)\langle L(u) \mid L(v)\rangle + bd\langle L(v) \mid L(v)\rangle\\ &= ac\langle u \mid u\rangle + (ad+bc)\langle u \mid v\rangle + bd\langle v \mid v\rangle\\ &= \langle au \mid cu\rangle + \langle au \mid dv\rangle + \langle cu \mid bv\rangle + \langle bv \mid dv\rangle\\ &= \langle au \mid cu+dv\rangle + \langle bv \mid cu+dv\rangle\\ &= \langle au+bv \mid cu+dv\rangle = \left\langle \overrightarrow{X} \mid \overrightarrow{Y}\right\rangle\end{aligned}$$

   Ce que nous voulions. Ainsi, L est un endomorphisme orthogonal

Exercice 31 :

Soit E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2 rapporté à une base orthonormée $\{i, j\}$.

On considère la rotation vectorielle ρ qui a pour matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ Déterminer les matrices, dans la base $\{i, j\}$ des rotations vectorielles r telles que $r^2 = r \circ r = \rho$

Nous utilisons, dans cet exercice, la forme générique des matrices de rotation : $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$.
C'est ainsi que nous avons :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}$$

Soit $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ la matrice de r ; alors, la matrice de r^2 est $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta\end{pmatrix}$
Et donc, pour que $r^2 = \rho$, nous devons avoir $2\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, c'est à dire $\theta = \frac{\pi}{6} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
Nous obtenons ainsi, 2 rotations r_1 et r_2 telles que $r_1^2 = r_2^2 = \rho$; nous les définissons par leurs matrices :

$$\mathcal{M}(r_1) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{M}(r_2) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix} = -\mathcal{M}(r_1)$$

Exercice 32 :

Soit E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 2 rapporté à une base orthonormée $\{i, j\}$.
On considère les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et les droites D_u et D_v que ces vecteurs déterminent.
Quelles sont les matrices, dans la base orthonormée $\{i, j\}$ des transformations orthogonales L telles que $L(D_u) = D_v$
Rigoureusement, voici un exercice dont la résolution n'est pas difficile, mais très calculatoire et qui demande donc soin et attention !!

1. Il y a un souci, dans cet énoncé : c'est que ni u ni v ne sont normés. Il faut donc créer des vecteurs unitaires :
   - $\rightarrow$ Nous avons $\|u\| = \sqrt{5}$ et donc $u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}u$ est un vecteur de norme 1 qui engendre aussi la droite vectorielle D_u
   - $\rightarrow$ Nous avons $\|v\| = \sqrt{2}$ et donc $v_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}v$ est un vecteur de norme 1 qui engendre aussi la droite vectorielle D_v
2. Une transformation linéaire L telle que $L(u_1) = v_1$ sera aussi telle que $L(D_u) = D_v$. Il existe 2 transformations orthogonales L telles que $L(u_1) = v_1$: une rotation et une symétrie orthogonale.
3. Commençons par la rotation

   Soit $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ la matrice de la rotation. Nous avons :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{5}} - \dfrac{2b}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{b}{\sqrt{5}} + \dfrac{2a}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

   La résolution de ce système *(Par la méthode de Cramer, par exemple)* nous donne $a = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ et $b = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$. La matrice de L est donc :

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{10}} & \dfrac{-3}{\sqrt{10}} \\ \dfrac{3}{\sqrt{10}} & \dfrac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Continuons par la symétrie

   Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ la matrice de la symétrie L. Nous avons :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{5}} + \dfrac{2b}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{b}{\sqrt{5}} - \dfrac{2a}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

   La résolution de ce système *(Par la méthode de Cramer, par exemple)* nous donne $a = \dfrac{-3}{\sqrt{10}}$ et $b = \dfrac{-1}{\sqrt{10}}$. La matrice de L est donc :

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{-3}{\sqrt{10}} & \dfrac{-1}{\sqrt{10}} \\ \dfrac{-1}{\sqrt{10}} & \dfrac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

16.7.4 Groupe Orthogonal en dimension 3

Exercice 35 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$. Soit φ dont la matrice dans la base $\{i, j, k\}$ est :

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. *Démontrer que φ est une rotation vectorielle*

 (a) φ est un endomorphisme orthogonal

 Par simple calcul, nous montrons que $\langle \varphi(i) \mid \varphi(j) \rangle = \langle \varphi(i) \mid \varphi(k) \rangle = \langle \varphi(j) \mid \varphi(k) \rangle = 0$ et que $\|\varphi(i)\| = \|\varphi(j)\| = \|\varphi(k)\| = 1$

 Ainsi, φ transforme une base orthonormée en une base orthonormée ; φ est donc un endomorphisme orthogonal.

 (b) Recherchons l'ensemble des vecteurs invariants par φ

 Soit $u \in E$, un vecteur invariant par φ. Si $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de u, ces coordonnées doivent vérifier : $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Or :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rl} -x+2y+2z = & 3x \\ 2x-y+2z = & 3y \\ 2x+2y-z = & 3z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} -4x+2y+2z = & 0 \\ 2x-4y+2z = & 0 \\ 2x+2y-4z = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} -2x+y+2z = & 0 \\ x-2y+z = & 0 \\ x+y-2z = & 0 \end{array}\right.$$

 On considérant les lignes du dernier tableau, nous nous apercevons que $L_2 + L_3 = -L_1$ et donc, nous obtenons comme équation cartésienne :

$$\Delta : \left\{\begin{array}{rl} x-2y+z = & 0 \\ x+y-2z = & 0 \end{array}\right.$$

 qui est l'équation d'une droite. L'ensemble des vecteurs invariants est donc une droite, c'est l'axe de la rotation.

 (c) L'axe de la rotation est donc la droite Δ d'équation cartésienne :

$$\Delta : \left\{\begin{array}{rl} x-2y+z = & 0 \\ x+y-2z = & 0 \end{array}\right.$$

 et de vecteur directeur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Un vecteur normé de Δ est le vecteur k' de coordonnées $k' = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. *Déterminer une base orthonormée $\{i', j', k'\}$ de E telle que le vecteur k' soit invariant par φ.*

 Le plan $\Delta^{\perp}$ orthogonal à Δ a pour équation $x+y+z=0$; il faut, maintenant, trouver 2 vecteurs orthonormés de Δ

- ⋆ Un premier est facile à trouver : $i' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$
- ⋆ Le second, j', devra être orthogonal à i' et k'. Ses coordonnées x, y et z doivent donc vérifier :

$$\begin{cases} x+y+z = & 0 \\ x-z = & 0 \end{cases}$$

D'où nous tirons facilement les coordonnées de j' : $j' = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ Ainsi, la famille $\{i', j', k'\}$ forme-t-elle une base orthonormée de E telle que $\varphi(k') = k'$

3. *Quelle est la matrice de φ dans la base $\{i', j', k'\}$?*

Il y a plusieurs façons de résoudre cette question. Nous allons poser A la matrice de φ dans la base $\{i', j', k'\}$

(a) La première consiste à utiliser les matrices de changement de base

On appelle $\mathcal{M}_{\{i',j',k'\}\frown\{i,j,k\}}(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}})$ la matrice de passage de la base $\{i', j', k'\}$ dans la base $\{i, j, k\}$. Nous avons :

$$\mathcal{M}_{\{i',j',k'\}\frown\{i,j,k\}}(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}) = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2}\\ 0 & -2 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

Si, cette fois ci, nous appelons $\mathcal{M}_{\{i,j,k\}\frown\{i',j',k'\}}(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}})$ la matrice de passage de la base $\{i, j, k\}$ dans la base $\{i', j', k'\}$. Nous avons, $\mathcal{M}_{\{i,j,k\}\frown\{i',j',k'\}}(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}) = \left(\mathcal{M}_{\{i',j',k'\}\frown\{i,j,k\}}(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}})\right)^{-1}$. Par calcul, nous avons :

$$\mathcal{M}_{\{i,j,k\}\frown\{i',j',k'\}}(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}) = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3}\\ 1 & -2 & 1\\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

Nous avons $A = \mathcal{M}_{\{i',j',k'\}\frown\{i,j,k\}}(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}) \times M \times \mathcal{M}_{\{i,j,k\}\frown\{i',j',k'\}}(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}})$. Par calculs, nous trouvons :

$$A = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

(b) La seconde est plus basique

Il suffit de faire le calcul de $\varphi(i')$ et $\varphi(j')$. Par calculs, nous avons :

$$\varphi(i') = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = -i' \qquad \varphi(j') = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix} = -j'$$

D'où nous trouvons $A = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Exercice 36 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. Trouvez toutes les rotations vectorielles involutives de E

Soit R une rotation vectorielle involutive, c'est à dire telle que $R^2 = \mathrm{Id}_E$. Soit Δ l'axe de la rotation et $\Delta^\perp$ le plan orthogonal à Δ

Alors, la restriction ρ de R à $\Delta^\perp$ est elle aussi involutive.

1. ρ est-elle une symétrie par par rapport à une droite $D \subset \Delta^\perp$? C'est impossible, puisque, alors, le plan formé par les droites Δ et D est invariant par R, et R n'est plus une rotation.
2. ρ est donc $-\mathrm{Id}_{\Delta^\perp}$

Ainsi, R est donc la symétrie orthogonale par rapport à Δ

Les rotations vectorielles involutives de l'espace sont donc les symétries par rapport aux droites

Exercice 37 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 rapporté à une base orthonormée $\{i,j,k\}$. Soit σ dont la matrice dans la base $\{i,j,k\}$ est :

$$M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Démontrer que σ est une symétrie orthogonale par rapport à un plan $\overrightarrow{P}$*

   Pour montrer que σ est une symétrie orthogonale, il faut démontrer que la dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants est de dimension 2.

   Soit donc $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur invariant par σ ; nous avons alors $Mu = u$, ce qui se traduit en termes d'équations linéaires par :

$$\left\{\begin{array}{rl} 7x - 4y + 4z = & 9x \\ -4x + y + 8z = & 9y \\ 4x + 8y + z = & 9z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} -2x - 4y + 4z = & 0 \\ -4x - 8y + 8z = & 0 \\ 4x + 8y - 8z = & 0 \end{array}\right. \iff x + 2y - 2z = 0$$

   L'ensemble des vecteurs invariants est donc un plan P et σ est bien une symétrie orthogonale.

2. *Déterminer une base orthonormée $\{i', j', k'\}$ de E dans laquelle la matrice de σ soit :*

$$\mathcal{M}_{\{i',j',k'\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   - P étant un plan, $P^\perp$ est une droite ; tout vecteur de $P^\perp$ est transformé, par σ en son opposé. Un vecteur directeur de $P^\perp$ est donné par $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. D'où nous déduisons un vecteur normé k' de $P^\perp$: $k' = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$
   - Il est facile de calculer i' ; nous avons $i' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
   - Le calcul de j' répond à plusieurs contraintes :

     ▷ $j' \in P$ ▷ $\|j'\| = 1$ ▷ $\langle i' \mid j' \rangle = 0$

     C'est à dire que si $j = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, nous devons avoir $x + 2y - 2z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et $y + z = 0$, d'où on tire $y = -z$ et $x = 4z$, et donc $j' = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Ainsi, $\{i', j', k'\}$ est une base orthonormée et la matrice de σ, dans cette base est

$$\mathcal{M}_{\{i',j',k'\}}(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 38 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et D une droite vectorielle incluse dans E.
Démontrer que l'ensemble des rotations vectorielles φ de E telles que $\varphi(D) = D$ est un sous-groupe de $\mathrm{O}^+(E)$, groupe des rotations de E. Ce groupe est-il commutatif ?

On appelle $H(D) = \{\varphi \in \mathrm{O}^+(E) \text{ tel que } \varphi(D) = D\}$. Nous allons montrer que $(H(D), \circ)$ est un sous-groupe de $\mathrm{O}^+(E)$

1. Tout d'abord, $H(D) \neq \emptyset$ puisque $\mathrm{Id}_E \in H(D)$
2. Soit $\varphi \in H(D)$ et $\psi \in H(D)$, alors, clairement, $\varphi \circ \psi \in H(D)$
3. De même, si $\varphi \in H(D)$, alors $\varphi^{-1} \in H(D)$.

$(H(D), \circ)$ est un donc sous-groupe de $\mathrm{O}^+(E)$.
La restriction de φ à $D^\perp$ est une rotation plane, et les rotations planes commutent. Donc $(H(D), \circ)$ est un sous-groupe commutatif de $\mathrm{O}^+(E)$

Exercice 39 :

Soit E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 rapporté à une base orthonormée $\{i, j, k\}$.
On appelle <u>retournement</u> d'axe D une symétrie orthogonale par rapport à une droite D ; c'est en fait une rotation d'axe D et d'angle π

1. *Soit r un retournement d'axe D engendré par un vecteur u. Démontrer que, pour tout vecteur $v \in E$, $v' = r(v)$ est caractérisée par :*

   (a) $\langle v' - v \mid u \rangle = 0$

   (b) Les vecteurs $v' + v$ et u sont linéairement dépendants

   → On appelle Π, le plan orthogonal à D ; en fait $\Pi = \{u\}^\perp$. Π et D étant supplémentaires dans E, pour tout $v \in E$, nous pouvons écrire :

   $$v = \lambda u + v_1 \text{ avec } v_1 \in \Pi$$

   Alors $v' = r(v) = \lambda u - v_1$ et $\langle v' - v \mid u \rangle = \langle 2v_1 \mid u \rangle = 0$ et $v' + v = r(v) = \lambda u - v_1 + \lambda u + v_1 = 2\lambda u$. Ainsi es vecteurs $v' + v$ et u sont colinéaires

   → Réciproquement, supposons r endomorphisme orthogonal de E tel qu'il existe $u \in E$ tel que pour tout $v \in E$

   (a) $\langle v' - v \mid u \rangle = 0$

   (b) Les vecteurs $v' + v$ et u sont linéairement dépendants

   On appelle toujours $\Pi = \{u\}^\perp$; nous allons démontrer que, pour tout $x \in D$, $r(x) = x$ et tout $y \in \Pi$, $r(y) = -y$

   - ⋆ Nous avons $r(u) + u = \lambda u$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, c'est à dire $r(u) = (\lambda - 1)u$
   - ⋆ Ainsi $\langle (\lambda - 1)u - u \mid u \rangle = 0 \iff (\lambda - 2)\langle u \mid u \rangle = 0 \iff \lambda = 2$, d'où $r(u) = u$ et donc, comme tout $x \in D$, nous avons $x = \mu u$, nous en déduisons que, pour tout $x \in D$,$r(x) = \mu r(u) = \mu u = x$
   - ⋆ De même, pour $y \in \Pi$, nous avons $r(y) + y = \lambda u \iff r(y) = \lambda u - y$ et donc $\langle r(y) - y \mid u \rangle = \langle \lambda u - 2y \mid u \rangle = \lambda \langle u \mid u \rangle - 2\langle y \mid u \rangle$. Comme $\langle y \mid u \rangle = 0$, nous avons $pscalr(y) - yu = \lambda \langle u \mid u \rangle = 0$ et donc $\lambda = 0$; d'où $r(y) + y = 0 \iff r(y) = -y$

   Donc la proprité énoncée caractérise bien les retournements

2. *Soit r un retournement d'axe D engendré par le vecteur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donner les coordonnées de v' en fonction de celles de v*

   Nous appelons $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $r(v) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ les coordonnées de v et $r(v)$

→ De la propriéte $r(v)+v$ et u linéairement dépendants, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $r(v)+v=\lambda u$, c'est à dire :

$$\left\{\begin{array}{rl} x'+x= & \lambda \\ y'+y= & \lambda \\ z'+z= & \lambda \end{array}\right.$$

→ D'autre part de $\langle r(v)-v \mid u\rangle = 0$, nous tirons $x'-x+y'-y+z'-z=0$

→ Nous ontenons donc le système :

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x'+ & y'+ & z'= & x+y+z \\ x' & & = & -x+\lambda \\ & y' & = & -y+\lambda \\ & & z'= & -z+\lambda \end{array}\right.$$

De ce système, nous tirons :

$$\left\{\begin{array}{l} x'=\dfrac{-x+2y+2z}{3} \\ y'=\dfrac{2x-y+2z}{3} \\ z'=\dfrac{2x+2y-z}{3} \end{array}\right.$$

3. *Quelle est la matrice de r ?*

La matrice de r dans la base orthonormée $\{i,j,k\}$ est donc donnée par :

$$\mathcal{M}_{\{i,j,k\}}(r)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 40 :

Soit E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 rapporté à une base orthonormée $\{i,j,k\}$.
On considère le plan vectoriel P engendré par les vecteurs linéairement indépendants u et v. On appelle S_P la symétrie orthogonale par rapport à P
Montrer que, pour tout vecteur $x \in E$, l'image $x'=S_P(x)$ par la symétrie orthogonale S_P est caractérisée par :

1. *$\langle x'-x \mid u\rangle = 0$ et $\langle x'-x \mid v\rangle = 0$*
2. *Les vecteurs $x'+x$, u et v sont linéairement dépendants*

- On appelle $P^{\perp}$ l'orthogonal de P. Alors, tout $x \in E$ peut s'écrire : $x=\lambda u+\mu v+a$ où $a \in P^{\perp}$. Alors $S_P(x)=\lambda u+\mu v-a$.
  - ▷ Ainsi $S_P(x)-x=-2a$ comme $a \in P^{\perp}$, nous avons alors $\langle x'-x \mid u\rangle = 0$ et $\langle x'-x \mid v\rangle = 0$
  - ▷ D'autre part, $S_P(x)+x=-2(\lambda u+\mu v)$, et nous avons bien les vecteurs $x'+x$, u et v linéairement dépendants.
- Réciproquement, soit f un endomorphisme orthogonal de E, tel qu'il existe $u \in E$, $v \in E$ tels que pour tout $x \in E$ et $x'=f(x)$, nous avons :

  1. $\langle x'-x \mid u\rangle = 0$ et $\langle x'-x \mid v\rangle = 0$
  2. Les vecteurs $x'+x$, u et v sont linéairement dépendants

  Démontrons que f est une symétrie orthogonale par rapport au plan P engendré par u et v.
  Soit donc P le plan vectoriel engendré par les vecteurs linéairement indépendants u et v et $P^{\perp}$ l'orthogonal de P. Nous allons montrer que $f(u)=u$, $f(v)=v$ et pour tout $a \in P^{\perp}$, $f(a)=-a$
  - ⋆ Nous savons que $f(u)+u$,u et v sont linéairement dépendants et donc, nous pouvons écrire $f(u)+u=\lambda u+\mu v \iff f(u)=(\lambda-1)u+\mu v$
    Donc, reportant $f(u)$ dans $\langle x'-x \mid u\rangle$ et $\langle x'-x \mid v\rangle$, nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{lll} \langle f(u)-u \mid u\rangle = & \langle (\lambda-2)u+\mu v \mid u\rangle = & (\lambda-2)\langle u \mid u\rangle + \mu\langle v \mid u\rangle = 0 \\ \langle f(u)-u \mid v\rangle = & \langle (\lambda-2)u+\mu v \mid v\rangle = & (\lambda-2)\langle u \mid v\rangle + \mu\langle v \mid v\rangle = 0 \end{array}\right.$$

Nous obtenons donc le système d'inconnues λ et μ :

$$\left\{\begin{array}{rl}\langle u \mid u\rangle \lambda+\mu\langle v \mid u\rangle= & 2\langle u \mid u\rangle \\ \langle u \mid v\rangle \lambda+\mu\langle u \mid u\rangle= & 2\langle u \mid v\rangle\end{array}\right. \text{ d'où nous trouvons } \lambda=2 \text{ et } \mu=0$$

Et donc $f(u)=u$

- ⋆ De la même manière, on montre que $f(v)=v$
- ⋆ Soit $a \in P^{\perp}$. De $x'+x$, u et v linéairement dépendants, nous tirons $f(a)+a=\lambda u+\mu v \Longleftrightarrow f(a)=\lambda u+\mu v-a$

  Donc, reportant $f(a)$ dans la relation $\langle x'-x \mid u\rangle$ et $\langle x'-x \mid v\rangle$, nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{rll}\langle f(a)-a \mid u\rangle= & \langle\lambda u+\mu v-2 a \mid u\rangle= & \lambda\langle u \mid u\rangle+\mu\langle v \mid u\rangle-2\langle a \mid u\rangle \\ \langle f(a)-a \mid v\rangle= & \langle\lambda u+\mu v-2 a \mid v\rangle= & \lambda\langle u \mid v\rangle+\mu\langle v \mid v\rangle-2\langle a \mid v\rangle\end{array}\right.$$

  En tenant compte du fait que $\langle a \mid v\rangle=\langle a \mid u\rangle=0$, nous obtenons donc le système d'inconnues λ et μ :

$$\left\{\begin{array}{rl}\langle u \mid u\rangle \lambda+\mu\langle v \mid u\rangle= & 0 \\ \langle u \mid v\rangle \lambda+\mu\langle u \mid u\rangle= & 0\end{array}\right. \text{ d'où nous trouvons } \lambda=0 \text{ et } \mu=0$$

  Et donc $f(a)=-a$

f est donc une symétrie orthogonale par rapport au plan engendré par u et v.

16.7.5 Miscelleanous : exercices pour aller plus loin

Exercice 46 :

1. *E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3, rapporté à une base $\{u, v, w\}$. Construire, à partir de la base $\{u, v, w\}$ une base orthonormée $\{u_1, v_1, w_1\}$*
   - ▷ On choisit tout d'abord $u_1=\dfrac{u}{\|u\|}$ et donc $\|u_1\|=1$
   - ▷ En second lieu, nous posons $v'=v+\alpha u_1$. Nous devons avoir $\langle v' \mid u_1\rangle=0$. En développant, nous obtenons :

     $$\langle v' \mid u_1\rangle=\langle v+\alpha u_1 \mid u_1\rangle=\langle v \mid u_1\rangle+\langle\alpha u_1 \mid u_1\rangle=\langle v \mid u_1\rangle+\alpha\langle u_1 \mid u_1\rangle=\langle v \mid u_1\rangle+\alpha$$

     D'où $\alpha=-\langle v \mid u_1\rangle$

     Nous avons donc $v'=v-\langle v \mid u_1\rangle u_1$ et $v_1=\dfrac{v'}{\|v'\|}$, ce qui nous donne $\|v_1\|=1$
   - ▷ Soit maintenant $w'=w+\alpha v_1+\beta u_1$. Il faut donc trouver α et β avec comme hypothèses $\langle w' \mid v_1\rangle=0$ et $\langle w' \mid u_1\rangle=0$, sachant que $\|u_1\|=\|v_1\|=1$ et $\langle u_1 \mid v_1\rangle=0$
     - ⋆ Dans un premier temps, nous avons $\langle w' \mid v_1\rangle=\langle w \mid v_1\rangle+\alpha$; d'où $\alpha=-\langle w \mid v_1\rangle$
     - ⋆ Dans un second temps, nous avons $\langle w' \mid u_1\rangle=\langle w \mid u_1\rangle+\beta$; d'où $\beta=-\langle w \mid u_1\rangle$

     D'où $w'=w-\langle w \mid v_1\rangle v_1-\langle w \mid u_1\rangle u_1$, et on choisit pour $w_1=\dfrac{w'}{\|w'\|}$
2. *$\mathbb{R}_2[X]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2*
   (a) *On construit, dans $\mathbb{R}_2[X]$, l'application Φ définie par :*

   $$\left\{\begin{array}{rcl}\Phi: \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto & \Phi[(P, Q)]=\displaystyle\int_{-1}^{+1} P(t) Q(t)\, dt\end{array}\right.$$

   Montrer que Φ est un produit scalaire
   - ▷ Clairement, en utilisant le calcul et la commutativité de la multiplication, Φ est bilinéaire et symétrique
   - ▷ Montrons que Φ est positive

     Nous avons $\Phi[(P, P)]=\displaystyle\int_{-1}^{+1}(P(t))^2\, dt$; comme $(P(t))^2$ est une fonction positive et continue[4] sur l'intervalle $[-1 ;+1]$, nous avons $\displaystyle\int_{-1}^{+1}(P(t))^2\, dt \geqslant 0$, c'est à dire $\Phi[(P, P)] \geqslant 0$

4. Et réciproquement !!

▷ Montrons qu'elle est définie

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\Phi[(P,P)] = 0$; ceci signifie que $\displaystyle\int_{-1}^{+1} (P(t))^2\, dt = 0$

$(P(t))^2$ étant une fonction continue et positive sur l'intervalle $[-1;+1]$, alors pour tout $t \in [-1;+1]$, nous avons $(P(t))^2 = 0$, ce qui veut dire que P est le polynôme nul $\mathcal{O}$

Φ est donc un produit scalaire

(b) *On considère la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par $\{P_0, P_1, P_2\}$ où :*

$$P_0(t) = 1 \qquad P_1(t) = t \qquad P_2(t) = t^2$$

Construire, à partir de la base $\{P_0, P_1, P_2\}$ une base orthonormée $\{P'_0, P'_1, P'_2\}$ relativement au produit scalaire défini par Φ

▷ Φ étant un produit scalaire, la norme $\mathcal{N}$ associée à Φ est donnée par $\mathcal{N}^2(P) = \Phi[(P,P)]$.

Ainsi, $\mathcal{N}^2(P_0) = \Phi[(P_0,P_0)] = \displaystyle\int_{-1}^{+1} (P_0(t))^2\, dt = \int_{-1}^{+1} dt = 2$

Ainsi, $P'_0(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

▷ En réutilisant la question précédente, nous allons créer $P_1^1(t)$, puis, chercher la norme de P_1^1 pour trouver P'_1

- Nous avons donc : $P_1^1 = P_1 - \Phi[(P_1, P'_0)]\, P'_0$
- $\Phi[(P_1, P'_0)] = \displaystyle\int_{-1}^{+1} P_1(t)\, P'_0(t)\, dt = \int_{-1}^{+1} t \times \frac{1}{\sqrt{2}}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{+1} t\, dt = 0$ et donc $P_1^1 = P_1$
- Nous avons $\mathcal{N}^2\left(P_1^1\right) = \mathcal{N}^2(P_1) = \Phi[(P_1,P_1)] = \displaystyle\int_{-1}^{+1} t^2\, dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{+1} = \frac{2}{3}$, d'où $\mathcal{N}\left(P_1^1\right) = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ et donc $P'_1(t) = t\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

▷ Nous continuons par créer P_2^1, à partir de l'exercice précédent :

$$P_2^1 = P_2 - \Phi[(P_2, P'_1)]\, P'_1 - \Phi[(P_2, P'_0)]\, P'_0$$

- $\Phi[(P_2, P'_1)] = \displaystyle\int_{-1}^{+1} P_2(t)\, P'_1(t)\, dt = \int_{-1}^{+1} t^2 \times t\sqrt{\frac{3}{2}}\, dt = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{+1} t^3\, dt = \left[\frac{t^4}{4}\right]_{-1}^{+1} = 0$
- $\Phi[(P_2, P'_0)] = \displaystyle\int_{-1}^{+1} P_2(t)\, P'_0(t)\, dt = \int_{-1}^{+1} t^2 \times \frac{1}{\sqrt{2}}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{+1} t^2\, dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{+1} = \frac{\sqrt{2}}{3}$
- D'où

$$P_2^1(t) = P_2(t) - \Phi[(P_2, P'_0)]\, P'_0(t) = t^2 - \frac{\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = t^2 - \frac{1}{3}$$

Il faut, maintenant, calculer $\mathcal{N}^2\left(P_2^1\right)$

$$\mathcal{N}^2\left(P_2^1\right) = \Phi\left[\left(P_2^1, P_2^1\right)\right] = \int_{-1}^{+1} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dt = \left[\frac{t^5}{5} + \frac{t}{9} - \frac{2}{9}t^3\right]_{-1}^{+1} = \frac{8}{45}$$

D'où $\mathcal{N}\left(P_2^1\right) = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{5}}$ et donc $P'_2(t) = \dfrac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(t^2 - \dfrac{1}{3}\right)$

Avec $P'_0(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $P'_1(t) = t\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ et $P'_2(t) = \dfrac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(t^2 - \dfrac{1}{3}\right)$, nous avons construit, à partir de la base $\{P_0, P_1, P_2\}$, une base orthonormée $\{P'_0, P'_1, P'_2\}$ relativement au produit scalaire défini par Φ

L'OBJET DES EXERCICES QUI SUIVENT, EST DE TRAVAILLER DE MANIÈRE ÉLÉMENTAIRE LA NOTION D'ENDOMORPHISME ADJOINT

Exercice 47 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E vérifiant :

$$(\forall (x, y) \in E \times E) \left(\langle x \mid u(y) \rangle = \langle u(x) \mid y \rangle \right)$$

On suppose, de plus, que pour tout $x \neq \overrightarrow{0}$, $\langle x \mid u(x) \rangle > 0$

1. *On considère l'application Φ définie par :*

$$\begin{cases} \Phi : E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad (x, y) & \longmapsto & \Phi(x, y) = \langle x \mid u(y) \rangle \end{cases}$$

Démontrer que Φ est un produit scalaire sur E

Il nous faut donc montrer que Φ est bilinéaire, symétrique et définie positive

(a) Montrons que Φ est bilinéaire

▷ Soient $x_1 \in E$, $x_2 \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$, alors :

$$\Phi(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \langle \lambda x_1 + \mu x_2 \mid u(y) \rangle$$

En utilisant la bilinéarité du produit scalaire, nous avons bien :

$$\Phi(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda \Phi(x_1, y) + \mu \Phi(x_2, y)$$

▷ D'autre part, soient $y_1 \in E$, $y_2 \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$, alors :

$$\Phi(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \langle x \mid u(\lambda y_1 + \mu y_2) \rangle$$

En utilisant d'abord la linéarité de u, puis la bilinéarité de Φ, nous obtenons :

$$\Phi(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda \Phi(x, y_1) + \mu \Phi(x, y_2)$$

Φ est donc une application bilinéaire

(b) Montrons que Φ est symétrique

Nous avons :

$$\Phi(x, y) = \langle x \mid u(y) \rangle = \langle u(x) \mid y \rangle = \langle y \mid u(x) \rangle = \Phi(y, x)$$

(c) Φ est positive

Effectivement, puisque, par hypothèse, pour tout $x \in E$, si $x \neq \overrightarrow{0}$ alors

$$\langle x \mid u(x) \rangle = \Phi(x, x) > 0$$

(d) Φ est définie

Soit $x \in E$ tel que $\Phi(x, x) = 0$, c'est à dire tel que $\langle x \mid u(x) \rangle = 0$.

De l'implication $\left(x \neq \overrightarrow{0} \right) \Longrightarrow \left(\langle x \mid u(x) \rangle > 0 \right)$, par contraposée, nous avons

$$\left(\langle x \mid u(x) \rangle = 0 \right) \Longrightarrow \left(x = \overrightarrow{0} \right)$$

Ce que nous voulions

Φ est donc un produit scalaire

2. *Etablir l'inégalité vraie pour tout $x \in E$:*

$$\|u(x)\|^4 \leqslant \langle u(x) \mid x \rangle \left\langle u^2(x) \mid u(x) \right\rangle$$

- ⋆ Φ est un produit scalaire auquel on peut appliquer le lemme de Schwarz 16.1.3. Donc, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, nous avons :

$$|\Phi(x,y)| \leqslant \sqrt{\Phi(x,x)} \times \sqrt{\Phi(y,y)}$$

Ou, en élevant au carré :

$$(\Phi(x,y))^2 \leqslant \Phi(x,x) \times \Phi(y,y)$$

- ⋆ En particulier, pour tout $x \in E$, nous avons :

$$(\Phi(x,u(x)))^2 \leqslant \Phi(x,x) \times \Phi(u(x),u(x))$$

- ⋆ Nous avons, par définition :
  → $\Phi(x,x) = \langle x \mid u(x)\rangle$
  → $\Phi(u(x),u(x)) = \langle u(x) \mid u[u(x)]\rangle = \langle u(x) \mid u^2(x)\rangle$
  → $\Phi(x,u(x)) = \langle x \mid u^2(x)\rangle$
- ⋆ Or, par définition de u, nous avons, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$:

$$\langle x \mid u(y)\rangle = \langle u(x) \mid y\rangle$$

Et donc :

$$\langle x \mid u^2(x)\rangle = \langle u(x) \mid u(x)\rangle = \|u(x)\|^2$$

- ⋆ C'est ainsi qu'en remplaçant dans $(\Phi(x,u(x)))^2 \leqslant \Phi(x,x) \times \Phi(u(x),u(x))$, nous obtenons :

$$\|u(x)\|^4 \leqslant \langle x \mid u(x)\rangle \times \langle u(x) \mid u^2(x)\rangle$$

Ce que nous voulions

Exercice 48 :

1. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3, rapporté à une base orthonormée $\{i,j,k\}$*
   Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E dont la matrice dans la base orthonormée $\{i,j,k\}$ est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Démontrer que l'endomorphisme φ^* dont la matrice dans la base $\{i,j,k\}$ est A^T, la transposée de A est tel que :

$$(\forall u \in E)(\forall v \in E)(\langle \varphi(u) \mid v\rangle = \langle u \mid \varphi^*(v)\rangle)$$

Remarquons, tout d'abord, que φ n'est pas un endomorphisme orthogonal puisque ne transformant pas la base orthonormée $\{i,j,k\}$ en une autre base orthonormée.
La matrice de φ^* est donc donnée par :

$$\mathcal{M}_{\{i,j,k\}}(\varphi^*) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soient $u = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$ 2 vecteurs de E.

Alors, par calcul matriciel, nous avons $\varphi(u) = \begin{pmatrix} -x_u + 2y_u - 2z_u \\ 2x_u - 3y_u + z_u \\ y_u \end{pmatrix}$ et donc, nous avons :

$$\langle \varphi(u) \mid v\rangle = x_v(-x_u + 2y_u - 2z_u) + y_v(2x_u - 3y_u + z_u) + z_v y_u$$

De même, par calcul matriciel, nous avons $\varphi^*(v) = \begin{pmatrix} -x_v + 2y_v \\ 2x_v - 3y_v + z_v \\ -2x_v + y_v \end{pmatrix}$ et donc, nous avons :

$$\langle u \mid \varphi^*(v) \rangle = x_u(-x_v + 2y_v) + y_u(2x_v - 3y_v + z_v) + z_u(-2x_v + y_v)$$

En développant, nous avons bien $\langle \varphi(u) \mid v \rangle = \langle u \mid \varphi^*(v) \rangle$

Démontrer que φ^* est le seul endomorphisme de E vérifiant cette propriété.

Soit $\varphi_1 \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E tel que, pour tout $u \in E$ et tout $v \in E$, nous ayions $\langle \varphi(u) \mid v \rangle = \langle u \mid \varphi_1(v) \rangle$.

Alors, pour tout $u \in E$ et tout $v \in E$, nous avons :

$$\langle \varphi(u) \mid v \rangle = \langle u \mid \varphi^*(v) \rangle = \langle u \mid \varphi_1(v) \rangle$$

Alors, pour tout $u \in E$ et tout $v \in E$, nous avons $\langle u \mid \varphi^*(v) - \varphi_1(v) \rangle = 0$; ce qui veut dire que, d'après la proposition 16.1.10, pour tout $v \in E$, $\varphi^*(v) - \varphi_1(v) = \overrightarrow{0}$, et donc, que pour tout $v \in E$, nous avons $\varphi^*(v) = \varphi_1(v)$ et donc $\varphi^* = \varphi_1$

Ainsi, φ^* est le seul endomorphisme de E vérifiant pour tout $u \in E$ et tout $v \in E$ $\langle \varphi(u) \mid v \rangle = \langle u \mid \varphi^*(v) \rangle$

2. *En généralisant, nous prenons E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.*

   (a) *Montrer que l'on peut définir un endomorphisme $\widetilde{u}$ de E en posant, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$: $\langle x \mid u(y) \rangle = \langle \widetilde{u}(x) \mid y \rangle$*

   Soit $\widetilde{u} : E \longrightarrow E$ une application telle que, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, nous ayions : $\langle x \mid u(y) \rangle = \langle \widetilde{u}(x) \mid y \rangle$.

   Il faut montrer que $\widetilde{u}$ est linéaire.

   i. <u>Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et étudions $\widetilde{u}(\lambda x)$</u>

   Pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$

   $$\langle \widetilde{u}(\lambda x) \mid y \rangle = \langle \lambda x \mid u(y) \rangle = \lambda \langle x \mid u(y) \rangle = \lambda \langle \widetilde{u}(x) \mid y \rangle$$

   Nous avons donc, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$:

   $$\langle \widetilde{u}(\lambda x) \mid y \rangle = \lambda \langle \widetilde{u}(x) \mid y \rangle \Longleftrightarrow \langle \widetilde{u}(\lambda x) - \lambda \widetilde{u}(x) \mid y \rangle = 0$$

   Donc, d'après 16.1.10, pour tout $x \in E$, $\widetilde{u}(\lambda x) - \lambda \widetilde{u}(x) = \overrightarrow{0}$, c'est à dire $\widetilde{u}(\lambda x) = \lambda \widetilde{u}(x)$

   ii. <u>Soient $x_1 \in E$ et $x_2 \in E$; étudions $\widetilde{u}(x_1 + x_2)$</u>

   Pour tout $y \in E$, nous avons :

   $$\begin{aligned} \langle \widetilde{u}(x_1 + x_2) \mid y \rangle &= \langle x_1 + x_2 \mid u(y) \rangle \\ &= \langle x_1 \mid u(y) \rangle + \langle x_2 \mid u(y) \rangle \\ &= \langle \widetilde{u}(x_1) \mid y \rangle + \langle \widetilde{u}(x_2) \mid y \rangle \\ &= \langle \widetilde{u}(x_1) + \widetilde{u}(x_2) \mid y \rangle \end{aligned}$$

   De $\langle \widetilde{u}(x_1 + x_2) \mid y \rangle = \langle \widetilde{u}(x_1) + \widetilde{u}(x_2) \mid y \rangle$, nous tirons, d'après 16.1.10 que

   $$\widetilde{u}(x_1 + x_2) = \widetilde{u}(x_1) + \widetilde{u}(x_2)$$

   Ce qui termine de montrer que $\widetilde{u}$ est linéaire, c'est à dire que $\widetilde{u} \in \mathcal{L}(E)$

   (b) *Etablir que les propriétés suivantes sont équivalentes :*

   i. $u \circ \widetilde{u} = \widetilde{u} \circ u$

   ii. Pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, $\langle u(x) \mid u(y) \rangle = \langle \widetilde{u}(x) \mid \widetilde{u}(y) \rangle$

   iii. Pour tout $x \in E$, nous avons $\|u(x)\| = \|\widetilde{u}(x)\|$

i. Supposons que $u \circ \widetilde{u} = \widetilde{u} \circ u$ et démontrons que, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$,

$$\langle u(x) \mid u(y) \rangle = \langle \widetilde{u}(x) \mid \widetilde{u}(y) \rangle$$

Rappelons que, tout $x \in E$ et tout $y \in E$, $\langle x \mid u(y) \rangle = \langle \widetilde{u}(x) \mid y \rangle$
→ Donc, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, $\langle x \mid u[\widetilde{u}(y)] \rangle = \langle \widetilde{u}(x) \mid \widetilde{u}(y) \rangle$
→ Comme, par hypothèse, nous avons $u \circ \widetilde{u} = \widetilde{u} \circ u$, nous avons donc

$$\langle x \mid u[\widetilde{u}(y)] \rangle = \langle x \mid \widetilde{u}[u(y)] \rangle$$

Or, $\langle \widetilde{u}[u(y)] \mid x \rangle = \langle u(y) \mid u(x) \rangle$
Nous avons donc $\langle x \mid u[\widetilde{u}(y)] \rangle = \langle \widetilde{u}(x) \mid \widetilde{u}(y) \rangle = \langle u(y) \mid u(x) \rangle$
Ce que nous voulions

ii. Supposons que, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, $\langle u(x) \mid u(y) \rangle = \langle \widetilde{u}(x) \mid \widetilde{u}(y) \rangle$ et démontrons que, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|\widetilde{u}(x)\|$
En faisant, dans l'égalité $x = y$, nous avons :

$$\langle u(x) \mid u(x) \rangle = \langle \widetilde{u}(x) \mid \widetilde{u}(x) \rangle \iff \|u(x)\|^2 = \|\widetilde{u}(x)\|^2 \iff \|u(x)\| = \|\widetilde{u}(x)\|$$

iii. Supposons que pour tout $x \in E$, nous ayions $\|u(x)\| = \|\widetilde{u}(x)\|$ et démontrons que

$$u \circ \widetilde{u} = \widetilde{u} \circ u$$

Nous avons $\|u(x)\| = \|\widetilde{u}(x)\| \iff \langle u(x) \mid u(x) \rangle = \langle \widetilde{u}(x) \mid \widetilde{u}(x) \rangle$ Or :
→ Pour tout $x \in E$, $\langle u(x) \mid u(x) \rangle = \langle x \mid \widetilde{u}[u(x)] \rangle$
→ Et, toujours, pour tout $x \in E$, $\langle \widetilde{u}(x) \mid \widetilde{u}(x) \rangle = \langle x \mid u[\widetilde{u}(x)] \rangle$
Donc, pour tout $x \in E$,

$$\langle x \mid \widetilde{u}[u(x)] \rangle = \langle x \mid u[\widetilde{u}(x)] \rangle \iff \langle x \mid u[\widetilde{u}(x)] - \widetilde{u}[u(x)] \rangle = 0$$

Ce qui montre que, d'après 16.1.10, que, pour tout $x \in E$, $u[\widetilde{u}(x)] = \widetilde{u}[u(x)]$, c'est à dire $u \circ \widetilde{u} = \widetilde{u} \circ u$

(c) *Démontrer que pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ et $v \in \mathcal{L}(E)$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:*

$$\widetilde{u+v} = \widetilde{u} + \widetilde{v} \qquad \widetilde{\lambda u} = \lambda \widetilde{u} \qquad \widetilde{u \circ v} = \widetilde{v} \circ \widetilde{u}$$

Nous allons utiliser, une fois de plus, et larga manu, les résultats de la proposition 16.1.10

i. Démontrons que $\widetilde{u+v} = \widetilde{u} + \widetilde{v}$
Pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, nous avons :

$$\begin{aligned} \langle x \mid (u+v)(y) \rangle = & \ \langle x \mid u(y) + v(y) \rangle \\ = & \ \langle x \mid u(y) \rangle + \langle x \mid v(y) \rangle \\ = & \ \langle \widetilde{u}(x) \mid y \rangle + \langle \widetilde{v}(x) \mid y \rangle \\ = & \ \langle \widetilde{u}(x) + \widetilde{v}(x) \mid y \rangle \end{aligned}$$

Mais nous avons aussi : $\langle x \mid (u+v)(y) \rangle = \left\langle \widetilde{(u+v)}(x) \mid y \right\rangle$.

Ainsi, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, nous avons : $\left\langle \widetilde{(u+v)}(x) \mid y \right\rangle = \langle \widetilde{u}(x) + \widetilde{v}(x) \mid y \rangle$, et donc, d'après 16.1.10, pour tout $x \in E$, nous avons $\widetilde{(u+v)}(x) = \widetilde{u}(x) + \widetilde{v}(x)$, c'est à dire $\widetilde{u+v} = \widetilde{u} + \widetilde{v}$

ii. Démontrons que $\widetilde{\lambda u} = \lambda \widetilde{u}$
Pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, nous avons :

$$\begin{aligned} \langle x \mid (\lambda u)(y) \rangle = & \ \langle x \mid \lambda u(y) \rangle \\ = & \ \lambda \langle x \mid u(y) \rangle \\ = & \ \lambda \langle \widetilde{u}(x) \mid y \rangle \\ = & \ \langle \lambda \widetilde{u}(x) \mid y \rangle \end{aligned}$$

Mais nous avons aussi : $\langle x \mid (\lambda u)(y)\rangle = \left\langle \widetilde{(\lambda u)}(x) \mid y \right\rangle$.

Ainsi, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, nous avons : $\langle \lambda \widetilde{u}(x) \mid y\rangle = \left\langle \widetilde{(\lambda u)}(x) \mid y \right\rangle$, et donc, d'après 16.1.10, pour tout $x \in E$, nous avons $\widetilde{(\lambda u)}(x) = \lambda \widetilde{u}(x)$, c'est à dire $\widetilde{\lambda u} = \lambda \widetilde{u}$

iii. Démontrons que $\widetilde{u \circ v} = \widetilde{v} \circ \widetilde{u}$

Pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, nous avons :

$$\begin{aligned}\langle x \mid u \circ v(y)\rangle &= \langle x \mid u[v(y)]\rangle \\ &= \langle \widetilde{u}(x) \mid v(y)\rangle \\ &= \langle \widetilde{v}[\widetilde{u}(x)] \mid y\rangle \\ &= \langle \widetilde{v} \circ \widetilde{u}(x) \mid y\rangle\end{aligned}$$

Mais nous avons aussi : $\langle x \mid u \circ v(y)\rangle = \left\langle \widetilde{(u \circ v)}(x) \mid y \right\rangle$.

Ainsi, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, nous avons :

$$\langle x \mid u \circ v(y)\rangle = \left\langle \widetilde{(u \circ v)}(x) \mid y \right\rangle = \langle \widetilde{v} \circ \widetilde{u}(x) \mid y\rangle$$

Et donc, d'après 16.1.10, pour tout $x \in E$, nous avons $\widetilde{(u \circ v)}(x) = \widetilde{v} \circ \widetilde{u}(x)$, c'est à dire $\widetilde{u \circ v} = \widetilde{v} \circ \widetilde{u}$

(d) *Soit φ un automorphisme de E (C'est à dire $\varphi \in \mathrm{GL}(E)$). Démontrer l'équivalence :*

$$\varphi^{-1} = \widetilde{\varphi} \Longleftrightarrow \varphi \text{ est un endomorphisme orthogonal}$$

i. Soit φ un endomorphisme orthogonal

Alors, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, nous avons $\langle x \mid y\rangle = \langle \varphi(x) \mid \varphi(y)\rangle$. Or, $\langle \varphi(x) \mid \varphi(y)\rangle = \langle x \mid \widetilde{\varphi}[\varphi(y)]\rangle$

Donc, $\langle x \mid y\rangle = \langle x \mid \widetilde{\varphi}[\varphi(y)]\rangle$ et donc, d'après 16.1.10, pour tout $y \in E$, nous avons $y = \widetilde{\varphi} \circ \varphi(y)$, c'est à dire $\widetilde{\varphi} = \varphi^{-1}$

ii. Réciproquement, supposons $\widetilde{\varphi} = \varphi^{-1}$

Alors, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, $\langle \varphi(x) \mid \varphi(y)\rangle = \langle x \mid \widetilde{\varphi}[\varphi(y)]\rangle = \langle x \mid y\rangle$

Ce qui veut dire que φ conserve le produit scalaire ; c'est donc un endomorphisme orthogonal.

(e) *Soit A la matrice de u dans une base orthonormée $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E. Comparer la matrice A et la matrice $\widetilde{A}$ de $\widetilde{u}$ dans cette même base*

Soit A la matrice de u dans une base orthonormée $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E et $\widetilde{A}$ la matrice de $\widetilde{u}$ dans cette même base.

Nous posons $A = \left((a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \right)$ et $\widetilde{A} = \left((\widetilde{a}_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \right)$

Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ 2 vecteurs de E et nous notons $AX = \begin{pmatrix} (AX)_1 \\ (AX)_2 \\ \vdots \\ (AX)_n \end{pmatrix}$ et $AY = \begin{pmatrix} (AY)_1 \\ (AY)_2 \\ \vdots \\ (AY)_n \end{pmatrix}$

Nous avons $(AX)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$ et $\langle Y \mid AX\rangle = \sum_{i=1}^{n} y_i (AX)_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_i x_j \right)$

De même, $\left(\widetilde{A}Y\right)_i = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{i,j} y_j$ et $\left\langle X \mid \widetilde{A}Y \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\widetilde{A}Y\right)_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{i,j} y_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{i,j} x_i y_j \right)$

C'est à dire que nous avons $\widetilde{a}_{i,j} = a_{j,i}$, c'est à dire $\widetilde{A} = A^T$ où A^T est la transposée de A

(f) *En déduire que si A est la matrice de $u \in \mathrm{O}(E)$, endomorphisme orthogonal, dans une base orthonormée $\{e_1, \dots, e(_n\}$ de E, alors $A^{-1} = A^T$*

Nous avons démontré, au niveau des endomorphismes que :

$$\varphi^{-1} = \widetilde{\varphi} \Longleftrightarrow \varphi \text{ est un endomorphisme orthogonal}$$

Et au niveau des matrices, nous avons donc :

$$A^{-1} = \widetilde{A} = A^T \Longleftrightarrow A \text{ est la matrice d'un endomorphisme orthogonal}$$

(g) *En déduire que si A est la matrice de $u \in \mathrm{O}(E)$, endomorphisme orthogonal involutif, dans une base orthonormée $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E, alors $A = A^T$*

Si A est la matrice d'un endomorphisme orthogonal involutif, alors $A = A^{-1} = A^T$. Ce que nous voulions.

Chapitre 17

Espaces affines, calcul barycentrique

L'OBJET DE CE CHAPITRE EST DE FAIRE DE LA GÉOMÉTRIE, PLANE OU DANS L'ESPACE. IL Y A DE NOUVELLES NOTIONS À ASSIMILER : PARRALLÉLISME, BARYCENTRE. C'EST L'OBJET DE CE CHAPITRE. LA GÉOMÉTRIE ESY L'OCCASION DE RÉFLÉCHIR, DE FAIRE DES MATHÉMATIQUES

17.1 Premières définitions

17.1.1 Introduction

On appelle espace affine un ensemble $\mathcal{E}$ dont les éléments sont appelés points
Dans cet ensemble, on y met une structure qui est celle de la géométrie habituelle, à savoir :

1. Pour tout $A \in \mathcal{E}$, pour tout $B \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{AB}$ désigne un vecteur

   Ce qui veut dire que l'on associe à $\mathcal{E}$, et étroitement, un espace vectoriel que l'on notera E

   E est l'espace vectoriel associé à $\mathcal{E}$ ou direction de $\mathcal{E}$

   Pour tout vecteur $u \in E$, il y a plusieurs couples de points ou bipoints $(A, B) \in \mathcal{E}$ ou $(C, D) \in \mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = u$

2. Pour tout $u \in E$ et pour tout $M \in \mathcal{E}$, il existe un seul point $O \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{OM} = u$

   Ce qui veut dire que si on se donne une origine $O \in \mathcal{E}$ à notre espace affine,
   espace affine et direction se confondent. On dit aussi que donner une origine à un espace affine, **tue la structure affine.**

3. Pour tout $A \in \mathcal{E}$, tout $B \in \mathcal{E}$ et tout $C \in \mathcal{E}$, nous avons $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

   C'est la relation de Chasles

17.1.2 Définition formalisée d'espace affine

On appelle espace affine un triplet $\{\mathcal{E}, E, \Theta\}$ où :

- ▷ $\mathcal{E}$ est un ensemble dont les éléments sont appelés points
- ▷ E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel appelé direction de $\mathcal{E}$
- ▷ Θ est une application telle que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \Theta : \mathcal{E} \times \mathcal{E} & \longrightarrow & E \\ (A, B) : & \longmapsto & \Theta((A, B)) = \overrightarrow{AB} \end{array}\right.$$

vérifiant les deux conditions suivantes :

1. La relation de Chasles :
   Pour tout $A \in \mathcal{E}$, tout $B \in \mathcal{E}$ et tout $C \in \mathcal{E}$, nous avons $\Theta((A, C)) = \Theta((A, B)) + \Theta((B, C))$, c'est à dire $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
2. Pour tout $X \in E$, l'application Θ_X définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \Theta_X : \mathcal{E} & \longrightarrow & E \\ B : & \longmapsto & \Theta_X(B) = \overrightarrow{XB} \end{array}\right.$$

   est une bijection

Remarque 1 :

1. Souvent, pour simplifier, nous disons $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}, E, \Theta\}$
2. La dimension de l'espace affine $\mathcal{E}$ est celle de sa direction E

17.1.3 Règles de calcul

Pour tout $A \in \mathcal{E}$, tout $B \in \mathcal{E}$ et tout $C \in \mathcal{E}$, nous avons :

1. $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$
2. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$
3. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \iff A = B$

Démonstration

1. Montrons que $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$
   Il suffit de voir, qu'avec la relation de Chasles, $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA}$ et donc $2\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA}$ d'où $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$
2. Montrons que $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$
   D'après la relation de Chasles et le résultat précédent, nous avons $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$; d'où le résultat.
3. Montrons que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \iff A = B$
   Nous avons $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$; pour tout point $A \in \mathcal{E}$, il n'existe qu'un seul point $X \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{0}$; donc, de $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$, nouds déduisons que $A = B$

17.1.4 Translation

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Soit $u \in E$ un vecteur de E. On appelle translation de vecteur u, l'application t_u ainsi définie :

$$\left\{\begin{array}{lcl} t_u : \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ A & \longmapsto & t_u(A) = A' \end{array}\right.$$

Où $\overrightarrow{AA'} = u$

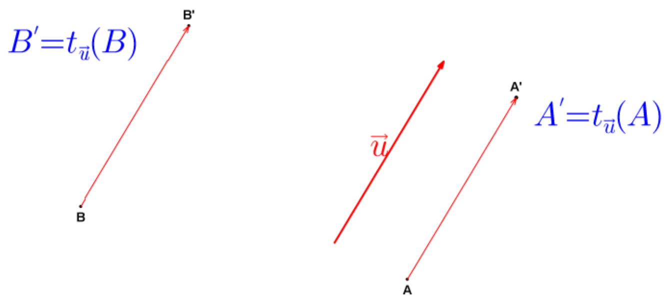


FIGURE 17.1 – Visualisation d'une translation de vecteur u : $A' = t_u(A)$ et $B' = t_u(B)$

17.1.5 Proposition

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Une application T de $\mathcal{E}$ est une translation si et seulement si, pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $N \in \mathcal{E}$, nous avons : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{T(M)\,T(N)}$

Démonstration

La démonstration de cette propriété repose essentiellement sur le parallélogramme.

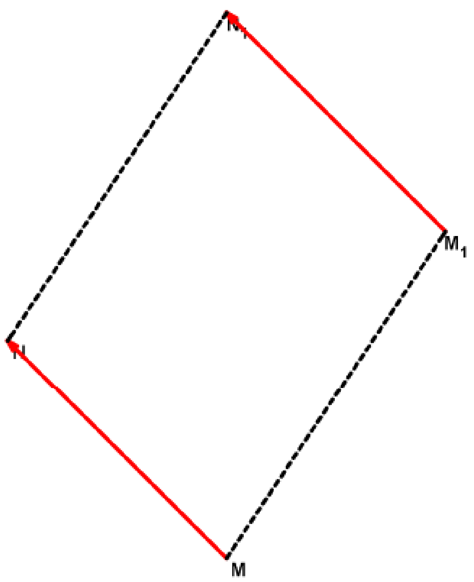


FIGURE 17.2 – Le parallélogramme des translations

1. Soit t_u une translation de vecteur u. Alors, pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $N \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{Mt_u(M)} = \overrightarrow{Nt_u(N)} = u$. Alors :
$$\overrightarrow{t_u(M)\,t_u(N)} = \overrightarrow{t_u(M)\,M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{Nt_u(N)} = -u + \overrightarrow{MN} + u = \overrightarrow{MN}$$
Ainsi, pour toute translation T, nous avons pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $N \in \mathcal{E}$,$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{T(M)\,T(N)}$
2. Réciproquement, soit T une transformation de $\mathcal{E}$ telle que pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $N \in \mathcal{E}$, nous ayions : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{T(M)\,T(N)}$; il faut montrer que, pour tout $M \in \mathcal{E}$, le vecteur $\overrightarrow{MT(M)}$ est

constant. Ce n'est pas très difficile !

$$\overrightarrow{MT(M)} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NT(N)} + \overrightarrow{T(N)T(M)}$$

De l'hypothèse $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{T(M)T(N)}$, nous avons $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{T(N)T(M)} = \overrightarrow{0}$ et donc $\overrightarrow{MT(M)} = \overrightarrow{NT(N)}$; ce que nous voulions.

17.1.6 Proposition

Si $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$ est l'ensemble des translations de $\mathcal{E}$, alors, $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$ muni de la composition des applications est un groupe commutatif

Démonstration

La démonstration est très simple.

1. L'ensemble $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$ est non vide puisque $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} = t_{\overrightarrow{0}}$ est un élément de $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$
2. Ensuite, la loi $\circ$ est interne
   Il suffit de remarquer que, si $u \in E$ et $v \in E$, alors $t_u \circ t_v = t_{u+v}$
3. A partir de cette remarque, nous voyons aisément que :
   - La composition des translations est commutative :
   $$t_u \circ t_v = t_{u+v} = t_{v+u} = t_v \circ t_u$$
   - Le neutre est $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} = t_{\overrightarrow{0}}$
   - L'application réciproque est $(t_u)^{-1} = t_{-u}$

A partir de cette démonstration, il est aisé de voir que nous pouvons créer un isomorphisme de groupe Φ entre $(E, +)$ et $(\mathcal{T}_{\mathcal{E}}, \circ)$ en posant $\Phi(u) = t_u$

Exemple 1 :

Des exemples d'espaces affines :

1. L'espace naturel qui nous entoure *(dimension 3)*
2. Le plan *(dimension 2)* appelé plan affine
3. La droite est un espace affine de dimension 1

Remarque 2 :

Il est important de noter le rôle essentiel joué par les translations dans un espace affine. En effet, nous avons :$B = t_{\overrightarrow{AB}}(A)$, et, dans un parallélogramme, $ABCD$, $D = t_{\overrightarrow{AB}}(C)$

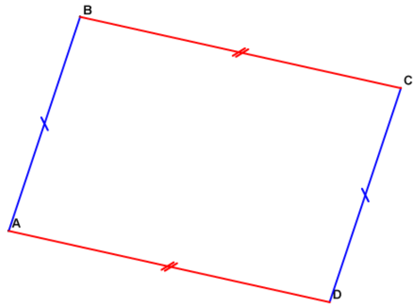


FIGURE 17.3 – Visualisation d'un parallélogramme

Exercice 1 :

Montrer que si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, alors $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. Avons nous la réciproque ?

17.1.7 Sous-espace affine

Soit $\{\mathcal{E}, E, \Theta\}$ un espace affine.
On appelle sous-espace affine de $\mathcal{E}$ un triplet $\{\mathcal{F}, F, \Theta\}$ où :

- ▷ $\mathcal{F}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{E}$ ($\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$)
- ▷ F est un sous-espace vectoriel de E
- ▷ $\{\mathcal{F}, F, \Theta\}$ est un espace affine
- — F est la direction de $\mathcal{F}$
- — La dimension du sous-espace affine $\mathcal{F}$ est celle de sa direction F

17.1.8 Notion de repère

$\mathcal{E}$ est un espace affine de dimension 3

1. On appelle repère cartésien de $\mathcal{E}$ un quadruplet $\mathcal{R}(O, i, j, k)$ où $O \in \mathcal{E}$ et $\{i, j, k\}$ sont 3 vecteurs du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E qui forment une base de E
2. On appelle repère affine de $\mathcal{E}$ un quadruplet $\mathcal{R}(A, B, C, D)$ où $A \in \mathcal{E}$,$B \in \mathcal{E}$, $C \in \mathcal{E}$ et $D \in \mathcal{E}$ avec $\left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right\}$ sont 3 vecteurs du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E qui forment une base de E

Remarque 3 :

1. La définition de repère affine ci-dessus est équivalente à :

   $\mathcal{R}(A, B, C, D)$ est un repère affine si et seulement si les points A, B, C, D sont non coplanaires
2. Nous avons des définitions semblables pour le plan affine et la droite affine :
   (a) Un repère cartésien d'un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 2 *(un plan affine)* est un triplet $\mathcal{R}(O, i, j)$ où $O \in \mathcal{E}$ et $\{i, j\}$ sont 2 vecteurs du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E qui forment une base de E
   (b) Un repère affine d'un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 2 est un triplet $\mathcal{R}(A, B, C)$ où $A \in \mathcal{E}$,$B \in \mathcal{E}$ et $C \in \mathcal{E}$ avec $\left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ sont 2 vecteurs du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E qui forment une base de E. De la même manière :

   $\mathcal{R}(A, B, C)$ est un repère affine si et seulement si les points A, B, C sont non alignés
   (c) Un repère cartésien d'un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 1 *(une droite affine)* est un couple $\mathcal{R}(O, i)$ où $O \in \mathcal{E}$ et $\{i\}$ est un vecteur de base de la droite vectorielle E
   (d) Un repère affine d'un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 1 est un couple $\mathcal{R}(A, B)$ où $A \in \mathcal{E}$,$B \in \mathcal{E}$ avec $\left\{\overrightarrow{AB}\right\}$ est un vecteur de base de la droite vectorielle E. De même :

   $\mathcal{R}(A, B)$ est un repère affine si et seulement si les points A et B ne sont pas confondus
3. Comment définir un plan (ABC) où A, B et C sont non alignés ? Très simplement par :

$$(ABC) = \left\{M \in \mathcal{E} \text{ tels que } \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}\right\}$$

   En fait, (ABC) est un repère affine
4. Autre question : comment définir une droite (AB) où A, B sont non confondus ? Par :

$$(AB) = \left\{M \in \mathcal{E} \text{ tels que } \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

   Et donc, (AB) est un repère affine de la droite

17.1.9 Coordonées dans un repère cartésiens

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3, muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}\left(O,i,j,k\right)$.
Pour tout point $M\in\mathcal{E}$, il existe un unique triplet $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tel que

$$\overrightarrow{OM}=xi+yj+zk$$

Ce sont les coordonnées cartésiennes du point $M\left(x,y,z\right)$ dans le repère $\mathcal{R}\left(O,i,j,k\right)$

Si $u=\overrightarrow{OM}$, alors $u=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

Remarque 4 :

1. Vous remarquerez que les coordonnées d'un point s'écrivent en ligne, alors que celles d'un vecteur s'écrivent en colonne ; cela permet de différencier *la structure affine* de *la structure vectorielle.*
2. D'autre part, il est tout aussi clair que **les coordonnées d'un point dépendent du repère choisi**

Exercice 2 :

Définissez aussi les coordonnées cartésiennes d'un point dans un plan affine muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}\left(O,i,j\right)$

Remarque 5 :

Faisons une remarque sur **les équations paramétriques**
Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3, muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}\left(O,i,j,k\right)$.

1. Un plan (P) de $\mathcal{E}$ est défini par un point $A\left(a,b,c\right)$ par où passe ce plan et 2 vecteurs directeurs $u=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$ et $v=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$.

   Tout point $M\in(P)$ est défini par la relation : $\overrightarrow{AM}=\lambda u+\mu v$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$ et $\mu\in\mathbb{R}$.

   Si $M\left(x,y,z\right)$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ sont : $\overrightarrow{AM}=\begin{pmatrix}x-a\\y-b\\z-c\end{pmatrix}$, de telle sorte que nous pouvons écrire :

$$\left\{\begin{array}{rl}x-a= & \lambda x_1+\mu x_2\\ y-b= & \lambda y_1+\mu y_2\\ z-c= & \lambda z_1+\mu z_2\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rl}x= & a+\lambda x_1+\mu x_2\\ y= & b+\lambda y_1+\mu y_2\\ z= & c+\lambda z_1+\mu z_2\end{array}\right.$$

   Ce sont les équations paramétriques du plan (P)

2. Une droite (D) de $\mathcal{E}$ est défini par un point $A\left(a,b,c\right)$ par où passe cette droite et 1 vecteur directeur $u=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$.

   Tout point $M\in(D)$ est défini par la relation : $\overrightarrow{AM}=\lambda u$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$. Si $M\left(x,y,z\right)$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ sont : $\overrightarrow{AM}=\begin{pmatrix}x-a\\y-b\\z-c\end{pmatrix}$, de telle sorte que nous pouvons écrire :

$$\left\{\begin{array}{rl}x-a= & \lambda x_1\\ y-b= & \lambda y_1\\ z-c= & \lambda z_1\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rl}x= & a+\lambda x_1\\ y= & b+\lambda y_1\\ z= & c+\lambda z_1\end{array}\right.$$

   Ce sont les équations paramétriques de la droite (D)

Exercice 3 :

Il est aussi possible de définir les équations paramétriques d'une droite dans un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 2.
Définir les équations paramétriques d'une droite (D) d'un plan affine $\mathcal{E}$ passant par $A(a,b)$ et de vecteur directeur $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 :

Donner une représentation paramétrique et une équation cartésienne des plans $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ dans les cas suivants :

1. $A(0,0,0)$ $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. $A(1,2,1)$ $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
3. $A(5,2,-1)$ $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$

17.2 Le parallélisme dans l'espace

Si nous parlons, ici, de parallélisme dans l'espace de dimension 3, il est trivial de transposer définitions et résultats dans les espaces affines d'autres dimensions (dimension 2 ou dimension $n \geqslant 3$)

17.2.1 Définition de 2 droites parallèles

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3
La droite D de repère (A, u) est parallèle à la droite D_1 passant par le point B si et seulement si :

$$(\forall M \in D_1)\left(\overrightarrow{BM} = \lambda u\right) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Exemple 2 :

Dans le plan affine $\mathcal{P}$, on considère le triangle $\{A, B, C\}$ et B' le milieu du segment $[AC]$ et C' le milieu du segment $[BA]$.
Nous avons $\overrightarrow{C'B'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$
En effet, par la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{C'B'} = \overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{AB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

Ainsi, les droites (BC) et $(B'C')$ sont-elles parallèles.

Remarque 6 :

Il est possible d'avoir des droites non parallèles et non sécantes :

- ▷ Soit D la droite passant par le point $A(0,1,0)$ et de vecteur directeur $i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors, tout point $M(x,y,z)$ de D est tel que $\overrightarrow{AM} = ti$ avec $t \in \mathbb{R}$ de telle sorte que les équations paramétriques de D sont :

$$\begin{cases} x = & t \\ y = & 1 \\ z = & 0 \end{cases}$$

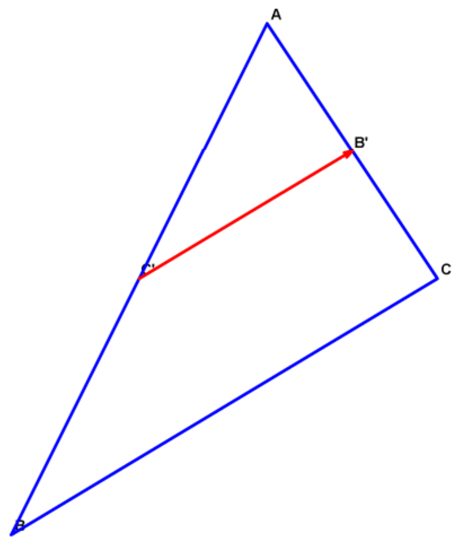


FIGURE 17.4 – Voici la figure

▷ Soit D_1 la droite passant par le point $B\,(1,1,1)$ et de vecteur directeur $j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors, tout point $M\,(x,y,z)$ de D_1 est tel que $\overrightarrow{BM} = tj$ avec $t \in \mathbb{R}$ de telle sorte que les équations paramétriques de D_1 sont :

$$\left\{ \begin{array}{rl} x = & 1 \\ y = & 1+t \\ z = & 1 \end{array} \right.$$

Ces deux droites ne sont pas parallèles *(elles n'ont pas le même vecteur directeur)* et ne sont pas sécantes.

17.2.2 Définition de 2 plans parallèles

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3
Le plan P de repère (A,u,v) est parallèle au plan P_1 passant par le point B si et seulement si :

$$(\forall M \in P_1)\left(\overrightarrow{BM} = \lambda u + \mu v\right) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}$$

Remarque 7 :

1. **Est-il possible d'avoir 2 plans non parallèles et non sécants, comme pour les droites ?**
   On se donne les plans $P\,(A,u,v)$ et $P_1\,(B,u_1,v_1)$. On sait que le svecteurs u et v sont indépendants, de même que les vecteurs u_1 et v_1. De 2 choses l'une :
   ⋆ Il est impossible de construire une base de E avec les familles $\{u,v\}$ et $\{u_1,v_1\}$; ce qui veut dire que les plans $P\,(A,u,v)$ et $P_1\,(B,u_1,v_1)$ sont parallèles
   ⋆ On peut construire une base $\{u,v,u_1\}$ de E. Alors, $v_1 = au + bv + cu_1$; en choissisant (A,u,v,u_1) comme repère affine de $\mathcal{E}$, les équations paramétriques de P et P_1 deviennent :

$$P\,(A,u,v) : \left\{ \begin{array}{rl} x = & \lambda_0 \\ y = & \mu_0 \\ z = & 0 \end{array} \right. \qquad P_1\,(B,u_1,v_1) : \left\{ \begin{array}{rl} x = & x_B + a\mu_1 \\ y = & y_B + b\mu_1 \\ z = & z_B + \lambda_1 + c\mu_1 \end{array} \right.$$

   S'il existe une intersection entre ces deux plans, nous avons alors le système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{rl} \lambda_0 = & x_B + a\mu_1 \\ \mu_0 = & y_B + b\mu_1 \\ 0 = & z_B + \lambda_1 + c\mu_1 \end{array} \right.$$

Ce qui montre qu'il existe une intersection non vide dont les coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} x = & x_B + a\mu_1 \\ y = & y_B + b\mu_1 \\ z = & 0 \end{cases}$$

C'est donc une droite passant par le point $X(x_b, y_b, 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$

2. **Existe-t-il droites et plans parallèles ?**
   NON !....Puisque ne réponds pas à la définition de parallélisme. Par contre, Si P est le plan (A, u, v) et D la droite (B, w) où $B \notin P$ et $w = \lambda u + \mu v$. D et P n'ont aucun point commun. On dit qu'ils sont faiblement parallèles

17.2.3 Quelques exercices

Exercice 5 :

Le plan affine $\mathcal{P}$ est muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}(O, i, j)$.
A tout réel $m \in \mathbb{R}$, nous associons la droite D_m d'équation :

$$(2m-1)x + (3-m)y - 7m + 6 = 0$$

1. Déterminer $m \in \mathbb{R}$ tel que :
   (a) D_m soit parallèle à l'axe des abscisses
   (b) D_m soit parallèle à l'axe des ordonnées
   (c) D_m passe par le point $A(1, 1)$
   (d) D_m soit parallèle à la droite d'équation $2x + 3y - 1 = 0$
2. Démontrez que toutes les droites D_m passent par un point fixe F dont on précisera les coordonnées.

Exercice 6 :

Le plan affine $\mathcal{P}$ est muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}(O, i, j)$.
A tout réel $m \in \mathbb{R}$, nous associons les droites D_m et Δ_m d'équation :

$$D_m : \quad (m+2)x + (3-2m)y + 3m - 8 = 0$$

$$\Delta_m : \quad (9m-3)x + (10-8m)y - 8m - 2 = 0$$

1. Démontrez que toutes les droites D_m passent par un point fixe A dont on précisera les coordonnées.
2. Démontrez que toutes les droites Δ_m passent par un point fixe B dont on précisera les coordonnées.
3. Est-il possible de trouver $m \in \mathbb{R}$ tel que $D_m = \Delta_m$?

17.3 Le calcul barycentrique

En mécanique, l'étude du mouvement des points d'un système matériel fait intervenir différents éléments parmi lesquels les masses, positives, des points du système.
En électrostatique, le champ électrique produit par un système de particules électrisées est déterminé, à un instant donné, par la position des particules et par les charges, positives ou négatives, des différentes particules.
En statistique, lorsqu'on s'intéresse à un caractère quantitatif X des individus d'une population E *(âge, poids, taille, nombre d'enfants, salaire mensuel, ...), on associe à chaque valeur x_i de X le nombre η_i des individus de* E *pour lesquels le caractère X prend la valeur x_i*
Comme le montrent ces exemples, il est fréquent que l'étude d'un phénomène fasse intervenir un système de points affectés de coefficients. S'il est possible de remplacer le système par un seul point muni d'un seul coefficient, l'étude s'en trouvera évidemment facilitée.

17.3.1 Définition

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine

1. On appelle point massique ou point pondéré, tout couple (A, α) où $A \in \mathcal{E}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$
2. Etant donnée une famille finie de points pondérés $\{(A_i, \alpha_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$
   On appelle fonction vectorielle de Leibniz, l'application f définie par :

$$\left\{\begin{array}{llll} f : \mathcal{E} & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & \overrightarrow{f(M)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} \end{array}\right.$$

17.3.2 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et $\{(A_i, \alpha_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$ un système de points pondérés. Soit f la fonction de Leibniz associée au système $\{(A_i, \alpha_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$. Alors :

1. Pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $M' \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{f(M')} + \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MM'}$
2. (a) Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, la fonction f est constante
   (b) Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, la fonction f est bijective

Démonstration

1. Soient $M \in \mathcal{E}$ et $M' \in \mathcal{E}$. Alors :

$$\overrightarrow{f(M)} - \overrightarrow{f(M')} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{M'A_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\overrightarrow{MA_i} - \overrightarrow{M'A_i}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MM'}$$

2. (a) Il est alors bien clair que si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, alors, pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $M' \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{f(M')}$, et donc que f est constante.

   (b) Supposons $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$

   ▷ **Montrons que f est injective**
   Soient Soient $M \in \mathcal{E}$ et $M' \in \mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{f(M')}$. Alors, du résultat $\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{f(M')} + \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MM'}$, nous tirons $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{0}$.
   Comme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, nous avons $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{0}$, c'est à dire $M = M'$

   — **Montrons que f est surjective**
   Soit $u \in E$; il faut trouver $M \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{f(M)} = u$. Soit $O \in \mathcal{E}$ *(O peut être l'origine d'un repère cartésien, par exemple).*
   Alors, pour tout point $M \in \mathcal{E}$, nous avons :

$$\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{f(O)} + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MO} \Longleftrightarrow u = \overrightarrow{f(O)} + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MO}$$

   D'où nous tirons l'existence d'un point $M \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{f(M)} = u$; ce point M est défini par :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \left(\overrightarrow{f(O)} - u \right)$$

Où O est un point quelconque de $\mathcal{E}$ [1]

La fonction vectorielle de Leibniz est donc bien une bijection

17.3.3 Corollaire

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et $\{(A_i, \alpha_i) \text{ avec } 1 \leqslant i \leqslant n\}$ un système de points pondérés tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$.

Il existe un et un seul point $G \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{f(G)} = \overrightarrow{0}$

Ce point G est appelé barycentre du système pondéré $\{(A_i, \alpha_i) \text{ avec } 1 \leqslant i \leqslant n\}$

Remarque 8 :

1. Ainsi, pour tout point $M \in \mathcal{E}$, nous avons :

$$\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{f(G)} + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) \overrightarrow{MG} \Longleftrightarrow \overrightarrow{f(M)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) \overrightarrow{MG}$$

   C'est à dire :

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \overrightarrow{f(M)} \Longleftrightarrow \overrightarrow{MG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} \right)$$

2. Si $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère cartésien $\mathcal{R}(O, i, j, k)$, il est possible de déduire les coordonnées de G en remplaçant M par l'origine O :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} \right)$$

Exercice 7 :

Cet exercice est un exercice d'application directe

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension quelconque

Un triangle $\{ABC\}$ de l'espace $\mathcal{E}$ étant donné, on considère l'application f de $\mathcal{E}$ dans E qui, à à tout point $M \in \mathcal{E}$, associe le vecteur : $\overrightarrow{f(M)} = -5\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$.

1. Pour tout bipoint (M, M') démontrer que $\overrightarrow{f(M)} - \overrightarrow{f(M')} = -2\overrightarrow{MM'}$.

   Existe-t-il un point $G \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{f(G)} = \overrightarrow{0}$?

   Exprimer alors le vecteur $\overrightarrow{f(M)}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{MG}$
2. Montrer que G appartient au plan (ABC) et déterminer sa position avec précision en indiquant ses coordonnées dans un repère bien choisi du plan (ABC).
3. **Application :**
   (a) A tout point $M \in \mathcal{E}$ distinct de G, on associe la droite D_M passant par M et de vecteur directeur $\overrightarrow{f(M)}$. Démontrer que les droites D_M passent par un point fixe.
   (b) A tout point $M \in \mathcal{E}$, on associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{f(M)}$ Reconnaître l'application g qui à M fait correspondre M'

1. Autant choisir l'origine !!

Exercice 8 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension quelconque. Nous considérons le système de points pondérés $\{(A_1, \alpha), (A_2, \alpha), (A_3, \alpha) \cdots (A_n, \alpha)\}$ avec $\alpha \neq 0$.
Le barycentre du système est appelé **isobarycentre**.
Montrer que si G est l'isobarycentre du système, alors, pour tout point $O \in \mathcal{E}$, nous avons

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i}$$

Exercice 9 :

Soient A, B et C 3 points du plan affine, d'affixe respective $z_A = 1 + i$, $z_B = -1 + i$ et $z_C = i$
Quelle est l'affixe z_G du barycentre du système pondéré $\{(A, 1), (B, -4), (C, +5)\}$

17.3.4 Propriétés du barycentre

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension quelconque.

1. Le barycentre d'un système pondéré $\{(A_i, \alpha_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$ ne change pas si on modifie l'ordre des points
2. Soit $G \in \mathcal{E}$ le barycentre du système pondéré $\{(A_i, \alpha_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, G est aussi le barycentre du ststème pondéré $\{(A_i, \lambda\alpha_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$
3. Propriété d'associativité du barycentre
   Le barycentre G d'un système pondéré $\{(A_i, \alpha_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$ ne change pas si nous remplaçons plusieurs points dont la somme des coefficients est non nulle par leur barycentre, affecté de la somme des coefficients

Démonstration

La démonstration des deux premiers points est évidente. Nous ne démontrons que l'associativité du barycentre.
Soit donc $\mathcal{E}$ un espace affine et $\{(A_i, \alpha_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$ un système pondéré. Nous extrayons de ce système pondérés k points, $k \leqslant n$, que nous réordonnons en $\{(A_i, \alpha_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant k\}$, tels que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \neq 0$

Ce nouveau système pondéré admet un barycentre G_1 tel que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{G_1A_i} = \overrightarrow{0}$
Soit G le barycentre du système total $\{(A_i, \alpha_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$. Alors :

$$\overrightarrow{0} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}$$

G_1 étant le barycentre de $\{(A_i, \alpha_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant k\}$, d'après 17.3.2, nous avons :

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right) \overrightarrow{GG_1} \iff \overrightarrow{GG_1} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right)} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} \iff \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right) \overrightarrow{GG_1}$$

En remplaçant $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}$ par sa nouvelle valeur, nous obtenons :

$$\overrightarrow{0} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right) \overrightarrow{GG_1} + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}$$

Et G apparaît bien comme le barycentre du système pondéré $\left\{\left(G_1, \sum_{i=1}^{k}\alpha_i\right), (A_i, \alpha_i) \text{ avec } k+1 \leqslant i \leqslant n\right\}$

Ce que nous voulions

Remarque 9 :

Cette propriété d'associativité des barycentres permet de prouver la concourrance de certaines droites

Exemple 3 :

Nous nous plaçons toujours dans un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension quelconque

1. Quel est l'isobarycentre de $\{A, B\}$?

   L'isobarycentre de $\{A, B\}$ est un point tel que $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}$ ou encore un point I tel que, pour tout $M \in \mathcal{E}$ $\overrightarrow{MI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)$

   En choisissant $M = A$, nous obtenons $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, c'est à dire que I est le milieu du segment $[A, B]$

2. Quel est l'isobarycentre du triangle $\{A, B, C\}$?

   L'isobarycentre du triangle $\{A, B, C\}$ est un point G tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$
   En utilisant la propriété d'associativité du barycentre, G est aussi le barycentre de $\{(I, 2), (C, 1)\}$ où I est le milieu du segment $[A, B]$, c'est à dire qu'il est tel que $2\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$. G est donc sur la droite (CI)
   De même, G est sur la droite (BK) et (AJ). G est donc le point de rencontre des médianes du triangle $\{A, B, C\}$

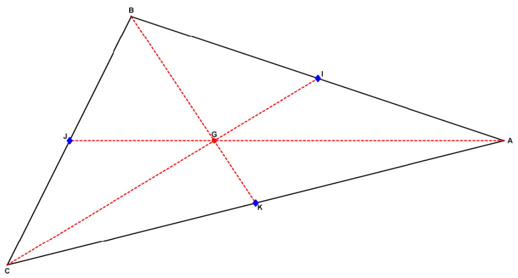


FIGURE 17.5 – G isobarycentre du triangle $\{A, B, C\}$, point de rencontre des médianes du triangle $\{A, B, C\}$

3. Quel est l'isobarycentre du tétraèdre $\{A, B, C, D\}$? *(4 points non coplanaires)*

   Si nous considérons le triangle $\{A, B, C\}$ et son isobarycentre G, alors, l'isobarycentre T du tétraèdre $\{A, B, C, D\}$ est tel que $3TG + TA = 0$, c'est à dire que $\overrightarrow{GT}=\frac{1}{4}\overrightarrow{GA}$

Exercice 10 :

Dans le plan affine $\mathcal{P}$, on se donne deux points distincts A et B

1. Quelles sont les conditions sur $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ pour qu'il existe $M' \in \mathcal{P}$ tel que :

$$\alpha\overrightarrow{M'A}+\beta\overrightarrow{M'B}+2\overrightarrow{MM'}=0$$

2. Ces conditions étant réalisées, soit f l'application du plan $\mathcal{P}$, qui à $M \in \mathcal{P}$ associe $M' \in \mathcal{P}$. Déterminer suivant les valeurs du couple (α, β) l'ensemble des points invariants par f
3. On suppose $\alpha+\beta=0$; Quelle est la nature de f ?
4. On suppose $\alpha+\beta\neq 0$; Quelle est la nature de f ?

Exercice 11 :

Dans le plan affine $\mathcal{P}$, on considère le triangle $\{A, B, C\}$

1. Définir, par ses coordonnées dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ le barycentre G du système pondéré $\{(A, -2), (B, 4), (C, 1)\}$
2. Soit $M \in \mathcal{P}$ de coordonnées (x, y) dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$
   Montrer que M est le barycentre du système pondéré $\{(A, 1-x-y), (B, x), (C, y)\}$

17.3.5 Barycentre de 2 points distincts

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension quelconque et $A \in \mathcal{E}$ et $B \in \mathcal{E}$ tels que $A \neq B$.
L'ensemble des barycentres de A et B est la droite (AB)

Démonstration

1. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta_i n\mathbb{R}$ tels que $\alpha + \beta \neq 0$
   On appelle G le barycentre de la famille pondérée $\{(A, \alpha) ; (B, \beta)\}$. Alors :
   $$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$
   Ce qui montre que $G \in (AB)$
2. réciproquement, soit $M \in (AB)$
   Alors, $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} \Longleftrightarrow (1-\lambda)\overrightarrow{AM} + \lambda\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{0}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$
   M apparaît donc comme le barycentre de la famille pondérée $\{(A, (1-\lambda)) ; (B, \lambda)\}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

Remarque 10 :

1. (A, B) engendre une droite (D). On dit que (A, B) est un repère affine (D)
2. (a) Si M est le barycentre de la famille pondérée $\{(A, \alpha) ; (B, \beta)\}$.
   Le couple (α, β) est le système de coordonnées barycentriques de M dans le repère (A, B). Ces coordonnées ne sont pas uniques car, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, les couples $(\lambda\alpha, \lambda\beta)$ sont d'autres systèmes de coordonnées barycentriques de M dans le repère (A, B)
   (b) L'unicité des coordonnées barycentriques n'existe que si on impose à α et β certaines conditions. Par exexemples :
   - $\star$ $\alpha + \beta = 1$
   - $\star$ $\alpha + \beta = \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}^*$

   En fait, il n'y a pas d'autres conditions possibles que celles ci-dessus.
3. L'isobarycentre de 2 points, c'est le milieu du segment défini par ces 2 points. Il a pour coordonnées barycentriques (α, α) où $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Si nous imposons à la somme des coordonnées barycentriques d'être égale à 1, les coordonnées barycentriques du milieu seront $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
4. Le segment $[A; B]$ est l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ avec $t \in [0; 1]$. M apparaît donc comme le barycentre de la famille pondérée $\{(A, (1-t)) ; (B, t)\}$ avec $t \in [0; 1]$

Exercice 12 :

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension quelconque et $A \in \mathcal{E}$ et $B \in \mathcal{E}$ tels que $A \neq B$. Soit M un point de la droite (AB) de coordonnées barycentriques dans le repère affine (A, B) (α, β).
Montrer que $M \in [A; B]$ si et seulement si $\alpha \times \beta \geqslant 0$

17.3.6 Barycentre de 3 points distincts et non alignés

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension quelconque et $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{E}$ et $C \in \mathcal{E}$ sont 3 points de $\mathcal{E}$, distincts et non alignés.
L'ensemble des barycentres de A, B et C est le plan (ABC)

Démonstration

En prenant $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ comme repère affine du plan (ABC), la démonstration est semblable à 17.3.5

Remarque 11 :

1. Un plan $\mathcal{P}$ est donc « engendré » par 3 points A, B et C non alignés ; (A, B, C) est donc un repère affine du plan
2. Pour tout point $M \in \mathcal{P}$, les coordonnées barycentriques de M dans le répère (A, B, C) étant (α, β, γ) avec $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ expriment que M est le barycentre de la famille $\{(A, \alpha) ; (B, \beta) ; (C, \gamma)\}$
3. Les coordonnées barycentriques d'un point ne sont pas uniques.

   Les coordonnées barycentriques du centre de gravité G du triangle $\{A, B, C\}$ sont $(1, 1, 1)$ ou encore $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ou, plus généralement, (α, α, α) avec $\alpha \neq 0$

17.4 Exercices sur le calcul barycentrique

Exercice 13 :

Soit $\mathcal{P}$ le plan affine, et A, B et C 3 points de $\mathcal{P}$. On désigne par G l'isobarycentre du triangle $\{A, B, C\}$, par A' le milieu du segment $[B, C]$, par B' le milieu du segment $[A, C]$ et par C' le milieu du segment $[A, B]$.
On désigne aussi par A" le symétrique de A par rapport à A', par B" le symétrique de B par rapport à B' et par C" le symétrique de C par rapport à C'
Déterminer, dans le repère affine (A, B, C) un système de coordonnées barycentriques des points A, B, C, A', B', C', A", B" et C"

Exercice 14 :

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère affine (A, B, C)

1. R et S étant les deux points de coordonnées barycentriques respectives $(-1, 2, 1)$ et $(2, 1, -1)$. Démontrer qu'un point M de coordonnées barycentriques (a, b, c) appartient à la droite (RS) si et seulement si $-3a + b - 5c = 0$
2. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des points M dont les coordonnées barycentriques (a, b, c) vérifient la relation $2a + b - c = 0$. Démontrer que $\mathcal{D}$ est une droite.

   Déterminer un système de coordonnées barycentriques du point d'intersection des droites (RS) et $\mathcal{D}$

Exercice 15 :

Dans le plan $\mathcal{P}$, on considère 3 points A, B et C non alignés. Quel est l'ensemble des points $P \in \mathcal{P}$ définis par :

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

lorsque M décrit une droite $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$

Exercice 16 :

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère affine (A, B, C). On appelle A' le milieu du segment $[BC]$, B' le milieu du segment $[DC]$ et C' le milieu du segment $[BA]$.
α est un réel différent de 1 et nous désignons par I le barycentre du système pondéré $\{(B, 1) ; (C, -\alpha)\}$
Déterminer les coordonnées barycentriques :

1. De I dans le repère (A', B', C')
2. Du milieu M de $[AI]$ dans le repère (A', B', C')

Exercice 17 :

Soit $\{A, B, C\}$ un triangle. Trouver le séquations barycentriques, dans le repère affine (A, B, C)

1. Des points situés sur les côtés du triangle
2. Des points situés sur la médiane issue de A
3. Des points situés sur la parallèle à (AC) passant par l'isobarycentre du triangle $\{A, B, C\}$

Exercice 18 :

Exercice peu facile !
Soient A, A', B et B' quatre points du plan $\mathcal{P}$ tels que les droites (AA') et (BB') se coupent en I et que les droites (AB) et $(A'B')$ se coupent en L *(pour visualiser, conférer à la figure 17.6)* Les coordonnées

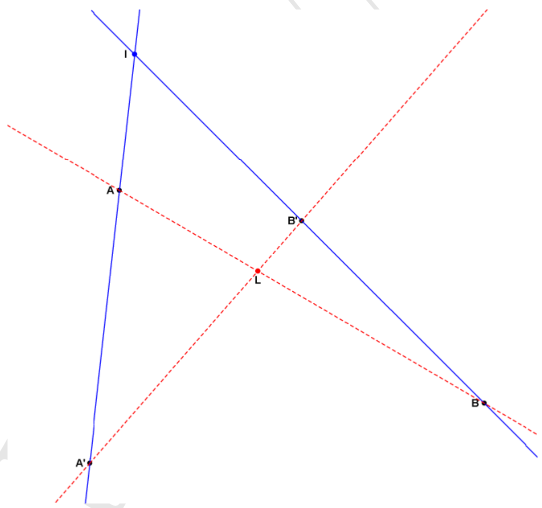


FIGURE 17.6 – Visualisation de l'exercice

barycentriques de I dans le repère (A, A') sont (α, α') et (β, β') dans le repère (B, B').
Quelles sont les coordonnées barycentriques de L dans les repères (A, B) et (A', B')

17.5 Espaces affines euclidiens

17.5.1 Définition

On dit qu'un espace affine $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}, E, \Theta\}$ est <u>euclidien</u> si sa direction E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien

Remarque 12 :

1. Il y a donc possibilité d'utiliser le produit scalaire dans $\mathcal{E}$ euclidien en écrivant $\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle$.
2. On peut aussi utiliser les normes de vecteur $\left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AB} \right\rangle}$

3. Si $\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien de dimension 3, on peut aussi utiliser des repères orthonormés $\mathcal{R}(O, i, j, k)$ où $\{i, j, k\}$ est une base orthonormée du $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien E. La généralisation dans un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension n est évidente.

Exercice 19 :

Nous nous situons dans le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ dans lequel nous avons mis un repère orthonormé $\mathcal{R}(O, i, j)$

1. Soit $A \in \mathcal{P}$ un point de coordonnées $A(1, 1)$ et $u \in P$ de coordonnées $u\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

   Etudier l'ensemble $X = \left\{M \in \mathcal{P} \text{ tels que } \left\langle \overrightarrow{AM} \mid u \right\rangle = 0\right\}$
2. Qu'en est-il de l'ensemble $X_k = \left\{M \in \mathcal{P} \text{ tels que } \left\langle \overrightarrow{AM} \mid u \right\rangle = k\right\}$ où $k \in \mathbb{R}$

Remarque 13 :

Très généralement, toute droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet comme vecteur normal, le vecteur $u = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$
Une droite peut être définie par un vecteur normal et un point par où passe cette droite

Exercice 20 :

Dans l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3 dans lequel nous avons mis un repère orthonormé $\mathcal{R}(O, i, j, k)$

Soit $A \in \mathcal{E}$ un point de coordonnées $A(1, 1, 1)$ et $u \in E$ de coordonnées $u\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

Etudier l'ensemble $Y_k = \left\{M \in \mathcal{E} \text{ tels que } \left\langle \overrightarrow{AM} \mid u \right\rangle = k\right\}$ où $k \in \mathbb{R}$

Remarque 14 :

Très généralement, tout plan de $\mathcal{E}$ d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ admet comme vecteur normal, le vecteur $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$
Une droite peut être définie par un vecteur normal et un point par où passe cette droite

17.5.2 Distance

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien. On peut définir, sur $\mathcal{E}$, une distance par :

$$(\forall M \in \mathcal{E})\,(\forall N \in \mathcal{E})\,\left(d(MN) = MN = \left\|\overrightarrow{MN}\right\|\right)$$

Cette distance vérifie les 3 axiômes :

1. $(\forall M \in \mathcal{E})\,(\forall N \in \mathcal{E}),\ (d(MN) = d(NM))$
2. $(\forall M \in \mathcal{E})\,(\forall N \in \mathcal{E}),\ (d(MN) = 0 \iff M = N)$
3. Inégalité triangulaire : $(\forall M \in \mathcal{E})\,(\forall N \in \mathcal{E})\,(\forall X \in \mathcal{E})\,(d(MN) \leqslant d(MX) + d(XN))$

Remarque 15 :

Comment ces distances peuvent-elles s'exprimer analytiquement ?

1. Dans le plan euclidien, rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O,i,j)$, soient $M(x,y)$ et $N(x_1,y_1)$. Alors, $\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} x_1 - x \\ y_1 - y \end{pmatrix}$ et :
$$MN = \left\| \overrightarrow{MN} \right\| = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}$$
2. Dans l'espace euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3, rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O,i,j,k)$, soient $M(x,y,z)$ et $N(x_1,y_1,z_1)$. Alors, $\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} x_1 - x \\ y_1 - y \\ z_1 - z \end{pmatrix}$ et :
$$MN = \left\| \overrightarrow{MN} \right\| = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}$$

Exercice 21 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien et ABC un triangle *(c'est à dire, trois points non alignés de $\mathcal{E}$)*. Montrez que :
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle$$
Quel résultat retrouve-t-on lorsque le triangle est rectangle en A ?

Exercice 22 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien et $ABCD$ un parallélogramme de $\mathcal{E}$. Montrez la formule :
$$AC^2 - BD^2 = 4\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{BC} \right\rangle$$

Exercice 23 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère othonormé $\mathcal{R}(O,i,j,k)$ La droite D est définie par les 2 plans P et P_1 :
$$\begin{cases} P : & 2x - 3y - 2z + 4 = 0 \\ P_1 : & x + 2y - 2z - 5 = 0 \end{cases}$$
Montrer que les plans P et P_1 sont perpendiculaires

Exercice 24 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère othonormé $\mathcal{R}(O,i,j,k)$
On considère les deux droites D et D_1 :
$$D : \begin{cases} x - y = 1 \\ 2y + z = 3 \end{cases} \qquad D_1 : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$
1. Donner un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de D et un vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ de D_1
2. En déduire un vecteur $\overrightarrow{w}$ de leur perpendiculaire commune Δ

Exercice 25 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de E de norme 1 et $A \in \mathcal{E}$. On définit un plan H par :
$$H = \left\{ M \in \mathcal{E} \text{ tels que } \left\langle \overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{u} \right\rangle = 0 \right\}$$
Nous définissons un repère orthonormé $\mathcal{R}(A,i,j,\overrightarrow{u})$
1. Montrer que $M \in H$ si et seulement si M a pour coordonnées $M(x,y,0)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$
2. Calculer, pour tout $N \in \mathcal{E}$, le produit scalaire $\left\langle \overrightarrow{AN} \mid \overrightarrow{u} \right\rangle$

3. En déduire que l'application f définie par :

$$\begin{cases} f : \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ N & \longmapsto & f(N) = \left\langle \overrightarrow{AN} \mid \overrightarrow{u} \right\rangle \end{cases}$$

permet de définir 2 demi-espaces dont H est la frontière.

Exercice 26 :

1. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension quelconque.
   (a) Etant donnés 3 points A, B et M de $\mathcal{E}$, montrer que l'une quelconque des égalités suivantes entraîne l'alignement des 3 points A, B et M de $\mathcal{E}$

   $\star$ $AB = AM + MB$ $\star$ $AB = AM - MB$ $\star$ $AB = MB - AM$

   (b) Montrer l'inégalité suivante, vraie pour 3 points quelconques A, M et B

$$|MA - MB| \leqslant AB$$

2. Nous nous situons maintenant, dans le plan affine euclidien $\mathcal{P}$
   A et B sont 2 points distincts du plan $\mathcal{P}$ et $k \in \mathbb{R}^{*+}$. On appelle $\mathcal{C}_k$, l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $\dfrac{MA}{MB} = k$
   Etudier $\mathcal{C}_k$ en fonction des valeurs de k

17.6 Fonction scalaire de Leibniz

Exercice d'introduction

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien. Une application $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ étant donnée, pour tout réel $k \in \mathbb{R}$, on appelle surface ou ligne de niveau k de φ l'ensemble des antécédents de k par φ.
Autrement dit, la surface de niveau k de φ est l'ensemble S_k des point $M \in \mathcal{E}$ tels que $\varphi(M) = k$. Autrement dit :

$$S_k = \{M \in \mathcal{E} \text{ tels que } \varphi(M) = k\}$$

Pour certain'es valeurs de k, S_k peut être vide.
Dans le plan euclidien $\mathcal{P}$ rapporté à un repère cartésien $\mathcal{R}(O, i, j)$, on se donne les points $A(0,1)$, $B(1,0)$ et $C(1,1)$

Partie A

On définit f par :

$$\begin{cases} f : \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & f(M) = MA^2 + 3MB^2 - MC^2 \end{cases}$$

1. Soit $M' \in \mathcal{P}$; montrer que, pour tout $M \in \mathcal{P}$, nous avons :

$$f(M) = f(M') + 2\left\langle \overrightarrow{MM'} \mid \overrightarrow{M'A} + 3\overrightarrow{M'B} - \overrightarrow{M'C} \right\rangle + 3MM'^2$$

2. (a) Le barycentre G du sysème pondéré $\{(A,1) ; (B,3) ; (C,-1)\}$ existe-t-il ? En donner ses coordonnées.
   (b) Calculer $f(G)$
   (c) Montrer que, pour tout $M \in \mathcal{P}$ nous avons $f(M) = \dfrac{2}{3} + 3MG^2$
3. Construire l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $f(M) = \dfrac{83}{3}$ et $f(M) = \dfrac{4}{3}$
4. Donner l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $\dfrac{83}{3} \leqslant f(M) \leqslant \dfrac{146}{3}$
5. Pour quelles valeurs de $k \in \mathbb{R}$, avons-nous $f^{-1}(\{k\}) = \emptyset$

Partie B

1. Le barycentre du système pondéré $\{(A,-1);(B,3);(C,-2)\}$ existe-t-il ? Construire, pour tout $M \in \mathcal{P}$ le vecteur $\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$ et donner $\|\overrightarrow{a}\|$
2. On définit f par :
$$\left\{\begin{array}{rcl} f : \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & f(M) = -MA^2 + 3MB^2 - 2MC^2 \end{array}\right.$$
Vérifier que, pour tout $M \in \mathcal{P}$ et tout $M' \in \mathcal{P}$, $f(M) = f(M') + 2\left\langle \overrightarrow{MM'} \mid \overrightarrow{a} \right\rangle$
3. Nous souhaitons rechercher les points $M \in \mathcal{P}$ tels que $f(M) = +2$. Soit D la droite passant par l'origine O et de vecteur directeur $\overrightarrow{a}$. Nous voulons rechercher $X_0 \in D$ tel que $f(X_0) = +2$
Ecrire $\left\langle \overrightarrow{X_0 O} \mid \overrightarrow{a} \right\rangle$ de 2 manières différentes et en déduire que X_0 existe et est unique.
4. En déduire $f^{-1}(\{+2\})$
5. Rechercher l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $2 \leqslant f(M) \leqslant +4$

Dans ce qui suit, nous allons généraliser l'exercice d'introduction à un espace affine quelconque, avec un nombre de points pondérés quelconque. L'objectif de l'exercice d'introduction est de manipuler des choses simples pour pouvoir, ensuite gnéraliser avec plus d'abstraction.

17.6.1 Définition

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien
Etant donnée une famille finie de points pondérés $\{(A_i,\alpha_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$
On appelle fonction scalaire de Leibniz, l'application f définie par :
$$\left\{\begin{array}{rcl} f : \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & f(M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2 \end{array}\right.$$

17.6.2 Proposition

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien. On considère une famille finie de points pondérés $\{(A_i,\alpha_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$ et f est la fonction scalaire de Leibniz associée.
Alors, pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $M' \in \mathcal{E}$:
$$f(M) = f(M') + 2\left\langle \overrightarrow{MM'} \mid \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{M'A_i} \right\rangle + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) MM'^2$$

Démonstration

Soient $M \in \mathcal{E}$ et $M' \in \mathcal{E}$. Il suffit d'utiliser la bilinéarité du produit scalaire.
$$\begin{aligned} MA_i^2 &= \left\|\overrightarrow{MA_i}\right\|^2 \\ &= \left\langle \overrightarrow{MA_i} \mid \overrightarrow{MA_i} \right\rangle \\ &= \left\langle \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'A_i} \mid \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'A_i} \right\rangle \\ &= \left\langle \overrightarrow{MM'} \mid \overrightarrow{MM'} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{M'A_i} \mid \overrightarrow{M'A_i} \right\rangle + 2\left\langle \overrightarrow{MM'} \mid \overrightarrow{M'A_i} \right\rangle \\ &= \left\|\overrightarrow{MM'}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{M'A_i}\right\|^2 + 2\left\langle \overrightarrow{MM'} \mid \overrightarrow{M'A_i} \right\rangle \\ &= MM'^2 + M'A_i^2 + 2\left\langle \overrightarrow{MM'} \mid \overrightarrow{M'A_i} \right\rangle \end{aligned}$$

Et, en remplaçant, nous avons donc :

$$\begin{aligned} f(M) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(MM'^2 + M'A_i^2 + 2\left\langle \overrightarrow{MM'} \mid \overrightarrow{M'A_i} \right\rangle \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MM'^2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i M'A_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left\langle \overrightarrow{MM'} \mid \overrightarrow{M'A_i} \right\rangle \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) MM'^2 + f(M') + 2\left\langle \overrightarrow{MM'} \mid \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{M'A_i} \right\rangle \end{aligned}$$

Ce que nous voulions

17.6.3 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien. On considère une famille finie de points pondérés $\{(A_i, \alpha_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$ et f est la fonction scalaire de Leibniz associée.

1. Si la somme des coefficients est nulle, c'est à dire si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, alors le barycentre du système pondéré $\{(A_i, \alpha_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$ n'existe pas et $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ est un vecteur constant pour tout $M \in \mathcal{E}$ et posons $\overrightarrow{a} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$. Alors :
   Pour tout $M \in \mathcal{E}$ et $M' \in \mathcal{E}$, nous avons $f(M) = f(M') + 2\left\langle \overrightarrow{MM'} \mid \overrightarrow{a} \right\rangle$
2. Si la somme des coefficients est non nulle, c'est à dire si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, alors le barycentre G du système pondéré $\{(A_i, \alpha_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$ existe. Alors :
   Pour tout $M \in \mathcal{E}$ nous avons $f(M) = f(G) + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) MG^2$

Démonstration

1. Supposons donc $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$

   Alors, d'après 17.6.2, nous avons $f(M) = f(M') + 2\left\langle \overrightarrow{MM'} \mid \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{M'A_i} \right\rangle$. Or, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{M'A_i} = \overrightarrow{a}$ où $\overrightarrow{a}$ est un vecteur constant.
   Nous avons donc $f(M) = f(M') + 2\left\langle \overrightarrow{MM'} \mid \overrightarrow{a} \right\rangle$
2. Supposons maintenant que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$
   Alors le système pondéré $\{(A_i, \alpha_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$ admet un barycentre G. Toujours d'après 17.6.2, nous pouvons écrire :

$$f(M) = f(G) + 2\left\langle \overrightarrow{MG} \mid \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} \right\rangle + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) MG^2$$

   Or, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$. Donc $f(M) = f(G) + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) MG^2$

17.6.4 Théorème

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien, une famille finie de points pondérés $\{(A_i, \alpha_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$ et f est la fonction scalaire de Leibniz associée.

Soit $k \in \mathbb{R}$ et $S_k = f^{-1}(\{k\}) = \left\{ M \in \mathcal{E} \text{ tels que } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left\| \overrightarrow{MA_i} \right\|^2 = k \right\}$. Alors :

1. Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, alors :
   - $S_k = \emptyset$
   - Ou bien $S_k = \{G\}$
   - Ou bien $S_k = \left\{ M \in \mathcal{E} \text{ tels que } \left\| \overrightarrow{MA_i} \right\|^2 = \dfrac{k - f(G)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \right\}$
2. Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, alors :
   - $S_k = \emptyset$
   - Ou bien $S_k = \mathcal{E}$
   - Ou bien S_k est un hyperplan affine

Démonstration

1. <u>Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$</u>

   Alors, d'après 17.6.3, nous avons : $f(M) = f(G) + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) MG^2$ et donc

   $$M \in S_k \iff f(G) + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) MG^2 = k \iff MG^2 = \frac{k - f(G)}{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right)}$$

   Ainsi, nous pouvons considérer 3 cas :
   - Si $\dfrac{k - f(G)}{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right)} < 0$, alors $S_k = \emptyset$
   - Si $\dfrac{k - f(G)}{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right)} = 0$, alors $S_k = \{G\}$
   - Si $\dfrac{k - f(G)}{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right)} > 0$, alors $S_k = \left\{ M \in \mathcal{E} \text{ tels que } \left\| \overrightarrow{MA_i} \right\|^2 = \dfrac{k - f(G)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \right\}$
2. <u>Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$</u>

   Soit $O \in \mathcal{E}$ un point quelconque de $\mathcal{E}$.

   Alors, toujours d'après 17.6.3, et pour tout $M \in \mathcal{E}$, nous avons : $f(M) = f(O) + 2 \left\langle \overrightarrow{MO} \mid \overrightarrow{a} \right\rangle$ où $\overrightarrow{a}$ est un vecteur indépendant des choix de O et de M.

Nous avons :

$$M \in S_k \iff f(O) + 2\left\langle \overrightarrow{MO} \mid \overrightarrow{a} \right\rangle = k \iff \frac{k - f(O)}{2} = \left\langle \overrightarrow{MO} \mid \overrightarrow{a} \right\rangle$$

▷ Si $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ et $\dfrac{k - f(O)}{2} \neq 0$, alors $S_k = \emptyset$

▷ Si $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ et $\dfrac{k - f(O)}{2} = 0$, alors l'équation $\dfrac{k - f(O)}{2} = \left\langle \overrightarrow{MO} \mid \overrightarrow{a} \right\rangle$ est vérifiée pour tout $M \in \mathcal{E}$ et $S_k = \mathcal{E}$

▷ Supposons $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$.
Soit D la droite de $\mathcal{E}$ passant par O et de vecteur directeur $\overrightarrow{a}$. Pour tout point $H \in D$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{OH} = \lambda \overrightarrow{a}$. Existe-t-il $H_0 \in D$ tel que $H_0 \in S_k$?
Posons $\overrightarrow{OH_0} = \lambda_0 \overrightarrow{a}$. Alors

$$\frac{k - f(O)}{2} = \left\langle \overrightarrow{H_0O} \mid \overrightarrow{a} \right\rangle = \left\langle -\lambda_0 \overrightarrow{a} \mid \overrightarrow{a} \right\rangle = -\lambda_0 \left\langle \overrightarrow{a} \mid \overrightarrow{a} \right\rangle = -\lambda_0 \left\| \overrightarrow{a} \right\|^2$$

D'où nous tirons $\lambda_0 = \dfrac{f(O) - k}{2\left\| \overrightarrow{a} \right\|^2}$
Donc $H_0 \in D$ existe et même, H_0 est unique.
Pour $M \in \mathcal{E}$, nous avons :

$$\left\langle \overrightarrow{MO} \mid \overrightarrow{a} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{MH_0} + \overrightarrow{H_0O} \mid \overrightarrow{a} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{MH_0} \mid \overrightarrow{a} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{H_0O} \mid \overrightarrow{a} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{MH_0} \mid \overrightarrow{a} \right\rangle + \frac{k - f(O)}{2}$$

Donc :

$$M \in S_k \iff \left\langle \overrightarrow{MO} \mid \overrightarrow{a} \right\rangle = \frac{k - f(O)}{2} = \left\langle \overrightarrow{MH_0} \mid \overrightarrow{a} \right\rangle + \frac{k - f(O)}{2} \iff \left\langle \overrightarrow{MH_0} \mid \overrightarrow{a} \right\rangle = 0$$

Donc $M \in S_k \iff S_k \perp \overrightarrow{a}$
S_k est donc l'hyperplan orthogonal à $\overrightarrow{a}$ passant par H_0

Remarque 16 :

1. Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$
   (a) Si $\mathcal{E}$ est de dimension 2, autrement dit, dans le plan affine $\mathcal{P}$, S_k peut être une droite affine
   (b) Si $\mathcal{E}$ est de dimension 3, S_k peut être un plan affine
2. Lorsque $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$
   (a) Si $\mathcal{E}$ est de dimension 2, autrement dit, dans le plan affine $\mathcal{P}$, S_k est un cercle de centre G et de rayon $R = \sqrt{\dfrac{k - f(G)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}}$
   (b) Si $\mathcal{E}$ est de dimension 3, S_k est une sphère de centre G et de rayon $R = \sqrt{\dfrac{k - f(G)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}}$

Exercice résolu

A et B sont 2 points distincts de l'espace affine $\mathcal{E}$. C est le milieu du segment $[A;B]$.
Etudier, en fonction des réels m et k l'ensemble S des points $M \in \mathcal{E}$ tels que :

$$MA^2 + mMB^2 - 2MC^2 = k$$

Examiner les cas où $m = 3$ et $k = AB^2$ L'ensemble S est la surface de niveau k de la fonction numérique de Leibniz F associée au système pondéré $\{(A,1)\,;(B,m)\,;(C,-2)\}$

1. Si la masse totale est nulle, c'est à dire si $1+m-2=0 \iff m=1$, alors le vecteur $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$ est constant, et nous avons :
$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0}$$
D'après 17.6.3, nous avons, pour tout $M \in \mathcal{E}$, $f(M) = f(A) + 2\left\langle \overrightarrow{MM'} \mid \overrightarrow{0} \right\rangle = f(A)$
Or, $f(A) = AA^2 + AB^2 - 2AC^2 = AB^2 - 2 \times \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2 = \dfrac{AB^2}{2}$
Ainsi, pour tout $M \in \mathcal{E}$, $f(M) = \dfrac{AB^2}{2}$ D'où
   - ⋆ Si $k \neq \dfrac{AB^2}{2}$, alors $S = \emptyset$
   - ⋆ Si $k = \dfrac{AB^2}{2}$, alors $S = \mathcal{E}$
2. Supposons $m \neq 1$, c'est à dire que le système pondéré $\{(A,1)\,;(B,m)\,;(C,-2)\}$ admet un barycentre G, et d'après 17.6.3, nous avons $f(M) = f(G) + (m-1)\,MG^2$ et donc $S = \left\{M \in \mathcal{E} \text{ tels que } MG^2 = \dfrac{k-f(G)}{m-1}\right\}$, et nous retrouvons les résultats :
   - ⋆ Si $\dfrac{k-f(G)}{m-1} > 0$, S est la sphère de centre G et de rayon $R = \sqrt{\dfrac{k-f(G)}{m-1}}$
   - ⋆ Si $\dfrac{k-f(G)}{m-1} = 0$, S est réduit au point G, c'est à dire $S = \{G\}$
   - ⋆ Si $\dfrac{k-f(G)}{m-1} < 0$, $S = \emptyset$
3. Supposons $m = 3$ et $k = AB^2$
Le barycentre G vérifie, pour tout $M \in \mathcal{E}$:
$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right)$$
En particulier si $M = A$, nous avons $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{2}\left(3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{1}{2}\left(3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AB}$ et donc $G = B$
D'où $f(G) = BA^2 + 3BB^2 - 2BC^2 = \dfrac{AB^2}{2}$.
Donc $\dfrac{k-f(G)}{m-1} = \dfrac{AB^2 - \frac{AB^2}{2}}{2} = \dfrac{AB^2}{4}$
S est donc la sphère de centre B et de rayon $\dfrac{AB}{2} = BC$

17.6.5 Exercices

Exercice 27 :

Quel est, dans $\mathbb{C}$, ensemble des nombres complexes, les nombres vérifiant :
$$2\left|z-i\right|^2 - 3\left|z-(1-i)\right|^2 + 4\left|z-1\right|^2 = 5$$

Exercice 28 :

On considère un espace affine quelconque $\mathcal{E}$, A et B, 2 points de $\mathcal{E}$. Quel est l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $\left\langle \overrightarrow{MA} \mid \overrightarrow{MB} \right\rangle = 0$

Exercice 29 :

Nous nous situons dans le plan $\mathcal{P}$, espace affine de dimension 2
Considérons un carré $ABCD$.

1. Démontrer que l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que :
$$\left\langle \left(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right) \mid \left(\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}\right) \right\rangle = 0$$
est un cercle.
2. Trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que :
$$\left\langle \left(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right) \mid \left(\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}\right) \right\rangle = k$$
Où k est un réel donné. Discuter suivant les valeurs de $k \in \mathbb{R}$
3. Trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que :
$$\left\| \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} \right\| = \left\| \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD} \right\|$$

Exercice 30 :

Nous nous situons dans le plan $\mathcal{P}$, espace affine de dimension 2
Considérons un carré $ABCD$ de côté 5

1. Trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que on ait l'égalité :
$$3MA^2 + 2MB^2 = 3MC^2 + 2MD^2$$
2. Trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ qui vérifient l'égalité :
$$3MA^2 + 2MB^2 = 3MC^2 + 2MD^2 = 135$$
3. Trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que
$$3MA^2 + 2MB^2 = 3MC^2 + 2MD^2 = k$$
Où k est un réel donné. Discuter suivant les valeurs de $k \in \mathbb{R}$

Exercice 31 :

Nous nous situons dans le plan $\mathcal{P}$, espace affine de dimension 2
Considérons un triangle ABC.
Quel est le point $M \in \mathcal{P}$ pour lequel la somme $MA^2 + MB^2 + MC^2$ soit minimale ?

Exercice 32 :

Nous nous situons dans le plan $\mathcal{P}$, espace affine de dimension 2
Considérons un triangle ABC non équilatéral, et nous appelons G le centre de gravité.
On pose $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$

1. Démontrer que $GA^2 = \dfrac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{9}$
2. En déduire la valeur de $\left(b^2 - c^2\right) GA^2 + \left(c^2 - a^2\right) GB^2 + \left(a^2 - b^2\right) GC^2$
3. Trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que
$$\left(b^2 - c^2\right) MA^2 + \left(c^2 - a^2\right) MB^2 + \left(a^2 - b^2\right) MC^2 = 0$$

Exercice 33 :

Nous nous situons dans le plan $\mathcal{P}$, espace affine de dimension 2

1. Soit ABC un triangle rectangle en A et nous posons $BC = 2a$.
   Etudier, suivant les valeurs du réel $k \in \mathbb{R}$, l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ qui vérifient l'égalité :
   $$4MA^2 - MB^2 - MC^2 = k$$
   Préciser l'ensemble lors que $k = 4a^2$
2. Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A et nous posons $AC = BA = a$
   Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ qui vérifient :
   $$MA^2 - MB^2 + MC^2 \leqslant a^2$$

17.7 Exercices corrigés

17.7.1 Exercices issus du cours sur le calcul barycentrique

Exercice 1 :

Montrer que si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, alors $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. Avons nous la réciproque ?

Facile !! Il faut utiliser la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$$

De l'hypothèse $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, nous avons $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0}$. D'où le résultat, et la réciproque est évidente !!

Exercice 4 :

Donner une représentation paramétrique et une équation cartésienne des plans $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ où $A(1,2,1)$ $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

1. Equation paramétrique

   Soit $M \in (A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$; on pose $M(x,y,z)$. Alors, $\overrightarrow{AM} = \lambda u + \mu v$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Comme $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-1 \end{pmatrix}$ et donc nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{rl} x-1 = & 2\lambda + 3\mu \\ y-2 = & \lambda + \mu \\ z-1 = & -2\lambda \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} x = & 2\lambda + 3\mu + 1 \\ y = & \lambda + \mu + 2 \\ z = & -2\lambda + 1 \end{array} \right. \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}$$

2. Equation cartésienne

   Nous utilisons, dans cette question le déterminant.

$$M \in (A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \iff \det\left(\overrightarrow{AM}, u, v\right) = 0$$

   Nous avons :

$$\begin{array}{rcl} \det\left(\overrightarrow{AM}, u, v\right) & = & \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ y-2 & 1 & 1 \\ z-1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \\ & = & (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ & = & 2(x-1) - 6(y-2) - (z-1) \\ & = & 2x - 6y - z + 11 \end{array}$$

   L'équation cartésienne du plan $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est donc $2x - 6y - z + 11 = 0$

Vous aurez remarqué que je n'ai pas corrigé la totalité de l'exercice ; les autres items se résolvent de la même manière

Exercice 5 :

Le plan affine $\mathcal{P}$ est muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}(O, i, j)$. A tout réel $m \in \mathbb{R}$, nous associons la droite D_m d'équation :

$$(2m-1)x + (3-m)y - 7m + 6 = 0$$

1. *Déterminer $m \in \mathbb{R}$ tel que :*

(a) *D_m soit parallèle à l'axe des abscisses*

Le vecteur directeur des droites D_m est du type $u_m = \begin{pmatrix} m-3 \\ 2m-1 \end{pmatrix}$. Pour que D_m soit parallèle à l'axe des abscisses, il faut que u_m soit colinéaire à i et donc que $\det(u_m, i) = 0$. Or :

$$\det(u_m, i) = \begin{vmatrix} m-3 & 1 \\ 2m-1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 2m$$

Donc D_m est parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si $m = \dfrac{1}{2}$. C'est donc la droite d'équation $\dfrac{5}{2}y + \dfrac{5}{2} = 0 \iff y + 1 = 0$

(b) *D_m soit parallèle à l'axe des ordonnées*

Le problème est identique!!
Pour que D_m soit parallèle à l'axe des ordonnées, il faut que u_m soit colinéaire à j et donc que $\det(u_m, j) = 0$. Or :

$$\det(u_m, j) = \begin{vmatrix} m-3 & 0 \\ 2m-1 & 1 \end{vmatrix} = m - 3$$

Donc D_m est parallèle à l'axe des ordonnées si et seulement si $m = 3$. C'est donc la droite d'équation $5x - 15 = 0 \iff x - 3 = 0$

(c) *D_m passe par le point $A(1, 1)$*

Nous devons donc avoir, $A \in D_m$, c'est à dire en remplaçant x et y par leur valeur :

$$(2m-1) + (3-m) - 7m + 6 = 0 \iff -6m + 8 = 0 \iff m = \frac{4}{3}$$

Donc, la droite $D_{\frac{4}{3}}$ d'équation $\dfrac{5}{3}x + \dfrac{5}{3}y - \dfrac{10}{3} = 0 \iff x + y - 2 = 0$ passe par le point $A(1, 1)$

(d) *D_m soit parallèle à la droite d'équation $2x + 3y - 1 = 0$*

Il n'y a pas de grande différence avec les questions précédentes : il faut donc que le vecteur directeur de D_m soit colinéaire à celui de la droite d'équation $2x + 3y - 1 = 0$; or, ce vecteur directeur est $v = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ces 2 vecteurs sont colinéaires si et seulement si $\det(u_m, v) = 0$. Or :

$$\det(u_m, v) = \begin{vmatrix} m-3 & -3 \\ 2m-1 & 2 \end{vmatrix} = 2m - 6 + 3(2m-1) = 8m - 9$$

Donc D_m est parallèle à lla droite d'équation $2x + 3y - 1 = 0$ si et seulement si $m = \dfrac{9}{8}$. C'est donc la droite d'équation $\dfrac{10}{8}x + \dfrac{15}{8}y - \dfrac{15}{8} = 0 \iff 2x + 3y - 3 = 0$

2. *Démontrez que toutes les droites D_m passent par un point fixe F dont on précisera les coordonnées.*

On appelle (x_F, y_F) les coordonnées de F. Nous devons donc avoir, pour tout $m \in \mathbb{R}$

$$(2m-1)x_F + (3-m)y_F - 7m + 6 = 0 \iff m(2x_F - y_F - 7) + (3y_F - x_F + 6) = 0$$

Ce qui nous conduit au système :

$$\left\{ \begin{array}{rl} 2x_F - y_F - 7 = & 0 \\ 3y_F - x_F + 6 = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} 2x_F - y_F = & 7 \\ -x_F + 3y_F = & -6 \end{array} \right.$$

D'où nous tirons $x_F = 3$ et $y_F = -1$. Le point $F(3, -1)$ est donc le point fixe des droites D_m

Exercice 6 :

Le plan affine $\mathcal{P}$ est muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}(O, i, j)$.
A tout réel $m \in \mathbb{R}$, nous associons les droites D_m et Δ_m d'équation :

$$D_m : \quad (m+2)\,x + (3-2m)\,y + 3m - 8 = 0$$
$$\Delta_m : \quad (9m-3)\,x + (10-8m)\,y - 8m - 2 = 0$$

1. *Démontrez que toutes les droites D_m passent par un point fixe A dont on précisera les coordonnées.*
   C'est simple et ressemble à l'exercice précédent.
   On appelle (x_A, y_A) les coordonnées de A. Nous devons donc avoir, pour tout $m \in \mathbb{R}$
   $$(m+2)\,x_A + (3-2m)\,y_A + 3m - 8 = 0 \Longleftrightarrow m\,(x_A - 2y_A + 3) + (2x_A + 3y_A - 8) = 0$$
   Ce qui nous conduit au système :
   $$\begin{cases} x_A - 2y_A + 3 = & 0 \\ 2x_A + 3y_A - 8 = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_A - 2y_A = & -3 \\ 2x_A + 3y_A = & 8 \end{cases}$$
   D'où nous tirons $x_A = 1$ et $y_A = 2$. Le point $A\,(1,2)$ est donc le point fixe des droites D_m
2. *Démontrez que toutes les droites Δ_m passent par un point fixe B dont on précisera les coordonnées.*
   On remet ça!!
   On appelle (x_B, y_B) les coordonnées de B. Nous devons donc avoir, pour tout $m \in \mathbb{R}$
   $$(9m-3)\,x_B + (10-8m)\,y_B - 8m - 2 = 0 \Longleftrightarrow m\,(9x_B - 8y_B - 8) + (-3x_B + 10y_B - 2) = 0$$
   Ce qui nous conduit au système :
   $$\begin{cases} 9x_B - 8y_B - 8 = & 0 \\ -3x_B + 10y_B - 2 = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 9x_B - 8y_B = & 8 \\ -3x_B + 10y_B = & 2 \end{cases}$$
   D'où nous tirons $x_B = \dfrac{16}{11}$ et $y_B = \dfrac{7}{11}$. Le point $B\left(\dfrac{16}{11}, \dfrac{7}{11}\right)$ est donc le point fixe des droites Δ_m
3. *Est-il possible de trouver $m \in \mathbb{R}$ tel que $D_m = \Delta_m$?*
   La question est mal posée; elle sous-entend qu'il n'y a qu'un seul $m \in \mathbb{R}$ tel que $D_m = \Delta_m$; or , il n'en est rien.
   Raisonnons!! Si les familles de droites D_m et Δ_m ont des droites communes, elles passent forcément par les points A et B et à ce moment là, nous avons $D_m = \Delta_m = (AB)$. C'est donc la droite (AB) qui est la droite commune aux D_m et aux Δ_m
   - Recherchons $m_0 \in \mathbb{R}$ tel que la droite D_{m_0} passent par B. Comme toutes les droites D_m passent par A, nous aurons $D_{m_0} = (AB)$.
     Mettons dans l'équation de D_m les coordonnées de B.
     $$\begin{aligned} \frac{16}{11}(m+2) + \frac{7}{11}(3-2m) + 3m - 8 = 0 \Longleftrightarrow & \quad m\left(\frac{16}{11} - \frac{14}{11} + 3\right) + \left(\frac{32}{11} + \frac{21}{11} - 8\right) = 0 \\ \Longleftrightarrow & \quad \frac{35}{11}m + \frac{35}{11} = 0 \\ \Longleftrightarrow & \quad m = -1 \end{aligned}$$
     Donc la droite D_{-1} est aussi la droite (AB)
   - Recherchons $m_1 \in \mathbb{R}$ tel que la droite D_{m_1} passent par A. Comme toutes les droites Δ_m passent par B, nous aurons $\Delta_{m_1} = (AB)$.
     Mettons dans l'équation de Δ_m les coordonnées de A.
     $$\begin{aligned} (9m-3) + 2\,(10-8m) - 8m - 2 = 0 \Longleftrightarrow & \quad m\,(9 - 16 - 8) + (-3 + 20 - 2) = 0 \\ \Longleftrightarrow & \quad -15m + 15 = 0 \\ \Longleftrightarrow & \quad m = 1 \end{aligned}$$
     Donc la droite Δ_1 est aussi la droite (AB)
   - En conclusion, nous avons $D_{-1} = \Delta_1 = (AB)$

   Ce sont bien des $m \in \mathbb{R}$ différents, mais, c'est une même droite!!

Exercice 7 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension quelconque
Un triangle $\{ABC\}$ de l'espace $\mathcal{E}$ étant donné, on considère l'application f de $\mathcal{E}$ dans E qui, à à tout point $M \in \mathcal{E}$, associe le vecteur : $\overrightarrow{f(M)} = -5\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$.

1. *Pour tout bipoint (M, M') démontrer que $\overrightarrow{f(M)} - \overrightarrow{f(M')} = -2\overrightarrow{MM'}$*

   Il suffit de refaire la démonstration du cours en utilisant la relation de Chasles

$$\overrightarrow{f(M)} - \overrightarrow{f(M')} = -5\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} + 5\overrightarrow{M'A} - \overrightarrow{M'B} - 2\overrightarrow{M'C} = -2\overrightarrow{MM'}$$

   Existe-t-il un point $G \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{f(G)} = \overrightarrow{0}$?

   Si ce point G existe, alors $-5\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$; donc, comme

$$\begin{aligned} \overrightarrow{0} = -5\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} &= 5\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} \\ &= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{AG} \\ &= \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AG} \end{aligned}$$

   D'où nous déduisons $2\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{AG} = \dfrac{-1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
   Ce point G existe donc !!
   Exprimer alors le vecteur $\overrightarrow{f(M)}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{MG}$

   De l'identité $\overrightarrow{f(M)} - \overrightarrow{f(M')} = -2\overrightarrow{MM'}$, en remplaçant M' par G, nous avons :

$$\overrightarrow{f(M)} = -2\overrightarrow{MG}$$

2. *Montrer que G appartient au plan (ABC) et déterminer sa position avec précision en indiquant ses coordonnées dans un repère bien choisi du plan (ABC).*

   Nous avons $\overrightarrow{AG} = \dfrac{-1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, ce qui montre bien que G est dans le plan (ABC).

   En choisissant comme repère affine $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, G a pour coordonnées $\left(\dfrac{-1}{2}, -1\right)$

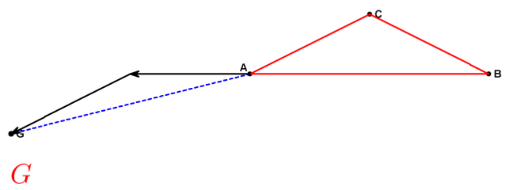


FIGURE 17.7 – Une représentation de G dans le plan (ABC)

3. *Application :*

   (a) *A tout point $M \in \mathcal{E}$ distinct de G, on associe la droite D_M passant par M et de vecteur directeur $\overrightarrow{f(M)}$. Démontrer que les droites D_M passent par un point fixe.*

   Redéfinissons D_M :

$$D_M = \left\{X \in \mathcal{E} \text{ tels que } \overrightarrow{MX} = \lambda\overrightarrow{f(M)}\right\} = \left\{X \in \mathcal{E} \text{ tels que } \overrightarrow{MX} = \lambda\overrightarrow{MG}\right\}$$

   Ce quimontre que les points X, M et G sont alignés.
   Toutes les droites passent donc par G

(b) *A tout point $M \in \mathcal{E}$, on associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{f}(M)$ Reconnaître l'application g qui à M fait correspondre M'*

Par définition, nous avons donc :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{f(M)} \Longleftrightarrow \overrightarrow{MM'} = -2\overrightarrow{MG} \Longleftrightarrow \overrightarrow{GM'} = 3\overrightarrow{GM}$$

g est donc une homothétie de centre G et de rapport 3

Exercice 8 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension quelconque.
Nous considérons le système de points pondérés $\{(A_1, \alpha), (A_2, \alpha), (A_3, \alpha) \cdots (A_n, \alpha)\}$ avec $\alpha \neq 0$.
Montrer que si G est l'isobarycentre du système, alors, pour tout point $O \in \mathcal{E}$, nous avons

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}$$

Voilà une démonstration qui ne pose pas de difficulté.
Pour tout point $O \in \mathcal{E}$, nous avons $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha\overrightarrow{OA_i}\right) = \dfrac{\alpha}{n\alpha}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}\right)$

Ce que nous voulions

Exercice 9 :

Soient A, B et C 3 points du plan affine, d'affixe respective $z_A = 1 + i$, $z_B = -1 + i$ et $z_C = i$
Quelle est l'affixe z_G du barycentre du système pondéré $\{(A, 1), (B, -4), (C, +5)\}$
En revenant sur les propriétés des barycentres, G étant celui du système pondéré $\{(A, 1), (B, -4), (C, +5)\}$, pour tout point $O \in \mathcal{P}$, nous avons :

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} - 4\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{OC}$$

En particulier si O est l'origine, nous pouvons passer aux affixes, et :

$$z_G = z_A - 4z_B + 5z_C = 1 + i - 4(-1 + i) + 5i = 5 + 2i$$

Donc $z_G = 5 + 2i$

Exercice 10 :

Dans le plan affine $\mathcal{P}$, on se donne deux points distincts A et B

1. *Quelles sont les conditions sur $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ pour qu'il existe $M' \in \mathcal{P}$ tel que :*

$$\alpha\overrightarrow{M'A} + \beta\overrightarrow{M'B} + 2\overrightarrow{MM'} = 0$$

   M' apparaît comme le barycentre du système pondéré $\{(A, \alpha); (B, \beta); (M, 2)\}$.
   Ainsi, pour que M' existe, il faut que $\alpha + \beta + 2 \neq 0$, c'est à dire $\alpha + \beta \neq -2$

2. *Ces conditions étant réalisées, soit f l'application du plan $\mathcal{P}$, qui à $M \in \mathcal{P}$ associe $M' \in \mathcal{P}$.*
   Déterminer suivant les valeurs du couple (α, β) l'ensemble des points invariants par f

   En utilisant les résultats sur les barycentres, nous avons, pour tout point $X \in \mathcal{P}$:

$$\overrightarrow{XM'} = \frac{1}{\alpha + \beta + 2}\left(\alpha\overrightarrow{XA} + \beta\overrightarrow{XB} + 2\overrightarrow{XM}\right)$$

En particulier si $X = M$:

$$\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{\alpha+\beta+2}\left(\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}\right)$$

Et si M est invariant par f, alors $M = M'$ et donc :

$$\frac{1}{\alpha+\beta+2}\left(\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}\right) = \overrightarrow{0} \iff \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$$

Or :

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0} \iff \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \iff (\alpha+\beta)\,\overrightarrow{MA} = -\beta\overrightarrow{AB}$$

Ainsi :

- ▷ Si $\alpha + \beta = 0$, nous devrions avoir $-\beta\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$, ce qui est impossible. Il ne peut donc y avoir de point fixe
- ▷ Si $\alpha + \beta \neq 0$ il existe donc un seul point I invariant par f, défini par $\overrightarrow{AI} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$.

  On peut faire remarquer que nous avons aussi la relation $(\alpha+\beta)\,\overrightarrow{AI} = \beta\overrightarrow{AB}$

3. *On suppose $\alpha + \beta = 0$; Quelle est la nature de f ?*

   Alors, nous avons $\beta = -\alpha$ et nous pouvons écrire, pour tout point $X \in \mathcal{P}$:

$$\overrightarrow{XM'} = \frac{1}{2}\left(\alpha\overrightarrow{XA} - \alpha\overrightarrow{XB} + 2\overrightarrow{XM}\right) \iff 2\overrightarrow{XM'} = \alpha\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{XM}$$

   Ce qui nous done : $2\overrightarrow{XM'} = \alpha\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{XM'} + 2\overrightarrow{M'M} \iff \overrightarrow{MM'} = \dfrac{\alpha}{2}\overrightarrow{BA}$

   f est donc une translation de vecteur $\dfrac{\alpha}{2}\overrightarrow{BA}$

4. *On suppose $\alpha + \beta \neq 0$; Quelle est la nature de f ?*

   Nous pouvons écrire, pour tout point $X \in \mathcal{P}$:

$$\overrightarrow{XM'} = \frac{1}{\alpha+\beta+2}\left(\alpha\overrightarrow{XA} + \beta\overrightarrow{XB} + 2\overrightarrow{XM}\right)$$

   En remplaçant, en particulier X par I, le point invariant, nous avons :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IM'} &= \frac{1}{\alpha+\beta+2}\left(\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IM}\right)\\
&= \frac{1}{\alpha+\beta+2}\left(\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{IM}\right)\\
&= \frac{1}{\alpha+\beta+2}\left((\alpha+\beta)\,\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{IM}\right)\\
&= \frac{1}{\alpha+\beta+2}\left(\beta\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{IM}\right)\\
&= \frac{2}{\alpha+\beta+2}\overrightarrow{IM}
\end{aligned}$$

   f est donc une homothétie de centre I et de rapport $\dfrac{2}{\alpha+\beta+2}$

Exercice 11 :

Dans le plan affine $\mathcal{P}$, on considère le triangle $\{A, B, C\}$

1. *Définir, par ses coordonnées dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ le barycentre G du système pondéré $\{(A,-2), (B,4), (C,1)\}$*

   Comme toujours, pour tout $M \in \mathcal{P}$, nous avons $\overrightarrow{MG} = \dfrac{1}{3}\left(-2\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)$, et en faisant, en particulier $M = A$, nous avons :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$$

   D'où les coordonnées de G dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ sont $G\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$

2. *Soit $M \in \mathcal{P}$ de coordonnées (x, y) dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$*
   Montrer que M est le barycentre du système pondéré $\{(A, 1-x-y), (B, x), (C, y)\}$

   C'est très simple : il siffit d'écrire $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$. En réinjectant M, nous obtenons :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AM} + x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{AM} + y\overrightarrow{MC} \iff (1-x-y)\,\overrightarrow{AM} + x\overrightarrow{BM} + y\overrightarrow{CM}$$

   Ainsi, M est le barycentre du système pondéré $\{(A, 1-x-y), (B, x), (C, y)\}$

Exercice 12 :

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension quelconque et $A \in \mathcal{E}$ et $B \in \mathcal{E}$ tels que $A \neq B$. Soit M un point de la droite (AB) de coordonnées barycentriques dans le repère affine (A, B) (α, β).
Montrer que $M \in [A; B]$ si et seulement si $\alpha \times \beta \geqslant 0$

1. Supposons $M \in [A; B]$
   Alors M apparaît donc comme le barycentre de la famille pondérée $\{(A, (1-t)); (B, t)\}$ avec $t \in [0; 1]$ et nous avons bien $t\,(1-t) \geqslant 0$.
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$; M apparaît aussi comme le barycentre de la famille pondérée $\{(A, \lambda\,(1-t)); (B, \lambda t)\}$ avec $t \in [0; 1]$ et nous avons aussi $\lambda^2 t\,(1-t) \geqslant 0$.
2. Supposons $M \in \mathcal{E}$, de coordonnées barycentriques dans le repère affine (A, B) (α, β) telles que $\alpha \times \beta \geqslant 0$
   Il faut remarquer que α et β sont de même signe, et quitte à les multiplier par -1, on peut les supposer tous les deux positifs.
   M étant barycentre de $\{(A, \alpha)\,(B, \beta)\}$, nous pouvons écrire, pour tout $X \in \mathcal{E}$:

$$\overrightarrow{XM} = \frac{1}{\alpha + \beta}\left(\alpha\overrightarrow{XA} + \beta\overrightarrow{XB}\right)$$

   En particulier si $X = A$, nous avons $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$

   Comme $0 \leqslant \dfrac{\beta}{\alpha + \beta} \leqslant 1$, nous avons bien $M \in [A; B]$
3. Prolongement
   Si nous considérons un triangle $\{A, B, C\}$ et M un point de coordonnées barycentriques (α, β, γ) avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ dans le repère affine (A, B, C). **L'intérieur** du triangle $\{A, B, C\}$ est caractérisé par la relation $\alpha \times \beta \times \gamma \geqslant 0$

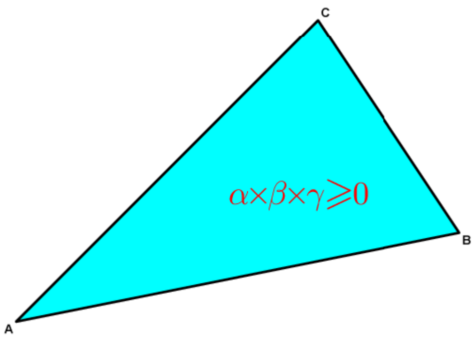


FIGURE 17.8 – Visualisation de l'intérieur d'un triangle $\{A, B, C\}$

17.7.2 Exercices sur le calcul barycentrique

Exercice 13 :

Soit $\mathcal{P}$ le plan affine, et A, B et C 3 points de $\mathcal{P}$. On désigne par G l'isobarycentre du triangle $\{A, B, C\}$, par A' le milieu du segment $[B, C]$, par B' le milieu du segment $[A, C]$ et par C' le milieu du segment $[A, B]$.

On désigne aussi par A" le symétrique de A par rapport à A', par B" le symétrique de B par rapport à B' et par C" le symétrique de C par rapport à C'
Déterminer, dans le repère affine (A, B, C) un système de coordonnées barycentriques des points A, B, C, A', B', C', A", B" et C"

1. La première chose est de faire une figure

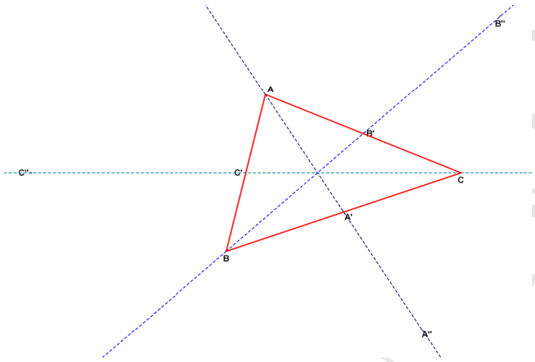


FIGURE 17.9 – Visualisation du problème

2. Recherche des coordonnées barycentriques dans le repère affine (A, B, C)
   (a) Pour le point A, c'est, évidemment $(1, 0, 0)$
   (b) Pour le point B, c'est, évidemment $(0, 1, 0)$
   (c) Pour le point C, c'est, évidemment $(0, 0, 1)$
   (d) Pour le point A', il faut considérer que A' est le milieu du segment $[B, C]$, donc $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{0}$ ou encore $0\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{0}$
   Les coordonnées barycentriques de A' sont donc $(0, 1, 1)$
   (e) Pour le point B', c'est, de la même manière $(1, 0, 1)$
   (f) Pour le point C', c'est donc $(1, 1, 0)$
   (g) Pour le point A'', nous avons $\overrightarrow{A''A} = 2\overrightarrow{A''A'} \iff -\overrightarrow{A''A} + 2\overrightarrow{A''A'} = \overrightarrow{0}$ et A'' apparaît comme le barycentre du système pondéré $\{(A, -1)\,;(A', 2)\}$; comme A' est l'isobarycentre de B et C, nous avons :$2\overrightarrow{A''A'} = \overrightarrow{A''B} + \overrightarrow{A''C}$
   $$-\overrightarrow{A''A} + 2\overrightarrow{A''A'} = \overrightarrow{0} \iff -\overrightarrow{A''A} + \overrightarrow{A''B} + \overrightarrow{A''C} = \overrightarrow{0}$$
   Et donc A'' apparaît comme le barycentre du système pondéré $\{(A, -1)\,;(B, 1)\,,(C, 1)\}$.
   Les coordonnées barycentriques de A'' sont donc $(-1, 1, 1)$
   (h) Pour le point B'', c'est, de la même manière $(1, -1, 1)$
   (i) Pour le point C', c'est donc $(1, 1, -1)$

Exercice 14 :

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère affine (A, B, C)

1. *R et S étant les deux points de coordonnées barycentriques respectives $(-1, 2, 1)$ et $(2, 1, -1)$. Démontrer qu'un point M de coordonnées barycentriques (a, b, c) appartient à la droite (RS) si et seulement si $-3a + b - 5c = 0$*
   ⋆ On ré-écrit les hypothèses :

- ▷ $\overrightarrow{AR} = \dfrac{1}{2}\left(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
- ▷ $\overrightarrow{AS} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
- ▷ $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{a+b+c}\left(b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}\right)$

⋆ Si le point M est sur la droite (RS), il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{RM} = \lambda\overrightarrow{RS}$ Or :

- ▷ $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AR} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
- ▷ $\overrightarrow{RM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AR} = \dfrac{-a-c}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \dfrac{c-a-b}{2(a+b+c)}\overrightarrow{AC}$

⋆ Nous devons donc avoir :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{-a-c}{a+b+c} & = & \dfrac{-\lambda}{2} \\ \dfrac{c-a-b}{2(a+b+c)} & = & -\lambda \end{array}\right. \Longrightarrow \frac{-2a-2c}{a+b+c} = \frac{c-a-b}{2(a+b+c)} \Longrightarrow -4a-4c = c-a-b \Longrightarrow -3a+b-5c = 0$$

⋆ Supposons que M soit un point de coordonnées barycentriques (a,b,c) telles que $-3a+b-5c = 0$. Montrons que M appartient à la droite (RS) en montrant que $\overrightarrow{RM} = \lambda\overrightarrow{RS}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ est à trouver.

- ▷ Rappelons que $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, que $\overrightarrow{AS} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
- ▷ Nous avons aussi $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{a+b+c}\left(b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}\right)$, et comme $-3a+b-5c = 0 \Longleftrightarrow b = 3a+5c$, nous avons :$\overrightarrow{AM} = \dfrac{3a+5c}{4a+6c}\overrightarrow{AB} + \dfrac{c}{4a+6c}\overrightarrow{AC}$
- ▷ Nous avons :

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{RM} & = & \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AM} \\ & = & -\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \dfrac{3a+5c}{4a+6c}\overrightarrow{AB} + \dfrac{c}{4a+6c}\overrightarrow{AC} \\ & = & \left(\dfrac{3a+5c}{4a+6c} - 1\right)\overrightarrow{AB} + \left(\dfrac{c}{4a+6c} - \dfrac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC} \\ & = & \dfrac{3a+5c-4a-6c}{4a+6c}\overrightarrow{AB} + \dfrac{2c-4a-6c}{8a+12c}\overrightarrow{AC} \\ & = & \dfrac{-a-c}{4a+6c}\overrightarrow{AB} + \dfrac{-2c-2a}{4a+6c}\overrightarrow{AC} \\ & = & \dfrac{-a-c}{4a+6c}\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right) \end{array}$$

- ▷ Maintenant, nous avons :

$$\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AS} = -\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

C'est à dire que $\overrightarrow{RS} = -\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right)$ et nous démontrons ainsi que $\overrightarrow{RM} = \dfrac{a+c}{2a+3c}\overrightarrow{RS}$ et donc M appartient à la droite (RS)

2. (a) *Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des points M dont les coordonnées barycentriques (a,b,c) vérifient la relation $2a+b-c=0$. Démontrer que $\mathcal{D}$ est une droite.*

Soit $X \in \mathcal{D}$ de coordonnées barycentriques $(1,1,3)$ et $Y \in \mathcal{D}$ de coordonnées barycentriques $(-1,1,-1)$.
Il suffit de démontrer, comme dans la question précédente, que, pour tout $M \in \mathcal{D}$, nous avons $\overrightarrow{XM} = \lambda\overrightarrow{XY}$

(b) *Déterminer un système de coordonnées barycentriques du point d'intersection des droites (RS) et $\mathcal{D}$*

Si M de coordonnées barycentriques (a,b,c) est le point d'intersection des droites (RS) et $\mathcal{D}$, nous avons :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -3a+b-5c = & 0 \\ 2a+b-c = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -3a+b = & 5c \\ 2a+b & = c \end{array}\right. \Longrightarrow a = \frac{-4c}{5} \text{ et } b = \frac{13c}{5}$$

M a pour coordonnées barycentriques $\left(\frac{-4c}{5}, \frac{13c}{5}, c\right)$ avec $c \in \mathbb{R}^*$ ou encore $(-4c, 13c, 5c)$ avec $c \in \mathbb{R}^*$

Exercice 15 :

Dans le plan $\mathcal{P}$, on considère 3 points A, B et C non alignés. Quel est l'ensemble des points $P \in \mathcal{P}$ définis par :

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

lorsque M décrit une droite $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$

Soit G l'isobarycentre de $\{A, B, C\}$. Alors, nous avons, pour tout $M \in \mathcal{P}$, $3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$. Donc, si $P \in \mathcal{P}$ est tel que

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

, nous avons $\overrightarrow{MP} = 3\overrightarrow{MG}$
Or, $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GP}$, et nous avons donc :

$$\overrightarrow{MP} = 3\overrightarrow{MG} \Longleftrightarrow \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GP} = 3\overrightarrow{MG} \Longleftrightarrow \overrightarrow{GP} = -2\overrightarrow{GM}$$

Ainsi, la transformation qui à $M \in \mathcal{P}$ fait correspondre P tel que $\overrightarrow{GP} = -2\overrightarrow{GM}$ est une homothétie de rapport -2 et de centre G.
La transformée d'une droite, par une homothétie est une droite.

Exercice 16 :

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère affine (A, B, C). On appelle A' le milieu du segment $[BC]$, B' le milieu du segment $[DC]$ et C' le milieu du segment $[BA]$.
α est un réel différent de 1 et nous désignons par I le barycentre du système pondéré $\{(B, 1); (C, -\alpha)\}$
Déterminer les coordonnées barycentriques :

1. *De I dans le repère (A', B', C')*
2. *Du milieu M de $[AI]$ dans le repère (A', B', C')*

1. Pour tout point $O \in \mathcal{P}$, nous avons :

   ▷ $2\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$
   ▷ $2\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$
   ▷ $2\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$
   ▷ $(1-\alpha)\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OB} - \alpha\overrightarrow{OC}$

   Donc, en utilisant ces différentes égalités, nous tirons :
   ▷ $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OC'}$
   ▷ $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}$
   ▷ $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}$
   Donc, $(1-\alpha)\overrightarrow{OI} = (1-\alpha)\overrightarrow{OA'} - (1+\alpha)\overrightarrow{OB'} + (1+\alpha)\overrightarrow{OC'}$
   Les coordonnées barycentriques de I dans le repère (A', B', C') sont donc : $\left(1, \frac{-(1+\alpha)}{1-\alpha}, \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)$

2. Pour tout point $O \in \mathcal{P}$, nous avons $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OA}$. En remplaçant par ce qui a été trouvé au-dessus, nous avons :

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OA} \\ &= \overrightarrow{OA'} - \frac{(1+\alpha)}{1-\alpha}\overrightarrow{OB'} + \frac{(1+\alpha)}{1-\alpha}\overrightarrow{OC'} - \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} \\ &= -\left(\frac{(1+\alpha)}{1-\alpha} - 1\right)\overrightarrow{OB'} + \left(\frac{(1+\alpha)}{1-\alpha} + 1\right)\overrightarrow{OC'} \\ &= \frac{-2\alpha}{1-\alpha}\overrightarrow{OB'} + \frac{2}{1-\alpha}\overrightarrow{OC'} \end{aligned}$$

   D'où $\overrightarrow{OM} = \frac{-\alpha}{1-\alpha}\overrightarrow{OB'} + \frac{1}{1-\alpha}\overrightarrow{OC'}$
   Les coordonnées barycentriques de M dans le repère (A', B', C') sont donc : $\left(0, \frac{-\alpha}{1-\alpha}, \frac{1}{1-\alpha}\right)$

Exercice 17 :

Soit $\{A, B, C\}$ un triangle. Trouver les coordonnées barycentriques, dans le repère affine (A, B, C)

1. *Des points situés sur les côtés du triangle*
2. *Des points situés sur la médiane issue de A*
3. *Des points situés sur la parallèle à (AC) passant par l'isobarycentre du triangle $\{A, B, C\}$*

Commençons par faire une figure :

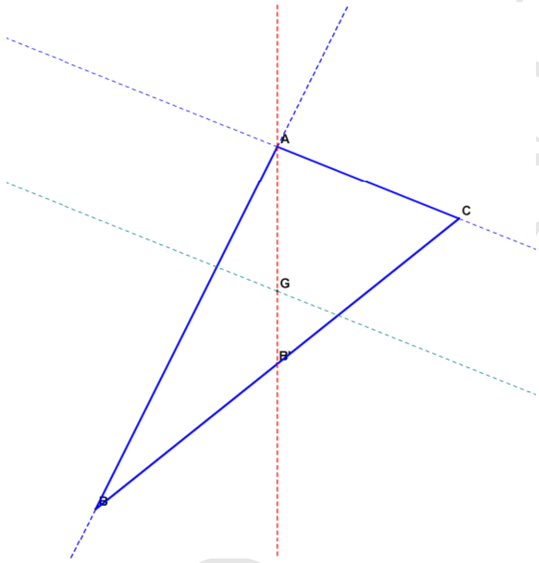


FIGURE 17.10 – Visualisation du problème

1. Nous n'allons nous intéresser qu'à la droite (AB)
   Si $M \in (AB)$, alors, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$
   Pour tout point $O \in \mathcal{P}$, nous avons : $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{AO} + \lambda\overrightarrow{OB}$, c'est à dire $\overrightarrow{OM} = (1-\lambda)\,\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$
   Ainsi, les coordonnées barycentriques des points situés sur la droite (AB), dans le repère affine (A, B, C), sont $((1-\lambda), \lambda, 0)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$
2. Soit M un point situé sur la médiane issue de A. Alors,
   $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AA'}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
   Pour tout point $O \in \mathcal{P}$, nous avons : $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{AO} + \lambda\overrightarrow{OA'}$, c'est à dire $\overrightarrow{OM} = (1-\lambda)\,\overrightarrow{AO} + \lambda\overrightarrow{OA'}$
   Or, $2\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, et donc $\overrightarrow{OM} = (1-\lambda)\,\overrightarrow{OA} + \frac{\lambda}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{\lambda}{2}\overrightarrow{OC}$
   Ainsi, les coordonnées barycentriques ,dans le repère affine (A, B, C), des points situés sur la médiane issue de A sont $\left((1-\lambda), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}\right)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$
3. Soit M un point situés sur la parallèle à (AC) passant par l'isobarycentre G du triangle $\{A, B, C\}$.
   Alors $\overrightarrow{GM} = \lambda\overrightarrow{AC}$
   Pour tout point $O \in \mathcal{P}$, nous avons : $\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{AO} + \lambda\overrightarrow{OC}$
   D'autre part, pour tout point $O \in \mathcal{P}$, nous avons $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ et donc :
   $$\overrightarrow{OM} = \left(\frac{1}{3} - \lambda\right)\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \left(\frac{1}{3} + \lambda\right)\overrightarrow{OC}$$
   Ainsi, les coordonnées barycentriques ,dans le repère affine (A, B, C), des points situés sur la parallèle à (AC) passant par l'isobarycentre G du triangle $\{A, B, C\}$ sont $\left(\frac{1}{3} - \lambda, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} + \lambda\right)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

Exercice 18 :

Soient A, A', B et B' quatre points du plan $\mathcal{P}$ tels que les droites (AA') et (BB') se coupent en I et que les droites (AB) et $(A'B')$ se coupent en L
Les coordonnées barycentriques de I dans le repère (A, A') sont (α, α') et (β, β') dans le repère (B, B').
Quelles sont les coordonnées barycentriques de L dans les repères (A, B) et (A', B')

Dans ce corrigé, nous ne faisons pas de figure puisque cette figure est déjà dans l'énoncé.

- ⋆ I étant barycentre de $\{(A, \alpha)\,;(A', \alpha')\}$, nous pouvons écrire, pour tout point $O \in \mathcal{P}$:

$$(\alpha + \alpha')\,\overrightarrow{OI} = \alpha\overrightarrow{OA} + \alpha'\overrightarrow{OA'}$$

- ⋆ De même, I est barycentre de $\{(B, \beta)\,;(B', \beta')\}$, nous pouvons écrire, pour tout point $O \in \mathcal{P}$:

$$(\beta + \beta')\,\overrightarrow{OI} = \beta\overrightarrow{OB} + \beta'\overrightarrow{OB'}$$

- ⋆ Et donc, pour tout point $O \in \mathcal{P}$:

$$(\beta + \beta')\left(\alpha\overrightarrow{OA} + \alpha'\overrightarrow{OA'}\right) = (\alpha + \alpha')\left(\beta\overrightarrow{OB} + \beta'\overrightarrow{OB'}\right)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\alpha\,(\beta + \beta')\,\overrightarrow{OA} - \beta\,(\alpha + \alpha')\,\overrightarrow{OB} = -\alpha'\,(\beta + \beta')\,\overrightarrow{OA'} + \beta'\,(\alpha + \alpha')\,\overrightarrow{OB'}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{1}{\alpha\beta' - \alpha\beta'}\left(\alpha\,(\beta + \beta')\,\overrightarrow{OA} - \beta\,(\alpha + \alpha')\,\overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{\alpha\beta' - \alpha\beta'}\left(-\alpha'\,(\beta + \beta')\,\overrightarrow{OA'} + \beta'\,(\alpha + \alpha')\,\overrightarrow{OB'}\right)$$

Appellons G le barycentre de $\{(A, \alpha\,(\beta + \beta'))\,, (B, -\beta\,(\alpha + \alpha'))\}$; alors, pour tout point $O \in \mathcal{P}$:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\alpha\beta' - \alpha\beta'}\left(\alpha\,(\beta + \beta')\,\overrightarrow{OA} - \beta\,(\alpha + \alpha')\,\overrightarrow{OB}\right)$$

Et $G \in (AB)$
Appellons G_1 le barycentre de $\{(A', -\alpha'\,(\beta + \beta'))\,, (B', \beta'\,(\alpha + \alpha'))\}$; alors, pour tout point $O \in \mathcal{P}$:

$$\overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{\alpha\beta' - \alpha\beta'}\left(-\alpha'\,(\beta + \beta')\,\overrightarrow{OA} + \beta'\,(\alpha + \alpha')\,\overrightarrow{OB}\right)$$

Et $G_1 \in (A'B')$
Nous avons donc $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OG_1}$, c'est à dire $G = G_1$ et $G \in (AB) \cap (A'B')$; donc $G = L$

- ▷ Les coordonnées affines de L dans le repère (A, B) sont donc $(\alpha\,(\beta + \beta')\,, -\beta\,(\alpha + \alpha'))$
- ▷ Les coordonnées affines de L dans le repère (A', B') sont donc $(-\alpha'\,(\beta + \beta')\,, \beta'\,(\alpha + \alpha'))$

17.7.3 Espaces affines euclidiens

Exercice 19 :

Nous nous situons dans le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ dans lequel nous avons mis un repère orthonormé $\mathcal{R}\,(O, i, j)$

1. *Soit $A \in \mathcal{P}$ un point de coordonnées $A\,(1, 1)$ et $u \in P$ de coordonnées $u\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$*

   Etudier l'ensemble $X = \left\{M \in \mathcal{P} \text{ tels que } \left\langle\overrightarrow{AM} \mid u\right\rangle = 0\right\}$

   Il est possible de traduire autrement l'expression $\left\langle\overrightarrow{AM} \mid u\right\rangle = 0$; c'est l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et u sont orthogonaux. En prenant pour coordonnées $M\,(x, y)$, nous avons $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix}$ et $\left\langle\overrightarrow{AM} \mid u\right\rangle = x - 1 + y - 1 = x + y - 2$

   L'ensemble X est donc LA droite passant par A et orthogonale au vecteur u d'équation $x+y-2 = 0$
2. *Qu'en est-il de l'ensemble $X_k = \left\{M \in \mathcal{P} \text{ tels que } \left\langle\overrightarrow{AM} \mid u\right\rangle = k\right\}$ où $k \in \mathbb{R}$*

   Cette fois ci, nous avons une droite d'équation $x + y - 2 = k \Longleftrightarrow x + y - (k + 2) = 0$
   C'est une droite parallèle à X et orthogonale à u

Exercice 21 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien et ABC un triangle (c'est à dire, trois points non alignés de $\mathcal{E}$). *Montrez que :*

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle$$

Quel résultat retrouve-t-on lorsque le triangle est rectangle en A ?

Commençons par visualiser :

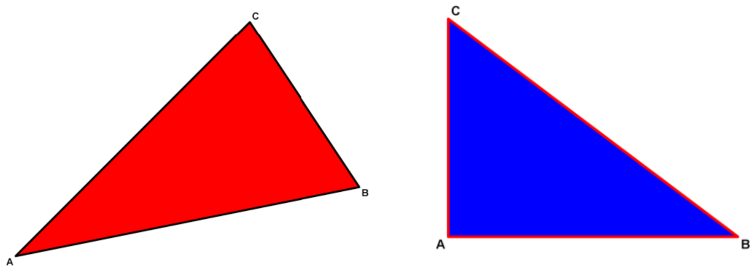


FIGURE 17.11 – Visualisation de l'exercice

Nous avons $BC^2 = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 = \left\langle \overrightarrow{BC} \mid \overrightarrow{BC} \right\rangle$

Or, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ et donc $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 = \left\langle \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \mid \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \right\rangle$

La bilinéarité du produit scalaire montre que :

$$\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 + 2\left\langle \overrightarrow{BA} \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle$$

Ce qui est équivalent à $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle$

Evidemment, si le triangle est rectangle en A, alors $\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle = 0$ et nous retrouvons le théorème de Pythagorre : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Exercice 22 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien et $ABCD$ un parallélogramme de $\mathcal{E}$. Montrez la formule :

$$AC^2 - BD^2 = 4\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{BC} \right\rangle$$

Faisons la figure pour visualiser (figure 17.12) :

FIGURE 17.12 – Visualisation de l'exercice

Nous recommençons l'exercice précédent :

- Nous avons $AC^2 = \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 = \left\langle \overrightarrow{AC} \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle$
  Or, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ et donc $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 = \left\langle \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \mid \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \right\rangle$
  La bilinéarité du produit scalaire montre que :
  $$\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 + 2\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{BC} \right\rangle$$
  Ce qui est équivalent à $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{BC} \right\rangle$
- De même, nous avons $BD^2 = \left\|\overrightarrow{BD}\right\|^2 = \left\langle \overrightarrow{BD} \mid \overrightarrow{BD} \right\rangle$
  Or, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$ et donc $\left\|\overrightarrow{BD}\right\|^2 = \left\langle \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} \mid \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} \right\rangle$
  La bilinéarité du produit scalaire montre que :
  $$\left\|\overrightarrow{BD}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2 + 2\left\langle \overrightarrow{BA} \mid \overrightarrow{AD} \right\rangle$$
  Ce qui est équivalent à $BD^2 = BA^2 + AD^2 + 2\left\langle \overrightarrow{BA} \mid \overrightarrow{AD} \right\rangle$
- Et maintenant, on soustrait !!
  $$AC^2 - BD^2 = AB^2 + BC^2 + 2\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{BC} \right\rangle - \left(BA^2 + AD^2 + 2\left\langle \overrightarrow{BA} \mid \overrightarrow{AD} \right\rangle\right)$$
  Or, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et donc $BC^2 = AD^2$; d'où :
  $$AC^2 - BD^2 = 2\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{BC} \right\rangle - 2\left\langle \overrightarrow{BA} \mid \overrightarrow{AD} \right\rangle = 2\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{BC} \right\rangle + 2\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AD} \right\rangle = 4\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AD} \right\rangle$$
  Ce que nous voulions

Et voilà le travail !

Exercice 23 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère othonormé $\mathcal{R}(O, i, j, k)$ La droite D est définie par les 2 plans P et P_1 :

$$\begin{cases} P : & 2x - 3y - 2z + 4 = 0 \\ P_1 : & x + 2y - 2z - 5 = 0 \end{cases}$$

Montrer que les plans P et P_1 sont perpendiculaires

Pour montrer que ces deux plans sont perpendiculaires, nous allons travailler essentiellement dans les espaces directeurs.

1. Nous allons chercher un plan perpendiculaire à D que nous appellerons Π
2. Nous allons chercher un vecteur directeur de la droite vectorielle D_1 définie par l'intersection de Π et de P et nous allons montrer que D et D_1 ont des directions orthogonales
3. Puis, nous itérons le travail en allant chercher un vecteur directeur de la droite vectorielle D_2 définie par l'intersection de Π et de P_1 et nous allons montrer que D et D_2 ont des directions orthogonales

1. Recherche de l'équation cartésienne du plan Π
   La direction *(le sous espace vectoriel directeur)* de D est donnée par :
   $$\begin{cases} 2x - 3y - 2z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 3y = 2z \\ x + 2y = 2z \end{cases}$$
   Les coordonnées des vecteurs de la direction de D sont $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \frac{10}{7}z \\ \frac{2}{7}z \\ z \end{pmatrix}$. Nous en déduisons une base : $\overrightarrow{u_D} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

Le plan vectoriel Π orthogonal à la direction de D admet donc le vecteur $\overrightarrow{u_D}$ comme vecteur normal. Ce plan Π a donc pour équation :

$$10x + 2y + 7z = 0$$

2. Soit D_1 la droite définie par :

$$\begin{cases} 10x + 2y + 7z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

▷ Nous allons rechercher une base de D_1 en résolvant le système d'inconnues x et y :

$$\begin{cases} 10x + 2y + 7z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 10x + 2y = -7z \\ x + 2y = 2z \end{cases}$$

Les coordonnées des vecteurs de la direction de D_1 sont $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -z \\ \frac{3}{2}z \\ z \end{pmatrix}$. Nous en déduisons une base : $\overrightarrow{u_{D_1}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

▷ Il faut, maintenant montrer que $\overrightarrow{u_{D_1}}$ et $\overrightarrow{u_D}$ sont orthogonaux ;

$$\langle \overrightarrow{u_{D_1}} \mid \overrightarrow{u_D} \rangle = 10 \times (-2) + 2 \times 3 + 7 \times 2 = 0$$

Nous avons bien $\overrightarrow{u_{D_1}} \perp \overrightarrow{u_D}$

3. Soit D_2 la droite définie par :

$$\begin{cases} 10x + 2y + 7z = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

▷ Nous allons rechercher une base de D_2 en résolvant le système d'inconnues x et y :

$$\begin{cases} 10x + 2y + 7z = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 10x + 2y = -7z \\ 2x - 3y = 2z \end{cases}$$

Les coordonnées des vecteurs de la direction de D_1 sont $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2}z \\ -z \\ z \end{pmatrix}$. Nous en déduisons une base : $\overrightarrow{u_{D_2}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

▷ Il faut, maintenant montrer que $\overrightarrow{u_{D_2}}$ et $\overrightarrow{u_D}$ sont orthogonaux ;

$$\langle \overrightarrow{u_{D_2}} \mid \overrightarrow{u_D} \rangle = 10 \times (-1) + 2 \times (-2) + 7 \times 2 = 0$$

Nous avons bien $\overrightarrow{u_{D_1}} \perp \overrightarrow{u_D}$

▷ Il faut aussi montrer que $\overrightarrow{u_{D_2}}$ et $\overrightarrow{u_{D_1}}$ sont orthogonaux ;

$$\langle \overrightarrow{u_{D_2}} \mid \overrightarrow{u_{D_1}} \rangle = (-1) \times (-2) + 3 \times (-2) + 2 \times 2 = 0$$

Nous avons bien $\overrightarrow{u_{D_1}} \perp \overrightarrow{u_{D_2}}$

Les 2 plans P et P_1 sont bien orthogonaux

Exercice 24 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère othonormé $\mathcal{R}(O, i, j, k)$. On considère les deux droites D et D_1 :

$$D : \begin{cases} x - y = 1 \\ 2y + z = 3 \end{cases} \qquad D_1 : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

1. (a) *Donner un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de D*

   Voilà une question qui ne doit pas nous perdre : elle est très voisine de celles de l'exercice précédent !

   Nous allons rechercher une base $\overrightarrow{u}$ de D en résolvant le système d'inconnues x et y :

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ 2y = -z \end{cases}$$

   Les coordonnées des vecteurs de la direction de D sont $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2}z \\ \frac{-1}{2}z \\ z \end{pmatrix}$. Nous en déduisons une base ou vecteur directeur de D $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

   (b) *Donner un vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ de D_1*

   Et on procède de manière identique : pour rechercher une base $\overrightarrow{v}$ de D_1 nous résolvons le système d'inconnues x et y :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x - y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = -z \\ 3x - y = 0 \end{cases}$$

   Les coordonnées des vecteurs de la direction de D sont $\begin{pmatrix} \frac{-1}{4}z \\ \frac{-3}{4}z \\ z \end{pmatrix}$. Nous en déduisons une base ou vecteur directeur de D_1 $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

2. *En déduire un vecteur $\overrightarrow{w}$ de leur perpendiculaire commune Δ*

   Nous devons avoir $\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{w} \rangle = 0$. En posant $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, nous avons :

$$\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{w} \rangle = -x - y + 2z = 0 \text{ et } \langle \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{w} \rangle = x + 3y - 4z = 0$$

   Nous devons donc résoudre le système :

$$\begin{cases} -x - y + 2z = & 0 \\ x + 3y - 4z = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = & 2z \\ x + 3y = & 4z \end{cases}$$

   Les coordonnées des vecteurs de la direction de Δ sont $\begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}$. Nous en déduisons une base ou vecteur directeur de Δ, $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 25 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de E de norme 1 et $A \in \mathcal{E}$. On définit un plan H par :

$$H = \left\{ M \in \mathcal{E} \text{ tels que } \left\langle \overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{u} \right\rangle = 0 \right\}$$

Nous définissons un repère orthonormé $\mathcal{R}(A, i, j, \overrightarrow{u})$

H est donc le plan passant par A et orthogonal à $\overrightarrow{u}$; tout point du plan a pour coordonnées dans le repère $\mathcal{R}(A, i, j, \overrightarrow{u})$ $M(x, y, z)$, signifiant que $\overrightarrow{AM} = xi + yj + z\overrightarrow{u}$, et, donc, dans la base $\{i, j, \overrightarrow{u}\}$, $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. *Montrer que $M \in H$ si et seulement si M a pour coordonnées $M(x, y, 0)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$*

   Soit $M(x, y, z) \in H$. Alors : $M \in H \iff \left\langle \overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{u} \right\rangle = 0 \iff z = 0$

   Donc $M \in H$ si et seulement si M a pour coordonnées $M(x, y, 0)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

2. *Calculer, pour tout $N \in \mathcal{E}$, le produit scalaire $\left\langle \overrightarrow{AN} \mid \overrightarrow{u} \right\rangle$*

   En posant $N(x, y, z)$, alors $\left\langle \overrightarrow{AN} \mid \overrightarrow{u} \right\rangle = z$

3. *En déduire que l'application f définie par :*

$$\begin{cases} f : \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad N & \longmapsto & f(N) = \left\langle \overrightarrow{AN} \mid \overrightarrow{u} \right\rangle \end{cases}$$

   permet de définir 2 demi-espaces dont H est la frontière.

   Clairement, ces 2 demi-espaces dont H est la frontière sont $H_1 = \{N(x, y, z) \in \mathcal{E}$ avec $z > 0\}$ et $H_2 = \{N(x, y, z) \in \mathcal{E}$ avec $z > 0\}$

   Il nous est même possible d'aller plus loin :H_1 *(comme H_2)* est un ensemble convexe.
   Qu'est ce que cela veut-il dire ?
   Cela veut dire que pour tout $M \in H_1$ et tout $N \in H_1$, l'intervalle $[M; N] \in H_1$.
   C'est quoi cet intervalle $[M; N]$? C'est l'ensemble des barycentres du système pondéré $\{(M, \lambda), (N, 1 - \lambda)\}$ avec $\lambda \in [0; 1]$.
   Autrement dit, pour tout $X \in [M; N]$, et tout $Z \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{ZX} = \lambda\overrightarrow{ZM} + (1 - \lambda)\overrightarrow{ZN}$, en particulier si $Z = A$, où nous avons :

$$\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AM} + (1 - \lambda)\overrightarrow{AB}$$

   A supposer que $M(x_M, y_M, z_M)$ et $N(x_N, y_N, z_N)$ avec $z_M > 0$ et $z_N > 0$, les coordonnées de X sont $X(\lambda x_M + (1 - \lambda)x_N, \lambda y_M + (1 - \lambda)y_N, \lambda z_M + (1 - \lambda)z_N)$.
   Il est facile de vérifier que $\lambda z_M + (1 - \lambda)z_N > 0$ et donc $X \in H_1$

Exercice 26 :

1. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension quelconque.*

   (a) *Etant donnés 3 points A, B et M de $\mathcal{E}$, montrer que l'une quelconque des égalités suivantes entraîne l'alignement des 3 points A, B et M de $\mathcal{E}$*

   ⋆ *$AB = AM + MB$*

   Dans ce cas, effectivement $AB = AM + MB$ si et seulement si A, M et B sont alignés ($M \in [A, B]$

   ⋆ *$AB = AM - MB$*

   Nous avons $AB = AM - MB \iff AB + BM = AM$ et $AB + BM = AM$ si et seulement si A, M et B sont alignés ($B \in [A, M]$

   ⋆ *$AB = MB - AM$*

   Nous avons $AB = MB - AM \iff AB + AM = BM$ et $AB + AM = BM$ si et seulement si A, M et B sont alignés ($A \in [B, M]$

   (b) *Montrer l'inégalité suivante, vraie pour 3 points quelconques A, M et B*

$$|MA - MB| \leqslant AB$$

   Montrer que $|MA - MB| \leqslant AB$ c'est montrer que $MA - MB \leqslant AB$ et $-(MA - MB) \leqslant AB$

- ⋆ Montrer que $MA - MB \leqslant AB$, c'est montrer que $MA \leqslant AB + MB$; c'est l'inégalité triangulaire classique
- ⋆ Montrer que $MB - MA \leqslant AB$, c'est montrer que $MB \leqslant AB + MA$; c'est l'inégalité triangulaire classique

2. *Nous nous situons maintenant, dans le plan affine euclidien $\mathcal{P}$*
A et B sont 2 points distincts du plan $\mathcal{P}$ et $k \in \mathbb{R}^{*+}$. On appelle $\mathcal{C}_k$, l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $\dfrac{MA}{MB} = k$. Etudier $\mathcal{C}_k$ en fonction des valeurs de k

   (a) Si $k = 1$

   Nous devons donc chercher $M \in \mathcal{P}$ tels que $\dfrac{MA}{MB} = 1 \Longleftrightarrow MA = MB$

   L'ensemble des points M est donc la médiatrice du segment $[A, B]$

   (b) Si $k \neq 1$

   Alors $\dfrac{MA}{MB} = k \Longleftrightarrow \dfrac{MA^2}{MB^2} = k^2 \Longleftrightarrow MA^2 - k^2 MB^2 = 0$

   ▷ On considère le système pondéré $\{(A, 1) ; (B, k)\}$.
   Le barycentre de ce système existe, puisque $k + 1 \neq 0$ *(nous avons $k > 0$)*. Soit G_1 le barycentre ; alors $G_1 \in (AB)$ et pour tout $M \in \mathcal{P}$, nous avons :

   $$(1 + k)\,\overrightarrow{MG_1} = \overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}$$

   ▷ On considère le système pondéré $\{(A, 1) ; (B, -k)\}$.
   Le barycentre de ce système existe, puisque $k - 1 \neq 0$ *(nous avons $k \neq 1$)*. Soit G_2 le barycentre ; alors $G_2 \in (AB)$ et pour tout $M \in \mathcal{P}$, nous avons :

   $$(1 - k)\,\overrightarrow{MG_2} = \overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}$$

   En utilisant le produit scalaire, nous avons :

   $$\left(1 - k^2\right) \left\langle \overrightarrow{MG_1} \mid \overrightarrow{MG_1} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} \mid \overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB} \right\rangle = MA^2 - k^2 MB^2 = 0$$

   C'est à dire, comme $k \neq 1$, $\left\langle \overrightarrow{MG_1} \mid \overrightarrow{MG_1} \right\rangle = 0$ *(Cf figure 17.13)*

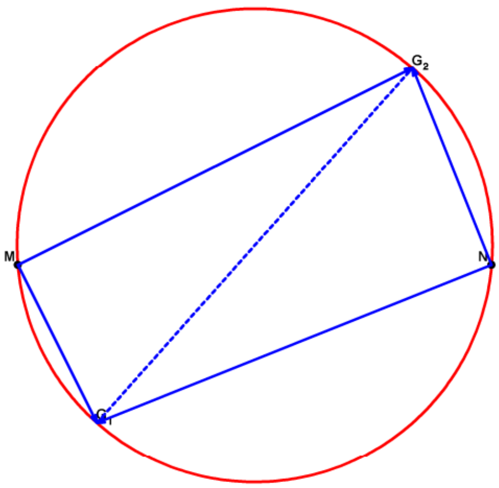


FIGURE 17.13 – Visualisation des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $\dfrac{MA}{MB} = k$

17.7.4 Fonction scalaire de Leibniz

Exercice 27 :

Quel est, dans $\mathbb{C}$, ensemble des nombres complexes, les nombres vérifiant :

$$2\left|z-i\right|^2 - 3\left|z-(1-i)\right|^2 + 4\left|z-1\right|^2 = 5$$

On identifie l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ au plan affine $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
Soient $A \in \mathcal{P}$ le point d'affixe i, $B \in \mathcal{P}$ le point d'affixe $1-i$ et $C \in \mathcal{P}$ le point d'affixe 1 ; soit $M \in \mathcal{P}$ le point d'affixe z. Alors, l'égalité

$$2\left|z-i\right|^2 - 3\left|z-(1-i)\right|^2 + 4\left|z-1\right|^2 = 5$$

peut donc s'écrire : $2AM^2 - 3MB^2 + 4MC^2 = 5$.

- Considérons le système pondéré $\{(A,2)\,;(B,-3)\,;(C,4)\}$. Comme la somme des coefficients est non nulle, ce système pondéré admet un barycentre G qui vérifie, pour tout point $M \in \mathcal{P}$:

  $$3\overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}$$

  C'est à dire, en prenant l'origine 0 du repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, $3\overrightarrow{OG} = 2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OC}$, et, en posant z_G l'affixe de G :

  $$3z_G = 2z_A - 3z_B + 4z_C \iff 3z_G = 1+5i \iff z_G = \frac{1}{3} + \frac{5i}{3}$$

- Nous avons :

  $$AM^2 = \left\langle \overrightarrow{MA} \mid \overrightarrow{MA} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} \mid \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} \right\rangle = MG^2 + GA^2 + 2\left\langle \overrightarrow{MG} \mid \overrightarrow{GA} \right\rangle$$

  De même :

  $$BM^2 = MG^2 + GB^2 + 2\left\langle \overrightarrow{MG} \mid \overrightarrow{GB} \right\rangle \text{ et } CM^2 = MG^2 + GC^2 + 2\left\langle \overrightarrow{MG} \mid \overrightarrow{GC} \right\rangle$$

  Et donc :

  $$\begin{aligned} 2AM^2 - 3MB^2 + 4MC^2 = \;& 3MG^2 + 2GA^2 - 3GB^2 + 4GC^2 + \\ & 2\left(2\left\langle \overrightarrow{MG} \mid \overrightarrow{GA} \right\rangle - 3\left\langle \overrightarrow{MG} \mid \overrightarrow{GB} \right\rangle + 4\left\langle \overrightarrow{MG} \mid \overrightarrow{GC} \right\rangle\right) \\ = \;& 3MG^2 + 2GA^2 - 3GB^2 + 4GC^2 + 2\left\langle \overrightarrow{MG} \mid 2\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC} \right\rangle \end{aligned}$$

  Or, $2\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ et donc :

  $$2AM^2 - 3MB^2 + 4MC^2 = 3MG^2 + 2GA^2 - 3GB^2 + 4GC^2$$

  Et donc :

  $$2AM^2 - 3MB^2 + 4MC^2 = 5 \iff 3MG^2 + 2GA^2 - 3GB^2 + 4GC^2 = 5$$

  Et donc, $MG^2 = \dfrac{1}{3}\left(5 - \left(2GA^2 - 3GB^2 + 4GC^2\right)\right)$

- Or, $2GA^2 - 3GB^2 + 4GC^2 = 2\left|z_A - z_G\right|^2 - 3\left|z_B - z_G\right|^2 + 4\left|z_C - z_G\right|^2 = \dfrac{-26}{3}$ et donc $MG^2 = \dfrac{1}{3}\left(5 + \dfrac{26}{3}\right) = \dfrac{41}{9}$

  Donc, les points $M \in \mathcal{P}$ tels que $MG^2 = \dfrac{41}{9} \iff MG = \dfrac{\sqrt{41}}{3}$ est un cercle de centre G et de rayon $\dfrac{\sqrt{41}}{3}$.

  En termes de nombres complexes, nous avons $\left|z - z_G\right| = \dfrac{\sqrt{41}}{3} \iff \left|z - \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{5i}{3}\right)\right| = \dfrac{\sqrt{41}}{3}$

Exercice 28 :

On considère un espace affine quelconque $\mathcal{E}$, A et B, 2 points de $\mathcal{E}$. Quel est l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $\left\langle \overrightarrow{MA} \mid \overrightarrow{MB} \right\rangle = 0$

On appelle I le milieu du segment $[A;B]$, ce qui se dit encore, I est l'isobarycentre de A et B

Nous avons donc $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

Donc :

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{MA} \mid \overrightarrow{MB} \right\rangle &= \left\langle \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \mid \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} \right\rangle \\ &= \left\langle \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \mid \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA} \right\rangle \\ &= MI^2 - IA^2 \end{aligned}$$

Donc $\left\langle \overrightarrow{MA} \mid \overrightarrow{MB} \right\rangle = 0 \iff MI^2 - IA^2 = 0 \iff MI = IA$. ce qui signifie que l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $\left\langle \overrightarrow{MA} \mid \overrightarrow{MB} \right\rangle = 0$ est le cercle de centre I et de rayon IA *(cf figure 17.14)*

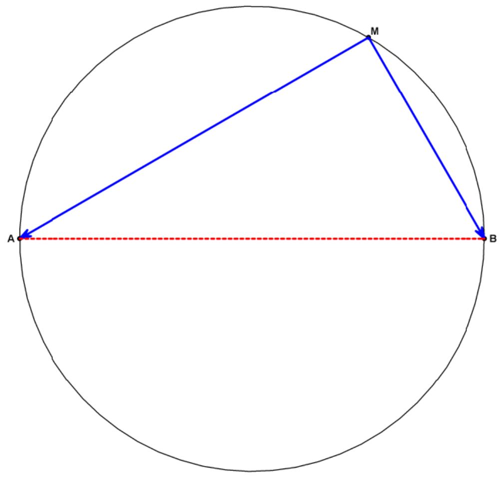


FIGURE 17.14 – Visualisation du cercle de diamètre $[A;B]$

On vient de montrer que :

1. Dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ les points situés sur un cercle de diamètre $[A;B]$ sont tels que $\left\langle \overrightarrow{MA} \mid \overrightarrow{MB} \right\rangle = 0$. Nous obtenons donc un triangle rectangle AMB rectangle en A
2. Dans un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3 les points situés sur la sphère de diamètre $[A;B]$ sont tels que $\left\langle \overrightarrow{MA} \mid \overrightarrow{MB} \right\rangle = 0$.
3. Nous avons le même résultat dans un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension supérieure à 3

Exercice 29 :

Nous nous situons dans le plan $\mathcal{P}$, espace affine de dimension 2 Considérons un carré $ABCD$.

1. *Démontrer que l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que :*

$$\left\langle \left(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right) \mid \left(\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}\right) \right\rangle = 0$$

est un cercle.

- Considérons le système pondéré $\{(A,1);(B,3)\}$. Comme la somme des coefficients est non nulle, ce système pondéré admet un barycentre G_1 qui vérifie, pour tout point $M \in \mathcal{P}$:

$$4\overrightarrow{MG_1} = \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$$

- Considérons le système pondéré $\{(C,1);(D,3)\}$. Comme la somme des coefficients est non nulle, ce système pondéré admet un barycentre G_2 qui vérifie, pour tout point $M \in \mathcal{P}$:

$$4\overrightarrow{MG_2} = \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}$$

- La relation $\left\langle \left(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right) \mid \left(\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}\right) \right\rangle = 0$ devient alors

$$\left\langle 4\overrightarrow{MG_1} \mid 4\overrightarrow{MG_2} \right\rangle = 0 \Longleftrightarrow 16 \left\langle \overrightarrow{MG_1} \mid \overrightarrow{MG_2} \right\rangle = 0 \Longleftrightarrow \left\langle \overrightarrow{MG_1} \mid \overrightarrow{MG_2} \right\rangle = 0$$

L'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que : $\left\langle \left(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right) \mid \left(\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}\right) \right\rangle = 0$ est donc un cercle de diamètre $[G_1;G_2]$ *(cf figure 17.15)*

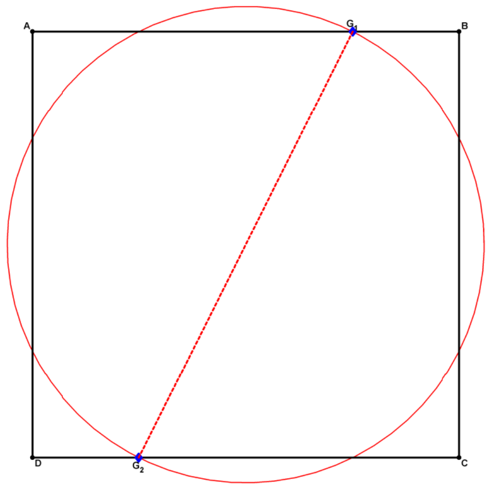


FIGURE 17.15 – Visualisation du cercle de diamètre $[G1;G2]$

2. *Trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que :*

$$\left\langle \left(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right) \mid \left(\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}\right) \right\rangle = k$$

Où k est un réel donné. Discuter suivant les valeurs de $k \in \mathbb{R}$

Comme tout à l'heure, nous avons $\left\langle \left(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right) \mid \left(\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}\right) \right\rangle = k \Longleftrightarrow 16 \left\langle \overrightarrow{MG_1} \mid \overrightarrow{MG_2} \right\rangle = k$

Soit I le milieu du segment $[G_1;G_2]$. Alors :

$$\left\langle \overrightarrow{MG_1} \mid \overrightarrow{MG_2} \right\rangle = MI^2 - IG_1^2 = k \Longleftrightarrow MI^2 = IG_1^2 + k$$

Ainsi :
- ▷ Si $IG_1^2 + k < 0$ c'est à dire si $k < -IG_1^2$, alors, les points M n'existent pas
- ▷ Si $IG_1^2 + k = 0$ c'est à dire si $k = -IG_1^2$, alors, $M = I$
- ▷ Si $IG_1^2 + k > 0$ c'est à dire si $k > -IG_1^2$, alors, les points M forment un cercle de centre I et de rayon $R = \sqrt{IG_1^2 + k}$

3. *Trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que :*

$$\left\| \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} \right\| = \left\| \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD} \right\|$$

Nous avons, comme tout à l'heure :

$$\left\| \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} \right\| = \left\| \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD} \right\| \Longleftrightarrow \left\| 4\overrightarrow{MG_1} \right\| = \left\| 4\overrightarrow{MG_2} \right\| \Longleftrightarrow MG_1 = MG_2$$

L'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que : $\left\| \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} \right\| = \left\| \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD} \right\|$ est donc la médiatrice du segment $[G_1;G_2]$

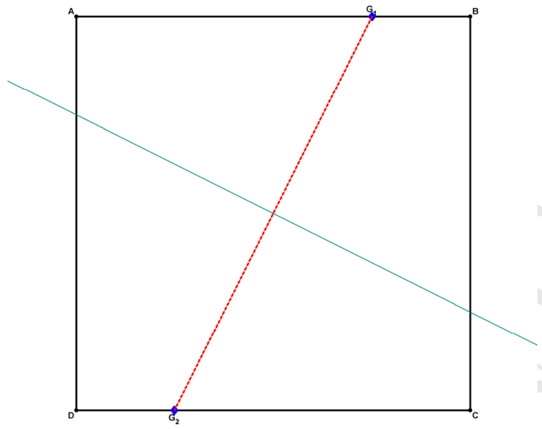


FIGURE 17.16 – Visualisation de la médiatrice du segment $[G1; G2]$

Exercice 30 :

Nous nous situons dans le plan $\mathcal{P}$, espace affine de dimension 2 Considérons un carré $ABCD$ de côté 5

1. *Trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que on ait l'égalité :*
$$3MA^2 + 2MB^2 = 3MC^2 + 2MD^2$$

La résolution de cette question va se faire en plusieurs étapes

- ▷ Tout d'abord, nous créons 2 fonctions f et g de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$
$$\left\{\begin{array}{lll} f : \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & f(M) = 3MA^2 + 2MB^2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lll} g : \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & g(M) = 3MC^2 + 2MD^2 \end{array}\right.$$
f et g sont donc 2 fonctions scalaires de Leibniz.
La question posée est donc la recherche des points $M \in \mathcal{P}$ tels que on ait l'égalité : $f(M) = g(M)$
- ▷ Soit G_1 le barycentre du système pondéré $\{(A, 3); (B, 2)\}$; alors, pour tout $M \in \mathcal{P}$, nous avons :
$$5\overrightarrow{MG_1} = 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}$$
En particulier si $M = A$ ou $M = B$, nous avons $\overrightarrow{AG_1} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{BG_1} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{BA}$, ce qui nous donne $AG_1 = \dfrac{2}{5}AB = 2$ ou $BG_1 = \dfrac{3}{5}AB = 3$.
Nous avons ainsi $f(G_1) = 3G_1A^2 + 2G_1B^2 = 12 + 18 = 30$
- ▷ Soit G_2 le barycentre du système pondéré $\{(C, 3); (D, 2)\}$; alors, pour tout $M \in \mathcal{P}$, nous avons :
$$5\overrightarrow{MG_2} = 3\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD}$$
En particulier si $M = C$ ou $M = D$, nous avons $\overrightarrow{CG_2} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{CD}$ ou $\overrightarrow{DG_2} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{DC}$, ce qui nous donne $CG_2 = \dfrac{2}{5}CD = 2$ ou $DG_2 = \dfrac{3}{5}DC = 3$.
Nous avons ainsi $g(G_2) = 3G_2C^2 + 2G_2D^2 = 12 + 18 = 30$
- ▷ D'après l'étude que nous avons faite des fonctions scalaires de Leibniz, nous avons :
$$f(M) = f(G_1) + 5MG_1^2 \text{ et } g(M) = g(G_2) + 5MG_2^2$$
En remarquant que $f(G_1) = g(G_2)$, nous avons :
$$f(M) = g(M) \Longleftrightarrow 5MG_1^2 = 5MG_2^2 \Longleftrightarrow MG_1 = MG_2$$

L'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que on ait l'égalité : $f(M) = g(M)$ est donc la médiatrice du segment $[G_1; G_2]$

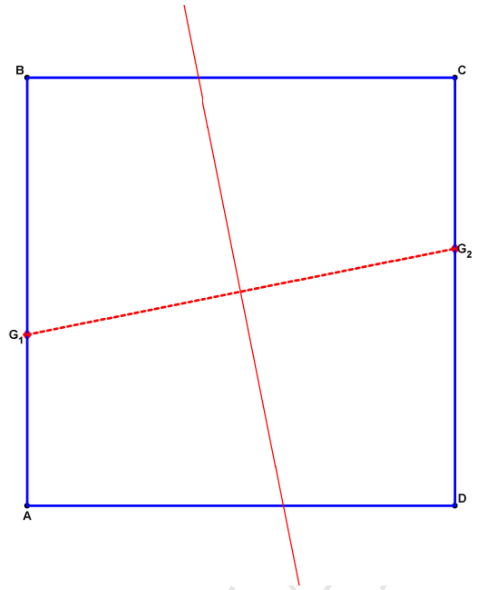


FIGURE 17.17 – Visualisation de la médiatrice du segment $[G1; G2]$

2. *Trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ qui vérifient l'égalité :*

$$3MA^2 + 2MB^2 = 3MC^2 + 2MD^2 = 135$$

Nous devons donc trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ qui vérifient l'égalité : $f(M) = g(M) = 135$

▷ Reprenons l'expression de $f(M)$:

$$f(M) = f(G_1) + 5MG_1^2 = 30 + 5MG_1^2 = 135 \iff MG_1^2 = 21 \iff MG_1 = \sqrt{21}$$

L'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ qui vérifient l'égalité : $f(M) = 135$ est donc un cercle de centre G_1 et de rayon $\sqrt{21}$

▷ De même :

$$g(M) = g(G_2) + 5MG_2^2 = 30 + 5MG_2^2 = 135 \iff MG_2^2 = 21 \iff MG_2 = \sqrt{21}$$

L'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ qui vérifient l'égalité : $g(M) = 135$ est donc un cercle de centre G_2 et de rayon $\sqrt{21}$

▷ Les points $M \in \mathcal{P}$ qui vérifient l'égalité : $f(M) = g(M) = 135$ sont donc à l'intersection de ces deux cercles ; il y a donc 2 points solution. *(figure 17.18)*

3. *Trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que*

$$3MA^2 + 2MB^2 = 3MC^2 + 2MD^2 = k$$

Où k est un réel donné. Discuter suivant les valeurs de $k \in \mathbb{R}$

La question est, ici, semblable : il faut donc trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ qui vérifient l'égalité : $f(M) = g(M) = k$

▷ Reprenons l'expression de $f(M)$:

$$f(M) = 30 + 5MG_1^2 = k \iff 5MG_1^2 = k - 30$$

⋆ Ainsi, si $k < 30$, les points M n'existent pas

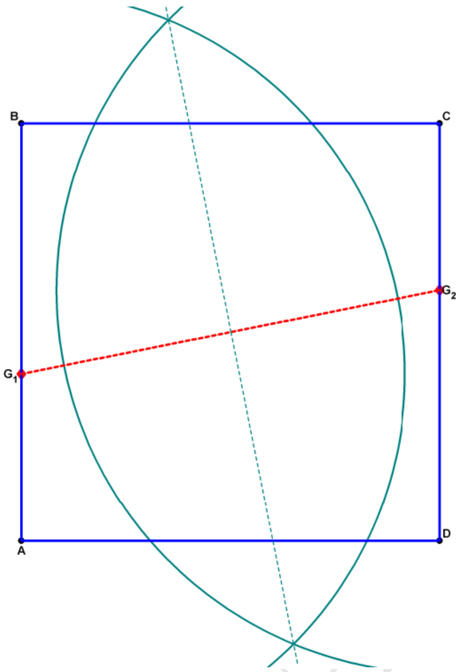


FIGURE 17.18 – Visualisation des 2 points d'intersection et de la médiatrice du segment $[G1; G2]$

- ⋆ Si $k = 30$, alors $M = G_1$
- ⋆ Si $k > 30$ alors, l'ensemble des points M tels que $f(M) = k$ est un cercle de centre G_1 et de rayon $\sqrt{\dfrac{k-30}{5}}$

▷ De même :

$$g(M) = k \iff 5MG_2^2 = k - 30$$

Et donc, comme précédemment :

- ⋆ Ainsi, si $k < 30$, les points M n'existent pas
- ⋆ Si $k = 30$, alors $M = G_2$
- ⋆ Si $k > 30$ alors, l'ensemble des points M tels que $g(M) = k$ est un cercle de centre G_2 et de rayon $\sqrt{\dfrac{k-30}{5}}$

En conclusion, si nous appelons $\mathcal{H}$ l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ qui vérifient l'égalité : $f(M) = g(M) = k$

- Si $k < 30$ alors $\mathcal{H}$ est vide
- Si $k = 30$, alors $\mathcal{H} = \{G_1; G_2\}$
- Si $k > 30$, $\mathcal{H}$ est la réunion de 2 cercles : le premier, un cercle de centre G_1 et de rayon $\sqrt{\dfrac{k-30}{5}}$ et le second, un cercle de centre G_2 et de rayon $\sqrt{\dfrac{k-30}{5}}$

Exercice 31 :

Nous nous situons dans le plan $\mathcal{P}$, espace affine de dimension 2 Considérons un triangle ABC.
Quel est le point $M \in \mathcal{P}$ pour lequel la somme $MA^2 + MB^2 + MC^2$ soit minimale ?

Soit f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$; c'est une fonction scalaire de Leibniz.
En posant G l'isobarycentre de A, B, C. Pour rappel, G est le point de rencontre des médianes du triangle ABC. f peut donc s'écrire différement :

$$f(M) = f(G) + 3MG^2$$

Pour tout $M \in \mathcal{P}$, nous avons $f(M) - f(G) = 3MG^2$, c'est à dire $f(M) - f(G) \geqslant 0$, et donc, pour tout $M \in \mathcal{P}$ $f(M) \geqslant f(G)$, le minimum étant atteint lorsque $M = G$

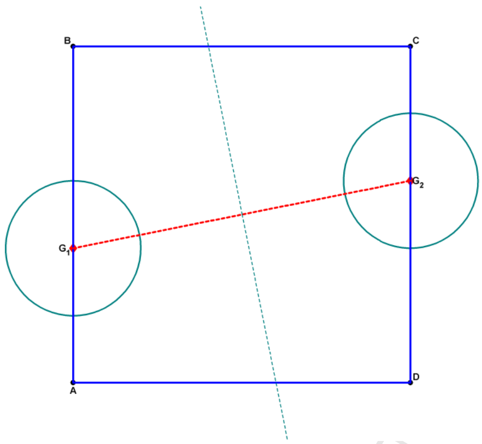


FIGURE 17.19 – Visualisation de l'ensemble $\mathcal{H}$ lorsque $k = 35$

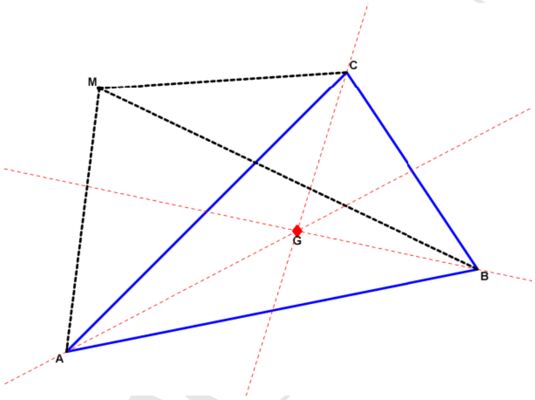


FIGURE 17.20 – Visualisation de l'exercice

Donc, la somme $MA^2 + MB^2 + MC^2$ est minimale lorsque $M = G$

Exercice 32 :

Nous nous situons dans le plan $\mathcal{P}$, espace affine de dimension 2
Considérons un triangle ABC non équilatéral, et nous appelons G le centre de gravité.
On pose $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$

1. *Démontrer que* $GA^2 = \dfrac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{9}$

   Soit A' le milieu du segment $[B, C]$ et donc G l'isobarycentre de A, B, et C. Alors :
   - $\star$ $b^2 = AC^2 = \left\langle \overrightarrow{AC} \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C} \mid \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C} \right\rangle = AA'^2 + A'C^2 + 2\left\langle \overrightarrow{AA'} \mid \overrightarrow{A'C} \right\rangle$
   - $\star$ De même,
   $$c^2 = AB^2 = \left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AB} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B} \mid \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B} \right\rangle = AA'^2 + A'B^2 + 2\left\langle \overrightarrow{AA'} \mid \overrightarrow{A'B} \right\rangle$$
   - $\star$ De telle sorte que :
   $$b^2 + c^2 = AA'^2 + A'C^2 + 2\left\langle \overrightarrow{AA'} \mid \overrightarrow{A'C} \right\rangle + AA'^2 + A'B^2 + 2\left\langle \overrightarrow{AA'} \mid \overrightarrow{A'B} \right\rangle$$
   Or, comme $\overrightarrow{A'C} = -\overrightarrow{A'B}$, nous avons $2\left\langle \overrightarrow{AA'} \mid \overrightarrow{A'C} \right\rangle + 2\left\langle \overrightarrow{AA'} \mid \overrightarrow{A'B} \right\rangle = 0$ et donc :
   $$b^2 + c^2 = AA'^2 + A'C^2 + AA'^2 + A'B^2 = 2AA'^2 + 2A'B^2 = 2AA' + 2A'B^2 = 2AA'^2 + 2 \times \frac{a^2}{4}$$

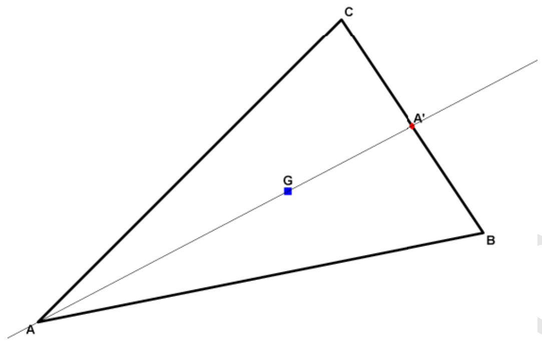


FIGURE 17.21 – Visualisation de l'exercice

Comme $AG = \dfrac{2}{3}AA'$, nous avons $AA' = \dfrac{3}{2}AG$ et donc $AA'^2 = \dfrac{9}{4}AG^2$ D'où :

$$b^2 + c^2 = 2AA'^2 + 2 \times \frac{a^2}{4} \iff 2 \times \frac{9}{4}AG^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} \iff AG^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{9}$$

Ce que nous voulions

2. *En déduire la valeur de* $\left(b^2 - c^2\right) GA^2 + \left(c^2 - a^2\right) GB^2 + \left(a^2 - b^2\right) GC^2$

   Pa analogie avec la question précédente, nous avons :
   - $GB^2 = \dfrac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{9}$
   - $GC^2 = \dfrac{2b^2 + 2a^2 - c^2}{9}$

   Et il suffit, maintenant, de remplacer, pour trouver, facilement que

$$\left(b^2 - c^2\right) GA^2 + \left(c^2 - a^2\right) GB^2 + \left(a^2 - b^2\right) GC^2 = 0$$

3. *Trouver l'ensemble des points* $M \in \mathcal{P}$ *tels que*

$$\left(b^2 - c^2\right) MA^2 + \left(c^2 - a^2\right) MB^2 + \left(a^2 - b^2\right) MC^2 = 0$$

   Si nous considérons le système pondéré $\left\{\left(A, b^2 - c^2\right), \left(A, c^2 - b^2\right), \left(C, a^2 - b^2\right)\right\}$, la somme des coefficients est nulle et le vecteur $\left(b^2 - c^2\right) \overrightarrow{MA} + \left(c^2 - b^2\right) \overrightarrow{MB} + \left(a^2 - b^2\right) \overrightarrow{MC}$ est constant. En effet :

$$\begin{aligned}\left(b^2 - c^2\right) \overrightarrow{MA} + \left(c^2 - b^2\right) \overrightarrow{MB} + \left(a^2 - b^2\right) \overrightarrow{MC} = &\ \left(b^2 - c^2\right) \overrightarrow{MA} + \left(c^2 - b^2\right) \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) \\ &+ \left(a^2 - b^2\right) \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}\right) \\ = &\ \left(c^2 - b^2\right) \overrightarrow{AB} + \left(a^2 - b^2\right) \overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

   Posons $\overrightarrow{a} = \left(c^2 - b^2\right) \overrightarrow{AB} + \left(a^2 - b^2\right) \overrightarrow{AC}$.
   Si nous considérons la fonction de Leibniz

$$\Phi(M) = \left(b^2 - c^2\right) MA^2 + \left(c^2 - a^2\right) MB^2 + \left(a^2 - b^2\right) MC^2$$

   nous avons, d'après 17.6.3, pour tout $M \in \mathcal{P}$ et tout $M' \in \mathcal{P}$:

$$\Phi(M) = \Phi(M') + 2\left\langle \overrightarrow{MM'} \mid \overrightarrow{a} \right\rangle$$

   En particulier pour $M' = G$, isobarycentre de A, B, C :

$$\Phi(M) = \Phi(G) + 2\left\langle \overrightarrow{MG} \mid \overrightarrow{a} \right\rangle = 2\left\langle \overrightarrow{MG} \mid \overrightarrow{a} \right\rangle$$

car $\Phi(G) = 0$
Ainsi, l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $\left(b^2 - c^2\right) MA^2 + \left(c^2 - a^2\right) MB^2 + \left(a^2 - b^2\right) MC^2 = 0$ est l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $\Phi(M) = 0$, autrement dit, des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $\left\langle \overrightarrow{MG} \mid \overrightarrow{a} \right\rangle = 0$.

Cet ensemble est donc la droite de direction orthogonale à $\overrightarrow{a} = \left(c^2 - b^2\right) \overrightarrow{AB} + \left(a^2 - b^2\right) \overrightarrow{AC}$ et passant par G

Exercice 33 :

1. *Soit ABC un triangle rectangle en A et nous posons $BC = 2a$. Etudier, suivant les valeurs du réel $k \in \mathbb{R}$, l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ qui vérifient l'égalité :*

$$4MA^2 - MB^2 - MC^2 = k$$

Préciser l'ensemble lors que $k = 4a^2$

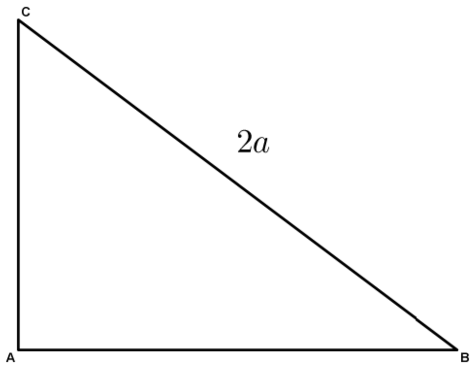


FIGURE 17.22 – Triangle rectangle en A d'hypothénuse de longueur $2a$

Nous avons $AB^2 + AC^2 = 4a^2$ et $\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle = 0$
Soit Φ, la fonction scalaire de Leibniz définie par :

$$\Phi(M) = 4MA^2 - MB^2 - MC^2$$

Soit G le barycentre du système pondéré $\{(A, 4) ; (B, -1) ; (C, -1)\}$. Alors, pour tout $M \in \mathcal{P}$, nous avons :

$$2\overrightarrow{MG} = 4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$$

Et donc, en particulier : $2\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}\right)$
D'après 17.6.3, pour tout $M \in \mathcal{P}$, nous avons $\Phi(M) = \Phi(G) + 2MG^2$
Il faut donc calculer $\Phi(G)$
Nous avons : $\Phi(G) = 4GA^2 - GB^2 - GC^2$

- Calcul de GA^2

$$\begin{aligned}
GA^2 &= \left\langle \overrightarrow{GA} \mid \overrightarrow{GA} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}\right) \mid \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}\right) \right\rangle \\
&= \frac{1}{4}\left(\left\langle \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} \mid \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} \right\rangle\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(AB^2 + AC^2 + 2\left\langle \overrightarrow{BA} \mid \overrightarrow{CA} \right\rangle\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(AB^2 + AC^2\right) \\
&= a^2
\end{aligned}$$

Donc $GA^2 = a^2$

- Calcul de GB^2

$$\begin{aligned} GB^2 &= \left\langle \overrightarrow{GB} \mid \overrightarrow{GB} \right\rangle \\ &= \left\langle \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} \right\rangle \\ &= GA^2 + BA^2 + 2\left\langle \overrightarrow{GA} \mid \overrightarrow{AB} \right\rangle \end{aligned}$$

Nous avons :

$$\left\langle \overrightarrow{GA} \mid \overrightarrow{AB} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}\right) \mid \overrightarrow{AB} \right\rangle = \frac{1}{2}\left(-AB^2 + \left\langle \overrightarrow{CA} \mid \overrightarrow{AB} \right\rangle\right) = \frac{-AB^2}{2}$$

Et donc $GB^2 = a^2 + BA^2 + 2\left\langle \overrightarrow{GA} \mid \overrightarrow{AB} \right\rangle = a^2 + BA^2 + 2 \times \dfrac{-AB^2}{2} = a^2$

- Calcul de GC^2

$$\begin{aligned} GC^2 &= \left\langle \overrightarrow{GC} \mid \overrightarrow{GC} \right\rangle \\ &= \left\langle \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} \mid \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} \right\rangle \\ &= GA^2 + CA^2 + 2\left\langle \overrightarrow{GA} \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle \end{aligned}$$

Nous avons :

$$\left\langle \overrightarrow{GA} \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}\right) \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle = \frac{1}{2}\left(-AC^2 + \left\langle \overrightarrow{BA} \mid \overrightarrow{CA} \right\rangle\right) = \frac{-AC^2}{2}$$

Et donc $GC^2 = a^2 + CA^2 + 2\left\langle \overrightarrow{GA} \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle = a^2 + CA^2 + 2 \times \dfrac{-AC^2}{2} = a^2$

D'où $\Phi(G) = 4GA^2 - GB^2 - GC^2 = 2a^2$

Ainsi, pour tout $M \in \mathcal{P}$, nous avons $\Phi(M) = \Phi(G) + 2MG^2 = 2a^2 + 2MG^2$. Ainsi :

$$\Phi(M) = k \iff 2a^2 + 2MG^2 = k \iff MG^2 = \frac{k - 2a^2}{2}$$

Donc :

▷ Si $k < 2a^2$, il n'existe aucun point tel que $\Phi(M) = k$

▷ Si $k = 2a^2$, alors $MG^2 = 0$ et l'ensemble des points tels que $\Phi(M) = 2a^2$ est réduit au seul point G

▷ Si $k > 2a^2$, l'ensemble des points tels que $\Phi(M) = k$ est un cercle de centre G et de rayon $r = \sqrt{\dfrac{k - 2a^2}{2}}$

Pour $k = 4a^2$, alors $MG^2 = \dfrac{2a^2}{2} = a^2$, c'est à dire $MG = a$; c'est un cercle de centre G et de rayon a

2. *Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A et nous posons $AC = BA = a$*
Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ qui vérifient :

$$MA^2 - MB^2 + MC^2 \leqslant a^2$$

Soit Φ, la fonction scalaire de Leibniz définie par :

$$\Phi(M) = MA^2 - MB^2 + MC^2$$

Soit H le barycentre du système pondéré $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$. Alors, pour tout $M \in \mathcal{P}$, nous avons :

$$\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

Et donc, en particulier : $\overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BC}$

D'après 17.6.3, pour tout $M \in \mathcal{P}$, nous avons $\Phi(M) = \Phi(H) + MH^2$

Il faut donc calculer $\Phi(H)$

Nous avons : $\Phi(H) = HA^2 - HB^2 + HC^2$

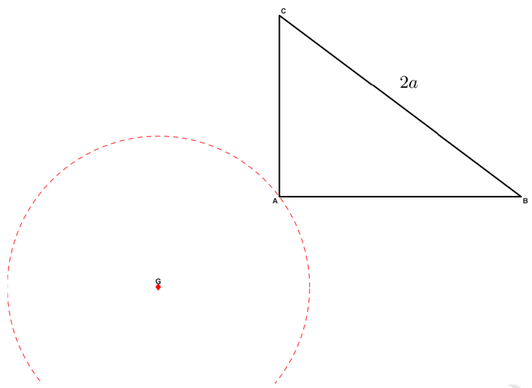


FIGURE 17.23 – Cercle de centre G et de rayon a

- <u>Calcul de HA^2</u>
  Nous avons, très simplement, $HA^2 = BC^2 = 2a^2$
- <u>Calcul de HB^2</u>
  Comme d'habitude :
  $$\begin{array}{rcl} HB^2 = & & \left\langle \overrightarrow{HB} \mid \overrightarrow{HB} \right\rangle \\ & = & \left\langle \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB} \right\rangle \\ & = & HA^2 + BA^2 + 2\left\langle \overrightarrow{HA} \mid \overrightarrow{AB} \right\rangle \end{array}$$
  Nous avons :
  $$\left\langle \overrightarrow{HA} \mid \overrightarrow{AB} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{BC} \mid \overrightarrow{AB} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \mid \overrightarrow{AB} \right\rangle = -AB^2 + \left\langle \overrightarrow{AC} \mid \overrightarrow{AB} \right\rangle = -AB^2$$
  Et donc $HB^2 = 2a^2 + BA^2 - 2AB^2 = a^2$
- <u>Calcul de HC^2</u>
  $$\begin{array}{rcl} HC^2 = & & \left\langle \overrightarrow{HC} \mid \overrightarrow{HC} \right\rangle \\ & = & \left\langle \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC} \mid \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC} \right\rangle \\ & = & HA^2 + CA^2 + 2\left\langle \overrightarrow{HA} \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle \end{array}$$
  Nous avons :
  $$\begin{array}{rcl} \left\langle \overrightarrow{HA} \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle & = & -\left\langle \overrightarrow{BC} \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle \\ & = & -\left\langle \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle \\ & = & -AC^2 + \left\langle \overrightarrow{BA} \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle \\ & = & -AC^2 \end{array}$$
  Et donc $HC^2 = 2a^2 + CA^2 - 2AC^2 = a^2$

D'où $\Phi(H) = HA^2 - HB^2 - HC^2 = 2a^2 - a^2 - a^2 = 0$

Donc $\Phi(M) = \Phi(H) + MH^2 = MH^2$. Ainsi, l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ qui vérifient : $MA^2 - MB^2 + MC^2 \leqslant a^2$ est l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ qui vérifient : $MH^2 \leqslant a^2 \iff MH \leqslant a$. C'est donc l'intérieur d'un cercle de centre H et de rayon a

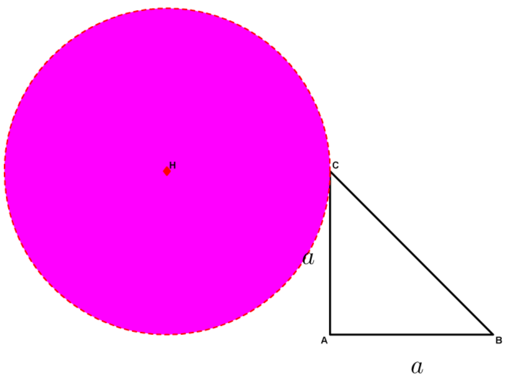


FIGURE 17.24 – L'intérieur du cercle de centre H et de rayon a

Chapitre 18

Applications affines

18.1 Applications qui conservent le barycentre

18.1.1 Définition

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application.
On dit que f conserve les barycentres si, pour tout système pondéré $\{(A_i, \alpha_i)\, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ de barycentre G, $f(G)$ est le barycentre du système pondéré $\{(f(A_i), \alpha_i)\, 1 \leqslant i \leqslant n\}$

Remarque 1 :

1. On pourrait généraliser cette définition à 2 espaces affines $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ et $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$
2. Si $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ est une application bijective qui conserve les barycentres, il est aisé de montrer que la fonction réciproque f^{-1} conserve aussi les barycentres.
3. Il est tout aussi aisé de démontrer que si $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ et $g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ sont 2 applications qui conservent les barycentres, alors la composée $f \circ g$ conserve aussi les barycentres

18.1.2 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application qui conserve les barycentres.
Soit $\overrightarrow{f} : E \longrightarrow E$ une application définie par :

$$\begin{cases} \overrightarrow{f} : E & \longrightarrow & E \\ \overrightarrow{MN} & \longmapsto & \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{MN}\right) = \overrightarrow{f(M)\, f(N)} \end{cases}$$

Alors, $\overrightarrow{f}$ est une application linéaire

Démonstration

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E ; nous allons démontrer que $\overrightarrow{f}$ est linéaire.

1. **Démontrons que, pour tout $u \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ nous avons $\overrightarrow{f}(\lambda u) = \lambda \overrightarrow{f}(u)$**

   Soit $u \in E$; alors, il existe $A \in \mathcal{E}$ et $M \in \mathcal{E}$ tels que $u = \overrightarrow{AM}$ et nous avons $\overrightarrow{f}(u) = \overrightarrow{f(A)\, f(M)}$
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; il existe un seul $N \in \mathcal{E}$ tel que $\lambda u = \overrightarrow{AN} = \lambda \overrightarrow{AM}$
   $N \in \mathcal{E}$ apparaît donc comme le barycentre du système pondéré $\{(A, 1-\lambda) ; (M, \lambda)\}$.
   f conservant le barycentre, $f(N)$ est le barycentre de $\{(f(A), 1-\lambda) ; (f(M), \lambda)\}$ et donc

   $$\overrightarrow{f(A)\, f(N)} = \lambda \overrightarrow{f(A)\, f(M)} = \lambda \overrightarrow{f}(u)$$

   Ce que nous voulions.

2. **Démontrons que, pour tout $u \in E$ et tout $v \in E$ nous avons $\overrightarrow{f}(u+v) = \overrightarrow{f}(u) + \overrightarrow{f}(v)$**

   Soient $u \in E$ et $v \in E$; nous allons nous intéresser à $\overrightarrow{f}(u+v)$.
   Il existe $A \in \mathcal{E}$, $M \in \mathcal{E}$ et $N \in \mathcal{E}$ tels que $u = \overrightarrow{AM}$, $v = \overrightarrow{AN}$ et $X \in \mathcal{E}$ tel que $u + v = \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$ et donc $\overrightarrow{f}(u+v) = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AX}\right) = \overrightarrow{f(A)f(A)}$

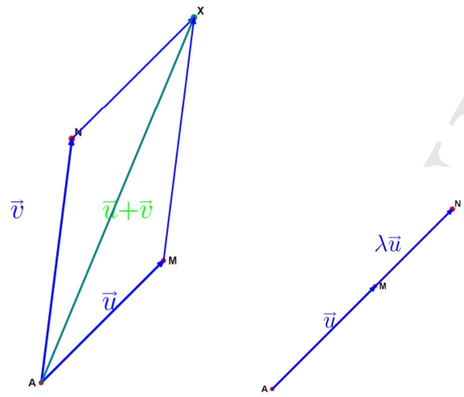


FIGURE 18.1 – Addition de 2 vecteurs et multiplication par un scalaire

   X apparaît alors comme le barycentre du système pondéré $\{(A,-1)\,;(M,1)\,;(N,1)\}$. f conservant le barycentre, $f(X)$ est donc le barycentre du système pondéré $\{(f(A),-1)\,;(f(M),1)\,;(f(N),1)\}$ et donc, nous avons :

$$\overrightarrow{f(A)f(X)} = \overrightarrow{f(A)f(M)} + \overrightarrow{f(A)f(N)} \Longleftrightarrow \overrightarrow{f}(u+v) = \overrightarrow{f}(u) + \overrightarrow{f}(v)$$

$\overrightarrow{f}$ est donc une application linéaire

18.1.3 Définition d'homothétie

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E. Soit Ω un point de $\mathcal{E}$ et $k \in \mathbb{R}^*$
On appelle homothétie de centre Ω et de rapport k une application $\mathcal{H}_{\Omega,k}$ telle que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathcal{H}_{\Omega,k} : \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ M & \longmapsto & \mathcal{H}_{\Omega,k}(M) = M' \text{ où nous avons } \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \end{array}\right.$$

Remarque 2 :

1. Que se passe-t-il si $k = 0$? En fait, nous avons $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{0}$, et donc, à tout point $M \in \mathcal{E}$, on fait correspondre Ω ; c'est une application constante. Peu intéressante
2. Si $k = 1$, alors $\mathcal{H}_{\Omega,1}$ est l'application identique.

18.1.4 Proposition : les homothéties conservent les barycentres

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E. Les homothéties conservent les barycentres

Démonstration

Soit $\mathcal{H}_{\Omega,k}$ une homothétie de $\mathcal{E}$ et $\{(A_i;\alpha_i)\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ un système pondéré de barycentre G ; nous avons alors, pour tout $O \in \mathcal{E}$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$$

C'est à dire, en remplaçant O par G :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$$

Nous avons, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $\overrightarrow{\Omega \mathcal{H}_{\Omega,k}(A_i)} = k\overrightarrow{\Omega A_i}$ et $\overrightarrow{\Omega \mathcal{H}_{\Omega,k}(G)} = k\overrightarrow{\Omega G}$
Donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathcal{H}_{\Omega,k}(G)\mathcal{H}_{\Omega,k}(A_i)} &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\overrightarrow{\mathcal{H}_{\Omega,k}(G)\Omega} + \overrightarrow{\Omega\mathcal{H}_{\Omega,k}(A_i)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(-k\overrightarrow{G\Omega} + k\overrightarrow{\Omega A_i}\right) \\
&= -k\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)\overrightarrow{G\Omega} + k\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\Omega A_i} \\
&= k\left(-\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)\overrightarrow{G\Omega} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\Omega A_i}\right) \\
&= \overrightarrow{0}
\end{aligned}$$

Ce qui montre bien que $\mathcal{H}_{\Omega,k}(G)$ est le barycentre du système pondéré $\{(\mathcal{H}_{\Omega,k}(A_i);\alpha_i)\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$
Donc, les homothéties conservent les barycentres

18.1.5 Propriétés des homothéties

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E.

1. Si $\mathcal{H}_{\Omega,k}$ est une homothétie de rapport k, alors, pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $N \in \mathcal{E}$, nous avons :

$$\overrightarrow{\mathcal{H}_{\Omega,k}(M)\mathcal{H}_{\Omega,k}(N)} = k\overrightarrow{MN}$$

2. Réciproquement, si $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ est une application telle que $M \in \mathcal{E}$ et tout $N \in \mathcal{E}$ nous ayions :

$$\overrightarrow{f(M)f(N)} = k\overrightarrow{MN} \text{ avec } k \neq 0 \text{ et } k \neq 1$$

   Alors, f est une homothétie de rapport k

3. L'application linéaire $H : E \longrightarrow E$ telle que $H\left(\overrightarrow{MN}\right) = \overrightarrow{\mathcal{H}_{\Omega,k}(M)\mathcal{H}_{\Omega,k}(N)}$ est donc une homothétie vectorielle de rapport k

Démonstration

1. Soit $\mathcal{H}_{\Omega,k}$ est une homothétie de centre Ω et de rapport k, alors, pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $N \in \mathcal{E}$, nous avons :

$$\overrightarrow{\mathcal{H}_{\Omega,k}(M)\mathcal{H}_{\Omega,k}(N)} = \overrightarrow{\mathcal{H}_{\Omega,k}(M)\Omega} + \overrightarrow{\Omega\mathcal{H}_{\Omega,k}(N)} = k\overrightarrow{M\Omega} + k\overrightarrow{\Omega N} = k\overrightarrow{MN}$$

   Ce que nous voulions

2. Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application telle que pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $N \in \mathcal{E}$ nous ayions : $\overrightarrow{f(M)f(N)} = k\overrightarrow{MN}$ avec $k \neq 0$ et $k \neq 1$
   Soient $A \in \mathcal{E}$ et $M \in \mathcal{E}$. Alors, $\overrightarrow{f(A)f(M)} = k\overrightarrow{AM}$
   Pour tout point $O \in \mathcal{E}$, nous avons :

$$\overrightarrow{Of(M)} - \overrightarrow{Of(A)} = k\left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}\right) \Longleftrightarrow \overrightarrow{Of(M)} - k\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Of(A)} - k\overrightarrow{OA}$$

   Comme $k \neq 1$, le système pondéré $\{(f(A);1);(A;-k)\}$ admet un barycentre G tel que :

$$\overrightarrow{Gf(A)} - k\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow \overrightarrow{Gf(A)} = k\overrightarrow{GA}$$

   Ce qui montre que f est une homothétie de centre G et de rapport k

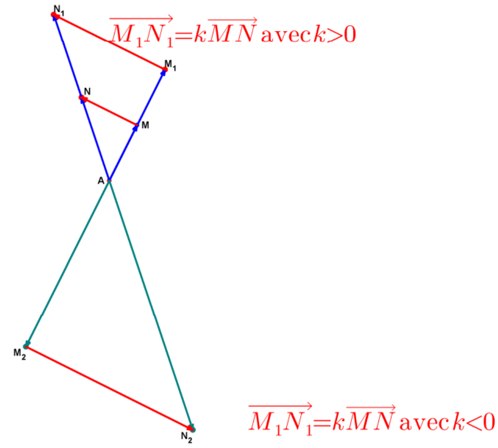


FIGURE 18.2 – Homothéties de rapport $k > 0$ ou $k < 0$

Remarque 3 :

Il faut remarquer qu'à plusieurs homothéties affines différentes correspond une seule homothétie vectorielle. Il suffit de changer de centre d'homothétie.

18.1.6 Proposition

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E. Soit $\Omega \in \mathcal{E}$. Alors, l'ensemble des homothéties de même centre Ω est un groupe abélien pour la composition des applications.Il est isomorphe à $(\mathbb{R}^*, \times)$

Démonstration

1. Soient $h_{\Omega,k}$ et h_{Ω,k_1} 2 homothéties de même centre Ω. Il est clair que Ω est un point fixe pour $h_{\Omega,k} \circ h_{\Omega,k_1}$. D'autre part, si, pour $M \in \mathcal{E}$, nous posons $M_1 = h_{\Omega,k_1}(M)$ et $M_2 = h_{\Omega,k}(M_1)$, nous avons :
$$\overrightarrow{\Omega M_2} = k_1\overrightarrow{\Omega M_1} = k\left(k_1 \times \overrightarrow{\Omega M}\right) = kk_1\overrightarrow{\Omega M}$$
Ainsi, la composition de 2 homothéties de même centre Ω est une homothétie de centre Ω. Nous avons donc $h_{\Omega,k} \circ h_{\Omega,k_1} = h_{\Omega,kk_1}$
C'est donc une loi de composition interne.
2. De l'égalité $h_{\Omega,k} \circ h_{\Omega,k_1} = h_{\Omega,kk_1}$, nous déduisons la commutativité de la composition :
$$h_{\Omega,k} \circ h_{\Omega,k_1} = h_{\Omega,kk_1} = h_{\Omega,k_1} \circ h_{\Omega,k}$$
3. Ensuite, L'identité $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ est l'homothétie de rapport 1 et de centre Ω
4. De la relation $h_{\Omega,k} \circ h_{\Omega,k_1} = h_{\Omega,kk_1}$, comme $k \neq 0$, nous pouvons déduire que $h_{\Omega,k}$ est bijective et que $(h_{\Omega,k})^{-1} = h_{\Omega,\frac{1}{k}}$

L'ensemble des homothéties de même centre Ω est bien un groupe abélien pour la composition des applications.
Maintenant, si nous construisons une application φ de $\mathbb{R}^*$ dans le groupe des homothéties de même centre Ω, en posant $\varphi(k) = h_{\Omega,k}$, il est facile de démontrer que φ est un isomorphisme de groupe.

18.1.7 Proposition : les translations conservent les barycentres

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E. Les translations conservent les barycentres

Démonstration

La translation a été définie en 17.1.4. Montrons qu'elles conservent le barycentre.

Soit $\{(A_i, \alpha_i)\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ un système pondéré tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, de barycentre G, et t_u une translation de $\mathcal{E}$

Alors $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$.

Appelons $G' = t_u(G)$ et $A'_i = t_u(A_i)$. Il faut montrer que G' est le barycentre du système pondéré $\{(A'_i, \alpha_i)\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$

D'après 17.1.5, nous avons $\overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{G'A'_i}$, et donc, nous avons aussi $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{G'A'_i} = \overrightarrow{0}$, ce qui montre que G' est le barycentre du système pondéré $\{(A'_i, \alpha_i)\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$

18.1.8 Proposition

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E et T une translation de $\mathcal{E}$ Soit $\overrightarrow{T} : E \longrightarrow E$ une application définie par :

$$\begin{cases} \overrightarrow{T} : E & \longrightarrow & E \\ \overrightarrow{MN} & \longmapsto & \overrightarrow{T}\left(\overrightarrow{MN}\right) = \overrightarrow{T(M)\,T(N)} \end{cases}$$

Alors, $\overrightarrow{T} = \mathrm{Id}_E$

Démonstration

On utilise toujours 17.1.5 ; nous avons donc : $\overrightarrow{T(M)\,T(N)} = \overrightarrow{MN}$, et donc $\overrightarrow{T}\left(\overrightarrow{MN}\right) = \overrightarrow{MN}$
D'où le résultat

Remarque 4 :

Toujours d'après 17.1.5 on peut dire qu'une application $T : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ est une translation si et seulement si $\overrightarrow{T} = \mathrm{Id}_E$

18.1.9 Proposition

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et f une application de $\mathcal{E}$ qui est une homothétie ou une translation. Alors, f transforme une droite en une droite qui lui est parallèle.

Démonstration

C'est très simple !!
Pour tout point $M \in \mathcal{E}$ et $N \in \mathcal{E}$, nous avons $\overrightarrow{f(M)\,f(M)} = k\overrightarrow{MN}$ avec $k \in \mathbb{R}^*$
C'est à dire que, si $M' = f(M)$ et $N' = f(N)$, alors $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$, et donc $(M'N') \parallel (MN)$. D'où le résultat.

Remarque 5 :

Donc, les images de 2 droites parallèles sont 2 droites parallèles.

18.1.10 Proposition

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. Soient $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{E}$, $C \in \mathcal{E}$ et $D \in \mathcal{E}$ tels qu'il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$.

1. Si $k = 1$, il existe une unique translation $T_{\overrightarrow{u}}$ telle que $T_{\overrightarrow{u}}(A) = C$ et $T_{\overrightarrow{u}}(B) = D$
2. Si $k \neq 1$, alors il existe une et une seule homothétie H telle que $H(A) = C$ et $H(B) = D$

Démonstration

1. Montrons que si $k=1$, il existe une unique translation $T_{\vec{u}}$ telle que $T_{\vec{u}}(A)=C$ et $T_{\vec{u}}(B)=D$

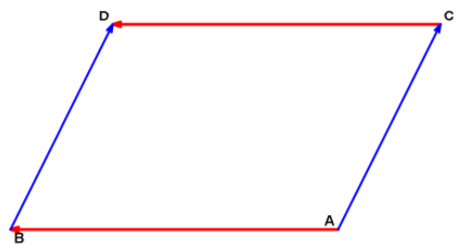


FIGURE 18.3 – Cas où nous avons $k=1$, c'est à dire $\vec{AB}=\vec{CD}$

Supposons donc que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$; alors $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ *(parallélogramme)* et donc, en posant $\vec{u}=\overrightarrow{AC}$, nous avons $T_{\vec{u}}(A)=C$ et $T_{\vec{u}}(B)=D$

2. Si $k\neq 1$, alors il existe une et une seule homothétie H telle que $H(A)=C$ et $H(B)=D$

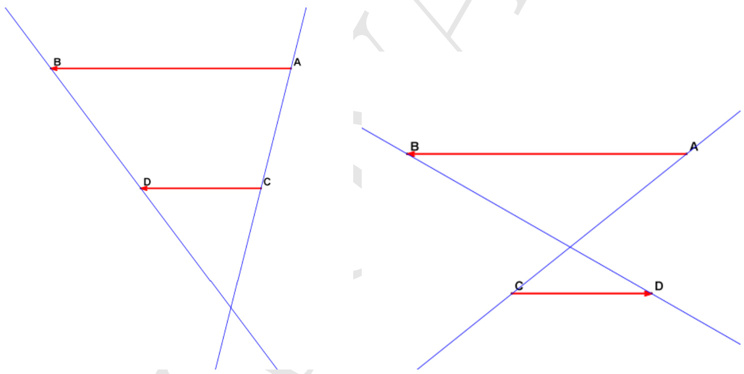


FIGURE 18.4 – Cas où nous avons $k\neq 1$, avec $k>0$ et $k<0$

Les droites (AC) et (BD) sont sécantes en Ω.
D'autre part, $\left(\Omega, \overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}\right)$ forme un repère cartésien de $\mathcal{E}$.
Les points Ω, A et C étant alignés, nous avons $\overrightarrow{\Omega C}=\lambda\overrightarrow{\Omega A}$ et, de même, puisque Ω, B et D sont alignés, nous avons $\overrightarrow{\Omega D}=\mu\overrightarrow{\Omega B}$
Nous avons :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD} &\iff \overrightarrow{\Omega B}-\overrightarrow{\Omega A}=k\left(\overrightarrow{\Omega D}-\overrightarrow{\Omega C}\right)\\ &\iff \overrightarrow{\Omega B}-\overrightarrow{\Omega A}=k\mu\overrightarrow{\Omega B}-k\lambda\overrightarrow{\Omega A}\end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{\Omega A}$ et $\overrightarrow{\Omega B}$ sont linéairement indépendants, et donc nous pouvons déduire :

$$k\mu=1\iff \mu=\frac{1}{k} \text{ et } k\lambda=1\iff\lambda=\frac{1}{k}$$

Et donc :

$$\overrightarrow{\Omega C}=\frac{1}{k}\overrightarrow{\Omega A}\iff k\overrightarrow{\Omega C}=\overrightarrow{\Omega A} \text{ et } \overrightarrow{\Omega D}=\frac{1}{k}\overrightarrow{\Omega B}\iff k\overrightarrow{\Omega D}=\overrightarrow{\Omega B}$$

Donc, l'homothétie H, de centre Ω et de rapport $\dfrac{1}{k}$ est telle que $H(A)=C$ et $H(B)=D$

Remarque 6 :

On retrouve ici le théorème de Thalès

18.2 Applications affines

18.2.1 Définition

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application.
On dit que f est affine si et seulement si il existe une application linéaire $\overrightarrow{f} : E \longrightarrow E$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \overrightarrow{f} : E & \longrightarrow & E \\ \overrightarrow{MN} & \longmapsto & \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{MN}\right) = \overrightarrow{f(M)\, f(M)} \end{array} \right.$$

On dit que $\overrightarrow{f}$ est l'application linéaire associée à f

Remarque 7 :

1. On connaît déjà quelques applications affines : les applications qui conservent le barycentre
2. Plusieurs applications affines peuvent avoir la même application linéaire associée.
   (a) Les translations ont pour application linéaire associée l'application identique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E que nous avons notée Id_E
   (b) Les homothéties de rapport $k \neq 0$, mais de n'importe quel centre, ont pour application linéaire associée l'homothétie vectorielle de rapport $k \neq 0$, h_k
3. Est-ce que toutes les applications affines conservent le barycentre ? ? Le théorème suivant y répond.

18.2.2 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E
$f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ est affine si et seulement si f conserve les barycentres

Démonstration

1. On sait que les applications qui conservent le barycentre sont affines
2. Réciproquement, soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application affine d'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$.

   Soit $\{(A_i, \alpha_i)\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ un système pondéré tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ et soit G le barycentre de ce système pondéré.
   Posons $G' = f(G)$ et $A'_i = f(A_i)$; il faut donc démontrer que G' est le barycentre de $\{(A'_i, \alpha_i)\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

   G étant le barycentre, nous avons $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$.

   $\overrightarrow{f}$ étant linéaire, $\overrightarrow{f}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}\right) = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{0}\right) = \overrightarrow{0}$

   $\overrightarrow{f}$ étant toujours linéaire, $\overrightarrow{f}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i}\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{GA_i}\right)$ Or, f est affine, et donc $\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{GA_i}\right) = \overrightarrow{f(G)\, f(A_i)} = \overrightarrow{G'A'_i}$

   D'où nous tirons que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{G'A'_i} = \overrightarrow{0}$, et donc que G' est le barycentre du système pondéré $\{(A'_i, \alpha_i)\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$

18.2.3 Conséquence de la conservation des barycentres

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E et soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application affine.

1. Une application affine f conserve les milieux
2. L'image d'un segment $[A, B]$ est, si $f(A) \neq f(B)$, le segement $[f(A) ; f(B)]$

Démonstration

1. Soient $A \in \mathcal{E}$,$B \in \mathcal{E}$ si I est le milieu du segment $[A, B]$, alors A est l'isobarycentre de A et B, et donc $f(I)$ est l'isobarycentre de $f(A)$ et $f(B)$, c'est à dire le milieu du segement $[f(A); f(B)]$
2. Un point $X \in [A, B]$ si et seulement si, X est le barycentre du système pondéré $\{(A; \lambda); (B; 1-\lambda)\}$ où $\lambda \in [0; 1]$
   Alors f étant une application affine, conservant donc les barycentres, $f(X)$ est le barycentre de $\{(f(A); \lambda); (f(B); 1-\lambda)\}$ où $\lambda \in [0; 1]$ et donc $f(X)$ est élément de l'intervalle $[f(A); f(B)]$

18.2.4 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.
Soient $A \in \mathcal{E}$ et $B \in \mathcal{E}$ 2 points de $\mathcal{E}$. Alors :
Il existe une et une seule application affine f telle que $\varphi = \overrightarrow{f}$ et $f(A) = B$

Démonstration

Soit f une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{ccc} f : \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ M & \longmapsto & M' = f(M) \end{array}\right.$$

Où M' est défini par $\overrightarrow{BM'} = \varphi\left(\overrightarrow{AM}\right)$

1. Nous avons $f(A) = B$
   En effet, par construction de f, nous avons $\overrightarrow{Bf(A)} = \varphi\left(\overrightarrow{AA}\right) = \overrightarrow{0}$
   Donc, de $\overrightarrow{Bf(A)} = \overrightarrow{0}$, nous tirons $B = f(A)$
2. f est une application affine telle que $\overrightarrow{f} = \varphi$
   En effet, soient $M \in \mathcal{E}$ et $N \in \mathcal{E}$, alors :
   $$\begin{aligned} \overrightarrow{f(M)f(N)} &= \overrightarrow{f(M)f(A)} + \overrightarrow{f(A)f(N)} \\ &= -\overrightarrow{f(A)f(M)} + \overrightarrow{f(A)f(N)} \\ &= -\varphi\left(\overrightarrow{AM}\right) + \varphi\left(\overrightarrow{AN}\right) \text{ par construction de } f \\ &= \varphi\left(-\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}\right) \text{ par linéarité de } \varphi \\ &= \varphi\left(\overrightarrow{MN}\right) \end{aligned}$$
   Ainsi, f est une application affine et $\overrightarrow{f} = \varphi$
3. f est unique
   Soit g une seconde application affine telle que $\varphi = \overrightarrow{g}$ et $g(A) = B$.
   Soit $M \in \mathcal{E}$; alors :
   $$\begin{aligned} \overrightarrow{f(M)g(M)} &= \overrightarrow{f(M)B} + \overrightarrow{Bg(M)} \\ &= \overrightarrow{f(M)f(A)} + \overrightarrow{g(A)g(M)} \\ &= \varphi\left(\overrightarrow{MA}\right) + \varphi\left(\overrightarrow{AM}\right) \\ &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$
   De $\overrightarrow{f(M)g(M)} = \overrightarrow{0}$, nous tirons que, pour tout $M \in \mathcal{E}$, nous avons $f(M) = g(M)$, c'est à dire $f = g$

18.2.5 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E. Soient $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ et $g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ 2 applications affines d'application linéaire respective $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{g}$. Alors, l'application $f \circ g$ est affine et $\overrightarrow{f \circ g} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$
La composition des applications affines est une application affine

Démonstration

1. Nous avons déjà suggéré *(sans toutefois le démontrer)* que la composition de 2 applications qui conservaient le barycentre conservait le barycentre, c'est à dire que la composition de 2 applications affines est encore affine. Nous proposons ici, une seconde démonstration utilisant les applications linéaires associées.
2. Soient donc $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ et $g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ 2 applications affines d'application linéaire respective $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{g}$. Alors, pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $N \in \mathcal{E}$, nous avons :

$$\overrightarrow{f \circ g(M)\, f \circ g(N)} = \overrightarrow{f}\left[\overrightarrow{g(M)\, g(N)}\right] = \overrightarrow{f}\left[\overrightarrow{g}\left(\overrightarrow{MN}\right)\right] = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}\left(\overrightarrow{MN}\right)$$

   $f \circ g$ est bien une application affine et nous avons $\overrightarrow{f \circ g} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$

18.2.6 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E. Soient $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une applications affines d'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$. Alors :

1. f est injective si et seulement si $\overrightarrow{f}$ est injective
2. f est surjective si et seulement si $\overrightarrow{f}$ est surjective
3. f est bijective si et seulement si $\overrightarrow{f}$ est bijective. Dans ce cas, f^{-1} est affine et $\overrightarrow{f^{-1}} = \overrightarrow{f}^{-1}$

Démonstration

1. <u>Démontrons que f est injective si et seulement si $\overrightarrow{f}$ est injective</u>

   → **Supposons que f est injective**
   Alors, pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $N \in \mathcal{E}$, si $f(M) = f(N)$ alors $M = N$
   Soit donc $\overrightarrow{u} \in \ker \overrightarrow{f}$. Il existe $A \in \mathcal{E}$ et $B \in \mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.
   Nous avons $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{f(A)\, f(B)} = \overrightarrow{0} \iff f(A) = f(B)$
   De l'injectivité de f, nous avons $A = B$, et donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$; ce qui montre que $\overrightarrow{f}$ est injective

   → **Supposons que $\overrightarrow{f}$ est injective**
   Soient $M \in \mathcal{E}$ et $N \in \mathcal{E}$ tels que $f(M) = f(N)$
   Alors $\overrightarrow{f(M)\, f(N)} = \overrightarrow{0}$. Comme $\overrightarrow{f(M)\, f(N)} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{MN}\right)$, ce qui signifie que $\overrightarrow{MN} \in \ker \overrightarrow{f}$.
   Comme $\overrightarrow{f}$ est injective, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{0}$ et donc $M = N$
   Ce qui traduit que f est donc injective

   Donc f est injective si et seulement si $\overrightarrow{f}$ est injective

2. <u>Démontrons que f est surjective si et seulement si $\overrightarrow{f}$ est surjective</u>

   → **Supposons f surjective**
   Démontrons que $\overrightarrow{f}$ est surjective.
   Soit $\overrightarrow{v} \in E$; il existe $A \in \mathcal{E}$ et $B \in \mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$.
   f étant surjective, il existe $A_1 \in \mathcal{E}$ et $B_1 \in \mathcal{E}$ tels que $f(A_1) = A$ et $f(B_1) = B$.
   Donc $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{f(A_1)\, f(B_1)} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{A_1B_1}\right)$.
   Il existe donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{A_1B_1} \in E$ tel que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{A_1B_1}\right) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$
   $\overrightarrow{f}$ est donc surjective

   → **Supposons $\overrightarrow{f}$ surjective**
   Démontrons que f est surjective.
   Soit $A \in \mathcal{E}$ que l'on peut prendre comme origine et on pose $B = f(A)$.
   Soit $N \in \mathcal{E}$ quelconque. Alors $\overrightarrow{BN} \in E$, et $\overrightarrow{f}$ étant surjective, il existe $\overrightarrow{u} \in E$ tel que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{BN}$. f étant affine, il existe $M \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{f(A)\, f(M)} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AM}\right)$, c'est à dire tel que $f(M) = N$
   f est donc surjective.

3. Il est maintenant évident que f est bijective si et seulement si $\overrightarrow{f}$ est bijective.
Montrons que f^{-1} est affine et que $\overrightarrow{f^{-1}} = \overrightarrow{f}^{-1}$
Soit $A \in \mathcal{E}$ que l'on peut prendre comme origine et on pose $B = f(A)$.
On appelle g l'application affine d'application linéaire associée $\overrightarrow{f}^{-1}$ et telle que $A = g(B)$. D'après 18.2.4, cette application existe et est unique.
Alors, pour tout point $X \in \mathcal{E}$, nous avons :
$$\overrightarrow{Bf \circ g(X)} = \overrightarrow{f \circ g(B) f \circ g(X)} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{g(B) g(X)}\right) = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{f}^{-1}\left(\overrightarrow{BX}\right)\right) = \overrightarrow{BX}$$
Ce qui montre que $\overrightarrow{Bf \circ g(X)} = \overrightarrow{BX}$ et donc que, pour tout $X \in \mathcal{E}$, nous avons $f \circ g(X) = X$, c'est à dire $g = f^{-1}$.
D'où le résultat f^{-1} est affine et que $\overrightarrow{f^{-1}} = \overrightarrow{f}^{-1}$

18.2.7 Proposition

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E et soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application affine et d'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$
Soient $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{E}$ et $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{E}$ 2 sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ de même direction F, c'est à dire qu'ils sont parallèles.
Alors, $f(\mathcal{F}_1)$ et $f(\mathcal{F}_2)$ sont parallèles et de même direction $\overrightarrow{f}(F)$

Démonstration

Il est bien entendu que pour tout $M_1 \in \mathcal{F}_1$, $N_1 \in \mathcal{F}_1$, nous avons $f(M_1) \in f(\mathcal{F}_1)$, $f(N_1) \in f(\mathcal{F}_1)$, $\overrightarrow{M_1N_1} \in F$ et $\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{M_1N_1}\right) = \overrightarrow{f(M_1) f(N_1)} \in \overrightarrow{f}(F)$
Il en est de même pour tout point $M_2 \in \mathcal{F}_2$, $N_2 \in \mathcal{F}_2$: $\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{M_2N_2}\right) = \overrightarrow{f(M_2) f(N_2)} \in \overrightarrow{f}(F)$
Ainsi, $f(\mathcal{F}_1)$ et $f(\mathcal{F}_2)$ sont parallèles

18.2.8 Proposition

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E et soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application affine et d'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$ Soient $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ un sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ de direction F

1. Si $\mathcal{F}$ est un plan, alors $f(\mathcal{F})$ est un plan, une droite ou un point
2. Si $\mathcal{F}$ est une droite, alors $f(\mathcal{F})$ est une droite ou un point

Démonstration

D'après le théorème du rang, nous avons toujours $\dim \overrightarrow{f}(F) \leqslant \dim F$, et donc, si F est un plan, alors $\dim \overrightarrow{f}(F) = 2$, $\dim \overrightarrow{f}(F) = 1$ ou $\dim \overrightarrow{f}(F) = 0$; d'où les résultats.

Remarque 8 :

Il est évident qu'on peut généraliser à un sous espace affine de dimension finie quelconque, toujours par le théorème du rang.

DANS CE QUI SUIT, NOUS NOUS INTÉRESSONS À LA STRUCTURE GLOBALE DES HOMOTHÉTIES ET DES TRANSLATIONS

18.2.9 Définition

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E
$\mathcal{H}$ est l'ensemble des homothéties de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{T}$ est l'ensemble des translations de $\mathcal{E}$.
On appelle homothétie-translation ou dilatation tout élément de $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$

18.2.10 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E et soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application affine. Alors :
f est une homothétie-translation si et seulement si il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que, pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $N \in \mathcal{E}$, nous avons $\overrightarrow{f(M) f(N)} = k\overrightarrow{MN}$
On écrit aussi que $\overrightarrow{f} = k\mathrm{Id}_E$

Démonstration

Ce résultat est la compilation et les synthèse des résultats établis en 18.1.5 et 18.1.8

18.2.11 Corollaire

Voici une autre forme d'énoncé de 18.2.10
Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E. Une application affine $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ est une homothétie translation si et seulement si son application linéaire associée $\overrightarrow{f}$ est une homothétie

Exercice 1 :

Montrer que $\mathcal{H} \cap \mathcal{T} = \{\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}\}$

Remarque 9 :

On déduit de 18.2.10 qu'une homothétie-translation est soit une homothétie, soit une translation :

1. Si $k = 1$, c'est une translation
2. Si $k \neq 0$ et $k \neq 1$, c'est une homothétie

18.2.12 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E. La composition des homohéties-translations de $\mathcal{E}$ est une homothétie-translation de $\mathcal{E}$, autrement dit :

$$(\forall f \in \mathcal{H} \cup \mathcal{T})\,(\forall g \in \mathcal{H} \cup \mathcal{T})\,(f \circ g \in \mathcal{H} \cup \mathcal{T})$$

La composition des homothéties-translations est une loi interne

Démonstration

- ▷ Soit $f \in \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$. Alors, il existe $k_f \in \mathbb{R}^*$ tel que pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $N \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{f(M) f(N)} = k_f\overrightarrow{MN}$
- ▷ De même, soit $g \in \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$. Alors, il existe $k_g \in \mathbb{R}^*$ tel que pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $N \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{g(M) g(N)} = k_g\overrightarrow{MN}$
- ▷ Alors :
$$\overrightarrow{f \circ g(M) f \circ g(N)} = k_f\overrightarrow{g(M) g(N)} = k_f\left(k_g\overrightarrow{MN}\right) = k_f k_g\overrightarrow{MN}$$

$f \circ g$ est donc bien une homothétie-translation. La loi $\circ$ est bien une loi interne.

Remarque 10 :

1. Nous venons d'établir des résultats sur des formes vectorielles, à savoir que si $k_f \times k_g = 1$, nous obtenons une translation, et que, sinon, nous obtenons une homothétie.
   Une question, cependant, à laquelle il n'a pas été répondu, c'est :

   « **Quel est le type de cette homothétie ? Quel est le type de cette translation ?** »

2. Nous répondons, une première fois, à l'une de ces questions qui ne pose pas de difficulté :

   Si $\Omega \in \mathcal{E}$, $k_1 \in \mathbb{R}^*$ et $k_2 \in \mathbb{R}^*$ et h_{Ω,k_1} et h_{Ω,k_2}, 2 homothéties de même centre, alors $h_{\Omega,k_1} \circ h_{\Omega,k_2} = h_{\Omega,k_1k_2}$
   - ⋆ Si $k_1 \times k_2 \neq 1$, alors h_{Ω,k_1k_2} est une homothétie de centre Ω de rapport k_1k_2
   - ⋆ Si $k_1 \times k_2 = 1$, alors $h_{\Omega,k_1k_2} = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ et $(h_{\Omega,k_1})^{-1} = h_{\Omega,k_2} = h_{\Omega,\frac{1}{k_1}}$

3. Plus difficile ! ! Soit $\Omega \in \mathcal{E}$, $k \in \mathbb{R}$ tel que $k \neq 0$ et $k \neq 1$. Soit $u \in E$ et considérons $h_{\Omega,k} \circ t_u$ et $t_u \circ h_{\Omega,k}$ où t_u est la translation de vecteur u.
   Ces 2 transformations sont une homothétie de rapport k que nous allons chercher à caractériser, en fait, rechercher leur centre qui sera le point fixe des transformations.
   - ⋆ **Etude de $h_{\Omega,k} \circ t_u$**
     Nous savons que $h_{\Omega,k} \circ t_u$ est une homothétie. Appelons C ce centre d'homothétie.

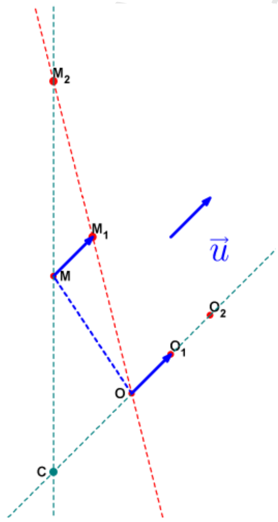


FIGURE 18.5 – La figure représentant $h_{\Omega,k} \circ t_u$

Pour tout point $M \in \mathcal{E}$, appelons $M' = t_u(M)$ et $M'' = h_{\Omega,k}(M')$. Nous avons alors, $\overrightarrow{MM'} = u$ et $\overrightarrow{\Omega M''} = k\overrightarrow{\Omega M'}$ et $\overrightarrow{CM''} = k\overrightarrow{CM}$
Ce qui est vrai pour tout $M \in \mathcal{E}$ l'est aussi pour Ω. Donc, si $\Omega' = t_u(\Omega)$ et $\Omega'' = h_{\Omega,k}(\Omega')$. Nous avons alors, $\overrightarrow{\Omega\Omega'} = u$ et $\overrightarrow{\Omega\Omega''} = k\overrightarrow{\Omega\Omega'} = ku$ et $\overrightarrow{C\Omega''} = k\overrightarrow{C\Omega}$
Donc :

$$\overrightarrow{C\Omega''} = \overrightarrow{C\Omega} + \overrightarrow{\Omega\Omega''} = \overrightarrow{C\Omega} + ku = k\overrightarrow{C\Omega} \Longleftrightarrow (1-k)\overrightarrow{C\Omega} = -ku \Longleftrightarrow \overrightarrow{\Omega C} = \frac{k}{1-k}u$$

Le centre C est donc bien défini.

   - ⋆ **Etude de $t_u \circ h_{\Omega,k}$** Nous savons que $t_u \circ h_{\Omega,k}$ est une homothétie. Appelons C ce centre d'homothétie.
     Pour tout point $M \in \mathcal{E}$, appelons $M' = h_{\Omega,k}(M)$ et $M'' = t_u(M')$. Nous avons alors, $\overrightarrow{M'M''} = u$ et $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ et, toujours, $\overrightarrow{CM''} = k\overrightarrow{CM}$
     Ce qui est vrai pour tout $M \in \mathcal{E}$ l'est aussi pour Ω. Alors, $\Omega = h_{\Omega,k}(\Omega)$, et $\Omega'' = t_u(\Omega)$, nous avons alors, $\overrightarrow{\Omega\Omega''} = u$ et $\overrightarrow{C\Omega''} = k\overrightarrow{C\Omega}$

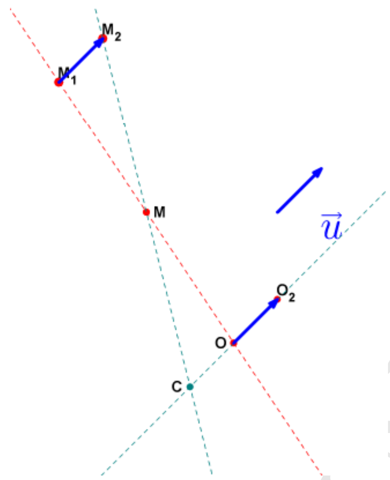


FIGURE 18.6 – La figure représentant $t_u \circ h_{\Omega,k}$

Donc :

$$\overrightarrow{C\Omega''} = \overrightarrow{C\Omega} + \overrightarrow{\Omega\Omega''} = k\overrightarrow{C\Omega} \iff (1-k)\,\overrightarrow{C\Omega} = -\overrightarrow{\Omega\Omega''} = -u \iff \overrightarrow{\Omega C} = \frac{1}{1-k}u$$

Le centre C est donc toujours bien défini.

Rien que par ces calculs, nous voyons que $t_u \circ h_{\Omega,k} \neq h_{\Omega,k} \circ t_u$ et que donc, la composition des applications dans $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$ n'est pas commutative

4. Plus largement, soient $\Omega_1 \in \mathcal{E}$, $\Omega_2 \in \mathcal{E}$, $k_1 \in \mathbb{R}^*$ et $k_2 \in \mathbb{R}^*$; considérons h_{Ω_1,k_1} et h_{Ω_2,k_2} et nous allons travailler $h_{\Omega_1,k_1} \circ h_{\Omega_2,k_2}$

⋆ **Supposons** $k_1 \times k_2 = 1$

Alors, clairement, $k_1 = \dfrac{1}{k_2}$. pour simplifier, nous allons poser $k_1 = k$ et donc $k_2 = \dfrac{1}{k}$ et nous allons étudier $h_{\Omega_2,\frac{1}{k}} \circ h_{\Omega_1,k}$.

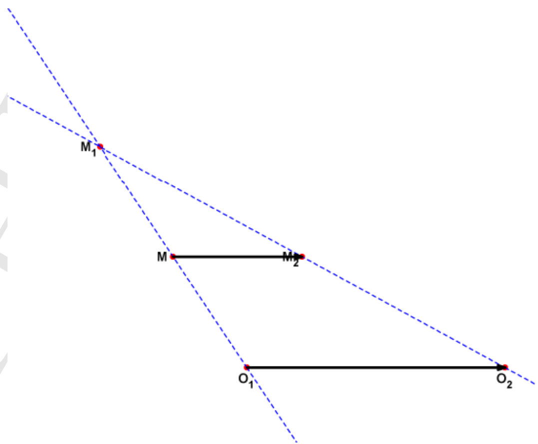


FIGURE 18.7 – La figure représentant $h_{\Omega_2,\frac{1}{k}} \circ h_{\Omega_1,k}$

Pour $M \in \mathcal{E}$, appelons $M' = h_{\Omega_1,k}(M)$ et $M'' = h_{\Omega_2,\frac{1}{k}}(M')$. Nous avons alors :

- $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega_1 M} \iff \overrightarrow{\Omega_1 M} = \dfrac{1}{k}\overrightarrow{\Omega_1 M'}$
- $\overrightarrow{\Omega_2 M''} = \dfrac{1}{k}\overrightarrow{\Omega_2 M'} \iff \overrightarrow{\Omega_2 M'} = k\overrightarrow{\Omega_2 M''}$

D'après 18.2.10, $h_{\Omega_2,\frac{1}{k}} \circ h_{\Omega_1,k}$ est une translation ; il faut donc montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM''}$

est constant. Nous avons :

$$\overrightarrow{MM''}=\overrightarrow{M\Omega_1}+\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}+\overrightarrow{\Omega_2M''}=\frac{1}{k}\overrightarrow{M'\Omega_1}+\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}+\frac{1}{k}\overrightarrow{\Omega_2M'}=\frac{1}{k}\overrightarrow{\Omega_2\Omega_1}+\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}=\left(1-\frac{1}{k}\right)\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$$

Ainsi, nous avons $\overrightarrow{MM''}=\left(1-\dfrac{1}{k}\right)\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$ et donc $h_{\Omega_2,\frac{1}{k}}\circ h_{\Omega_1,k}$ est une translation de vecteur $\left(1-\dfrac{1}{k}\right)\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$, ce qui montre, une fois de plus, que la composition n'est pas commutative.

⋆ <u>**Supposons, maintenant que $k_1\times k_2\neq 1$**</u>

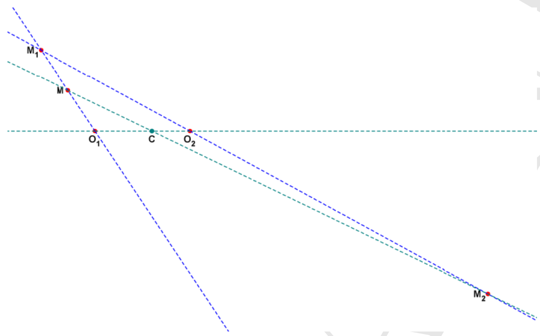


FIGURE 18.8 – La figure représentant $h_{O_2,k_2}\circ h_{O_1,k_1}$ avec $k_1\times k_2\neq 1$

Nous savons que $h_{O_2,k_2}\circ h_{O_1,k_1}$ avec $k_1\times k_2\neq 1$ est une homothétie de centre C et de rapport k_1k_2

Nous avons bien évidemment $h_{O_1,k_1}(O_1)=O_1$. Posons $h_{O_2,k_2}(O_1)=O'$ et nous avons, là, $\overrightarrow{O_2O'}=k_2\overrightarrow{O_2O_1}$.

D'autre part, nous avons aussi : $\overrightarrow{CO'}=k_1k_2\overrightarrow{CO_1}$.

Donc :

$$\overrightarrow{CO'}=\overrightarrow{CO_2}+\overrightarrow{O_2O'}=\overrightarrow{CO_2}+k_2\overrightarrow{O_2O_1}\text{ et }\overrightarrow{CO_1}=\overrightarrow{CO_2}+\overrightarrow{O_2O_1}$$

D'où nous avons :

$$\begin{gathered}\overrightarrow{CO'}=k_1k_2\overrightarrow{CO_1}\\ \Longleftrightarrow\\ \overrightarrow{CO_2}+k_2\overrightarrow{O_2O_1}=k_1k_2\overrightarrow{CO_2}+k_1k_2\overrightarrow{O_2O_1}\\ \Longleftrightarrow\\ (1-k_1k_2)\overrightarrow{CO_2}=(k_1k_2-k_2)\overrightarrow{O_2O_1}\\ \Longleftrightarrow\\ \overrightarrow{O_2C}=\frac{k_1k_2-k_2}{k_2k_1-1}\overrightarrow{O_2O_1}\end{gathered}$$

Ainsi, nous avons $\overrightarrow{O_2C}=\left(\dfrac{k_1k_2-k_2}{k_2k_1-1}\right)\overrightarrow{O_2O_1}$, ce qui définit bien le centre C et montre que C est sur la droite (O_1O_2)

18.2.13 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E. Soit $f:\mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{E}$ une homothétie translation.
Soit $\mathcal{F}\subset\mathcal{E}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction F, sous-espace vectoriel de E. Alors, $\mathcal{F}$ et $f(\mathcal{F})$ sont parallèles

<u>**Démonstration**</u>

Que f soit une homothétie-translation veut dire qu'il existe $k\in\mathbb{R}^*$ tel que pour tout $M\in\mathcal{F}$ et tout $N\in\mathcal{F}$, nous avons $\overrightarrow{f(M)f(N)}=k\overrightarrow{MN}$, ce qui veut dire que $\overrightarrow{f(M)f(N)}\in F$, et donc que $f(\mathcal{F})$ admet F comme direction ; ce qui veut dire que $\mathcal{F}$ et $f(\mathcal{F})$ sont parallèles

18.2.14 Quelques exercices

Exercice 2 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 2. Par 2 points E et F pris sur les côtés $[A;B]$ et $[C;D]$ d'un quadrilatère $ABCD$, on mène des parallèles à la diagonale $[B;D]$ qui coupent les côtés $[A;D]$ et $[C;D]$ respectivement en H et G.

1. Si le quadrilatère $EFGH$ est un parallélogramme, démontrer que les droites (EF) et (HG) sont parallèles à (AC)
2. Démontrer que si les droites (EF) et (HG) sont sécantes, alors leur point de concours est sur la droite (AC)

Exercice 3 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et G le barycentre d'un système pondéré $\{(A,2);(B,-1);(C,1)\}$. Soit $f:\mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{E}$ l'application qui à tout $M\in\mathcal{E}$ fait correspondre le point $M'\in\mathcal{E}$ tel que :

$$\overrightarrow{GM'}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$$

Quelle est la nature de f ?

Exercice 4 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine ; on considère $A\in\mathcal{E}$ et $B\in\mathcal{E}$, 2 points de $\mathcal{E}$ tels que $A\neq B$

1. Quelles sont les conditions sur $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\beta\in\mathbb{R}$ pour que, pour tout point $M\in\mathcal{E}$, il existe un point $M'\in\mathcal{E}$ tel que :
$$\alpha\overrightarrow{M'A}+\beta\overrightarrow{M'B}+2\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{0}$$
2. La condition sur α et β étant réalisée, on désigne par $f:\mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{E}$ l'application qui à tout $M\in\mathcal{E}$ fait correspondre le point $M'\in\mathcal{E}$.
   (a) Déterminer, suivant les valeurs α et β, l'ensemble des points invariants par f
   (b) On suppose $\alpha+\beta=0$. Pour tout point $M\in\mathcal{E}$, exprimer le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et α
   (c) On suppose $\alpha+\beta\neq 0$. Montrer que f est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport

18.2.15 Expression analytique d'application affine en dimension 3

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3 et de direction E. On suppose $\{i;j;k\}$ base de E et O origine de $\mathcal{E}$. Soit $f:\mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{E}$ une application affine d'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$. Si $M=(x,y,z)\in\mathcal{E}$ et $f(M)=(x',y',z')\in\mathcal{E}$, la définition analytique de f est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{rl} x'= & a_1x+b_1y+c_1a+\alpha \\ y'= & a_2x+b_2y+c_2a+\beta \\ z'= & a_3x+b_3y+c_3a+\gamma \end{array}\right.$$

Avec, pour $i=1,2$, $a_i\in\mathbb{R}$, $b_i\in\mathbb{R}$ et $c_i\in\mathbb{R}$ et $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}$, $\gamma\in\mathbb{R}$

Démonstration

Soient donc $M\in E$ avec $M=(x,y,z)$ et $f(M)=(x',y',z')$. Nous appelons $f(O)=(\alpha,\beta,\gamma)$.
Par définition d'application affine, nous avons $\overrightarrow{f(O)\,f(M)}=\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OM}\right)$.

Or, $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{f(O)\,f(M)} = \begin{pmatrix} x'-\alpha \\ y'-\beta \\ z'-\gamma \end{pmatrix}$ si $\mathcal{M}_{\{i;j;k\}}\left(\overrightarrow{f}\right) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, nous avons :

$$\begin{pmatrix} x'-\alpha \\ y'-\beta \\ z'-\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

D'où, par calcul, nous avons le résultat

18.2.16 Corollaire

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3 et de direction E. On suppose $\{i;j;k\}$ base de E et O origine de $\mathcal{E}$. Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application affine d'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$ et de définition analytique donnée par :

$$\begin{cases} x' = & a_1x + b_1y + c_1a + \alpha \\ y' = & a_2x + b_2y + c_2a + \beta \\ z' = & a_3x + b_3y + c_3a + \gamma \end{cases} \quad \text{avec pour } i = 1, 2, a_i \in \mathbb{R}, b_i \in \mathbb{R}, c_i \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R}$$

Alors, la définition analytique de $\overrightarrow{f}$ est :

$$\begin{cases} x' = & a_1x + b_1y + c_1a \\ y' = & a_2x + b_2y + c_2a \\ z' = & a_3x + b_3y + c_3a \end{cases} \quad \text{avec pour } i = 1, 2, a_i \in \mathbb{R}, b_i \in \mathbb{R}, c_i \in \mathbb{R}$$

Remarque 11 :

Il y a une écriture *(appelée notation de Grassmann)* qui est utilisée dans beaucoup d'ouvrages de géométrie de l'enseignement supérieur et qu'on peut donner maintenant ; elle n'a pas ma faveur parce qu'elle mélange applications affines et applications linéaires. C'est celle ci :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E et $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application affine d'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$
Etant donnée une origine $O \in \mathcal{E}$, nous pouvons écrire, pour tout $M \in \mathcal{E}$:

$$f(M) = f(O) + \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OM}\right)$$

Quelque part, la définition analytique proposée en 18.2.16 tient d'une telle écriture.

En effet, si $M = (x, y, z)$, $f(M) = (x', y', z')$, $f(O) = (\alpha, \beta, \gamma)$ et $\mathcal{M}_{\{i;j;k\}}\left(\overrightarrow{f}\right) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, nous avons :

$$\begin{array}{cccc} f(M) = & f(O) + & & \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{OM}\right) \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + & & \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 5 :

Dans le plan $\mathcal{P}$, muni d'un repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on considère l'application affine f de définition analytique :

$$\begin{cases} x' = & -3x + 4y - 12 \\ y' = & -\dfrac{3}{2}x + 2y - 3 \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe un et un seul point invariant
2. Démontrer que l'image du plan $\mathcal{P}$ est une droite $\mathcal{D}$
3. Pour tout point $M \in \mathcal{P}$ d'image $M' \in \mathcal{P}$ par f, démontrer que le milieu du bipoint (M, M') appartient à une droite fixe Δ

4. En déduire une construction simple de $M' = f(M)$

Exercice 6 :

Dans le plan $\mathcal{P}$, muni d'un repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on considère l'application affine $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ telle que $f(O) = O'$ où $O' = (-1; -1)$. On suppose que $\overrightarrow{f}$ admet comme définition analytique :

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = & 4x - 5y \\ y' = & 5x \end{array}\right.$$

Donner la définition analytique de f.

18.2.17 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3 et $\{A, B, C, D\}$ un repère affine de $\mathcal{E}$.
Soient X, Y, Z, T, 4 points de $\mathcal{E}$. Alors, il existe une et une seule application affine f de $\mathcal{E}$ telle que :

$$f(A) = X \quad f(B) = Y \quad f(C) = Z \quad f(D) = T$$

Et f est une bijection si et seulement si $\{X, Y, Z, T\}$ est un repère affine de $\mathcal{E}$

Démonstration

1. Soit donc $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application affine d'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$. D'après 18.2.4, cette application est évidemment unique
2. Pour tout point $M \in \mathcal{E}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ uniques tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} + \gamma\overrightarrow{AD}$
   Et nous avons, puisque f est affine et que $f(A) = X$, $f(B) = Y$, $f(C) = Z$ et $f(D) = T$:
   $$\overrightarrow{Xf(M)} = \alpha\overrightarrow{XY} + \beta\overrightarrow{XZ} + \gamma\overrightarrow{XT}$$
   Si $\{X, Y, Z, T\}$ est un repère affine de $\mathcal{E}$ alors $f(M)$ est bien défini et unique. Donc f est une bijection.
3. Si f est une bijection, alors, $\overrightarrow{f}$ est aussi une bijection. Si $\{A, B, C, D\}$ est un repère affine de $\mathcal{E}$, alors $\left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right\}$ est une base de E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel associé à $\mathcal{E}$.
   $\overrightarrow{f}$ étant une bijection, $\left\{\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AB}\right), \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AC}\right), \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AD}\right)\right\}$ est aussi une base de E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel associé à $\mathcal{E}$.
   Or, $\left\{\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AB}\right), \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AC}\right), \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AD}\right)\right\} = \left\{\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ}, \overrightarrow{XT}\right\}$, et donc $\{X, Y, Z, T\}$ est un repère affine de $\mathcal{E}$

18.2.18 Exercices

Exercice 7 :

On considère le plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère affine $\{A; B; C\}$. On considère l'application affine $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ définie par :

$$f(A) = B \quad f(B) = C \quad f(C) = A$$

1. Quelles sont les images des droites (AB), (BC) et (AC) ?
2. Quelles sont les images A', B' et C', milieux de $[B; C]$, $[A; C]$ et $[B; A]$
3. Montrer que le centre de gravité du triangle ABC est invariant
4. Démontrer que $f^3 = f \circ f \circ f$ est l'identité

Exercice 8 :

On considère le plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}\left(\left\{O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}\right)$. On considère les points A, B, C, A', B' et C' de coordonnées respectives dans le repère $\mathcal{R}$:

$$A = (3, 1) \quad B = (3, -1) \quad C = (2, 1) \quad A' = (2, 5) \quad B' = (4, 3) \quad C' = (1, 4)$$

On appelle g l'application affine telle que $g(A) = A'$, $g(B) = B'$ et $g(C) = C'$

1. Donner la définition analytique de g
2. Déterminer le point invariant I de g
3. Déterminer le barycentre du système pondéré $\{(I, 6); (A, 1); (B, 1)\}$
4. En déduire le barycentre du système pondéré $\{(I, 6); (A', 1); (B', 1)\}$

Exercice 9 :

On considère le plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}\left(\left\{O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}\right)$. On considère l'application affine $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ dont la définition analytique est donnée par :

$$\begin{cases} x' = & x + y - 3 \\ y' = & x - y + 2 \end{cases}$$

1. Existe-t-il un point invariant ? ?
2. Quelle est l'image d'une droite d'équation $ax + by + c = 0$?
3. Existe-t-il des droites (D) parallèles à leur image ?
4. Existe-t-il des droites (D) globalement invariantes ?

Exercice 10 :

On considère le plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}\left(\left\{O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}\right)$. Soit $a \in \mathbb{R}^*$; on appelle f_a l'application affine qui a tout point $M = (x, y)$ fait correspondre le point $M' = (x', y')$ où les coordonnées de M' sont définies par :

$$\begin{cases} x' = & ax - ay + 1 - a \\ y' = & ay \end{cases}$$

1. Démontrer que f_a est bijective
2. Déterminer, suivant les valeurs de a, l'ensemble des points invariants par f_a
3. Dans cette question, on considère le cas où $a = 1$
   (a) Démontrer que l'image de la doite $\left(O, \overrightarrow{j}\right)$ est une droite (Δ) que l'on déterminera
   (b) Soit (D) une droite parallèle à la droite $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$; déterminer l'image de (D) par f_1
   (c) Soit $M \in \mathcal{P}$ quelconque d'image M'. La droite (D_M) passant par M et parallèle à la droite $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$ coupe les droites $\left(O, \overrightarrow{j}\right)$ et (Δ) respectivement en R et S
   Comparez $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{RS}$ et en déduire une construction géométrique de M' à partir de M

Exercice 11 :

On considère le plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}\left(\left\{O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}\right)$. On considère l'application affine $T : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ qui a tout point $M = (x, y)$ fait correspondre le point $M' = (x', y')$ où les coordonnées de M' sont définies par :

$$\begin{cases} x' = & 2x + 3y \\ y' = & x + 2y \end{cases}$$

1. Soit $m \in \mathbb{R}$ et nous considérons la droite (D_m) d'équation $y - mx = 0$. Démontrer que T transforme la droite (D_m) en une droite $\left(D^1_m\right)$ contenant l'origine du repère O et dont on donnera la pente en fonction de m.
   Quelle est le droite $\left(D^1_m\right)$ lorsque $m = -\dfrac{2}{3}$?

2. (a) Déterminer la droite (Δ), contenant l'origine O qui est transformée par T en une droite orthogonale à (Δ)
   (b) Démontrer que si $M \in (\Delta)$, alors M' se déduite de M par une symétrie orthogonale par rapport à une droite que l'on déterminera.
3. (a) Trouver les 2 valeurs de m telles que (D_m) coïncide avec sa transformée $\left(D_m^1\right)$. L'une de ces deux droites (D_m) ainsi obtenue a une pente positive. Nous appellerons (Δ_1) cette droite ; l'autre sera notée (Δ_2)
   (b) Si $M \in (\Delta_1)$, démontrer que M' se déduit de M par une homothétie de centre O dont on déterminera le rapport $k_1 \in \mathbb{R}$
   (c) Etudier la même question pour (Δ_2)

Exercice 12 :

On considère le plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}\left(\left\{O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}\right)$. Soit $\overrightarrow{P}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel associé à $\mathcal{P}$ de base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$.
Donner la définition analytique de l'application affine f qui associe au point $A = (1, 2)$ le point $A' = (-1, 3)$ et dont l'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$ a pour matrice dans la base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$:

$$\mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}}\left(\overrightarrow{f}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

18.3 Projections, Symétries, Affinités

18.3.1 Espaces affines supplémentaires

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$.
2 sous-espaces affines $X \subset \mathcal{E}$ et $Y \subset \mathcal{E}$ de directions respectives $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ sont supplémentaires dans $\mathcal{E}$ si et seulement si :

1. $X \cap Y = \{O\}$, c'est à dire que l'intersection de X et Y est réduite à un seul point.
2. $\overrightarrow{X} \oplus \overrightarrow{Y} = \overrightarrow{E}$ (c'est à dire que $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ sont supplémentaires dans $\overrightarrow{E}$.

Exemple 1 :

1. Dans l'espace $\overrightarrow{E}$ de dimension 3 Dans un espace $\overrightarrow{E}$ de dimension 3, 2 sous-espaces affines $X \subset \mathcal{E}$ et $Y \subset \mathcal{E}$ sont supplémentaires si et seulement si :
   → X est un point et $Y = \mathcal{E}$
   → X est une droite et Y un plan de $\mathcal{E}$, ne contenant pas X et tels que $X \cap Y = \{O\}$
2. Dans le plan $\overrightarrow{P}$ de dimension 2 Dans un plan $\overrightarrow{P}$, 2 sous-espaces affines $X \subset \mathcal{P}$ et $Y \subset \mathcal{P}$ sont supplémentaires si et seulement si :
   → X est un point et $Y = \mathcal{P}$
   → X est une droite et Y une droite différente et non parallèle à Y

18.3.2 Définition de projection affine

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$.
Soient $X \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $\overrightarrow{X}$. Soit $\overrightarrow{Y}$ un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\overrightarrow{X}$ dans $\overrightarrow{E}$, c'est à dire que $\overrightarrow{X} \oplus \overrightarrow{Y} = \overrightarrow{E}$
Nous appelons projection sur X de direction $\overrightarrow{Y}$, l'application p ainsi définie :

$$\begin{cases} p : \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ M & \longmapsto & p(M) \end{cases}$$

Où $p(M)$ est l'unique point d'intersection de X avec le sous espace affine de $\mathcal{E}$ passant par M et de direction $\overrightarrow{Y}$

Remarque 12 :

1. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$.
   Soient $X \subset \mathcal{E}$ et $Y \subset \mathcal{E}$ 2 sous-espaces affines supplémentaires de $\mathcal{E}$, de direction respectives $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ et tels que $X \cap Y = \{O\}$
   Pour tout point $M \in \mathcal{E}$, il existe $\overrightarrow{u_X} \in \overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{v_Y} \in \overrightarrow{Y}$, uniques tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u_X} + \overrightarrow{v_y}$.
   Il existe un unique point, que nous notons $p(M)$ tels que $\overrightarrow{u_X} = \overrightarrow{Op(M)}$; nous avons donc $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Op(M)} + \overrightarrow{v_y}$
   La projection sur X parallèlement à $\overrightarrow{Y}$, l'application p est telle que $p(M)$ est l'unique point de X tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Op(M)} + \overrightarrow{v_y}$ et défini ci-dessus
2. Nous avons toujours $\overrightarrow{Mp(M)} \in \overrightarrow{Y}$
3. Il y a une projection particulière qui est très importante : la projection orthogonale dans les espaces affines euclidiens.

   Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de direction $\overrightarrow{E}$.
   Soient $X \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $\overrightarrow{X}$.
   Nous appelons projection orthogonale sur X , toute projection affine sur X de direction $\overrightarrow{X}^{\perp}$
   Nous avons alors $\overrightarrow{Mp(M)} \in \overrightarrow{X}^{\perp}$

18.3.3 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$.
Soient $X \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $\overrightarrow{X}$. Soit $\overrightarrow{Y}$ un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\overrightarrow{X}$ dans $\overrightarrow{E}$,
Soit p la projection sur X de direction $\overrightarrow{Y}$; alors :

1. p est une application affine. Son application linéaire associée est $\overrightarrow{p}$ la projection vectorielle sur $\overrightarrow{X}$ parallèlement à $\overrightarrow{Y}$
2. p est une application affine telle que $p \circ p = p^2 = p$
3. L'ensemble des points invariants par p est X

Démonstration

Il faudra beaucoup se reférer à la figure 18.9

1. **Montrons que p est une application affine**
   Soient $M \in \mathcal{E}$ et $N \in \mathcal{E}$. Alors :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{Mp(M)} + \overrightarrow{p(M)p(N)} + \overrightarrow{p(N)N} = \overrightarrow{p(M)p(N)} + \overrightarrow{Mp(M)} + \overrightarrow{p(N)N}$$

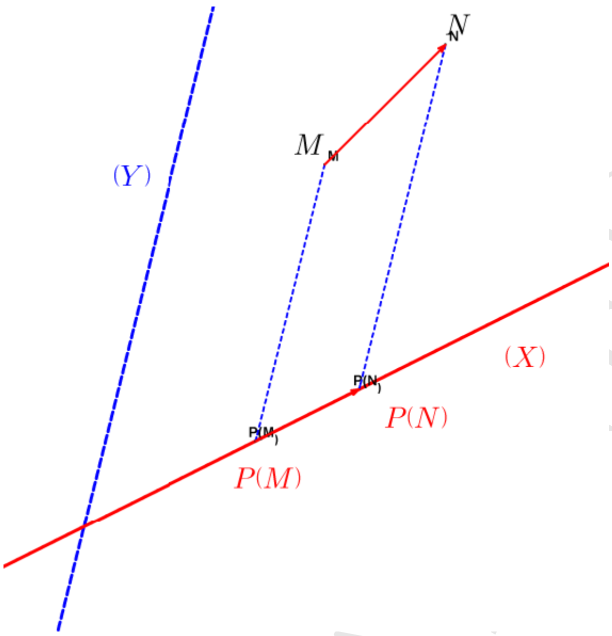


FIGURE 18.9 – Visualisation d'une projection

Or, $\overrightarrow{p(M)\,p(N)} \in \overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Mp(M)} + \overrightarrow{p(N)\,N} \in \overrightarrow{Y}$
C'est à dire :

$$\overrightarrow{MN} = \underbrace{\overrightarrow{p(M)\,p(N)}}_{\in \overrightarrow{X}} + \underbrace{\overrightarrow{Mp(M)} + \overrightarrow{p(N)\,N}}_{\in \overrightarrow{Y}}$$

Les sous-espace vectoriel $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ étant supplémentaires dans $\overrightarrow{E}$, le vecteur $\overrightarrow{p(M)\,p(N)}$ apparait comme la projection vectorielle ϖ sur $\overrightarrow{X}$ parallèlement à $\overrightarrow{Y}$.
Nous avons donc $\varpi\left(\overrightarrow{MN}\right) = \overrightarrow{p(M)\,p(N)}$.
Donc p est une application affine d'application linéaire associée $\overrightarrow{p} = \varpi$

2. **Montrons que $p \circ p = p^2 = p$**
Soit $M \in \mathcal{E}$; alors $p(M) \in X$.
Considérons $p^2(M) = p \circ p(M) = p[p(M)]$.
Par définition, nous avons $p^2(M) \in X$ et donc $\overrightarrow{p(M)\,p^2(M)} \in \overrightarrow{X}$; de plus, par définition de la projection p, nous avons aussi $\overrightarrow{p(M)\,p^2(M)} \in \overrightarrow{Y}$.
Comme les sous-espace vectoriel $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ sont supplémentaires dans $\overrightarrow{E}$, nous avons $\overrightarrow{X} \cap \overrightarrow{Y} = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. Nous en déduisons que, pour tout $M \in \mathcal{E}$, nous avons $\overrightarrow{p(M)\,p^2(M)} = \overrightarrow{0}$, c'est à dire $p^2(M) = p(M)$.
Donc, nous avons bien $p \circ p = p$

3. **Montrons que l'ensemble des points invariants par p est X**
La démonstration est assez simple :

$$M \text{ invariant par } p \Longleftrightarrow M = p(M) \Longleftrightarrow M \in X$$

Remarque 13 :

Ce n'est pas parce que l'endomorphisme $\overrightarrow{f}$ associé à une application affine f est une projection que f est une projection affine.

Exemple

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$, $X \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine de direction $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ un supplémentaire de $\overrightarrow{X}$ dans $\overrightarrow{E}$.

Soit p le projecteur affine sur X parallèlement à $\overrightarrow{Y}$; soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{X}$, un vecteur non nul, et considérons $f = t_{\overrightarrow{u}} \circ p$ où $t_{\overrightarrow{u}}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$

1. f, composée d'applications affines est une application affine d'application linéaire associée $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{t_{\overrightarrow{u}}} \circ \overrightarrow{p} = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}} \circ \overrightarrow{p} = \overrightarrow{p}$.

   C'est à dire que l'endomorphisme associé à f est la projection vectorielle $\overrightarrow{p}$ sur $\overrightarrow{X}$ parallèlement à $\overrightarrow{Y}$
2. Soit $M \in \mathcal{E}$; alors $f(M) = t_{\overrightarrow{u}} \circ p(M)$, et donc $\overrightarrow{p(M)\,f(M)} = \overrightarrow{u}$. Comme $p(M) \in X$, et que $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{X}$, nous avons $f(M) \in X$.
   D'autre part, pour tout $M \in \mathcal{E}$, nous avons
   $$\overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{Mp(M)} + \overrightarrow{p(M)\,f(M)} = \overrightarrow{Mp(M)} + \overrightarrow{u}$$
3. <u>f n'admet pas de points invariants</u>

   Supposons que $M \in \mathcal{E}$ soit invariant par f, alors $M = f(M)$ et donc, nous avons $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{Mp(M)} + \overrightarrow{u}$, c'est à dire $\overrightarrow{p(M)\,M} = \overrightarrow{u}$.

   Par construction d'un projeté, nous avons $\overrightarrow{p(M)\,M} \in \overrightarrow{Y}$. Comme $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{X}$, que $\overrightarrow{X} \cap \overrightarrow{Y} = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, l'égalité $\overrightarrow{p(M)\,M} = \overrightarrow{u}$ implique que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$. Il y a donc contradiction avec l'hypothèse où $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$

   f n'admet donc pas de point invariant et n'est donc pas une projection affine

Nous pouvons donc avoir une application affine f dont l'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$ est une projection vectorielle mais qui n'est pas une projection affine.

18.3.4 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$.
Toute application affine $p : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ telle que $p^2 = p$ est une projection affine

<u>Démonstration</u>

1. Soit $\overrightarrow{p}$ l'application linéaire associée à p ; alors :
   $$\overrightarrow{p \circ p} = \overrightarrow{p} \circ \overrightarrow{p} = \overrightarrow{p}$$
   $\overrightarrow{p}$ est donc une projection vectorielle sur $\mathrm{Im}\,\overrightarrow{p}$ parallèlement à $\ker \overrightarrow{p}$
2. L'image de $\mathcal{E}$ est donc un sous-espace affine $p(\mathcal{E})$ de direction $\mathrm{Im}\,\overrightarrow{p}$ et $p(\mathcal{E})$ est entièrement déterminé par un point $A' = p(A) \in p(\mathcal{E})$ et $\mathrm{Im}\,\overrightarrow{p}$
3. Soit $M \in \mathcal{E}$ un point quelconque ; montrons que $\overrightarrow{Mp(M)} \in \ker \overrightarrow{p}$
   $$\overrightarrow{p}\left(\overrightarrow{Mp(M)}\right) = \overrightarrow{p(M)\,p^2(M)} = \overrightarrow{p(M)\,p(M)} = \overrightarrow{0}$$
   Donc, pour tout $M \in \mathcal{E}$, nous avons $\overrightarrow{Mp(M)} \in \ker \overrightarrow{p}$
4. D'après l'étude des projections vectorielles, nous avons $\overrightarrow{E} = \ker \overrightarrow{p} \oplus \mathrm{Im}\,\overrightarrow{p}$ et donc $\ker \overrightarrow{p} \cap \mathrm{Im}\,\overrightarrow{p} = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$
   Ainsi, $p(M)$ est l'unique point d'intersection entre $p(\mathcal{E})$ et le sous-espace affine de direction $\ker \overrightarrow{p}$ passant par M
5. p est donc la projection sur $p(\mathcal{E})$ de direction $\ker \overrightarrow{p}$

18.3.5 Exercices résolus

Premier exercice

Soit $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$
Définir analytiquement la projection orthogonale sur la droite Δ d'équation $y - x - 1 = 0$

Soient $M = (x, y) \in \mathcal{P}$ et on appelle $M' = (x', y')$ l'image de M par la projection.

- ⋆ Nous avons $y' = x' + 1$
- ⋆ D'autre part, si $\overrightarrow{u}_\Delta$ est le vecteur directeur de Δ, nous avons $\overrightarrow{u}_\Delta = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\left\langle \overrightarrow{u}_\Delta \mid \overrightarrow{Mp(M)} \right\rangle = 0$, d'où $(x' - x) + (y' - y) = 0$, c'est à dire $x' + y' = x + y$.
- ⋆ Nous avons alors $2x' + 1 = x + y$, c'est à dire $x' = \dfrac{x + y - 1}{2}$ et donc $y' = \dfrac{x + y + 1}{2}$.

La définition analytique de la projection orthogonale sur Δ est donc :

$$\begin{cases} x' = & \dfrac{x+y-1}{2} \\ y' = & \dfrac{x+y+1}{2} \end{cases}$$

Second exercice

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3, de direction $\overrightarrow{E}$ et de repère cartésien $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$
On considère l'application affine $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ de définition analytique :

$$\begin{cases} x' = & -2y + z - 1 \\ y' = & -x - y + z - 1 \\ z' = & -2x - 4y + 3z - 2 \end{cases}$$

1. *Montrer que f est une projection et donner les éléments qui la caractérisent*
   - → Premièrement, nous avons $f(O) = (-1, -1, -2)$
   - → Si $\overrightarrow{f}$ est l'application linéaire associée à f, alors, sa matrice dans la base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ est donnée par :

   $$\mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right\}}\left(\overrightarrow{f}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

   Par calcul matriciel, nous avons $\mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right\}}\left(\overrightarrow{f}\right) \times \mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right\}}\left(\overrightarrow{f}\right) = \mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right\}}\left(\overrightarrow{f}\right)$, ce qui montre que $\overrightarrow{f}$ est une projection vectorielle
   - → Mais, ce n'est parce que $\overrightarrow{f}$ est une projection vectorielle que f est une projection affine!!. Nous allons démontrer, par calculs, que f est une projection affine.
   On appelle $M' = f(M)$ et $M'' = f(M')$ et nous posons $M = (x, y, z)$, $M' = (x', y', z')$ et $M'' = (x'', y'', z'')$. Nous avons alors :

   $$\begin{cases} x'' = & -2y' + z' - 1 \\ y'' = & -x' - y' + z' - 1 \\ z'' = & -2x' - 4y' + 3z' - 2 \end{cases}$$
   $$\Longleftrightarrow$$
   $$\begin{cases} x'' = & -2(-x - y + z - 1) + (-2x - 4y + 3z - 2) - 1 = -2y + z - 1 \\ y'' = & -(-2y + z - 1) - (-x - y + z - 1) + (-2x - 4y + 3z - 2) - 1 = -x - y + z - 1 \\ z'' = & -2(-2y + z - 1) - 4(-x - y + z - 1) + 3(-2x - 4y + 3z - 2) - 2 = -2x - 4y + 3z - 2 \end{cases}$$

   Nous avons donc $f^2(M) = f(M)$, donc $f \circ f = f$ et f est bien une projection
   - → Il faut maintenant chercher les points invariants par f. Ce sont donc des points $M = (x, y, z)$ qui vérifient $M = f(M)$, ce qui donne, en termes de coordonnées :

   $$\begin{cases} x = & -2y + z - 1 \\ y = & -x - y + z - 1 \\ z = & -2x - 4y + 3z - 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = & -1 \\ x + 2y - z = & -1 \\ 2x + 4y - 2z = & -2 \end{cases} \Longleftrightarrow x + 2y - z + 1 = 0$$

C'est à dire que le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+2y-z+1=0$ est l'ensemble des points fixes de f

$\rightarrow$ La direction de cette projection est donnée par le noyau de $\overrightarrow{f}$. On trouve ce noyau en résolvant le système :

$$\begin{cases} -2y+z= & 0 \\ -x-y+z= & 0 \\ -2x-4y+3z= & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -2y+z= & 0 \\ -x-y+z= & 0 \end{cases}$$

Le noyau de $\overrightarrow{f}$ est donc la droite vectorielle d'équation $\begin{cases} -2y+z= & 0 \\ -x-y+z= & 0 \end{cases}$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ +2 \end{pmatrix}$

Ainsi, f est une projection sur le plan d'équation $x+2y-z+1=0$ et de direction le vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ +2 \end{pmatrix}$

2. *Quelle est l'image de la droite $\Delta \subset \mathcal{E}$ d'équations : $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-3}{4}$*

Un point de Δ est donné par : $A=(1,0,3)$, et cette droite a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}_\Delta = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

L'image $A' = f(A)$ de A est $A' = (2,1,5)$; L'image du vecteur directeur $\overrightarrow{u}_\Delta$ est donnée par $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}_\Delta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Donc l'image de Δ est une droite vectorielle passant par $A' = (2,1,5)$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

3. *Trouver l'image par f du plan $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$ d'équation $x+y-z+5=0$*

$\rightarrow$ Un point de $\mathcal{P}$ est le point $A=(0,0,5)$ et des vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$ sont $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ L'image de $\mathcal{P}$ par f passe par l'imge $A' = f(A)$ de A et a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$ et $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})$

Or $A' = (4,4,13)$ et $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Nous remarquons que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = -\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})$, c'est à dire que $f(\mathcal{P})$ est une droite passant par $A' = (4,4,13)$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

18.3.6 Exercices

Exercice 13 :

Le plan affine $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère cartésien $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On considère l'application $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ de définition analytique :

$$\begin{cases} x' = & \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3} \\ y' = & -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une application affine non bijective. Déterminer l'ensemble D de ses points invariants.
2. Soit $M' = (a', b')$. Trouver tous les antécédents de M' par f
3. Caractériser l'application f et en reconnaître ses éléments

Exercice 14 :

1. $\mathcal{P}$ est le plan affine euclidien. Définir analytiquement la projection orthogonale sur la droite (Δ) d'équation $2x - y + 2 = 0$
2. $\mathcal{E}$ est l'espace affine euclidien de dimension 3. Définir analytiquement la projection orthogonale sur le plan (P) d'équation $2x - y + z - 1 = 0$

Exercice 15 :

Dans l'espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3, définir la projection p sur le plan d'équation $x + y + z - 1 = 0$ parallèlement à la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercice 16 :

Le plan affine $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère cartésien $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On considère l'application affine f : $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ de définition analytique :

$$\begin{cases} x' = & \dfrac{1}{3}(4x + 2y - 1) \\ y' = & \dfrac{1}{3}(-2x - y + 2) \end{cases}$$

Quelle est la nature de f ? Donner les éléments qui la caractérisent

Exercice 17 :

Le plan affine $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère cartésien $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Nous considérons les droites D et D' d'équations respectives :

$$D : x - y + 2 = 0 \qquad D' : 2x + 3y - 1 = 0$$

Séfinir analytiquement la projection p sur D parallèlement à D', et la projection q sur D' parallèlement à D

Exercice 18 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3, de direction $\overrightarrow{E}$ et de repère cartésien $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$
On considère l'application affine $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ de définition analytique :

$$\begin{cases} x' = & -x - 2y + 2z - 2 \\ y' = & -x + z - 1 \\ z' = & -2x - 2y + 3z - 2 \end{cases}$$

1. Quelle est la nuture de f ? Donner les éléments qui la caractérisent.
2. Quelle est l'image de la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = & 1 + 2\lambda \\ y = & 2 + 3\lambda \\ z = & 3 + 2\lambda \end{cases} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

3. Quelle est l'image de la droite d'équation $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z+1}{2}$
4. Quelle est l'image du plan d'équation $x - 4y + z + 1 = 0$

Exercice 19 :

Le plan affine $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère cartésien $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On considère l'application affine f : $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ de définition analytique :

$$\begin{cases} x' = & 8x - 4y - 2 \\ y' = & 8x - 4y - 1 \end{cases}$$

1. On apple $\overrightarrow{f}$ l' application linéaire associée à f. Donner $\ker \overrightarrow{f}$
2. Montrer qu'il existe un unique point invariant par f. On appelle I ce point invariant.
3. Montrer que l'image par f de $\mathcal{P}$ est une droite (D) que nous déterminerons.
4. Définir analytiquement la projection p sur (D) parallèlement à $\ker \overrightarrow{f}$.
5. Démontrer que $f = H \circ p = p \circ H$ où H est une homothétie de centre I et de rapport à calculer.

18.3.7 Définition

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$.
Soient $X \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $\overrightarrow{X}$. Soit $\overrightarrow{Y}$ un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\overrightarrow{X}$ dans $\overrightarrow{E}$,
Soit p la projection affine sur X de direction $\overrightarrow{Y}$
On appelle symétrie par rapport à X et parallèlement à $\overrightarrow{Y}$ une application s ainsi définie :

$$\begin{cases} s : \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ \quad M & \longmapsto & M' = s(M) \end{cases}$$

Telle que $p(M)$ soit le milieu du segment $[M s(M)]$; autrement dit $\overrightarrow{Mp(M)} = \overrightarrow{p(M)\, s(M)}$

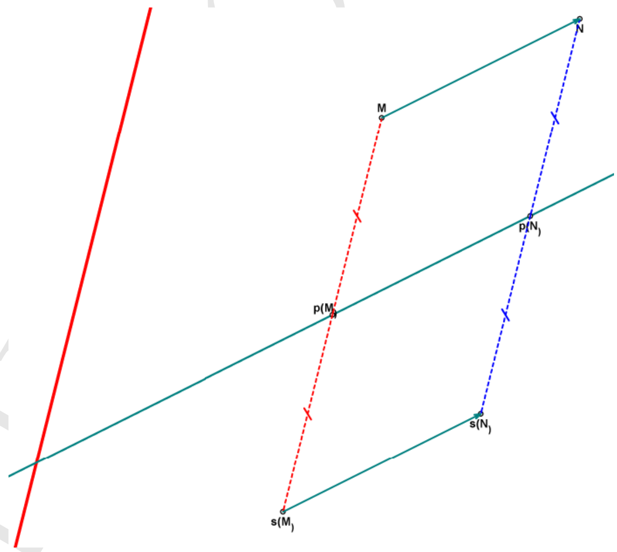


FIGURE 18.10 – Visualisation d'une symétrie

Remarque 14 :

1. Une autre manière d'écrire la relation entre $s(M)$ et $p(M)$:
$$\overrightarrow{Mp(M)} = \overrightarrow{p(M)s(M)}$$
$$\iff$$
$$(\forall O \in \mathcal{E}) \left(\overrightarrow{Op(M)} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Os(M)} - \overrightarrow{Op(M)}\right)$$
$$\iff$$
$$(\forall O \in \mathcal{E}) \left(2\overrightarrow{Op(M)} = \overrightarrow{Os(M)} + \overrightarrow{OM}\right)$$
2. En reprenant le calcul barycentrique, on peut dire que $s(M)$ est le barycentre du système pondéré $\{(p(M), 2); (M, -1)\}$
3. Il faut remarquer que, pour tout $M \in \mathcal{E}$, $p(s(M)) = p(M)$
4. Il y a une symétrie particulière qui est très importante : la symétrie orthogonale dans les espaces affines euclidiens.

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de direction $\overrightarrow{E}$.
Soient $X \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $\overrightarrow{X}$.
Nous appelons symétrie orthogonale sur X , toute symétrie affine par rapport à X de direction $\overrightarrow{X}^{\perp}$
Nous avons alors $\overrightarrow{Ms(M)} \in \overrightarrow{X}^{\perp}$

18.3.8 Proposition

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$.
Soient $X \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $\overrightarrow{X}$. Soit $\overrightarrow{Y}$ un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\overrightarrow{X}$ dans $\overrightarrow{E}$,
Soit s la symétrie par rapport à X et parallèlement à $\overrightarrow{Y}$; alors :

1. s est une application affine et l'endomorphisme associé $\overrightarrow{s}$ est la symétrie vectorielle σ par rapport à $\overrightarrow{X}$ et parallèlement à $\overrightarrow{Y}$
2. L'ensemble des points invariants est X
3. s est une involution, c'est à dire que $s \circ s = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$

Démonstration

1. On montre que s est une application affine
Nous allons proposer 2 démonstrations du résultat
→ La première méthode consiste à utiliser la relation de Chasles, habituelle et assez simple.
Soient $M \in \mathcal{E}$ et $N \in \mathcal{E}$.
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{s(M)s(N)} &= \overrightarrow{s(M)p(M)} + \overrightarrow{p(M)p(N)} + \overrightarrow{p(N)s(N)} \\
&= \overrightarrow{p(M)M} + \overrightarrow{p(M)p(N)} + \overrightarrow{Np(N)} \\
&= \overrightarrow{p(M)M} + \overrightarrow{p(M)p(N)} + \underbrace{\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{Mp(M)} + \overrightarrow{p(M)p(N)}}_{\overrightarrow{Np(N)}} \\
&= \overrightarrow{p(M)p(N)} + \overrightarrow{p(M)p(N)} + \overrightarrow{NM} \\
&= 2\overrightarrow{p(M)p(N)} - \overrightarrow{MN} \\
&= 2\varpi\left(\overrightarrow{MN}\right) - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}\left(\overrightarrow{MN}\right) \\
&= \left(2\varpi - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}\right)\left(\overrightarrow{MN}\right)
\end{aligned}$$
Où nous avons ϖ qui est la projection vectorielle sur $\overrightarrow{X}$ parallèlement à $\overrightarrow{Y}$.
Nous savons aussi que si σ est la symétrie vectorielle par rapport à $\overrightarrow{X}$ parallèlement à $\overrightarrow{Y}$, alors $\sigma = 2\varpi - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}$ et donc nous avons $\overrightarrow{s(M)s(N)} = \left(2\varpi - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}\right)\left(\overrightarrow{MN}\right) = \sigma\left(\overrightarrow{MN}\right)$ Ce qui montre que s est affine et d'application linéaire associée σ

→ La seconde méthode consiste à utiliser le fait que $s(M)$ est le barycentre du système pondéré $\{(p(M), 2); (M, -1)\}$.
Soient $M \in \mathcal{E}$ et $N \in \mathcal{E}$. Alors, pour tout $O \in \mathcal{E}$, nous avons :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{s(M)s(N)} = \overrightarrow{Os(N)} - \overrightarrow{Os(M)} &= \left(2\overrightarrow{Op(N)} - \overrightarrow{ON}\right) - \left(2\overrightarrow{Op(M)} - \overrightarrow{OM}\right)\\ &= 2\overrightarrow{p(M)p(N)} - \overrightarrow{MN}\\ &= 2\varpi\left(\overrightarrow{MN}\right) - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}\left(\overrightarrow{MN}\right)\\ &= \left(2\varpi - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}\right)\left(\overrightarrow{MN}\right)\end{aligned}$$

Et nous concluons comme pour la première démonstration

2. <u>L'ensemble des points invariants est X</u>

   Soit $M \in \mathcal{E}$; alors, pour tout point $O \in \mathcal{E}$, nous avons $2\overrightarrow{Op(M)} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{Os(M)}$. Alors, M invariant peut être écrit :

$$M = s(M) \Longleftrightarrow 2\overrightarrow{Op(M)} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM} \Longleftrightarrow M = p(M) \Longleftrightarrow M \in X$$

3. <u>On démontre que s est une involution</u>
   Soient $M \in \mathcal{E}$ et $A \in X$.
   Nous savons que $s(A) = A$ et donc $\overrightarrow{As(M)} = \overrightarrow{s(A)s(M)} = \sigma\left(\overrightarrow{AM}\right)$.
   De même,

$$\overrightarrow{As[s(M)]} = \overrightarrow{s(A)s[s(M)]} = \sigma\left(\overrightarrow{As(M)}\right) = \sigma\left[\sigma\left(\overrightarrow{AM}\right)\right] = \sigma\circ\sigma\left(\overrightarrow{AM}\right) = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}\left(\overrightarrow{AM}\right) = \overrightarrow{AM}$$

   parce que σ est une symétrie vectorielle donc involutive.
   D'où, pour tout $M \in \mathcal{E}$, nous avons $\overrightarrow{As[s(M)]} = \overrightarrow{AM}$, c'est à dire $s[s(M)] = M$, et donc $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ et s est une involution affine.

18.3.9 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$.
Soit f une application affine de $\mathcal{E}$ involutive, c'est à dire telle que $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$. Alors, f est une symétrie affine

<u>**Démonstration**</u>

1. Soit f une application affine de $\mathcal{E}$ involutive. On appelle $\overrightarrow{f}$ l'application linéaire associée. Alors, comme $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$, nous avons :
$$\overrightarrow{f\circ f} = \overrightarrow{f}\circ\overrightarrow{f} = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}$$
   Ce qui signifie que $\overrightarrow{f}$ est une symétrie vectorielle par rapport à un sous-espace vectoriel $\overrightarrow{X}$ parallèlement à un autre sous-espace vectoriel $\overrightarrow{Y}$ tels que $\overrightarrow{X} \oplus \overrightarrow{Y} = \overrightarrow{E}$
   Ainsi, pour tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{X}$, $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ et pour tout $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{Y}$, $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$
2. Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$, l'ensemble des points fixes de f. Si $\mathcal{F} \neq \emptyset$, alors, $\mathcal{F}$ a pour direction $\overrightarrow{X}$
3. Nous avons $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
   En effet, pour tout $M \in \mathcal{E}$, le milieu I du segment $[M; s(M)]$ est invartiant ; s étant affine conserve les barycentres et donc les milieux, c'est à dire que $s(I)$ est le milieu du segement $\left[s(M); s^2(M)\right]$. Comme s est involutive, $s(I)$ est le milieu du segement $[s(M); M]$, c'est à dire que $s(I) = I$ et donc $I \in \mathcal{F}$
4. Maintenant, pour tout $M \in \mathcal{E}$

$$\sigma\left(\overrightarrow{Ms(M)}\right) = \overrightarrow{s(M)s^2(M)} = \overrightarrow{s(M)M} = -\overrightarrow{Ms(M)}$$

   ce qui signifie que $\overrightarrow{Ms(M)} \in \overrightarrow{Y}$

s est donc une symétrie par rapport à $\mathcal{F}$ parallèlement à $\overrightarrow{Y}$

Remarque 15 :

1. Si s est une symétrie par rapport à $\mathcal{F}$ parallèlement à $\overrightarrow{Y}$, et pour définir analytiquement s, il faut utiliser le fait que, pour tout point $M \in \mathcal{E}$:
   - ⋆ Le milieu du segment $[M; s(M)]$ est dans $\mathcal{F}$
   - ⋆ Le vecteur $\overrightarrow{Ms(M)} \in \overrightarrow{Y}$
2. Pour l'espace affine $\mathcal{E}$ de direction $\overrightarrow{E}$, nous avons $\overrightarrow{E}$ et $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$ qui sont 2 sous-espaces vectoriels supplémentaires.
   - ⋆ La symétrie par rapport à $\mathcal{E}$ et de direction $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$ est l'application identique $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$
   - ⋆ Pour tout point $A \in \mathcal{E}$ la symétrie par rapport à $\{A\}$ de direction $\overrightarrow{E}$ est la symétrie centrale de centre A *(ou bien l'homothétie $h_{A,-1}$ de centre A et de rapport -1)*

18.3.10 Exercices corrigés

1. *$\mathcal{E}$ est un espace affine de dimension 3 de $\mathbb{R}$-espace vectoriel associé $\overrightarrow{E}$*

   ⋆ *(P) est le plan affine d'équation $x - 2y + z + 2 = 0$*

   ⋆ *(D) est une droite affine passant par $A = (1, 0 - 1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$*

   (a) *Définir analytiquement la symétrie par rapport à (P) et parallèlement à (D)*

   Nous allons appeler S_P la symétrie par rapport à (P).
   Soit $M = (x, y, z) \in \mathcal{E}$. Nous appelons $S_P(M) = (x', y', z')$ l'image de M par S_P et I le milieu du segement $[M; S_P(M)]$.

   Les coordonnées de I sont donc $I = \left(\dfrac{x+x'}{2}, \dfrac{y+y'}{2}, \dfrac{z+z'}{2}\right)$

   → Premièrement, $I \in (P)$; les coordonnées de I vérifient donc :

   $$\frac{x+x'}{2} - 2 \times \frac{y+y'}{2} + \frac{z+z'}{2} + 2 = 0 \Longleftrightarrow (x+x') - 2(y+y') + (z+z') + 4 = 0$$

   → En second lieu, le vecteur $\overrightarrow{MS_P(M)}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{u}$, c'est à dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{MS_P(M)} = \lambda \overrightarrow{u}$.
   Ce qui donne, au niveau des coordonnées :

   $$\left\{\begin{array}{rl} x' - x = & \lambda \\ y' - y = & 0 \\ z' - z = & \lambda \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x' = & x + \lambda \\ y' = & y \\ z' = & z + \lambda \end{array}\right.$$

   → Nous remplaçons, maintenant x',y' et z' dans l'équation du plan :

   $$(x+x') - 2(y+y') + (z+z') + 4 = 0 \Longleftrightarrow (x+x+\lambda) - 2(y+y) + (z+z+\lambda) + 4 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = -x+2y-z-2$$

   D'où nous obtenons la définition analytique de S_P :

   $$\left\{\begin{array}{rl} x' = & x + \lambda = x + (-x + 2y - z - 2) \\ y' = & y \\ z' = & z + \lambda = z + (-x + 2y - z - 2) \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x' = & 2y - z - 2 \\ y' = & y \\ z' = & -x + 2y - 2 \end{array}\right.$$

   (b) *Définir analytiquement la symétrie par rapport à (D) et parallèlement à (P)*

   Nous allons, bien entendu, utiliser la même méthode (le même algorithme) que ci-dessus ; même méthode ? ? ? Pas vraiment...même esprit, oui ! !
   Nous allons appeler S_D la symétrie par rapport à (D).
   Soit $M = (x, y, z) \in \mathcal{E}$. Nous appelons $S_D(M) = (x', y', z')$ l'image de M par S_D et I le milieu du segement $[M; S_D(M)]$.

   Les coordonnées de I sont donc $I = \left(\dfrac{x+x'}{2}, \dfrac{y+y'}{2}, \dfrac{z+z'}{2}\right)$

→ Premièrement, $I \in (D)$ et comme $A \in (D)$, le vecteur $\overrightarrow{AI}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{u}$, c'est à dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AI} = \lambda \overrightarrow{u}$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{AI}$ sont : $\overrightarrow{AI} = \begin{pmatrix} \dfrac{x+x'}{2} - 1 \\ \dfrac{y+y'}{2} \\ \dfrac{z+z'}{2} + 1 \end{pmatrix}$

Et nous avons donc :

$$\left\{ \begin{array}{rl} \dfrac{x+x'}{2} - 1 = & \lambda \\ \dfrac{y+y'}{2} & 0 \\ \dfrac{z+z'}{2} + 1 = & \lambda \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} x' = & -x + 2\lambda + 2 \\ y' = & -y \\ z' = & -z + 2\lambda - 2 \end{array} \right.$$

→ En second lieu, le vecteur $\overrightarrow{MS_D(M)}$ appartient à $\overrightarrow{P}$, plan directeur de (P) d'équation cartésienne $x - 2y + z = 0$

Les coordonnées de $\overrightarrow{MS_D(M)}$ sont $\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix}$ et vérifient l'équation cartésienne de (P), c'est à dire que :

$$\begin{array}{c} (x'-x) - 2(y'-y) + (z'-z) = 0 \\ \Longleftrightarrow \\ ((-x+2\lambda+2) - x) - 2(-y-y) + ((-z+2\lambda-2) - z) = 0 \\ \Longleftrightarrow \\ -x + \lambda + 2y - z + \lambda = 0 \\ \Longleftrightarrow \\ 2\lambda = x - 2y + z \end{array}$$

D'où nous obtenons la définition analytique de S_D :

$$\left\{ \begin{array}{rl} x' = & -x + 2\lambda + 2 \\ y' = & -y \\ z' = & -z + 2\lambda - 2 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} x' = & -x + x - 2y + z + 2 \\ y' = & -y \\ z' = & -z + x - 2y + z - 2 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} x' = & -2y + z + 2 \\ y' = & -y \\ z' = & x - 2y - 2 \end{array} \right.$$

2. *Dans le plan affine euclidien $\mathcal{P}$, définir analytiquement la symétrie orthogonale s par rapport à la droite (D) d'équation $x - y = 0$*

Pour tout point $M = (x, y) \in \mathcal{P}$, nous notons $M' = s(M) = (x', y')$ le symétrique de M dans la symétrie orthogonale par rapport à (D)

→ Appelons I le milieu du segment $[M; M']$. I a pour coordonnées $I = \left(\dfrac{x+x'}{2}; \dfrac{y+y'}{2}\right)$, et comme $I \in (D)$, les coordonnées de I vérifient l'équation de la droite (D) et nous avons une première équation :

$$\frac{x+x'}{2} - \left(\frac{y+y'}{2}\right) = 0 \Longleftrightarrow x' - y' = -x + y$$

→ D'autre part, le vecteur $\overrightarrow{Ms(M)}$ est orthogonal à la direction de (D). Si $\overrightarrow{u}_D$ est le vecteur directeur de (D), nous avons $\left\langle \overrightarrow{Ms(M)} \mid \overrightarrow{u}_D \right\rangle = 0$.

Or $\overrightarrow{u}_D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{Ms(M)} = \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix}$. Nous obtenons donc une seconde équation :

$$\left\langle \overrightarrow{Ms(M)} \mid \overrightarrow{u}_D \right\rangle = 0 \Longleftrightarrow (x'-x) + (y'-y) = 0 \Longleftrightarrow x' + y' = x + y$$

→ Nous devons donc résoudre le système :

$$\left\{ \begin{array}{rl} x' - y' = & -x + y \\ x' + y' = & x + y \end{array} \right.$$

D'où nous tirons : $x' = y$ et $y' = x$
La définition analytique de s est donc :

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = & y \\ y' = & x \end{array}\right. \quad \text{et la matrice de l'application linéaire associée } \overrightarrow{s} \text{ est } \mathcal{M}\left(\overrightarrow{s}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

18.3.11 Quelques exercices à résoudre sur les symétries

Exercice 20 :

On considère le plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère affine $\mathcal{R}\left(\{A; B; C\}\right)$. Carractériser l'application affine S telle que $S\left(A\right) = A$, $S\left(B\right) = C$ et $S\left(C\right) = B$

Exercice 21 :

On considère le plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Soit f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ définie analytiquement par :

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = & \dfrac{1}{3}\left(-x - 2y + 2\right) \\ y' = & \dfrac{1}{3}\left(-4x + y + 2\right) \end{array}\right.$$

Donner la nature de f et les éléments qui la caractérisent.

Exercice 22 :

1. Le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ est repéré par le repère cartésien $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ où $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$ est une base orthonormée de $\overrightarrow{P}$, plan directeur de $\mathcal{P}$.
   Définir analytiquement la symétrie orthogonale par rapport à la droite (Δ) d'équation $x+2y-1 = 0$
2. L'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3 est repéré par le repère cartésien $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ où $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ est une base orthonormée de $\overrightarrow{E}$, espace directeur de $\mathcal{E}$.
   Définir analytiquement la symétrie orthogonale par rapport au plan (P) d'équation $x - y - z = 1$

Exercice 23 :

On considère le plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Soient D et D' les droites d'équations respectives :

$$\begin{array}{ll} D : & x + y - 1 = 0 \\ D' : & 2x - y + 2 = 0 \end{array}$$

Définir analytiquement la symétrie S_D par rapport à D parallèlement à D' et $S_{D'}$ la symétrie par rapport à D' et prallèlement à D

Exercice 24 :

On considère l'espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3 muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. Soit f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ définie analytiquement par :

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = & 3x - 4z - 4 \\ y' = & 2x - y - 2z - 2 \\ z' = & 2x - 3z - 4 \end{array}\right.$$

1. Donner la nature de f et les éléments qui la caractérisent.
2. Quelle est l'image de la droite passant par $A\left(1, 0, 2\right)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
3. Quelle est l'image du plan d'équation $x - z + 2 = 0$

18.3.12 Définition d'affinité

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$.
Soient $X \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $\overrightarrow{X}$. Soit $\overrightarrow{Y}$ un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\overrightarrow{X}$ dans $\overrightarrow{E}$,
Soit p la projection affine sur X de direction $\overrightarrow{Y}$
On appelle affinité par rapport à X (ou de base X), parallèlement à $\overrightarrow{Y}$ et de rapport $k \in \mathbb{R}$ une application f ainsi définie :

$$\begin{cases} f : \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ M & \longmapsto & M' = f(M) \end{cases}$$

Telle que si $p(M)$ est la projection de M sur X, parallèlement à $\overrightarrow{Y}$, nous avons $\overrightarrow{p(M)M'} = k\overrightarrow{p(M)M}$

Remarque 16 :

Symétries, projections sont des affinités. En effet :

1. Si $k = 1$, nous avons $\overrightarrow{p(M)M'} = \overrightarrow{p(M)M}$, c'est à dire $M = M'$; donc, si $k = 1$, nous avons $f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$
2. Si $k = 0$, nous avons $\overrightarrow{p(M)M'} = \overrightarrow{0}$, c'est à dire $p(M) = M'$; donc, si $k = 0$, nous avons f est la projection sur X parallèlement à $\overrightarrow{Y}$
3. Si $k = -1$, nous avons $\overrightarrow{p(M)M'} = -\overrightarrow{p(M)M}$; $p(M)$ est donc le milieu du segement $[M; M']$; donc, f est la symétrie par rapport à X parallèlement à $\overrightarrow{Y}$
4. Il y a une affinité particulière qui est très importante : l'affinité orthogonale dans les espaces affines euclidiens.

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de direction $\overrightarrow{E}$.
Soient $X \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $\overrightarrow{X}$.
Nous appelons affinité orthogonale de base X et de rapport $k \in \mathbb{R}$, toute affinité de base X et de rapport $k \in \mathbb{R}$ et de direction $\overrightarrow{X}^{\perp}$

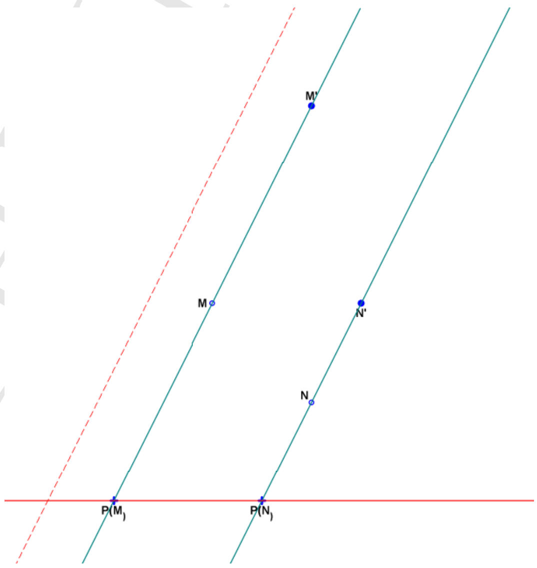


FIGURE 18.11 – Visualisation d'une affinité de direction quelconque

18.3.13 Propriétés des affinités

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$.
Soient $X \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $\overrightarrow{X}$. Soit $\overrightarrow{Y}$ un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\overrightarrow{X}$ dans $\overrightarrow{E}$,
Soit f l'affinité par rapport à X (ou de base X), parallèlement à $\overrightarrow{Y}$ et de rapport $k \in \mathbb{R}$

1. Une affinité f est une application affine d'application linéaire associée $\overrightarrow{f} = (1-k)\varpi + \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}$ où ϖ est la projection vectorielle sur $\overrightarrow{X}$ parallèlement à $\overrightarrow{Y}$
2. Si $k \neq +1$, l'ensemble des points invariants par f est X

Démonstration

1. On démontre qu'une affinité est une application affine

   Soit f l'affinité par rapport à X (ou de base X), parallèlement à $\overrightarrow{Y}$ et de rapport $k \in \mathbb{R}$
   Soient $M \in \mathcal{E}$ et $N \in \mathcal{E}$; nous appelons $M' = f(M)$ et $N' = f(N)$. Alors :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M'N'} &= \overrightarrow{M'p(M)} + \overrightarrow{p(M)\,p(N)} + \overrightarrow{p(N)\,N'} \\
&= -k\overrightarrow{p(M)\,M} + \overrightarrow{p(M)\,p(N)} + k\overrightarrow{p(N)\,N} \\
&= \overrightarrow{p(M)\,p(N)} - k\left(\overrightarrow{p(M)\,N} + \overrightarrow{NM}\right) + k\overrightarrow{p(N)\,N} \\
&= \overrightarrow{p(M)\,p(N)} - k\overrightarrow{NM} - k\overrightarrow{p(M)\,N} + k\overrightarrow{p(N)\,N} \\
&= \overrightarrow{p(M)\,p(N)} - k\overrightarrow{NM} + k\left(\overrightarrow{Np(M)} + \overrightarrow{p(N)\,N}\right) \\
&= (1-k)\overrightarrow{p(M)\,p(N)} + k\overrightarrow{MN} \\
&= (1-k)\varpi\left(\overrightarrow{MN}\right) + k\mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}\left(\overrightarrow{MN}\right) \\
&= \left((1-k)\varpi + k\mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}\right)\left(\overrightarrow{MN}\right)
\end{aligned}$$

   Donc f est une application affine d'application linéaire associée $\overrightarrow{f} = (1-k)\varpi + k\mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}$

2. On montre que l'ensemble des points invariants par f est X

   Soit f l'affinité par rapport à X (ou de base X), parallèlement à $\overrightarrow{Y}$ et de rapport $k \in \mathbb{R}$
   Soit $M \in \mathcal{E}$ invariant par f, c'est à dire tel que $f(M) = M$. Alors :

$$\overrightarrow{p(M)\,M} = k\overrightarrow{p(M)\,M} \iff (1-k)\overrightarrow{p(M)\,M} = \overrightarrow{0}$$

   Ainsi, si $k \neq 1$, $\overrightarrow{p(M)\,M} = \overrightarrow{0}$ et donc $p(M) = M$, c'est à dire que $M \in X$

Remarque 17 :

Evidemment, si $k = 1$, alors $f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ et l'ensemble des points invariants est $\mathcal{E}$ en entier.

Exercice 25 :

On considère le plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1. Donner la définition analytique de l'affinité de base la droite $\left(O, \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right)$, parallèlement à $\overrightarrow{j}$ et de rapport 2
2. Donner la définition analytique de l'affinité de base la droite d'équation $x + y = 0$, d'axe la droite d'équation $x - y = 0$ et de rapport $\dfrac{3}{2}$

Exercice 26 :

Le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ est rapporté à une base orthonormée $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

1. f est une affinité orthogonale de base la droite $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$ et de rapport 2.
   (a) $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1. Construire l'image de $\mathcal{C}$ par f. On appelle $\mathfrak{E}$ cette image
   (b) Donner une définition analytique de f et en déduire une équation de $\mathfrak{E}$
2. f_1 est une affinité orthogonale de base la droite (D) d'équation $x + y = 0$ et de rapport $\dfrac{3}{2}$
   (a) $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1. Construire l'image de $\mathcal{C}$ par f_1. On appelle $\mathfrak{E}_1$ cette image
   (b) Donner une définition analytique de f_1 et en déduire une équation de $\mathfrak{E}_1$

18.4 Exercices complémentaires

18.4.1 Sur les applications affines

Exercice 27 :

On considère le plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}\left(\left\{O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}\right)$. Soient les points

$$A = (1,1) \quad B = (0,2) \quad C = (-1,2) \quad A' = (3,4) \quad B' = (1,-1) \quad C' = (0,3)$$

1. Montrer qu'il existe une application affine f telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$
2. Donner la définition analytique de f

Exercice 28 :

On considère l'espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3. Soient trois points $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{E}$ et $C \in \mathcal{E}$ **non alignés**. Soit $\mathcal{F}$ la famille d'applications affines de $\mathcal{E}$ telles que $f(A) = B$, $f(B) = A$ et $f(C) = C$

1. Soit I le milieu du segement $[A;B]$. Démontrer que la droite (IC) est invariante point par point.
2. Démontrer que la droite (AB) est globalement invariante
3. En choisissant le repère cartésien $\mathcal{R}\left(\left\{I, \overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}, \overrightarrow{w}\right\}\right)$ où $\overrightarrow{w}$ est un vecteur n'appartenant pas au plan vectoriel engendré par $\left\{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}\right\}$, déterminer analytiquement un élément quelconque $f \in \mathcal{F}$

Exercice 29 :

On considère un espace affine $\mathcal{E}$ associé au $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\overrightarrow{E}$. Soit f une application affine de $\mathcal{E}$

1. Démontrer que la relation $\mathcal{R}$ définie par :
$$(\forall A \in \mathcal{E})\,(\forall B \in \mathcal{E})\,((A\mathcal{R}B) \Longleftrightarrow (f(A) = f(B)))$$
   est une relation d'équivalence
2. Démontrer que toutes les classes d'équivalence sont des sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ parallèles de direction $\ker \overrightarrow{f}$ où $\overrightarrow{f}$ est l'application linéaire associée à f

Exercice 30 :

On appelle **enveloppe convexe** d'une famille finie de points $\{A_i$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$, l'ensemble des barycentes de la famille pondérée $\{(A_i;\alpha_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n$ et $\alpha_i \geqslant 0\}$

Par exemple, l'enveloppe convexe de 2 points $\{A, B\}$ est le segment $[A;B]$ et l'enveloppe convexe de 3 points $\{A, B, C\}$ non alignés est l'intérieur du triangle ABC

Démontrer que l'enveloppe convexe d'une famille $\{A_i$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$ a pour image par toute application affine, l'enveloppe convexe de la famille $\{f(A_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n\}$

18.4.2 Homothéties et translations

Exercice 31 :

Dans le plan affine $\mathcal{P}$, on considère un triangle ABC tel que A et B sont fixes et C décrit une droite (D). Quels sont les ensembles décrits par :

1. Le milieu A' du segment $[B; C]$
2. Le milieu B' du segment $[A; C]$
3. Le centre de gravité G du triangle ABC

Exercice 32 :

L'exercice se place dans un plan affine $\mathcal{P}$ Un parallélogramme $ABCD$ est tel que les points A et B sont fixés et C décrit une droite (D_1). Quels sont les ensembles décrits par :

1. Le quatrième sommet D
2. Le centre du parallélogramme

Exercice 33 :

On considère le plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}\left(\left\{O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}\right)$. Soit $\overrightarrow{P}$ le plan vectoriel associé rapporté à une base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$. On donne, dans le plan $\mathcal{P}$, 2 droites (D_1) et (D_2), d'équations respectives :

$$(D_1) : x + y - 1 = 0 \qquad (D_2) : x + y + 2 = 0$$

1. Existe-t-il des translations $T_{\overrightarrow{u}_\lambda}$ de vecteur $\overrightarrow{u}_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ telles que $T_{\overrightarrow{u}_\lambda}((D_1)) = (D_2)$; même question pour $\overrightarrow{u}_\lambda = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ 3\lambda \end{pmatrix}$
2. Soit $I \in \mathcal{P}$ tel que $I = (1, 1)$
   (a) Définir analytiquement l'homothétie $H_{I,k}$ de centre I et de rapport $k \in \mathbb{R}$
   (b) Calculer k de telle sorte que $H_{I,k}((D_1)) = (D_2)$

Exercice 34 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine d'espace directeur $\overrightarrow{E}$. Soient $I \in \mathcal{E}$ et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$. On considère l'homothétie $H_{I,k}$ de centre I et de rapport $k \neq 1$ et $k \neq 0$ ainsi que la translation $T_{\overrightarrow{u}}$

1. Démontrer que l'application $F : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ définue par : $F = T_{-\overrightarrow{u}} \circ H_{I,k} \circ T_{\overrightarrow{u}}$ est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport
2. Démontrer que l'application $G : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ définue par : $G = H_{I,\frac{1}{k}} \circ T_{\overrightarrow{u}} \circ H_{I,k}$ est une translation dont on déterminera le vecteur en fonction de k et $\overrightarrow{u}$

Exercice 35 :

Cet exercice peut être considéré comme le prolongement du précédent
Soit $\mathcal{E}$ un espace affine d'espace directeur $\overrightarrow{E}$. Soient I et I' 2 points de $\mathcal{E}$ **distincts**, c'est à dire tels que $I \neq I'$. Nous considérons l'homothétie $H_{I,k}$ de centre I et de rapport $k \neq 0$ et $H_{I',k'}$ l'homothétie de centre I' et de rapport $k' \neq 0$ et $kk' \neq 1$. *(On suppose $kk' \neq 1$ puisque le cas $kk' = 1$ a déjà été étudié dans l'exercice précédent)*
Déterminer la nature et les éléments catractéristiques de $H_{I',k'} \circ T_{\overrightarrow{II'}} \circ H_{I,k}$ où $T_{\overrightarrow{II'}}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{II'}$

Exercice 36 :

$\mathcal{P}$ est le plan affine rapporté à un repère cartésien $\mathcal{R}\left(\left\{O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}\right)$. Soient $A \in \mathcal{P}$ et $B \in \mathcal{P}$ de coordonnées $A = (1, 0)$ et $B = (-1, 0)$. Soient $k_1 \in \mathbb{R}^*$ et $k_2 \in \mathbb{R}^*$.
Pour $M \in \mathcal{P}$, nous appelons $M_1 = H_{A,k_1}(M)$ et $M_2 = H_{B,k_2}(M)$. Soit alors M' l'image de O dans la translation de vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$. On appelle f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à M fait correspondre M'.

1. Quelle est la définition analytique de f ?
2. Discuter, en fonction des valeurs de k_1 et de k_2 de la nature de f

Exercice 37 :

Théorèmes de Ménélaüs et de Ceva

Pour cet exercice, nous aurons besoin d'une notion de **mesure algébrique**

Etant donnés une droite (D), un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de (D), 2 points $A \in (D)$ et $A \in (D)$, la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le nombre réel $\overline{AB}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\,\overrightarrow{u}$

Une mesure algébrique peut donc être positive ou négative. En d'autres termes, si $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{u}$, k est la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Dans le plan affine $\mathcal{P}$, on considère le triangle ABC. On prend trois points A', B' et C' tels que $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$, mais qui sont tous différents des 3 sommets du triangle ABC.

1. **Théorème de Menelaüs** : Démontrer que les points A', B' et C' sont alignés si et seulement si :
$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$$
2. **Théorème de Ceva** : Démontrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourrantes si et seulement si :
$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$$

Exercice 38 :

Théorème de Pappus
On considère, dans le plan affine $\mathcal{P}$ 2 droites distinctes (D) et (D_1) sécantes en un point I.
Soient $A \in (D)$, $B \in (D)$ et $C \in (D)$. Soient aussi $A_1 \in (D_1)$, $B_1 \in (D_1)$ et $C_1 \in (D_1)$
Démontrer que si $(AB_1) \parallel (BA_1)$ et $(C_1B) \parallel (B_1C)$, alors $(AC_1) \parallel (CA_1)$

Exercice 39 :

Soit $\mathcal{P}$ un espace affine de diminsion 2 associé au $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\overrightarrow{P}$. On appelle $\mathcal{B} = \left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$ une base de $\overrightarrow{E}$ et $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ un repère cartésien de $\mathcal{E}$.

1. **Questions préliminaires**
   On considère 3 points $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ et $C \in \mathcal{P}$ où $A = (0; -1)$, $B = (-1; -2)$ et $C = (0; 1)$
   (a) Montrer que le triplet $\{A, B, C\}$ est un repère affine de $\mathcal{P}$
   (b) On considère l'application affine $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ telle que $f(A) = B$, $f(C) = C$ et $f(B) = B'$ où $B' = (-3; -4)$.
      i. Donner la définition analytique de f
      ii. Montrer que f est une bijection
2. **Partie A**
   (a) Montrer que l'ensemble des points invariants de f est une droite (D) dont on déterminera l'équation
   (b) Montrer que, pour tout point $M \in \mathcal{P}$, le vecteur $\overrightarrow{Mf(M)}$ est colinéaire à un vecteur $\overrightarrow{V} \in \overrightarrow{P}$ dont on déterminera les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$

(c) Soit I le projeté de M sur (D) parallèlement à $\overrightarrow{V}$. Comprer les vecteurs $\overrightarrow{If(M)}$ et $\overrightarrow{IM}$. Donner une construction géométrique de $f(M)$ connaissant $M \in \mathcal{P}$

3. **Partie B**

$\overrightarrow{f}$ est l'application linéaire associée à f

(a) Déterminer 2 vecteurs non nuls $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{P}$ tels que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \lambda \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) = \mu \overrightarrow{v}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\mu \in \mathbb{R}^*$

(b) Montrer que la famille $\mathcal{B}_1 = \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ est une base de $\overrightarrow{P}$ et donner la matrice de $\overrightarrow{f}$ dans la base $\mathcal{B}_1$

(c) Donner la définition analytique de f dans le repère cartésien $\mathcal{R}_1(C, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de $\mathcal{E}$.

18.5 Exercices corrigés

Tous les exercices proposés dans dans le cours ne sont pas corrigés. Ceux qui m'ont paru évidents, ne sont pas corrigés.

Faire des figures..Faire des figures..Faire des figures..Faire des figures..

18.5.1 Applications affines

Exercice 1 :

Montrer que $\mathcal{H} \cap \mathcal{T} = \{\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}\}$

Soit $f \in \mathcal{H} \cap \mathcal{T}$. Alors :

- ⋆ Nous avons $f \in \mathcal{H}$ et f admet un point invariant *(au moins, puisque nous pouvons avoir* $f = \mathrm{Id}_E$*)*
- ⋆ Mais nous avons aussi $f \in \mathcal{T}$, et que f admette un point invariant signifie que $f = \mathrm{Id}_E$

Nous avons donc bien $\mathcal{H} \cap \mathcal{T} = \{\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}\}$

Exercice 2 :

Par 2 points E et F pris sur les côtés $[A;B]$ et $[C;D]$ d'un quadrilatère $ABCD$, on mène des parallèles à la diagonale $[B;D]$ qui coupent les côtés $[A;D]$ et $[C;D]$ respectivement en H et G.

1. *Si le quadrilatère $EFGH$ est un parallélogramme, démontrer que les droites (EF) et (HG) sont parallèles à (AC)*
2. *Démontrer que si les droites (EF) et (HG) sont sécantes, alors leur point de concours est sur la droite (AC)*

Nous n'allons pas suivre à la lettre les questions de l'exercice, mais en faire une résolution plus globale en réutilisant les résultats du cours. Tout d'abord, faisons un schéma :

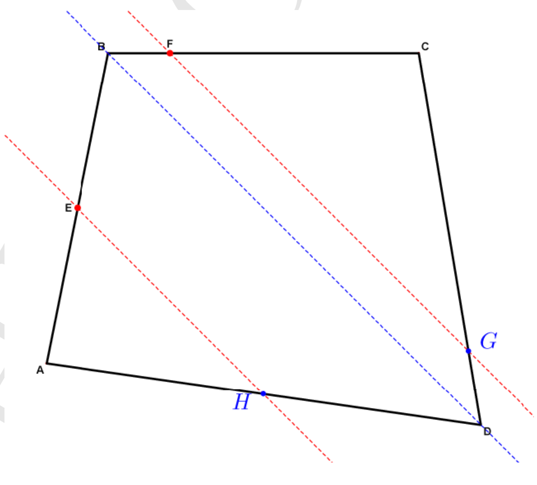


Figure 18.12 – Certes, un schéma n'est pas une démonstration, mais qu'est ce que ça aide!!

1. Pour commencer, considérons l'homothétie de centre C et de rapport λ notée $h_{C,\lambda}$ qui transforme F en B et G en D. Cette homothétie existe puisque $(FG) \parallel (BD)$ et que, d'après le théorème de Thalès, $\lambda = \dfrac{CB}{CF} = \dfrac{CD}{CG}$
2. Ensuite, considérons l'homothétie de centre A et de rapport μ notée $h_{A,\mu}$ qui transforme B en E et D en H. Cette homothétie existe puisque $(EH) \parallel (BD)$ et que, d'après le théorème de Thalès, $\lambda = \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AD}{AH}$
3. Maintenant, je compose ces deux homothéties en étudiant $h_{A,\mu} \circ h_{C,\lambda}$
   (a) Cette composition fait correspondre E à F et H à G, c'est à dire que nous avons :

- ⋆ $h_{A,\mu} \circ h_{C,\lambda}(F) = E$
- ⋆ $h_{A,\mu} \circ h_{C,\lambda}(G) = H$

(b) De 2 choses l'une : ou bien $h_{A,\mu} \circ h_{C,\lambda}$ est une translation, ou bien $h_{A,\mu} \circ h_{C,\lambda}$ est une homothétie

(c) Si $h_{A,\mu} \circ h_{C,\lambda}$ est une homothétie, c'est une homothétie de centre X et de rapport $\lambda \times \mu$ avec, d'après les résultats du cours X aligné avec A et C. Ainsi les droites (EF) et (HG) sont elles sécantes en X , où X, centre de l'homothétie et point de concours des droites est sur la droite (AC)

(d) Si $h_{A,\mu} \circ h_{C,\lambda}$ est une translation $(\lambda \times \mu = 1)$, alors $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{GH}$ et le quadrilatère $EFGH$ est un parallélogramme. D'autre part, le vecteur $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{GH}$ est le vecteur de la translation lequel est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{CA}$ *(voir le cours)*

Ainsi les droites (EF) et (HG) sont parallèles à la droite (AC)

4. <u>Quand donc avons nous $\lambda \times \mu = 1$? ?</u>

Dans ce cas, nous avons $\dfrac{CB}{CF} = \dfrac{AE}{AB} = 1$. En posant $\lambda = \dfrac{CB}{CF}$, nous avons alors

$$\frac{AE}{AB} = \frac{1}{\lambda} = \frac{CF}{CB} \iff CF = \frac{1}{\lambda} \times CB \text{ et } AE = \frac{1}{\lambda} \times AB$$

Ce qui veut dire que E et F sont positionnés sur « les mêmes proportions » sur les segments $[A;B]$ et $[C;D]$; ainsi, si $\lambda = 2$, E et F sont les milieux respectifs de $[A;B]$ et $[C;D]$

Exercice 3 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et G le barycentre d'un système pondéré $\{(A,2);(B,-1);(C,1)\}$. Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ l'application qui à tout $M \in \mathcal{E}$ fait correspondre le point $M' \in \mathcal{E}$ tel que :

$$\overrightarrow{GM'} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

Quelle est la nature de f ?

Pour tout $M \in \mathcal{E}$, nous avons $\overrightarrow{MG} = \dfrac{1}{2}\left(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) \iff 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}$
Ainsi, $\overrightarrow{GM'} = 2\overrightarrow{MG} \iff \overrightarrow{GM'} = -2\overrightarrow{GM}$
f est donc une homothétie de centre G et de rapport -2

Exercice 4 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine ; on considère $A \in \mathcal{E}$ et $B \in \mathcal{E}$, 2 points de $\mathcal{E}$ tels que $A \neq B$

1. *Quelles sont les conditions sur $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ pour que, pour tout point $M \in \mathcal{E}$, il existe un point $M' \in \mathcal{E}$ tel que :*

$$\alpha\overrightarrow{M'A} + \beta\overrightarrow{M'B} + 2\overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{0}$$

Tel que présenté, M' apparaît comme le barycentre du système pondéré $\{(A,\alpha);(B,\beta);(M,2)\}$, et pour que ce barycentre existe, il faut que nous ayions $\alpha + \beta + 2 \neq 0$, c'est à dire $\alpha + \beta \neq -2$

2. *La condition sur α et β étant réalisée, on désigne par $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ l'application qui à tout $M \in \mathcal{E}$ fait correspondre le point $M' \in \mathcal{E}$.*

(a) *Déterminer, suivant les valeurs α et β, l'ensemble des points invariants par f*

Soit $I \in \mathcal{E}$ un point invariant par f ; alors, $I' = f(I) = I$ et nous avons alors la relation :

$$\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{II} = \overrightarrow{0} \iff \alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$$

I apparaît alors comme le barycentre du système pondéré $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ Ainsi :

- Si $\alpha+\beta\neq 0$, il n'existe qu'un seul point fixe I qui vérifie

$$\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}\iff\overrightarrow{AI}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

Donc, si $\alpha+\beta\neq 0$, l'unique point invariant par f est bien déterminé
- Si $\alpha+\beta=0\iff\alpha=-\beta$, nous avons :

$$\alpha\overrightarrow{IA}-\alpha\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}\iff\alpha\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{0}$$

Puisque $A\neq B$, nous avons $\overrightarrow{BA}\neq\overrightarrow{0}$, ce qui donne $\alpha=0$, et, en revenant à la définition de f, nous obtenons $M'=M$, et ce, pour tout $M\in\mathcal{E}$, et alors $f=\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$
Donc, s'il existe des points invariants par f, et si $\alpha+\beta=0$, alors $\alpha=0$ et $f=\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$

(b) *On suppose $\alpha+\beta=0$. Pour tout point $M\in\mathcal{E}$, exprimer le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et α*

Si $\alpha+\beta=0$, alors $\alpha=-\beta$ et nous avons alors :

$$\begin{aligned}\alpha\overrightarrow{M'A}+\beta\overrightarrow{M'B}+2\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{0}&\iff\alpha\left(\overrightarrow{M'A}-\overrightarrow{M'B}\right)+2\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{0}\\&\iff\alpha\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{0}\end{aligned}$$

⋆ Si $\alpha=0$, alors $2\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{0}$ et $M=M'$, ce qui veut dire que $f=\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$
⋆ Si $\alpha\neq 0$, alors $2\overrightarrow{M'M}=-\alpha\overrightarrow{BA}\iff\overrightarrow{MM'}=\dfrac{\alpha}{2}\overrightarrow{BA}$.
f est alors une translation de vecteur $\dfrac{\alpha}{2}\overrightarrow{BA}$

(c) *On suppose $\alpha+\beta\neq 0$. Montrer que f est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport*

Si $\alpha+\beta\neq 0$, alors le système pondéré $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ admet un barycentre I, lequel vérifie pour tout $O\in\mathcal{E}$:

$$\overrightarrow{OI}=\frac{1}{\alpha+\beta}\left(\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}\right)\iff(\alpha+\beta)\,\overrightarrow{OI}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$$

La relation $\alpha\overrightarrow{M'A}+\beta\overrightarrow{M'B}+2\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{0}$ devient alors :

$$(\alpha+\beta)\,\overrightarrow{M'I}+2\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{0}$$

En « instillant » I, nous obtenons :

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\,\overrightarrow{M'I}+2\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{0}&\iff(\alpha+\beta)\,\overrightarrow{M'I}+2\overrightarrow{M'I}+2\overrightarrow{IM}=\overrightarrow{0}\\&\iff(\alpha+\beta+2)\,\overrightarrow{M'I}=-2\overrightarrow{IM}\\&\iff\overrightarrow{IM'}=\frac{2}{\alpha+\beta+2}\overrightarrow{IM}\end{aligned}$$

Nous avons donc $\overrightarrow{IM'}=\dfrac{2}{\alpha+\beta+2}\overrightarrow{IM}$; ce qui montre que f est une homothétie de centre I et de rapport $\dfrac{2}{\alpha+\beta+2}$

18.5.2 Miscelleanous

Exercice 31 :

Dans le plan affine $\mathcal{P}$, on considère un triangle ABC tel que A et B sont fixes et C décrit une droite (D). Quels sont les ensembles décrits par :

1. *Le milieu A' du segment $[B;C]$*

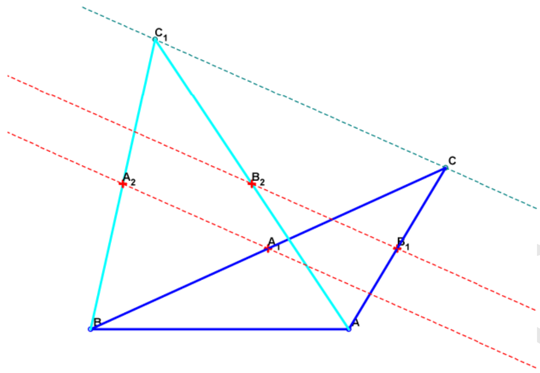


FIGURE 18.13 – Certes, un schéma n'est pas une démonstration, mais qu'est ce que ça aide!!

2. *Le milieu B' du segment $[A;C]$*
3. *Le centre de gravité G du triangle ABC*

Commençons par faire une figure Nous pourrions trouver 2 façons de répondre aux questions posées

1. Tout d'abord, en termes géométriques.
   Soient $C \in (D)$ et $C_1 \in (D)$
   - ⋆ En considérant le triangle ACC_1, nous avons $\overrightarrow{CC_1} = 2\overrightarrow{B_1B_2}$, ce qui montre que la droite (B_1B_2) est parallèle à la droite (CC_1), c'est à dire à la droite (D). Donc, l'ensemble décrit par le milieu A' du segment $[B;C]$ est une droite parallèle à (D)
   - ⋆ De la même manière, en considérant le triangle BCC_1, nous avons $\overrightarrow{CC_1} = 2\overrightarrow{A_1A_2}$, ce qui montre que la droite (A_1A_2) est parallèle à la droite (CC_1), c'est à dire à la droite (D). Donc, l'ensemble décrit par le milieu B' du segment $[A;C]$ est une droite parallèle à (D)
2. En utilisant les homothéties
   - ⋆ On considère l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{1}{2}$ que nous appelons $H_{A,\frac{1}{2}}$. Pour tout point $C \in (D)$, si nous appelons $B' = H_{A,\frac{1}{2}}(C)$, nous avons $\overrightarrow{AB'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et B' est donc le milieu du segment $[A;C]$. L'image de la droite (D) par l'homothétie $H_{A,\frac{1}{2}}$ est une droite parallèle à (D). Donc, l'ensemble décrit par le milieu B' du segment $[A;C]$ est une droite parallèle à (D)
   - ⋆ On considère cette fois ci l'homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{1}{2}$ que nous appelons $H_{B,\frac{1}{2}}$. Pour tout point $C \in (D)$, si nous appelons $A' = H_{B,\frac{1}{2}}(C)$, nous avons $\overrightarrow{BA'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et A' est donc le milieu du segment $[B;C]$. L'image de la droite (D) par l'homothétie $H_{B,\frac{1}{2}}$ est une droite parallèle à (D). Donc, l'ensemble décrit par le milieu A' du segment $[B;C]$ est une droite parallèle à (D)
3. Le lieu du centre de gravité G du triangle ABC
   On considère I le milieu du segment $[A;B]$. Si G est le centre de gravité de ABC, nous avons $\overrightarrow{IG} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{IC}$. C'est à dire que si nous considérons l'homothétie $H_{I,\frac{1}{3}}$, l'image de tout élément $C \in (D)$ est le centre de gravité G du triangle ABC. Donc, l'ensemble décrit par le centre de gravité G du triangle ABC est une droite parallèle à (D)

Exercice 32 :

L'exercice se place dans un plan affine $\mathcal{P}$. Un parallélogramme $ABCD$ est tel que les points A et B sont fixés et C décrit une droite (D_1). Quels sont les ensembles décrits par :

1. *Le quatrième sommet D*

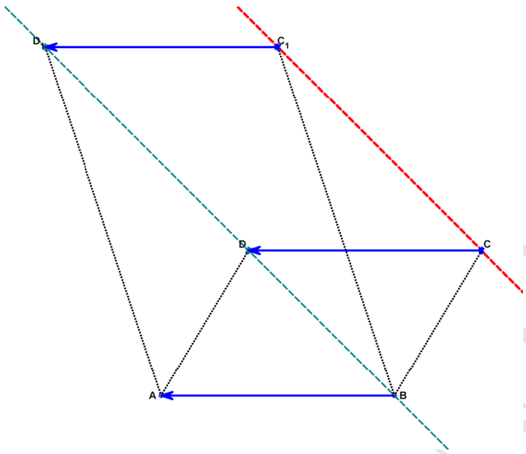


FIGURE 18.14 – Comme précédemment, commençons par faire une figure.

Nous avons forcément $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$, c'est à dire que $D = T_{\overrightarrow{BA}}(C)$; autrement dit, D est l'image de C. Le lieu des points D est donc l'image de la droite (D_1) par la translation $T_{\overrightarrow{BA}}(C)$; c'est donc la droite parallèle à la droite (D_1) passant par B

2. *Le centre du parallélogramme*

   Si nous appelons I le centre du parallélogramme $ABCD$, nous avons $2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BD}$, et donc I se trouve sur la droite parallèle à la droite (D_1) passant par B.

Exercice 34 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine d'espace directeur $\overrightarrow{E}$. Soient $I \in \mathcal{E}$ et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$. On considère l'homothétie $H_{I,k}$ de centre I et de rapport $k \neq 1$ et $k \neq 0$ ainsi que la translation $T_{\overrightarrow{u}}$

1. *Démontrer que l'application $F : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ définue par : $F = T_{-\overrightarrow{u}} \circ H_{I,k} \circ T_{\overrightarrow{u}}$ est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport*

   On peut déjà dire que si $\overrightarrow{F}$ est l'application linéaire associée à F, nous avons $\overrightarrow{F} = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}} \circ h_k \circ \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}} = h_k$. L'endomorphisme associé $\overrightarrow{F}$ est donc une homothétie de rapport k. F est donc une homothétie de rapport k dont il faut trouver le centre.
   On appelle Ω, le point tel que $\overrightarrow{\Omega I} = \overrightarrow{u}$, c'est à dire le point tel que :

   $$\Omega = T_{-\overrightarrow{u}}(I) \Longleftrightarrow I = T_{\overrightarrow{u}}(\Omega)$$

   Alors, Ω est le point fixe de F ; en effet :

   $$F(\Omega) = T_{-\overrightarrow{u}} \circ H_{I,k} \circ T_{\overrightarrow{u}}(\Omega) = T_{-\overrightarrow{u}} \circ H_{I,k}(I) = T_{-\overrightarrow{u}}(I) = \Omega$$

   Ainsi, F est une homothétie de rapport k et de centre Ω.
   On peut donc écrire que $T_{-\overrightarrow{u}} \circ H_{I,k} \circ T_{\overrightarrow{u}} = H_{T_{-\overrightarrow{u}}(I),k}$

2. *Démontrer que l'application $G : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ définie par : $G = H_{I,\frac{1}{k}} \circ T_{\overrightarrow{u}} \circ H_{I,k}$ est une translation dont on déterminera le vecteur en fonction de k et $\overrightarrow{u}$*

   Comme tout à l'heure, si $\overrightarrow{G}$ est l'application linéaire associée à G, nous avons $\overrightarrow{G} = h_{\frac{1}{k}} \circ \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}} \circ h_k = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}$. L'endomorphisme associé $\overrightarrow{G}$ étant l'identité, G est donc une translation dont il faut trouver le vecteur.
   Soit $M \in \mathcal{E}$; Appelons :

   $$M_1 = H_{I,k}(M) \quad M_2 = T_{\overrightarrow{u}}(M_1) \quad M_3 = H_{I,\frac{1}{k}}(M_2)$$

Il faut montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM_3}$ est constant.
Or, $\overrightarrow{MM_3} = \overrightarrow{IM_3} - \overrightarrow{IM}$. Et nous avons :

$$\overrightarrow{IM_3} = \frac{1}{k}\overrightarrow{IM_2} = \frac{1}{k}\left(\overrightarrow{IM_1} + \overrightarrow{M_1M_2}\right) = \frac{1}{k}\overrightarrow{IM_1} + \frac{1}{k}\overrightarrow{u}$$

D'autre part : $\overrightarrow{IM_1} = k\overrightarrow{IM}$ et donc $\frac{1}{k}\overrightarrow{IM_1} = \frac{1}{k} \times k\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IM}$, de telle sorte que $\overrightarrow{IM_3} = \overrightarrow{IM} + \frac{1}{k}\overrightarrow{u}$, et donc :

$$\overrightarrow{MM_3} = \overrightarrow{IM_3} - \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{MM_3} = \overrightarrow{IM} + \frac{1}{k}\overrightarrow{u} - \overrightarrow{IM} = \frac{1}{k}\overrightarrow{u}$$

Ainsi, G est une translation de vecteur $\frac{1}{k}\overrightarrow{u}$

Allons un peu plus loin

Nous avons démontré que $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$, ensemble des homothéties-translations est un groupe pour la loi de composition $\circ$. $\mathcal{H}$ ensemble des homothéties de $\mathcal{E}$ est un sous-groupe de $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$, de même que $\mathcal{T}$, ensemble des translations. De plus, nous avons $\mathcal{H} \cap \mathcal{T} = \{\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}\}$.
Nous venons de montrer, dans cet exercice, que $\mathcal{H}$ et $\mathcal{T}$ étaient des **sous-groupes distingués** de $\mathcal{H} \cup \mathcal{T}$

Exercice 35 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine d'espace directeur $\overrightarrow{E}$. Soient I et I' 2 points de $\mathcal{E}$ distincts, c'est à dire $I \neq I'$. Nous considérons l'homothétie $H_{I,k}$ de centre I et de rapport $k \neq 0$ et $H_{I',k'}$ l'homothétie de centre I' et de rapport $k' \neq 0$ et $kk' \neq 1$.
Déterminer la nature et les éléments catractéristiques de $H_{I',k'} \circ T_{\overrightarrow{II'}} \circ H_{I,k}$

Comme précédemment, nous posons $F = H_{I',k'} \circ T_{\overrightarrow{II'}} \circ H_{I,k}$.

1. L'application linéaire associée à F est $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{H_{I',k'}} \circ \overrightarrow{T_{\overrightarrow{II'}}} \circ \overrightarrow{H_{I,k}} = h'_k \circ \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}} \circ h_k = k_{kk'}$. $\overrightarrow{F}$ est une homothétie vectorielle de rapport kk'
   F est donc une homothétie affine de rapport kk' donc il faut déterminer le centre Ω
2. Remarquons que nous avons $F(I) = I'$ et que nous avons donc $\overrightarrow{\Omega I'} = kk'\overrightarrow{\Omega I}$
3. Il est maintenant simple de trouver Ω :

$$\overrightarrow{\Omega I'} = kk'\overrightarrow{\Omega I} \iff \overrightarrow{\Omega I} + \overrightarrow{II'} = kk'\overrightarrow{\Omega I} \iff \overrightarrow{I\Omega} = \frac{1}{1-kk'}\overrightarrow{II'}$$

Exercice 36 :

$\mathcal{P}$ est le plan affine rapporté à un repère cartésien $\mathcal{R}\left(\left\{O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}\right)$. Soient $A \in \mathcal{P}$ et $B \in \mathcal{P}$ de coordonnées $A = (1,0)$ et $B = (-1,0)$. Soient $k_1 \in \mathbb{R}^*$ et $k_2 \in \mathbb{R}^*$.
Pour $M \in \mathcal{P}$, nous appelons $M_1 = H_{A,k_1}(M)$ et $M_2 = H_{B,k_2}(M)$. Soit alors M' l'image de O dans la translation de vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$. On appelle f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à M fait correspondre M'.

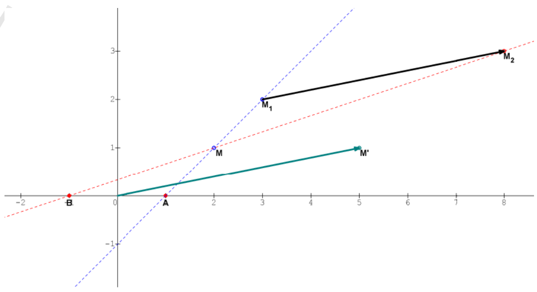


FIGURE 18.15 – Comme précédemment, commençons par faire une figure.

1. *Quelle est la définition analytique de f ?*

   Voilà une question qui ne pose pas de difficulté ; il suffit de le résoudre posément, calmement.
   Soit $M = (x, y) \in \mathcal{P}$
   - ⋆ Posons $M_1 = H_{A,k_1}(M)$ et nous appelons (x_1, y_1) les coordonnées de M_1.
     Nous avons alors $\overrightarrow{AM_1} = k_1\overrightarrow{AM}$, c'est à dire que nous avons, au niveau des coordonnées :
     $$\begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ y_1 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} x - 1 \\ y \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rl} x_1 = & k_1 x + 1 - k_1 \\ y_1 = & k_1 y \end{array} \right.$$
   - ⋆ De la même manière, posons $M_2 = H_{B,k_2}(M)$ et nous appelons (x_2, y_2) les coordonnées de M_2.
     Nous avons alors $\overrightarrow{BM_2} = k_2\overrightarrow{BM}$, c'est à dire que nous avons, au niveau des coordonnées :
     $$\begin{pmatrix} x_2 + 1 \\ y_2 \end{pmatrix} = k_2 \begin{pmatrix} x + 1 \\ y \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rl} x_2 = & k_2 x + k_2 - 1 \\ y_2 = & k_2 y \end{array} \right.$$
   - ⋆ Maintenant, nous nous intéressons au vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$. Nous avons, à nouveau, entermes de coordonnées :
     $$\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k_2 x + k_2 - 1) - (k_1 x + 1 - k_1) \\ k_2 y - k_1 y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k_2 - k_1)\, x + (k_2 + k_1 - 2) \\ (k_2 - k_1)\, y \end{pmatrix}$$
   - ⋆ En posant $M' = (x', y')$, le point tel que $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{M_1M_2}$, nous avons $\overrightarrow{OM'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$
     Et nous obtenons donc, comme définition analytique de f :
     $$\left\{ \begin{array}{rl} x' = & (k_2 - k_1)\, x + (k_2 + k_1 - 2) \\ y' = & (k_2 - k_1)\, y \end{array} \right.$$

2. *Discuter, en fonction des valeurs de k_1 et de k_2 de la nature de f*

   Ce n'est pas une question si difficile. Nous allons procéder en plusieurs étapes.
   → <u>f admet-elle des points invariants ?</u>
   Si f admet un point invariant I, alors $f(I) = I$, et les coordonnées (x, y) de I vérifient :
   $$\left\{ \begin{array}{rl} x = & (k_2 - k_1)\, x + (k_2 + k_1 - 2) \\ y = & (k_2 - k_1)\, y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} (1 - k_2 + k_1)\, x = & (k_2 + k_1 - 2) \\ (1 - k_2 + k_1)\, y = & 0 \end{array} \right.$$
   → <u>Supposons $1 - k_2 + k_1 \neq 0 \iff k_2 - k_1 \neq 1$</u>
   Alors $y = 0$ et $x = \dfrac{k_1 + k_2 - 2}{k_1 - k_2 + 1}$ et le point $\Omega = \left(\dfrac{k_1 + k_2 - 2}{k_1 - k_2 + 1}, 0 \right)$ est le seul point invariant de f
   ☒ Nous allons démontrer que f est une homothétie de centre Ω et de rapport $k_2 - k_1$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Omega M'} = \begin{pmatrix} x' - \dfrac{k_1 + k_2 - 2}{k_1 - k_2 + 1} \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (k_2 - k_1)\, x + (k_2 + k_1 - 2) - \dfrac{k_1 + k_2 - 2}{k_1 - k_2 + 1} \\ (k_2 - k_1)\, y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (k_2 - k_1)\, x + \dfrac{(k_2 + k_1 - 2)(k_1 - k_2 + 1) - (k_1 + k_2 - 2)}{k_1 - k_2 + 1} \\ (k_2 - k_1)\, y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (k_2 - k_1)\, x - \dfrac{(k_2 - k_1)(k_1 + k_2 - 2)}{k_1 - k_2 + 1} \\ (k_2 - k_1)\, y \end{pmatrix} \\
&= (k_2 - k_1) \begin{pmatrix} x - \dfrac{k_1 + k_2 - 2}{k_1 - k_2 + 1} \\ y \end{pmatrix} \\
&= (k_2 - k_1)\, \overrightarrow{\Omega M}
\end{aligned}$$

⊠ Si $k_1 = k_2$, alors, $k_1 - k_2 = 0$ et f est la fonction constante qui à tout M fait correspondre Ω. Comme $k_1 = k_2$, nous avons $\Omega = (2k_1 - 2, 0)$. On retrouve ce résultat en utilisant la définition analytique.

→ Nous supposons maintenant que $1 - k_2 + k_1 = 0 \iff k_2 - k_1 = 1 \iff k_2 = k_1 + 1$

Alors :

⊠ L'équation $(1 - k_2 + k_1)\, y = 0$ devient $0y = 0$ et $y \in \mathbb{R}$

⊠ L'équation $(1 - k_2 + k_1)\, x = (k_2 + k_1 - 2)$ devient $0x = (k_2 + k_1 - 2) \iff 0x = 2k_1 - 1$

⊠ Ainsi, si $2k_1 - 1 \neq 0$, il n'y a pas de point invariant. La définition analytique de f devient :

$$\begin{cases} x' = & x + (2k_1 - 1) \\ y' = & y \end{cases}$$

f est donc une translation de vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2k_1 - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

⊠ Maintenant, si $2k_1 - 1 = 0$, c'est à dire $k_1 = \dfrac{1}{2}$ et $k_2 = \dfrac{3}{2}$, l'équation $(1 - k_2 + k_1)\, x = (k_2 + k_1 - 2)$ devient $0x = 0$ et $x \in \mathbb{R}$. La définition analytique de f devient :

$$\begin{cases} x' = & x \\ y' = & y \end{cases}$$

f est donc l'application identique

En résumé :

⇉ Si $k_1 = \dfrac{1}{2}$ et $k_2 = \dfrac{3}{2}$ alors $f = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$

⇉ Si $k_2 = k_1 + 1$ et $k_1 \neq \dfrac{1}{2}$ alors f est une translation de vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2k_1 - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

⇉ Si $k_1 = k_2$, f est une application constante

⇉ Dans les autres cas, f est une homothétie de rapport $k_2 - k_1$ et de centre $\Omega = \left(\dfrac{k_1 + k_2 - 2}{k_1 - k_2 + 1}, 0\right)$

Exercice 37 :

Théorèmes de Ménélaus et de Ceva

Dans le plan affine $\mathcal{P}$, on considère le triangle ABC. On prend trois points A', B' et C' tels que $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$, mais qui sont tous différents des 3 sommets du triangle ABC.

1. *Théorème de Menelaüs : Démontrer que les points A', B' et C' sont alignés si et seulement si :*

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$$

(a) **Aucun sommet A,B ou C n'est sur une droite $(A'B')$, $(A'C')$ ou $(C'B')$**

Nous allons démontrer que le point A n'appartient pas à la droite $(C'B')$; toutes les autres démonstrations sont semblables.*(Il y a quand même 9 démonstrations de ce type !!)*

On considère le repère cartésien $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, et nous posons :

$$\overrightarrow{AC'} = \alpha \overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB'} = \beta \overrightarrow{AC}$$

Avec $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, $\beta \neq 0$ et $\beta \neq 1$ puisque les points A', B' (et C' sont différents des sommets du triangle ABC

Si le point $A \in (C'B')$, alors les vecteurs $\overrightarrow{AC'}$ et $\overrightarrow{B'C'}$ sont colinéaires, ce qui traduit en termes de déterminant : $\det\left(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{B'C'}\right) = 0$; si ce déterminant est non nul, alors les vecteurs $\overrightarrow{AC'}$ et $\overrightarrow{B'C'}$ sont linéairement indépendants et le point A n'est pas aligné avec les points B' et C', autrement dit $A \notin (C'B')$

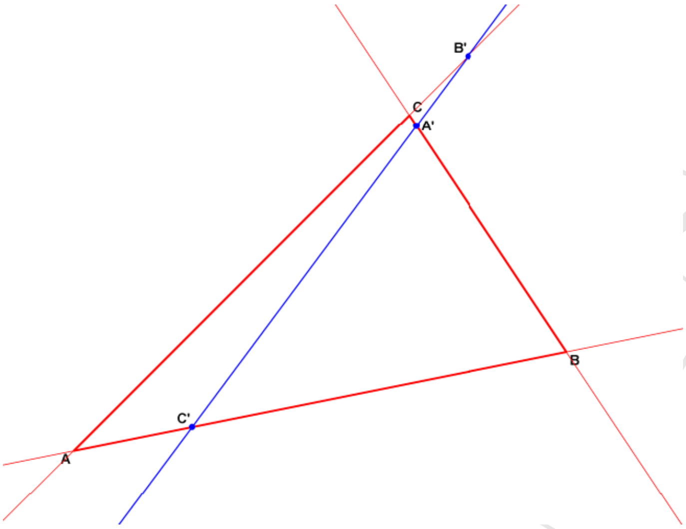


FIGURE 18.16 – La figure du théorème de Menelaüs

Nous avons $\overrightarrow{AC'} = \begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{B'C'} = \begin{pmatrix}\alpha\\-\beta\end{pmatrix}$ et donc $\det\left(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{B'C'}\right) = \begin{vmatrix}\alpha & \alpha\\0 & -\beta\end{vmatrix} = -\alpha \times \beta$.

Comme $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, nous avons $\alpha \times \beta \neq 0$, c'est à dire $\det\left(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{B'C'}\right) \neq 0$ et donc $A \notin (C'B')$

(b) **Considérons, maintenant, 3 homothéties particulières**

- ⋆ Soit $H(C', k_1)$, l'homothétie de centre C' et de rapport k_1 telle que $H(C', k_1)(A) = B$. Comme $C' \neq A$ et $C' \neq B$, nous avons $k_1 \neq 0$

  Nous avons alors $\overrightarrow{C'B} = k_1\overrightarrow{C'A}$. Si $\overrightarrow{u}$ est le vecteur directeur de la droite (AB), nous avons $\overrightarrow{C'B} = \overline{C'B}\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{C'A} = \overline{C'A}\overrightarrow{u}$, de telle sorte $\overline{C'B}\overrightarrow{u} = k_1\overline{C'A}\overrightarrow{u}$, et donc

$$\overline{C'B} = k_1\overline{C'A} \iff k_1 = \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}}$$

- ⋆ De même, soit $H(A', k_2)$ $(k_2 \neq 0)$, l'homothétie de centre A' et de rapport k_2 telle que $H(A', k_2)(B) = C$

  Nous avons à nouveau :

$$k_2 = \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}}$$

- ⋆ Et, pour terminer, soit $H(B', k_3)$ $(k_3 \neq 0)$, l'homothétie de centre B' et de rapport k_3 telle que $H(B', k_3)(C) = A$

  Nous avons à nouveau :

$$k_3 = \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}}$$

- ⋆ Considérons $F = H(B', k_3) \circ H(A', k_2) \circ H(C', k_1)$

  F est une homothétie de rapport $k_3 \times k_2 \times k_1 = \dfrac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \times \dfrac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \times \dfrac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}}$.

  D'autre part :

$$\begin{aligned} F(A) = &\ H(B', k_3) \circ H(A', k_2) \circ H(C', k_1)(A) \\ = &\ H(B', k_3) \circ H(A', k_2)(B) \\ = &\ H(B', k_3)(C) \\ = &\ A \end{aligned}$$

  F est donc une homothétie de centre A et de rapport $k_3 \times k_2 \times k_1$ ou bien est une translation laissant le point A fixe, c'est à dire que F est l'identité de $\mathcal{P}$: $F = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$

(c) **Supposons, maintenant, les points A', B' et C' alignés**

Nous appelons $\varphi = H(A', k_2) \circ H(C', k_1)$.

Alors, φ est une homothétie de centre Ω et de rapport $k_1 \times k_2$ telle que $\Omega \in (B'C')$.

Maintenant, $F = H(B', k_3) \circ \varphi$ est une homothétie de centre A tel que $A \in (\Omega A')$.

Comme les points A', B' et C' sont alignés, la droite $(\Omega A')$ est aussi la droite $(A'B')$ ou $(C'B')$ ou $(A'C')$, et donc $A \in (A'B')$, ce qui est impossible.

Donc, F n'est pas une homothétie, mais $F = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$, ce qui veut dire que $k_3 \times k_2 \times k_1 = 1$, et donc :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$$

(d) **Réciproquement, supposons $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$**

Comme A est un point fixe de F, nous avons $F = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$ et donc

$$H(A', k_2) \circ H(C', k_1) = [H(B', k_3)]^{-1} = H\left(B', \frac{1}{k_3}\right)$$

Le centre de l'homothétie $H(A', k_2) \circ H(C', k_1)$ étant sur la droite $(A'C')$, nous en déduisons que $B' \in (A'C')$ et donc que les points A', B' et C' sont alignés

2. *Théorème de Ceva : Démontrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourrantes si et seulement si :*

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$$

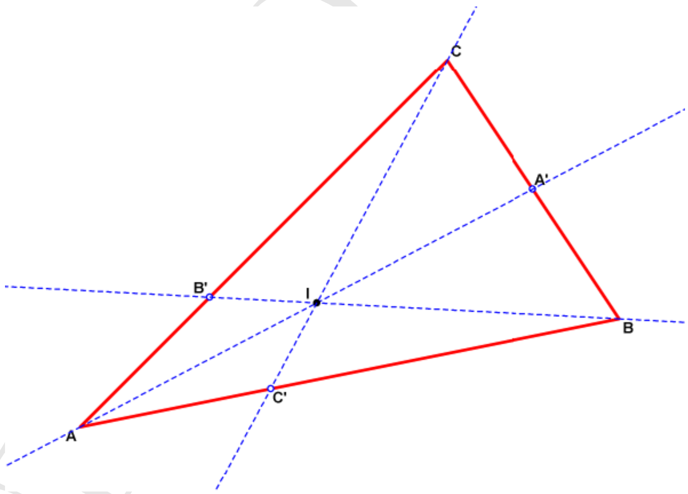


FIGURE 18.17 – La figure du théorème de Ceva

Nous démontrons le théorème de Ceva comme conséquence du théorème de Ménélaüs. Nous appelons I le point de concours des droites (AA'), (BB') et (CC').

(a) **Considérons le triangle ABA'**

Nous avons alors, $C' \in (AB)$, $I \in (AA')$ et $C \in (BA')$. En appliquant le théorème de Ménélaüs au triangle ABA', nous avons :

$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \times \frac{\overline{CB}}{\overline{CA'}} \times \frac{\overline{IA'}}{\overline{IA}} = 1$$

(b) **Considérons le triangle CAA'**

Nous avons alors, $B' \in (AC)$, $I \in (AA')$ et $B \in (CA')$. En appliquant le théorème de Ménélaüs au triangle CAA', nous avons :

$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{IA}}{\overline{IA'}} \times \frac{\overline{BA'}}{\overline{BC}} = 1$$

(c) <u>**On multiplie maintenant termes à termes les expressions trouvées.**</u>
Nous avons alors :
$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \times \frac{\overline{CB}}{\overline{CA'}} \times \frac{\overline{IA'}}{\overline{IA}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{IA}}{\overline{IA'}} \times \frac{\overline{BA'}}{\overline{BC}} = 1$$
D'où, en simplifiant et réordonnant, nous obtenons :

$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \times \frac{\overline{BA'}}{\overline{CA'}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -1$$

Ce que nous voulions

Exercice 38 :

<u>Théorème de Pappus</u>
On considère, dans le plan affine $\mathcal{P}$ 2 droites distinctes (D) et (D_1) sécantes en un point I.
Soient $A \in (D)$, $B \in (D)$ et $C \in (D)$. Soient aussi $A_1 \in (D_1)$, $B_1 \in (D_1)$ et $C_1 \in (D_1)$
Démontrer que si $(AB_1) \parallel (BA_1)$ et $(C_1B) \parallel (B_1C)$, alors $(AC_1) \parallel (CA_1)$

Cet exercice est l'application directe de 18.1.10

- ⋆ Comme, par hypothèses, $(AB_1) \parallel (BA_1)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB_1} = \lambda \overrightarrow{BA_1}$, et, d'après 18.1.10, il existe une unique homothétie $H(I, k)$ telle que $H(I, k)(A) = B$ et $H(I, k)(B_1) = A_1$
- ⋆ De même, comme $(C_1B) \parallel (B_1C)$, il existe une unique homothétie $H(I, k_1)$ telle que $H(I, k_1)(C_1) = B_1$ et $H(I, k_1)(B) = C$
- ⋆ Considérons maintenant l'homothétie $H(I, k_1) \circ H(I, k) = H(I, k) \circ H(I, k_1) = H(I, kk_1)$ puisque les homothéties de même centre commutent ; alors :
  $\rightarrow$ $H(I, k_1) \circ H(I, k)(A) = H(I, k_1)(B) = C$
  $\rightarrow$ $H(I, k) \circ H(I, k_1)(C_1) = H(I, k_1)(B_1) = A_1$
  Ainsi, l'homothétie $H(I, kk_1)$ transforme la droite (AC_1) en une droite (CA_1) qui sont donc parallèles

Chapitre 19

Les angles

Voilà une question très ardue, théorique... Bon, mais, il faut s'y mettre !!
Le formalisme de ce chapitre est important, mais celui que j'ai élaboré est le plus simple.
Dans la littérature, certains ouvrages ont un formalisme inexistant, se contentant de la simple intuition : c'est insuffisant. D'autre ont un formalisme que j'ai trouvé excessif. J'ai tenté de faire un exposé au mieux.

19.1 Angles de vecteurs

19.1.1 Proposition

$\overrightarrow{P}$ désigne le plan vectoriel euclidien orienté par une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$
$\mathbb{U}$ est l'ensemble des vecteurs unitaires (de norme 1) du plan vectoriel $\overrightarrow{P}$
Nous défινssons dans $\mathbb{U} \times \mathbb{U}$ la relation $\mathfrak{S}$ suivante :

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}_1)\, \mathfrak{S}\, (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}_1) \Longleftrightarrow \left(\exists R \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)\right)(\overrightarrow{u}_1 = R(\overrightarrow{u})) \text{ et } ((\overrightarrow{v}_1 = R(\overrightarrow{v})))$$

Alors, la relation $\mathfrak{S}$ est une relation d'équivalence

Démonstration

1. **Elle est réflexive**
   En effet, soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}_1) \in \mathbb{U} \times \mathbb{U}$.
   D'après 16.3.9, comme $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{u}_1\| = 1$ il existe une et une seule rotation $R \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ telle que $\overrightarrow{u}_1 = R(\overrightarrow{u})$, et nous avons bien : $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}_1)\, \mathfrak{S}\, (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}_1)$
   $\mathfrak{S}$ est donc bien réflexive.
2. **Elle est symétrique**
   Supposons que pour $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}_1) \in \mathbb{U} \times \mathbb{U}$ et $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}_1) \in \mathbb{U} \times \mathbb{U}$, nous ayions $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}_1)\, \mathfrak{S}\, (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}_1)$.
   Il est clair et facile de voir que $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}_1)\, \mathfrak{S}\, (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}_1)$
   $\mathfrak{S}$ est bien symétrique

   Faisons une remarque :

   Il existe donc une rotation $R \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ telle que $\overrightarrow{u}_1 = R(\overrightarrow{u})$ et $\overrightarrow{v}_1 = R(\overrightarrow{v})$. R étant une bijection, nous avons $\overrightarrow{u} = R^{-1}(\overrightarrow{u}_1)$ et $\overrightarrow{v} = R^{-1}(\overrightarrow{v}_1)$. Nous avons donc aussi $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u})\, \mathfrak{S}\, (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v})$
3. **Elle est transitive**
   Soient $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}_1) \in \mathbb{U}\times\mathbb{U}$, $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}_1) \in \mathbb{U}\times\mathbb{U}$ et $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}_1) \in \mathbb{U}\times\mathbb{U}$ tels que nous ayions $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}_1)\, \mathfrak{S}\, (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}_1)$ et $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}_1)\, \mathfrak{S}\, (\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}_1)$

Toujours d'après 16.3.9, il existe une et une seule rotation R telle que $\overrightarrow{u}_1 = R(\overrightarrow{u})$, $\overrightarrow{v}_1 = R(\overrightarrow{v})$ et $\overrightarrow{w}_1 = R(\overrightarrow{w})$.

Nous avons donc $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}_1)\,\mathfrak{S}\,(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}_1)$

$\mathfrak{S}$ est bien transitive

$\mathfrak{S}$ est donc une relation d'équivalence

Remarque 1 :

En fait, pour tout $\overrightarrow{u} \in \mathbb{U}$ et tout $\overrightarrow{v} \in \mathbb{U}$, il n'existe qu'une seule rotation $R \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ tel que $\overrightarrow{v} = R(\overrightarrow{u})$

Exemple 1 :

Pour tout $\overrightarrow{u} \in \mathbb{U}$ et tout $\overrightarrow{v} \in \mathbb{U}$, nous avons $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\,\mathfrak{S}\,(-\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v})$

En effet, il existe une unique rotation $R \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ telle que $\overrightarrow{v} = R(\overrightarrow{u})$.

Or, $R(-\overrightarrow{u}) = -R(\overrightarrow{u}) = -\overrightarrow{v}$, et donc $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\,\mathfrak{S}\,(-\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v})$

19.1.2 Définition d'angle de vecteurs

$\overrightarrow{P}$ désigne le plan vectoriel euclidien orienté par une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$

1. $\mathfrak{S}$ étant une relation d'équivalence, nous appelons angle de 2 vecteurs unitaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, la classe d'équivalence du couple de vecteures $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \mathbb{U} \times \mathbb{U}$ dans la relation d'équivalence $\mathfrak{S}$. Cette classe est notée $\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$
2. Etant donnés 2 vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\overrightarrow{P}$, non nuls quelconques, nous définissons l'angle des 2 vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ que nous notons $\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$ par :
$$\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})} = \widehat{\left(\frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}, \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}\right)}$$
3. L'ensemble des angles est noté $\mathcal{A}$; c'est l'ensemble quotient $(\mathbb{U} \times \mathbb{U})/\mathfrak{S}$.
Nous avons donc : $\mathcal{A} = (\mathbb{U} \times \mathbb{U}/\mathfrak{S})$

Remarque 2 :

1. La classe d'équivalence $\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$ est totalement liée à l'unique rotation $R \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ telle que $\overrightarrow{v} = R(\overrightarrow{u})$. On peut donc subodorer que l'ensemble des angles de vecteurs est en bijection avec l'ensemble des rotations de $O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$
2. La définition d'angle de vecteurs quelconques et non nuls est naturelle et cohérente puisque $\dfrac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|} = \dfrac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|} = 1$

19.1.3 Proposition

$\overrightarrow{P}$ désigne le plan vectoriel euclidien orienté par une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$

1. Soit $\overrightarrow{u} \in \mathbb{U}$ (c'est à dire que $\|\overrightarrow{u}\| = 1$). Alors, pour tous vecteurs non nuls $\overrightarrow{X} \in \overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{Y} \in \overrightarrow{P}$, il existe un unique vecteur $\overrightarrow{w} \in \mathbb{U}$ tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}\right)} = \widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})}$
2. Pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, il existe une et une seule rotation $\varphi \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ telle que pour tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{P}$, $\alpha = \widehat{(\overrightarrow{u}, \varphi(\overrightarrow{u}))}$

Démonstration

1. Comme $\widehat{\left(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}\right)} = \widehat{\left(\dfrac{\overrightarrow{X}}{\left\|\overrightarrow{X}\right\|}, \dfrac{\overrightarrow{Y}}{\overrightarrow{Y}}\right)}$, nous pouvons supposer $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ de norme 1

   Il existe une unique isométrie positive $\varphi \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ telle que $\varphi\left(\overrightarrow{X}\right) = \overrightarrow{Y}$. Si nous appelons $\overrightarrow{w} = \varphi\left(\overrightarrow{u}\right)$.

   Nous avons donc $\widehat{\left(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right)}$

2. Soient $\alpha \in \mathcal{A}$ et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{P}$.
   Il existe $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{P}$ avec $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\|$ tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)} = \alpha$.
   Il existe une unique rotation $\varphi \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ telle que $\overrightarrow{v} = \varphi\left(\overrightarrow{u}\right)$, c'est à dire telle que $\alpha = \widehat{\left(\overrightarrow{u}, \varphi\left(\overrightarrow{u}\right)\right)}$

Ce que nous voulions.

19.1.4 Corollaire

$\overrightarrow{P}$ désigne le plan vectoriel euclidien orienté par une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$
$O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ désigne les isométries positives (ou les rotations) de $\overrightarrow{P}$ et $\mathcal{A}$ désigne l'ensemble des angles. Soit Φ l'application désignée par :

$$\begin{cases} \Phi : O^+\left(\overrightarrow{P}\right) & \longrightarrow \quad \mathcal{A} \\ \qquad\qquad \varphi & \longmapsto \quad \Phi\left(\varphi\right) = \widehat{\left(\overrightarrow{u}, \varphi\left(\overrightarrow{u}\right)\right)} \end{cases}$$

Alors Φ est une bijection

Démonstration

1. Φ est évidemment surjective

   Effectivement, pour $\alpha \in \mathcal{A}$ et pour tout $\overrightarrow{u} \in \mathbb{U}$, il existe $\varphi \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ tel que $\alpha = \widehat{\left(\overrightarrow{u}, \varphi\left(\overrightarrow{u}\right)\right)}$, c'est à dire tel que $\Phi\left(\varphi\right) = \alpha$

2. Φ est évidemment injective

   Soient $\varphi \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ et $\varphi_1 \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ tels que $\Phi\left(\varphi\right) = \Phi\left(\varphi_1\right)$.

   Alors $\widehat{\left(\overrightarrow{u}, \varphi\left(\overrightarrow{u}\right)\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{u}, \varphi_1\left(\overrightarrow{u}\right)\right)}$ et donc, nous avons $\varphi = \varphi_1$

19.1.5 Angle d'une rotation

$\overrightarrow{P}$ désigne le plan vectoriel euclidien orienté par une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$
Soit $\varphi \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ une rotation du plan $\overrightarrow{P}$
On appelle angle de la rotation φ l'angle $\Phi\left(\varphi\right) = \widehat{\left(\overrightarrow{u}, \varphi\left(\overrightarrow{u}\right)\right)}$

Remarque 3 :

On peut donc remarquer que $\Phi^{-1}\left(\widehat{\left(\overrightarrow{u}, \varphi\left(\overrightarrow{u}\right)\right)}\right) = \varphi$

19.1.6 Addition des angles

$\overrightarrow{P}$ désigne le plan vectoriel euclidien orienté par une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right\}$
Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des angles du plan.
On définit l'addition des angles par :

$$(\forall\alpha\in\mathcal{A})\,(\forall\beta\in\mathcal{A})\,\left(\alpha+\beta=\Phi\left[\Phi^{-1}(\alpha)\circ\Phi^{-1}(\beta)\right]\right)$$

Remarque 4 :

Cette définition est relativement complexe, mais rigoureuse.
Pour $\alpha\in\mathcal{A}$, $\Phi^{-1}(\alpha)$ est la rotation ρ d'angle α, c'est à dire que $\Phi^{-1}(\alpha)=\rho$ tel que $\alpha=\widehat{(\overrightarrow{u},\rho(\overrightarrow{u}))}$
Si $\rho'=\Phi^{-1}(\beta)$, $\alpha+\beta=\Phi[\rho\circ\rho']$, c'est à dire que $\alpha+\beta$ est l'angle de la rotation $\rho+\rho'$, ce qui montre, en passant, que l'addition est interne.

19.1.7 Proposition

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des angles.
Alors, l'addition des angles définie en 19.1.6 confère à $(\mathcal{A},+)$ la structure de groupe commutatif

Démonstration

1. **C'est un loi interne**
   C'est ce que nous venons de voir dans la remarque précédente
2. **Elle admet un élément neutre**
   Le neutre pour l'addition des angles est l'angle nul $\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u})}$.
   En effet :
$$\begin{aligned}\widehat{(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})}+\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u})} &= \Phi\left[\Phi^{-1}\left(\widehat{(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})}\right)\circ\Phi^{-1}\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u})}\right)\right]\\ &= \Phi\left[\Phi^{-1}\left(\widehat{(\overrightarrow{v},\varphi(\overrightarrow{v}))}\right)\circ\Phi^{-1}\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\mathrm{Id}_{\overrightarrow{P}}(\overrightarrow{u}))}\right)\right]\\ &= \Phi\left[\varphi\circ\mathrm{Id}_{\overrightarrow{P}}\right]=\Phi[\varphi]\\ &= \widehat{(\overrightarrow{v},\varphi(\overrightarrow{v}))}=\widehat{(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})}\end{aligned}$$
3. **Chaque élément admet un symétrique**
   Soit $\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}\in\mathcal{A}$.
   Nous allons démontrer que $\widehat{(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})}$ est le symétrique de $\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}$
$$\begin{aligned}\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}+\widehat{(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})} &= \Phi\left[\Phi^{-1}\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}\right)\circ\Phi^{-1}\left(\widehat{(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})}\right)\right]\\ &= \Phi\left[\Phi^{-1}\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\varphi(\overrightarrow{u}))}\right)\circ\Phi^{-1}\left(\widehat{(\overrightarrow{v},\varphi^{-1}(\overrightarrow{v}))}\right)\right]\\ &= \Phi\left[\varphi\circ\varphi^{-1}\right]\\ &= \Phi\left[\mathrm{Id}_{\overrightarrow{P}}\right]\\ &= \widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u})}\end{aligned}$$
   On note aussi $\widehat{(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})}=-\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}$
4. **L'addition est commutative**
   Soient $\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}\in\mathcal{A}$ et $\widehat{(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{v_1})}\in\mathcal{A}$.

Alors :

$$\begin{aligned}
\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}+\widehat{(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{v_1})} &= \Phi\left[\Phi^{-1}\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}\right)\circ\Phi^{-1}\left(\widehat{(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{v_1})}\right)\right]\\
&= \Phi\left[\Phi^{-1}\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\varphi(\overrightarrow{u}))}\right)\circ\Phi^{-1}\left(\widehat{(\overrightarrow{u_1},\rho(\overrightarrow{u_1}))}\right)\right]\\
&= \Phi[\varphi\circ\rho]\\
&= \Phi[\rho\circ\varphi] \text{ par commutativité dans } O^+\left(\overrightarrow{P}\right)\\
&= \Phi\left[\Phi^{-1}\left(\widehat{(\overrightarrow{u_1},\rho(\overrightarrow{u_1}))}\right)\circ\Phi^{-1}\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\varphi(\overrightarrow{u}))}\right)\right]\\
&= \widehat{(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{v_1})}+\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}
\end{aligned}$$

Remarque 5 :

Nous pouvons donc écire que :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\Phi : O^+\left(\overrightarrow{P}\right) & \longrightarrow & \mathcal{A}\\ \varphi & \longmapsto & \Phi(\varphi)=\widehat{(\overrightarrow{u},\varphi(\overrightarrow{u}))}\end{array}\right.$$

est un homomorphisme de groupe

En effet, et très simplement, si $\varphi\in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ et si $\psi\in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$, alors :

$$\begin{aligned}
\Phi(\varphi\circ\psi) &= \Phi\left[\Phi^{-1}\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\varphi(\overrightarrow{u}))}\right)\circ\Phi^{-1}\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\psi(\overrightarrow{u}))}\right)\right]\\
&= \widehat{(\overrightarrow{u},\varphi(\overrightarrow{u}))}+\widehat{(\overrightarrow{u},\psi(\overrightarrow{u}))}\\
&= \Phi(\varphi)+\Phi(\psi)
\end{aligned}$$

Φ étant bijective, c'est même un isomorphisme.
Le groupe des rotations du plan $\left(O^+\left(\overrightarrow{P}\right),\circ\right)$ et le groupe des angles $(\mathcal{A},+)$ sont donc isomorphes.

19.1.8 Relation de Chasles

$\overrightarrow{P}$ désigne le plan vectoriel euclidien orienté par une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right\}$
Soient $\mathcal{A}$ l'ensemble des angles du plan, $\alpha\in\mathcal{A}$, $\beta\in\mathcal{A}$ et $\overrightarrow{u}\in\mathbb{U}$
Soient $\overrightarrow{v}\in\mathbb{U}$ tel que $\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}=\alpha$ et $\overrightarrow{w}\in\mathbb{U}$ tel que $\widehat{(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})}=\beta$. Alors :

$$\alpha+\beta=\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}+\widehat{(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})}=\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w})}$$

Démonstration

Soient $\varphi\in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ l'unique isométrie positive telle que $\overrightarrow{v}=\varphi(\overrightarrow{u})$ et $\rho\in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ l'unique isométrie positive telle que $\overrightarrow{w}=\rho(\overrightarrow{v})$
Alors :

- $\rightarrow$ $\Phi(\varphi)=\widehat{(\overrightarrow{u},\varphi(\overrightarrow{u}))}=\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}$
- $\rightarrow$ De même $\Phi(\rho)=\widehat{(\overrightarrow{v},\rho(\overrightarrow{v}))}=\widehat{(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})}$
- $\rightarrow$ Et pour terminer, $\Phi(\rho\circ\varphi)=\widehat{(\overrightarrow{u},\rho\circ\varphi(\overrightarrow{u}))}=\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w})}$

L'application Φ étant un homomorphisme de groupe, nous avons :

$$\Phi(\rho\circ\varphi)=\Phi(\varphi)+\Phi(\rho)$$

C'est à dire :

$$\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}+\widehat{(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})}=\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w})}$$

Ce que nous voulions

19.1.9 Cosinus et sinus d'un angle de vecteurs

$\vec{P}$ désigne le plan vectoriel euclidien orienté par une base orthonormée directe $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$
Soient $\vec{u} \in \vec{P}$ et $\vec{v} \in \vec{P}$. Alors :

$$\cos\left(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}\right) = \frac{\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} \qquad \sin\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \frac{\det[\vec{u}, \vec{v}]}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

Remarque 6 :

1. De la définition, nous pouvons écrire :

$$\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle = \cos\left(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}\right) \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \qquad \det[\vec{u}, \vec{v}] = \sin\left(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}\right) \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

2. De la symétrie du produit scalaire, nous avons $\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle = \langle \vec{v} \mid \vec{u} \rangle$ et donc

$$\cos\left(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}\right) = \cos\left(\widehat{(\vec{v}, \vec{u})}\right)$$

3. Cette fois ci, de l'antisymétrie du déterminant, c'est à dire $\det[\vec{u}, \vec{v}] = -\det[\vec{v}, \vec{u}]$, nous avons $\sin\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = -\sin\widehat{(\vec{v}, \vec{u})}$
4. D'après le lemme de Schwarz 16.1.3, nous avons $|\langle x \mid y \rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$ et donc

$$\left|\cos\left(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}\right)\right| = \frac{|\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle|}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} \leqslant 1$$

5. On construit un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ où $\vec{i} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$. Dans ce repère, nous avons :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$$

Alors :
$\rightarrow$ $\cos^2\left(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}\right) = \dfrac{a^2 b^2}{a^2 \times (b^2 + c^2)} = \dfrac{b^2}{b^2 + c^2} \leqslant 1$ et donc $-1 \leqslant \cos\left(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}\right) \leqslant +1$
$\rightarrow$ $\sin^2\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix}^2}{a^2 \times (b^2 + c^2)} = \dfrac{a^2 c^2}{a^2 \times (b^2 + c^2)} = \dfrac{c^2}{b^2 + c^2} \leqslant 1$ d'où $-1 \leqslant \sin\left(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}\right) \leqslant +1$
Avec ces calculs, nous pouvons remarquer que $\cos^2\left(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}\right) + \sin^2\left(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}\right) = 1$

19.1.10 Mesure d'un angle de vecteurs

Nous supposons connues les deux fonctions numériques de la variable réelle cos et sin. On suppose également connues leurs propriétés usuelles : *(dérivabilité, dérivées, parité, périodicité, formules d'addition, etc.)* ainsi que leur tableau de variation.

$\vec{P}$ désigne le plan vectoriel euclidien orienté par une base orthonormée directe $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$ et $\mathcal{A}$ l'ensemble des angles du plan $\vec{P}$

1. A tout angle $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \alpha \in \mathcal{A}$, il existe un unique réel $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

$$\cos\left(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}\right) = \cos\alpha = \cos\theta \text{ et } \sin\left(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}\right) = \sin\alpha = \sin\theta$$

2. Le réel θ est appelé <u>mesure principale</u> de l'angle $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \alpha$
3. L'ensemble des mesures de l'angle $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \alpha$ est $\{\theta + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$.

Démonstration

Cette équation ressemble à la résolution d'une équation trigonométrique.
Soit donc $\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})} = \alpha \in \mathcal{A}$ un angle de vecteurs.

1. De la remarque précédente, nous avons :
   - $\star$ $\cos^2\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}\right) + \sin^2\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}\right) = 1$
   - $\star$ $-1 \leqslant \cos\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}\right) \leqslant +1$
   - $\star$ $-1 \leqslant \sin\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}\right) \leqslant +1$
2. Partons de $\cos\theta = \cos\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}\right)$.

   Comme $-1 \leqslant \cos\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}\right) \leqslant +1$, il existe une seule valeur $\theta_0 \in [0;\pi]$ telle que $\cos\theta_0 = \cos\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}\right)$.

   L'équation $\cos\theta = \cos\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}\right)$ a 2 solutions dans l'intervalle $[0;2\pi[$, à savoir $\theta_0 \in [0;\pi]$ et $2\pi\theta_0 \in [\pi;2\pi]$
3. Les égalités $1 = \cos^2\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}\right) + \sin^2\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}\right) = \cos^2\theta + \sin^2\theta$ montrent que nous avons $\sin\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}\right) = \pm\sin\theta_0$
   - $\star$ Si $\sin\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}\right) = \sin\theta_0$, alors $\theta = \theta_0$ et $\theta_0 \in [0;\pi]$ est l'unique élément qui convient
   - $\star$ Si $\sin\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}\right) = -\sin\theta_0$, alors $\theta = 2\pi - \theta_0$ et $2\pi - \theta_0 \in [\pi;2\pi]$ est l'unique élément qui convient.

Remarque 7 :

On dit qu'un angle est défini à $2k\pi$ près

Exemple 2 :

Applications

1. *$\overrightarrow{P}$ désigne le plan vectoriel euclidien orienté par une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right\}$*
   Pour $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$, il faut exprimer a en fonction de $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{u}$

   Plus exactement, il faut exprimer a en fonction de $\cos\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{u}\right)$ et $\sin\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{u}\right)$.
   De la définition 19.1.9, nous avons :
   - $\star$ $\left\langle\overrightarrow{i} \mid \overrightarrow{u}\right\rangle = \cos\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}\right) \times \left\|\overrightarrow{i}\right\| \times \|\overrightarrow{u}\|$

     Comme $\left\langle\overrightarrow{i} \mid \overrightarrow{u}\right\rangle = a$, que $\left\|\overrightarrow{i}\right\| = 1$, nous obtenons $a = \cos\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{u}\right)\|\overrightarrow{u}\|$
   - $\star$ D'autre part :

     $$\det\left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{i}\right] = \sin\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{i})}\right) \times \left\|\overrightarrow{i}\right\| \times \|\overrightarrow{u}\| = \sin\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{i})}\right) \times \|\overrightarrow{u}\|$$

     Or, $\det\left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{i}\right] = \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix} = -b$ et donc, $-b = \sin\left(\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{i})}\right) \times \|\overrightarrow{u}\|$

     C'est à dire $b = \sin\left(\widehat{(\overrightarrow{i},\overrightarrow{u})}\right) \times \|\overrightarrow{u}\|$

   Donc, $\overrightarrow{u} = \cos\left(\widehat{(\overrightarrow{i},\overrightarrow{u})}\right)\|\overrightarrow{u}\|\,\overrightarrow{i} + \sin\left(\widehat{(\overrightarrow{i},\overrightarrow{u})}\right)\|\overrightarrow{u}\|\,\overrightarrow{j}$
2. *Soit $\mathcal{P}$ un plan affine d'espace directeur le plan vectoriel $\overrightarrow{P}$ orienté par une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right\}$*

Soient $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ et $C \in \mathcal{P}$ tels que $A \neq B$, $B \neq C$ et $A \neq C$. Soit $\mathcal{S}$ la symétrie par rapport à une droite $D \subset \mathcal{P}$ et on pose :

$$A' = \mathcal{S}(A) \qquad B' = \mathcal{S}(B) \qquad C' = \mathcal{S}(C)$$

Il faut démontrer que $\widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'}\right)}$

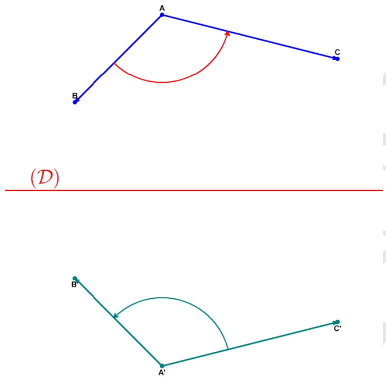


FIGURE 19.1 – Figure de l'exercice

Rapportons le plan $\mathcal{P}$ à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ où O appartient à la droite D et tel que $\overrightarrow{i}$ est un vecteur directeur unitaire de la droite D. Les points A, B, C, A', B', C' ont des coordonnées respectives de la forme :

$$A = (a_1, a_2) \quad B = (b_1, b_2) \quad C = (c_1, c_2) \quad A' = (a_1, -a_2) \quad B' = (b_1, -b_2) \quad C' = (c_1, -c_2)$$

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'C'}$ sont donc :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ -b_2 + a_2 \end{pmatrix} \overrightarrow{A'C'} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ -c_2 + a_2 \end{pmatrix}$$

D'où nous tirons :

$$\Rightarrow \cos\left(\widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)}\right) = \frac{\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{(b_1 - a_1)(c_1 - a_1) + (b_2 - a_2)(c_2 - a_2)}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{AC}\right\|}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\widehat{\left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'}\right)}\right) = \frac{\left\langle \overrightarrow{A'B'} \mid \overrightarrow{A'C'} \right\rangle}{\left\|\overrightarrow{A'B'}\right\| \left\|\overrightarrow{A'C'}\right\|} = \frac{(b_1 - a_1)(c_1 - a_1) + (a_2 - b_2)(a_2 - c_2)}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{AC}\right\|}$$

Comme $\mathcal{S}$ est une isométrie, nous avons $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{A'B'}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\overrightarrow{A'C'}\right\|$.

D'autre part, $(b_1 - a_1)(c_1 - a_1) + (b_2 - a_2)(c_2 - a_2) = (b_1 - a_1)(c_1 - a_1) + (a_2 - b_2)(a_2 - c_2)$, et nous concluons :

$$\cos\left(\widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)}\right) = \cos\left(\widehat{\left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'}\right)}\right)$$

$$\Rightarrow \sin\left(\widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)}\right) = \frac{\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \end{vmatrix}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{(c_2 - a_2)(b_1 - a_1) - (b_2 - a_2)(c_1 - a_1)}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{AC}\right\|}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\widehat{\left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'}\right)}\right) = \frac{\det\left(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'}\right)}{\left\|\overrightarrow{A'C'}\right\| \left\|\overrightarrow{A'B'}\right\|} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 - a_1 & b_1 - a_1 \\ -c_2 + a_2 & -b_2 + a_2 \end{vmatrix}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{(c_1 - a_1)(-b_2 + a_2) - (-c_2 + a_2)(b_1 - a}{\left\|\overrightarrow{A'B'}\right\| \left\|\overrightarrow{A'C'}\right\|}$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, nous avons $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{A'B'}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\overrightarrow{A'C'}\right\|$.
Et $(c_2 - a_2)(b_1 - a_1) - (b_2 - a_2)(c_1 - a_1) = (c_1 - a_1)(-b_2 + a_2) - (-c_2 + a_2)(b_1 - a_1)$
Donc :

$$\sin\left(\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)\right) = \sin\left(\left(\widehat{\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'}}\right)\right)$$

Et donc : $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'}}\right)$

Remarque 8 :

1. Si nous considérons la relation $\mathfrak{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$x\mathfrak{R}y \Longleftrightarrow y - x = 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

Cette relation est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ dont l'ensemble des classes d'équivalence est $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$; c'est l'ensemble des classes d'équivalence modulo 2π

2. De plus, $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}; +)$ est un groupe commutatif.

19.1.11 Proposition

$\overrightarrow{P}$ désigne le plan vectoriel euclidien orienté par une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$ et $\mathcal{A}$ l'ensemble des angles du plan $\overrightarrow{P}$
L'application Ψ ainsi définie :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \Psi : \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \\ \widehat{\alpha} & \longmapsto & \Psi\left(\widehat{\alpha}\right) = \theta \end{array}\right. \text{ où } \left\{\begin{array}{l} \cos\widehat{\alpha} = \cos\theta \\ \sin\widehat{\alpha} = \sin\theta \end{array}\right.$$

Alors Ψ est un isomorphisme de groupe

Démonstration

1. D'après 19.1.10, Ψ est évidemment une bijection
2. Montrons que Ψ est un homomorphisme de groupe

Soient $\widehat{\alpha} \in \mathcal{A}$ et $\widehat{\beta} \in \mathcal{A}$.
Alors
- ⋆ Soit $\theta_1 \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tel que $\Psi\left(\widehat{\alpha}\right) = \theta_1$. Alors $\cos\theta_1 = \cos\widehat{\alpha}$ et $\sin\theta_1 = \sin\widehat{\alpha}$
- ⋆ De même, si $\theta_2 \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est tel que $\Psi\left(\widehat{\beta}\right) = \theta_2$. Alors $\cos\theta_2 = \cos\widehat{\beta}$ et $\sin\theta_2 = \sin\widehat{\beta}$
- ⋆ Et si $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est tel que $\Psi\left(\widehat{\alpha} + \widehat{\beta}\right) = \theta$, alors $\cos\theta = \cos\left(\widehat{\beta} + \widehat{\alpha}\right)$ et $\sin\theta = \sin\left(\widehat{\beta} + \widehat{\alpha}\right)$

Les formules d'additions nous donnent :

$$\cos\left(\widehat{\beta} + \widehat{\alpha}\right) = \cos\widehat{\beta}\cos\widehat{\alpha} - \sin\widehat{\beta}\sin\widehat{\alpha} = \cos\theta_2\cos\theta_1 - \sin\theta_2\sin\theta_1 = \cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta$$

Puis

$$\sin\left(\widehat{\beta} + \widehat{\alpha}\right) = \cos\widehat{\beta}\sin\widehat{\alpha} + \sin\widehat{\beta}\cos\widehat{\alpha} = \cos\theta_2\sin\theta_1 - \sin\theta_2\cos\theta_1 = \sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta$$

Nous avons donc $\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta$ et $\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta$, et ainsi, modulo 2π ou encore dans l'ensemble $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, nous avons $\theta_1 + \theta_2 = \theta$, c'est à dire :

$$\Psi\left(\widehat{\alpha} + \widehat{\beta}\right) = \Psi\left(\widehat{\alpha}\right) + \Psi\left(\widehat{\beta}\right)$$

Ψ est donc bien un isomorphisme de groupe

19.2 Angles de demies droites

19.2.1 Définition d'angle de demies droites

$\overrightarrow{P}$ désigne le plan vectoriel euclidien orienté par une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$

1. On appelle demie-droite de base $\overrightarrow{u}$ un sous-ensemble $\overrightarrow{\delta}_{\overrightarrow{u}}$ de $\overrightarrow{P}$ défini par :
$$\overrightarrow{\delta}_{\overrightarrow{u}} = \left\{\overrightarrow{X} \in \overrightarrow{P} \text{ tel que } \overrightarrow{X} = \lambda\overrightarrow{u} \text{ où } \lambda > 0 \text{ et } \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}\right\}$$
2. Soient $\overrightarrow{\delta}_{\overrightarrow{u}}$ et $\overrightarrow{\delta}_{\overrightarrow{v}}$ 2 demies droites de $\overrightarrow{P}$. On appelle angle des demies droites $\overrightarrow{\delta}_{\overrightarrow{u}}$ et $\overrightarrow{\delta}_{\overrightarrow{v}}$, l'angle des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:
$$\widehat{\left(\overrightarrow{\delta}_{\overrightarrow{u}}, \overrightarrow{\delta}_{\overrightarrow{v}}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)}$$
3. La mesure des angles de 2 demies droites vectorielle $\widehat{\left(\overrightarrow{\delta}_{\overrightarrow{u}}, \overrightarrow{\delta}_{\overrightarrow{v}}\right)}$ est celle des angles de vecteurs $\widehat{\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)}$
C'est donc une mesure modulo 2π

Remarque 9 :

Nous avons, en fait : $\widehat{\left(\overrightarrow{\delta}_{\overrightarrow{u}}, \overrightarrow{\delta}_{\overrightarrow{v}}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)} = \widehat{\left(\dfrac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}, \dfrac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}\right)}$

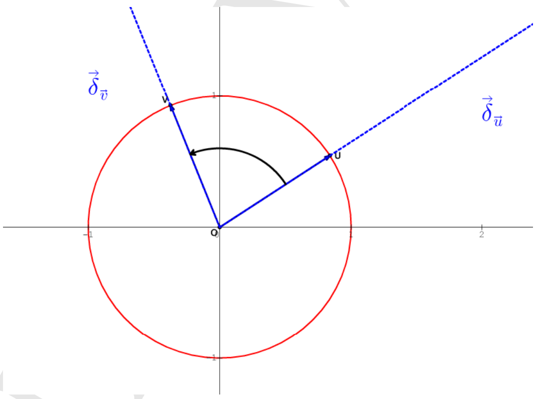


FIGURE 19.2 – Angle de demies droites

19.2.2 Demies droites affines

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine de direction $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$
On appelle demie-droite affine d'origine $A \in \mathcal{P}$ et de direction $\overrightarrow{u}$, un sous-ensemble $D\left(A, \overrightarrow{u}\right)$ défini par :
$$D\left(A, \overrightarrow{u}\right) = \left\{M \in \mathcal{P} \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u} \text{ où } \lambda \geqslant 0\right\}$$

Remarque 10 :

Á $D\left(A, \overrightarrow{u}\right)$, on peut faire correspondre la droite vectorielle $\delta_{\overrightarrow{u}}$

19.2.3 Angles de demies droites affines

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine de direction $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$
Soient $D\left(A, \overrightarrow{u}\right)$ et $D\left(B, \overrightarrow{v}\right)$ 2 droites affines de $\mathcal{P}$. L'angle de demies droites est défini par :

$$\left(\widehat{D\left(A, \overrightarrow{u}\right), D\left(B, \overrightarrow{v}\right)}\right) = \left(\widehat{\delta_{\overrightarrow{u}}, \delta_{\overrightarrow{u}}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)$$

Exemple 3 :

<u>**Quelques exercices corrigés**</u>

1. *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ 2 vecteurs d'un plan vectoriel orienté par une base orthonormée $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$*
Comparer l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)$ à chacun des angles $\left(\widehat{-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}}\right)$ et $\left(\widehat{-\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}}\right)$

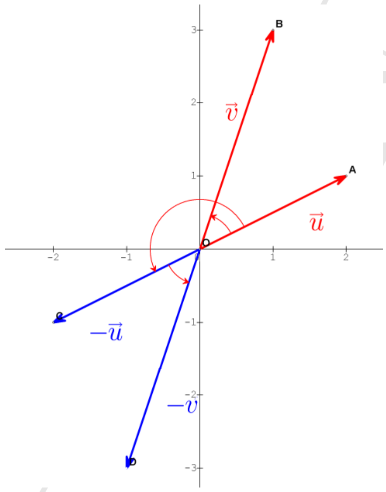


FIGURE 19.3 – Figure de l'exercice

→ <u>Comparaisons de $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)$ et de $\left(\widehat{-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)$</u>
Par la relation de Chasles, nous avons :

$$\left(\widehat{-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) = \left(\widehat{-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) = \pi + \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)[2\pi]$$

→ <u>Comparaisons de $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)$ et de $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}}\right)$</u>
Toujours la relation de Chasles !!

$$\left(\widehat{\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{v}, -\overrightarrow{v}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) + \pi\,[2\pi]$$

→ <u>Comparaisons de $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)$ et de $\left(\widehat{-\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}}\right)$</u>
Pas plus difficile !!

$$\left(\widehat{-\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}}\right) = \left(\widehat{-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) + \left(\widehat{-\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}}\right) = \pi + \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) + \pi[2\pi] = \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)[2\pi]$$

2. *On se donne un vrai triangle ABC (c'est à dire que les points A, B et C ne sont pas alignés. Démontrer que :*

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}\right) = \pi[2\pi]$$

En fait, nous allons redémontrer que la somme des angles dans un triangle est égale à π

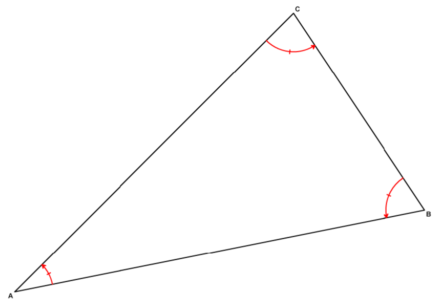


Figure 19.4 – Figure de l'exercice

Nous allons donc réutiliser les résultats précédents :

$$\begin{array}{rcl}\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)} & = & \widehat{\left(-\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}+\pi\,[2\pi]=\widehat{\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC}\right)}+\pi\,[2\pi]\\ \widehat{\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)} & = & \widehat{\left(-\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)}+\pi\,[2\pi]=\widehat{\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)}+\pi\,[2\pi]\\ \widehat{\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)} & = & \widehat{\left(-\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)}+\pi\,[2\pi]=\widehat{\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{BA}\right)}+\pi\,[2\pi]\end{array}$$

En additionnant, membres à membres, nous obtenons :

$$\begin{array}{rcl}\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}+\widehat{\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)}+\widehat{\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)} & = & \widehat{\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC}\right)}+\pi+\widehat{\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)}+\pi+\widehat{\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{BA}\right)}+\pi\,[2\pi]\\ & = & \widehat{\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BA}\right)}+3\pi\,[2\pi]\\ & = & \pi\,[2\pi]\end{array}$$

Ce que nous voulions

19.2.4 Quelques exercices

Exercice 1 :

Dans cet exercice, $\overrightarrow{P}$ est un plan vectoriel euclidien.

1. Soit $\varphi\in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$, c'est à dire que φ est une rotation de $\overrightarrow{P}$.

   Démontrer que, pour tout $\overrightarrow{u}\in\overrightarrow{P}$ et tout $\overrightarrow{v}\in\overrightarrow{P}$, nous avons $\widehat{(\varphi\left(\overrightarrow{u}\right),\varphi\left(\overrightarrow{v}\right))}=\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}$
2. Soit $\sigma\in O^-\left(\overrightarrow{P}\right)$, c'est à dire que, cette fois ci, σ est une symétrie orthogonale de $\overrightarrow{P}$.

   Démontrer que, pour tout $\overrightarrow{u}\in\overrightarrow{P}$ et tout $\overrightarrow{v}\in\overrightarrow{P}$, nous avons $\widehat{(\sigma\left(\overrightarrow{u}\right),\sigma\left(\overrightarrow{v}\right))}=-\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}$

Exercice 2 :

Dans cet exercice, $\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien.

1. Soit ABC un triangle rectangle en A et soit O le milieu de l'hypothénuse $[B,C]$. Démontrer que :

$$\widehat{\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)}=2\widehat{\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)}$$

2. Nous considérons 3 points A, B et C, 2 à 2 distincts appartenant à un même cercle Γ de centre O. Il faut démontrer que :

$$\widehat{\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)}=2\widehat{\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)}$$

Exercice 3 :

Le plan affine $\mathcal{P}$ est euclidien et rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. H est un point différent de O et nous notons :

$$d = OH \text{ et } \alpha = \widehat{\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OH}\right)}$$

Trouver une équation cartésienne de la droite passant par H et orthogonale à la droite (OH)

Exercice 4 :

Le plan affine $\mathcal{P}$ est euclidien et rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Soient $A \in \mathcal{P}$ et $A_1 \in \mathcal{P}$, 2 points dont les coordonnées sont $A = (-2, 0)$ et $A_1 = (1, 0)$

1. Quelle est l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 2 et du cercle $\mathcal{C}_1$ de centre A_1 et de rayon 1.
2. À tout point $M \in \mathcal{C}$, on associe le point $M_1 \in \mathcal{C}_1$ tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{A_1O}, \overrightarrow{A_1M_1}\right)} = -\widehat{\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}\right)}$ Exprimer les coordonnées ds points M et M_1 en fonction de la mesure α de l'angle $\widehat{\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}\right)}$
3. Ecrire l'équation cartésienne de la médiatrice du segment $[M, M_1]$.

19.3 Angles de droites

Les droites vectorielles sont des objets bien connus : ce sont les sous-espaces vectoriels de dimension 1 d'un plan vectoriel $\overrightarrow{P}$. Si $\overrightarrow{D} \subset \overrightarrow{P}$ est une droite vectorielle de $\overrightarrow{P}$ et $\{\overrightarrow{u}\}$ une base de $\overrightarrow{D}$, alors $\{-\overrightarrow{u}\}$ est aussi une base de $\overrightarrow{D}$.

19.3.1 Théorème

$\overrightarrow{P}$ désigne le plan vectoriel euclidien orienté par une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$
Soient $\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{D_1}$ 2 droites vectorielles de $\overrightarrow{P}$
→ Soit $\overrightarrow{i}$ un vecteur directeur (ou base) de $\overrightarrow{D}$
→ Soit $\overrightarrow{i}_1$ un vecteur directeur de $\overrightarrow{D}_1$
Alors, il existe 2 rotations vectorielles $R \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ et 2 seulement telles que $R\left(\overrightarrow{D}\right) = \overrightarrow{D}_1$
Si α est l'angle de la rotation R, alors l'autre rotation a pour angle $\alpha + \pi$

Démonstration

1. Il n'existe qu'une seule rotation $R \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ telle que $R\left(\overrightarrow{i}\right) = \overrightarrow{i}_1$. On démontre alors facilement que $R\left(\overrightarrow{D}\right) = \overrightarrow{D}_1$
2. Il n'existe aussi qu'une seule rotation $R' \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ telle que $R'\left(\overrightarrow{i}\right) = -\overrightarrow{i}_1$. On démontre alors facilement que $R\left(\overrightarrow{D}\right) = \overrightarrow{D}_1$
3. Une rotation transformant un vecteur unitaire en un autre vecteur unitaire, R et R' sont donc les seules rotations telles que $R\left(\overrightarrow{D}\right) = \overrightarrow{D}_1$
4. En dernier lieu, il est facile de voir que, pour tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D}$, $R'(\overrightarrow{u}) = -R(\overrightarrow{u}) = -\mathrm{Id}_{\overrightarrow{P}} \circ R(\overrightarrow{u})$
5. Ainsi, si α est l'angle de la rotation R, $\alpha + \pi$ est l'angle de la rotation R'

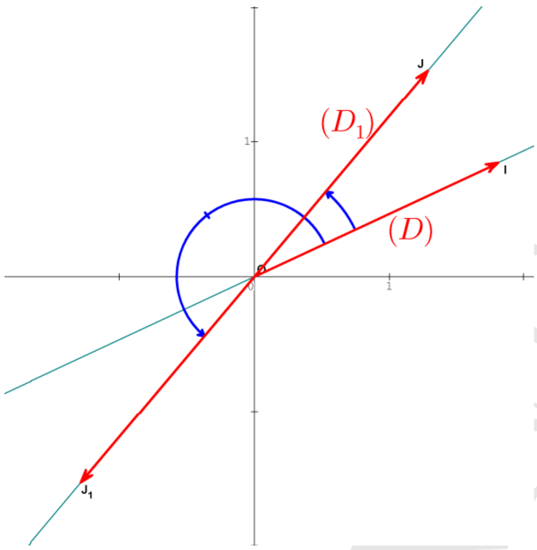


FIGURE 19.5 – Angles de droites : 2 rotations qui transforment une droite en une autre

19.3.2 Théorème

Soit $\overrightarrow{P}$ un plan vectoriel euclidien orienté par une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$
On appelle $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites vectorielles de $\overrightarrow{P}$. On considère la relation $\mathcal{R}_1$ suivante :

$$\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D}_1\right) \mathcal{R}_1 \left(\overrightarrow{\Delta}, \overrightarrow{\Delta_1}\right) \Longleftrightarrow \text{ il existe } R \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right) \text{ telle que } R\left(\overrightarrow{D}\right) = \overrightarrow{D}_1 \text{ et } R\left(\overrightarrow{\Delta}\right) = \overrightarrow{\Delta}_1$$

1. $\mathcal{R}_1$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ où $\mathcal{D}$ est l'ensemble des droites vectorielles de $\overrightarrow{P}$
2. L'ensemble des classes d'équivalence $\mathcal{D} \times \mathcal{D}/\mathcal{R}_1$ est l'ensemble des angles de droites
3. La classe d'équivalence d'un couple $\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D}_1\right)$ est notée $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D}_1\right)}$ et est appelée angle de $\overrightarrow{D}$ vers $\overrightarrow{D}_1$

Démonstration

1. Elle est évidemment **réflexive** et **symétrique**
2. **Montrons qu'elle est transitive**

   Soient 6 droites vectorielles $\overrightarrow{D_1}$, $\overrightarrow{D_2}$, $\overrightarrow{D_3}$, $\overrightarrow{D_4}$, $\overrightarrow{D_5}$ et $\overrightarrow{D_6}$ telles que :

   $$\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_2}\right) \mathcal{R}_1 \left(\overrightarrow{D_3}, \overrightarrow{D_4}\right) \text{ et } \left(\overrightarrow{D_3}, \overrightarrow{D_4}\right) \mathcal{R}_1 \left(\overrightarrow{D_5}, \overrightarrow{D_6}\right)$$

   Il existe donc une rotation $\varphi \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ telle que $\varphi\left(\overrightarrow{D_1}\right) = \overrightarrow{D_2}$ et $\varphi\left(\overrightarrow{D_3}\right) = \overrightarrow{D_4}$.
   De même, il existe une rotation $\psi \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ telle que $\psi\left(\overrightarrow{D_3}\right) = \overrightarrow{D_4}$ et $\psi\left(\overrightarrow{D_5}\right) = \overrightarrow{D_6}$
   De $\varphi\left(\overrightarrow{D_3}\right) = \overrightarrow{D_4}$ et $\psi\left(\overrightarrow{D_3}\right) = \overrightarrow{D_4}$, nous déduisons que $\varphi = \psi$ ou $\psi = -\mathrm{Id}_{\overrightarrow{P}} \circ \varphi$.
   Si $\varphi = \psi$, il n'y plus rien à prouver.
   Par contre, si $\psi = -\mathrm{Id}_{\overrightarrow{P}} \circ \varphi$, nous avons $\psi\left(\overrightarrow{D_1}\right) = -\mathrm{Id}_{\overrightarrow{P}} \circ \varphi\left(\overrightarrow{D_1}\right) = \overrightarrow{D_2}$
   Et donc, nous avons $\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_2}\right) \mathcal{R}_1 \left(\overrightarrow{D_5}, \overrightarrow{D_6}\right)$
   La relation $\mathcal{R}_1$ est donc transitive.

Remarque 11 :

1. L'angle nul

Soit $\overrightarrow{D} \subset \overrightarrow{P}$ une droite du plan. Les rotations vectorielles qui transforment $\overrightarrow{D}$ en elle-même sont $\mathrm{Id}_{\overrightarrow{P}}$ ou $-\mathrm{Id}_{\overrightarrow{P}}$ *(La rotation d'angle nul ou la rotation d'angle π)*. On appelle angle de droites nul l'angle de $\overrightarrow{D}$ vers $\overrightarrow{D}$. Ainsi :

$$\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} = 0 \iff \overrightarrow{D} = \overrightarrow{D_1}$$

2. L'angle droit

   Soient $\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{D_1}$ 2 droites orthogonales. Les rotations qui transforment $\overrightarrow{D}$ en $\overrightarrow{D_1}$ sont des rotations d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$

3. Dans le plan affine

   Soit $\mathcal{P}$ un plan affine de direction $\overrightarrow{P}$. Soient $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ et $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{P}$, 2 droites affines de $\mathcal{P}$ de direction respectives $\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{D_1}$

   On appelle angle des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_1$ l'angle $\widehat{(\mathcal{D}, \mathcal{D}_1)} = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)}$

4. Attention!!

   Soit $\mathcal{P}$ un plan affine de direction $\overrightarrow{P}$, $M \in \mathcal{P}$, $A \in \mathcal{P}$ et $B \in \mathcal{P}$.
   Il ne faut pas confondre :

   $\to$ $\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)}$ qui est un angle de vecteurs

   $\to$ Avec $\widehat{((MA), (MB))}$ qui est un angle de droites

5. Soient $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ et $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{P}$, 2 droites affines de $\mathcal{P}$ de direction respectives $\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{D_1}$. Alors :

   $\to$ $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}_1 \iff \overrightarrow{D} = \overrightarrow{D_1} \iff \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} = \widehat{(\mathcal{D}, \mathcal{D}_1)} = 0$

   $\to$ $\mathcal{D} \perp \mathcal{D}_1 \iff \overrightarrow{D} \perp \overrightarrow{D_1} \iff \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} = \widehat{(\mathcal{D}, \mathcal{D}_1)} = \dfrac{\pi}{2}$

19.3.3 Proposition

Soit $\overrightarrow{P}$ un plan vectoriel euclidien orienté par une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$
Alors, pour tout angle de droite $\widehat{\mathcal{A}}$, et toute droite vectorielle $\overrightarrow{D}$, il existe une et une seule droite $\overrightarrow{D_1}$ telle que $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} = \widehat{\mathcal{A}}$

Démonstration

Soit $\widehat{\mathcal{A}}$ un angle de droites et $\overrightarrow{D}$ une droite de $\overrightarrow{P}$.

- ⋆ Soient $\overrightarrow{\Delta}$ et $\overrightarrow{\Delta_1}$ deux droites telles que $\widehat{\left(\overrightarrow{\Delta}, \overrightarrow{\Delta_1}\right)} = \widehat{\mathcal{A}}$.
  Alors, il existe $\varphi \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ telle que $\varphi\left(\overrightarrow{\Delta}\right) = \overrightarrow{\Delta_1}$

  Posons $\overrightarrow{D_1} = \varphi\left(\overrightarrow{D}\right)$, alors $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{\Delta}, \overrightarrow{\Delta_1}\right)} = \widehat{\mathcal{A}}$

- ⋆ Réciproquement, soit $\overrightarrow{D_2} \in \overrightarrow{P}$, une droite vectorielle telle que $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_2}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)}$.
  Ceci veut donc dire que $\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_2}\right) \mathcal{R}_1 \left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)$.
  Il existe donc une rotation $R \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ telle que $R\left(\overrightarrow{D}\right) = \overrightarrow{D_1}$ et $R\left(\overrightarrow{D}\right) = \overrightarrow{D_2}$ et donc $\overrightarrow{D_1} = \overrightarrow{D_2}$
  Entre parenthèses, nous avons $R = \varphi$

Remarque 12 :

La proposition pourrait aussi s'énoncer comme ceci :

Pour tout angle de droite $\widehat{\mathcal{A}}$, et toute droite vectorielle $\overrightarrow{D}$, il existe une et une seule droite $\overrightarrow{D_1}$ telle que $\widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D}\right)} = \widehat{\mathcal{A}}$

Il suffit de prendre $\overrightarrow{D_1} = \varphi^{-1}\left(\overrightarrow{D}\right)$ et nous avons alors $\overrightarrow{D} = \varphi\left(\overrightarrow{D_1}\right)$

19.3.4 Somme des angles de droites

Soit $\overrightarrow{P}$ un plan vectoriel euclidien orienté par une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$
Soient $\widehat{\mathcal{A}}$ et $\widehat{\mathcal{A}_1}$ 2 angles de droites.
On appelle <u>somme des 2 angles</u> $\widehat{\mathcal{A}}$ et $\widehat{\mathcal{A}_1}$ l'angle de droites ainsi défini :

- ⋆ Pour toute droite vectorielle $\overrightarrow{D}$ il existe une droite vectorielle $\overrightarrow{D_1}$ telle que $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} = \widehat{\mathcal{A}}$
- ⋆ Il existe une seule droite vectorielle $\overrightarrow{D_2}$ telle que $\widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_2}\right)} = \widehat{\mathcal{A}_1}$

Alors, $\widehat{\mathcal{A}} + \widehat{\mathcal{A}_1} = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_2}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_2}\right)}$

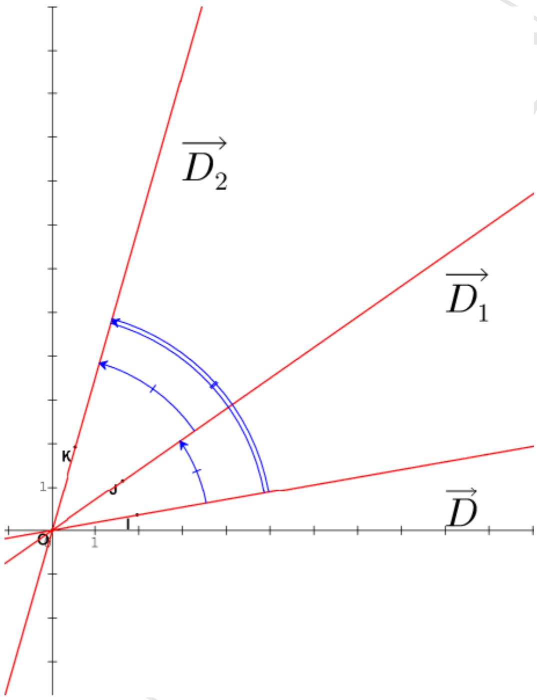


FIGURE 19.6 – Addition de 2 angles de droites

Remarque 13 :

1. Avec la relation $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_2}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_2}\right)}$, nous avons la relation de Chasles
2. L'addition est bien définie et ne dépend que des angles chosis et non des droites :

   <u>En effet :</u>
   → Soient 4 droites vectorielles $\overrightarrow{D}$, $\overrightarrow{D_1}$, $\overrightarrow{\Delta}$ et $\overrightarrow{\Delta_1}$ telles que :

$$\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} = \widehat{\mathcal{A}} = \widehat{\left(\overrightarrow{\Delta}, \overrightarrow{\Delta_1}\right)}$$

   Il existe une rotation $\varphi \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ telle que $\varphi\left(\overrightarrow{D}\right) = \overrightarrow{D_1}$ et $\varphi\left(\overrightarrow{\Delta}\right) = \overrightarrow{\Delta_1}$
   → Soient maintenant, 2 autres droites vectorielles $\overrightarrow{D_2}$ et $\overrightarrow{\Delta_2}$ telles que :

$$\widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_2}\right)} = \widehat{\mathcal{A}_1} = \widehat{\left(\overrightarrow{\Delta_1}, \overrightarrow{\Delta_2}\right)}$$

   Il existe aussi une rotation $\psi \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ telle que $\psi\left(\overrightarrow{D_1}\right) = \overrightarrow{D_2}$ et $\varphi\left(\overrightarrow{\Delta_1}\right) = \overrightarrow{\Delta_2}$

Ainsi, nous avons $\psi \circ \varphi\left(\overrightarrow{D}\right) = \overrightarrow{D_1}$ et $\psi \circ \varphi\left(\overrightarrow{\Delta}\right) = \overrightarrow{\Delta_1}$. Comme $\psi \circ \varphi \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$, nous avons $\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_2}\right) \mathcal{R}_1 \left(\overrightarrow{\Delta}, \overrightarrow{\Delta_2}\right)$, et donc

$$\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_2}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{\Delta}, \overrightarrow{\Delta_2}\right)}$$

3. Le problème est le même dans le plan affine $\mathcal{P}$ de direction $\overrightarrow{P}$

19.3.5 Théorème

L'addition des angles de droites confère à $\mathbb{A}$, l'ensemble des angles de droites, la structure de groupe abélien

Démonstration

1. **Associativité**
   Nous allons utiliser, larga manu, la relation de Chasles
   Soient $\widehat{\mathcal{A}}$, $\widehat{\mathcal{A}_1}$ et $\widehat{\mathcal{A}_2}$ 3 angles de $\mathbb{A}$.
   Soit $\overrightarrow{D}$ une droite vectorielle quelconque. Alors :
   $\Rightarrow$ Il existe une unique droite vectorielle $\overrightarrow{D_1}$ telle que $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} = \widehat{\mathcal{A}}$
   $\Rightarrow$ Il existe aussi une unique droite vectorielle $\overrightarrow{D_2}$ telle que $\widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_2}\right)} = \widehat{\mathcal{A}_1}$
   $\Rightarrow$ Et, pour terminer, il existe une unique droite vectorielle $\overrightarrow{D_2}$ telle que $\widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_2}\right)} = \widehat{\mathcal{A}_2}$
   Alors :
   $$\widehat{\mathcal{A}} + \left(\widehat{\mathcal{A}_1} + \widehat{\mathcal{A}_2}\right) = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} + \left(\widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_2}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{D_2}, \overrightarrow{D_3}\right)}\right) = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_3}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_3}\right)}$$
   Et
   $$\left(\widehat{\mathcal{A}} + \widehat{\mathcal{A}_1}\right) + \widehat{\mathcal{A}_2} = \left(\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_2}\right)}\right) + \widehat{\left(\overrightarrow{D_2}, \overrightarrow{D_3}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_2}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{D_2}, \overrightarrow{D_3}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_3}\right)}$$
   Donc $\widehat{\mathcal{A}} + \left(\widehat{\mathcal{A}_1} + \widehat{\mathcal{A}_2}\right) = \left(\widehat{\mathcal{A}} + \widehat{\mathcal{A}_1}\right) + \widehat{\mathcal{A}_2}$.
   Nous avons bien l'associativité
2. **Eléments neutres**
   Le neutre pour l'addition des angles de droites est bien l'angle $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D}\right)} = 0_{\mathbb{A}}$
3. **Existence de symétriques**
   Soit $\widehat{\mathcal{A}} \in \mathbb{A}$ un angle. Pour toute droite $\overrightarrow{D} \in \overrightarrow{P}$, il existe une droite $\overrightarrow{D_1}$ telle que $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} = \widehat{\mathcal{A}}$.
   En utilisant la relation de Chasles, nous avons $0_{\mathbb{A}} = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D}\right)}$.
   L'opposé de $\widehat{\mathcal{A}} \in \mathbb{A}$ est donc $\widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D}\right)} = -\widehat{\mathcal{A}}$
4. **Commutativité**
   Soient $\widehat{\mathcal{A}}$ et $\widehat{\mathcal{A}_1}$ 2 angles de $\mathbb{A}$. Il faut donc montrer que $\widehat{\mathcal{A}} + \widehat{\mathcal{A}_1} = \widehat{\mathcal{A}_1} + \widehat{\mathcal{A}}$
   $\Rightarrow$ Soient $\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{D_1}$, 2 droites vectorielles telles que $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} = \widehat{\mathcal{A}}$. Il existe une unique droite $\overrightarrow{D_2}$ telle que $\widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_2}\right)} = \widehat{\mathcal{A}_1}$. Alors
   $$\widehat{\mathcal{A}} + \widehat{\mathcal{A}_1} = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_2}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_2}\right)}$$
   $\Rightarrow$ Il existe maintenant une unique droite vectorielle $\overrightarrow{D_3}$ telle que $\widehat{\left(\overrightarrow{D_2}, \overrightarrow{D_3}\right)} = \widehat{\mathcal{A}}$. Et alors :
   $$\widehat{\mathcal{A}_1} + \widehat{\mathcal{A}} = \widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_2}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{D_2}, \overrightarrow{D_3}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_3}\right)}$$

$\Rightarrow$ Pour démontrer que $\widehat{\mathcal{A}}+\widehat{\mathcal{A}_1}=\widehat{\mathcal{A}_1}+\widehat{\mathcal{A}}$, il faut démontrer que $\widehat{\left(\overrightarrow{D},\overrightarrow{D_2}\right)}=\widehat{\left(\overrightarrow{D_1},\overrightarrow{D_3}\right)}$, autrement dit que

$$\left(\overrightarrow{D},\overrightarrow{D_2}\right)\mathcal{R}_1\left(\overrightarrow{D_1},\overrightarrow{D_3}\right)$$

- $\star$ Il existe une rotation $R\in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ telle que $R\left(\overrightarrow{D}\right)=\overrightarrow{D_1}$ et tel que $R\left(\overrightarrow{D_2}\right)=\overrightarrow{D_3}$
- $\star$ Et il existe aussi une autre rotation $S\in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ telle que $S\left(\overrightarrow{D_1}\right)=\overrightarrow{D_2}$
- $\star$ Donc, $S\circ R\left(\overrightarrow{D}\right)=S\left(\overrightarrow{D_1}\right)=\overrightarrow{D_2}$ et $R\circ S\left(\overrightarrow{D_1}\right)=R\left(\overrightarrow{D_2}\right)=\overrightarrow{D_3}$

  Comme la composition des rotations de $O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ est commutative, nous avons $R\circ S=S\circ R$, donc $S\circ R\left(\overrightarrow{D}\right)=\overrightarrow{D_2}$ et $S\circ R\left(\overrightarrow{D_1}\right)=\overrightarrow{D_3}$. D'où

$$\left(\overrightarrow{D},\overrightarrow{D_2}\right)\mathcal{R}_1\left(\overrightarrow{D_1},\overrightarrow{D_3}\right)$$

L'addition est donc commutative

Exercice 5 :

Soit $\overrightarrow{P}$ un plan vectoriel euclidien orienté par une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right\}$

1. Soient $\overrightarrow{D}$, $\overrightarrow{D_1}$, $\overrightarrow{\Delta}$ et $\overrightarrow{\Delta_1}$ 4 droites vectorielles. Démontrez l'équivalence suivante :

$$\widehat{\left(\overrightarrow{D},\overrightarrow{D_1}\right)}=\widehat{\left(\overrightarrow{\Delta},\overrightarrow{\Delta_1}\right)}\Longleftrightarrow\widehat{\left(\overrightarrow{D},\overrightarrow{\Delta}\right)}=\widehat{\left(\overrightarrow{D_1},\overrightarrow{\Delta_1}\right)}$$

2. En déduire que si $\overrightarrow{\Delta}\perp\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{\Delta_1}\perp\overrightarrow{D_1}$, nous avons alors $\widehat{\left(\overrightarrow{D},\overrightarrow{D_1}\right)}=\widehat{\left(\overrightarrow{\Delta},\overrightarrow{\Delta_1}\right)}$

19.3.6 Théorème

Soit $\overrightarrow{P}$ un plan vectoriel euclidien orienté.
On appelle $\mathbb{A}_{vect}$ le groupe des angles de vecteurs (ou des demi-droites vectorielles) et $\mathbb{A}_{droites}$ le groupe des angles de droites.
Soit $F:\mathbb{A}_{vect}\longrightarrow\mathbb{A}_{droites}$ une application ainsi définie :

$$\left\{\begin{array}{rcl} F:\mathbb{A}_{vect} & \longrightarrow & \mathbb{A}_{droites}\\ \widehat{\alpha} & \longmapsto & F\left(\widehat{\alpha}\right)=\widehat{\left(\overrightarrow{D},\overrightarrow{D_1}\right)}\end{array}\right.$$

Où $\overrightarrow{D_1}$ est l'image d'une droite $\overrightarrow{D}$ dans la rotation $R_{\widehat{\alpha}}$ d'angle $\widehat{\alpha}$, c'est à dire $\overrightarrow{D_1}=R_{\widehat{\alpha}}\left(\overrightarrow{D}\right)$.
Alors, F est un homomorphisme de groupe surjectif, de noyau $\{0_{\mathbb{A}_{vect}},\pi_{\mathbb{A}_{vect}}\}$ où $0_{\mathbb{A}_{vect}}$ est l'angle nul et $\pi_{\mathbb{A}_{vect}}$ l'angle plat

Démonstration

1. **F est un homomorphisme de groupe**

   Soient $\widehat{\alpha}\in\mathbb{A}_{vect}$ et $\widehat{\beta}\in\mathbb{A}_{vect}$

   $\rightarrow$ Soit $\overrightarrow{D}\in\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{D_1}=R_{\widehat{\alpha}}\left(\overrightarrow{D}\right)$ et donc $F\left(\widehat{\alpha}\right)=\widehat{\left(\overrightarrow{D},\overrightarrow{D_1}\right)}$

   Soit $\overrightarrow{D_2}\in\overrightarrow{P}$ tel que $\overrightarrow{D_2}=R_{\widehat{\beta}}\left(\overrightarrow{D_1}\right)$ et donc $F\left(\widehat{\beta}\right)=\widehat{\left(\overrightarrow{D_1},\overrightarrow{D_2}\right)}$

   Et donc : $F\left(\widehat{\alpha}\right)+F\left(\widehat{\beta}\right)=\widehat{\left(\overrightarrow{D},\overrightarrow{D_1}\right)}+\widehat{\left(\overrightarrow{D_1},\overrightarrow{D_2}\right)}=\widehat{\left(\overrightarrow{D},\overrightarrow{D_2}\right)}$

   $\rightarrow$ La rotation $R_{\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}}$ est $R_{\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}}=R_{\widehat{\alpha}}\circ R_{\widehat{\beta}}=R_{\widehat{\beta}}\circ R_{\widehat{\alpha}}$

   Et donc $R_{\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}}\left(\overrightarrow{D}\right)=R_{\widehat{\beta}}\circ R_{\widehat{\alpha}}\left(\overrightarrow{D}\right)=R_{\widehat{\beta}}\left(\overrightarrow{D_1}\right)=\overrightarrow{D_2}$

   Et donc $F\left(\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}\right)=\widehat{\left(\overrightarrow{D},\overrightarrow{D_2}\right)}$

   $\rightarrow$ D'où nous avons $F\left(\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}\right)=F\left(\widehat{\alpha}\right)+F\left(\widehat{\beta}\right)$

F est donc un homomorphisme de groupe

2. **Recherche du noyau de F**

Déterminer le noyau de F, c'est rechercher les angles $\widehat{\alpha} \in \mathbb{A}_{vect}$ tels que $F\left(\widehat{\alpha}\right) = \widehat{0}$ où $\widehat{0} \in \mathbb{A}_{droites}$

- ⋆ Soit donc $\widehat{\alpha} \in \ker F$; alors, si R_α est une rotation d'angle $\widehat{\alpha}$, pour toute droite $\overrightarrow{D} \in \overrightarrow{P}$, si $\overrightarrow{D_1} = R_\alpha\left(\overrightarrow{D}\right)$, alors $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} = 0$, c'est à dire $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{D_1}$
- ⋆ Il n'y a que 2 rotations qui conservent le droite $\overrightarrow{D}$, c'est $\mathrm{Id}_{\overrightarrow{P}}$ ou $-\mathrm{Id}_{\overrightarrow{P}}$ qui ont respectivement pour angle O et π

Donc, $\ker F = \{0_{\mathbb{A}_{vect}}, \pi_{\mathbb{A}_{vect}}\}$

3. **F est surjective**

Soit $\widehat{a} \in \mathbb{A}_{droites}$ un angle de droite et $\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{D_1}$ 2 droites telles que $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} = \widehat{a}$.

Soit $\overrightarrow{i}$ un vecteur unitaire de $\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{i_1}$ un vecteur unitaire de $\overrightarrow{D_1}$. Il existe une rotation R_α d'angle $\widehat{\alpha}$ telle que $R_\alpha\left(\overrightarrow{i}\right) = \overrightarrow{i_1}$ et nous avons donc $R_\alpha\left(\overrightarrow{D}\right) = \overrightarrow{D_1}$ et nous avons bien :

$$F\left(\widehat{\alpha}\right) = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} = \widehat{a}$$

F est donc surjective

19.3.7 Corollaire

Pour tout angle de droites $\widehat{a} \in \mathbb{A}_{droites}$, il existe 2 angles de demi-droites et 2 seulement dont l'image par F est $\widehat{a}$. Si $\widehat{\alpha}$ est l'un des angles tel que $F\left(\widehat{\alpha}\right) = \widehat{a}$, l'autre angle est $\widehat{\alpha} + \pi_{\mathbb{A}_{vect}}$

Démonstration

→ Pour commencer, on peut écrire qu'en regardant la démonstration de 19.3.6, le résultat n'est pas surprenant !!

→ Soit, maintenant, $\widehat{a} \in \mathbb{A}_{droites}$.
Alors, d'après 19.3.6 où on démontre que F est surjective, il existe $\widehat{\alpha} \in \mathbb{A}_{vect}$ tel que $F\left(\widehat{\alpha}\right) = \widehat{a}$.
Soit $\widehat{\beta} \in \mathbb{A}_{vect}$ un autre angle de vecteurs tels que $F\left(\widehat{\beta}\right) = \widehat{a}$, alors :

$$F\left(\widehat{\beta}\right) = F\left(\widehat{\alpha}\right) \Longleftrightarrow F\left(\widehat{\beta} - \widehat{\alpha}\right) = \widehat{0} \Longleftrightarrow \widehat{\beta} - \widehat{\alpha} \in \ker F$$

Dans ce cas, $\widehat{\beta} - \widehat{\alpha} = 0_{\mathbb{A}_{vect}}$ ou $\widehat{\beta} - \widehat{\alpha} = \pi_{\mathbb{A}_{vect}}$.
Ce que nous voulions

Remarque 14 :

En fait, en utilisant la théorie des groupes, nous avons $\mathbb{A}_{droites}$ qui est isomorphe au groupe quotient $\mathbb{A}_{vect}/\ker F$

19.3.8 Théorème

Soit $\overrightarrow{P}$ un plan vectoriel euclidien orienté.
On appelle $\mathbb{A}_{vect}$ le groupe des angles de vecteurs (ou des demi-droites vectorielles) et $\mathbb{A}_{droites}$ le groupe des angles de droites.
Soit $G : \mathbb{A}_{droites} \longrightarrow \mathbb{A}_{vect}$ une application ainsi définie :

$$\begin{cases} G : \mathbb{A}_{droites} & \longrightarrow & \mathbb{A}_{vect} \\ \qquad \widehat{a} & \longmapsto & G\left(\widehat{a}\right) = \widehat{\alpha} + \widehat{\alpha} \end{cases}$$

Où si $\widehat{a} = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)}$, $\overrightarrow{D_1}$ est l'image d'une droite $\overrightarrow{D}$ dans la rotation $R_{\widehat{\alpha}}$ d'angle $\widehat{\alpha}$, c'est à dire $\overrightarrow{D_1} = R_{\widehat{\alpha}}\left(\overrightarrow{D}\right)$.
Alors G est un isomorphisme de $\mathbb{A}_{droites}$ vers $\mathbb{A}_{vect}$

Démonstration

1. **G ne dépend que du choix de $\widehat{a}$**

   En effet, soient $\overrightarrow{D} \in \overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{D_1} \in \overrightarrow{P}$ 2 droites vectorielles telles que $\widehat{a} = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)}$.

   Il y a 2 rotations $R \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$ telles que $\overrightarrow{D_1} = R\left(\overrightarrow{D}\right)$

   Si $\widehat{\alpha}$ est l'angle de l'une des deux rotations, $\widehat{\beta} = \widehat{\alpha} + \pi_{\mathbb{A}_{vect}}$ est l'angle de l'autre, et nous avons :

$$G\left(\widehat{a}\right) = \widehat{\beta} + \widehat{\beta} = \left(\widehat{\alpha} + \pi_{\mathbb{A}_{vect}}\right) + \left(\widehat{\alpha} + \pi_{\mathbb{A}_{vect}}\right) = \widehat{\alpha} + \widehat{\alpha}$$

2. **G est un morphisme**

   Ce type de démonstration a déjà été faite. Nous la refaisons ; l'enseignement étant l'art de la répétition ! !

   $\Rightarrow$ Soient $\widehat{a} \in \mathbb{A}_{droites}$ et $\widehat{b} \in \mathbb{A}_{droites}$ 2 angles de droites ; il faut montrer que

$$G\left(\widehat{a} + \widehat{b}\right) = G\left(\widehat{a}\right) + G\left(\widehat{b}\right)$$

   $\Rightarrow$ Soient $\overrightarrow{D} \in \overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{D_1} \in \overrightarrow{P}$ 2 droites vectorielles telles que $\widehat{a} = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)}$ et $\widehat{\alpha}$ l'angle de la rotation R telle que $R\left(\overrightarrow{D}\right) = \overrightarrow{D_1}$. Alors, il est clair que $G\left(\widehat{a}\right) = \widehat{\alpha} + \widehat{\alpha}$

   $\Rightarrow$ Soit maintenant $\overrightarrow{D_2} \in \overrightarrow{P}$ une droite vectorielle telles que $\widehat{b} = \widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_2}\right)}$ et $\widehat{\beta}$ l'angle de la rotation S telle que $S\left(\overrightarrow{D_1}\right) = \overrightarrow{D_2}$. Nous avons alors $G\left(\widehat{b}\right) = \widehat{\beta} + \widehat{\beta}$

   $\Rightarrow$ Maintenant, $\widehat{a} + \widehat{b} = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D_2}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_2}\right)}$

   Nous avons, clairement, $S \circ R\left(\overrightarrow{D}\right) = \overrightarrow{D_2}$ et l'angle de la rotation $S \circ R$ est donné par $\widehat{\alpha} + \widehat{\beta}$ et donc $G\left(\widehat{a} + \widehat{b}\right) = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\alpha} + \widehat{\beta}$

   $\Rightarrow$ Nous tirons, de la commutativité de l'addition des angles :

$$G\left(\widehat{a}\right) + G\left(\widehat{b}\right) = \left(\widehat{\alpha} + \widehat{\alpha}\right) + \left(\widehat{\beta} + \widehat{\beta}\right) = \left(\widehat{\alpha} + \widehat{\beta}\right) + \left(\widehat{\alpha} + \widehat{\beta}\right) = G\left(\widehat{a} + \widehat{b}\right)$$

   G est bien un homomorphisme *(ou morphisme)* de groupe

3. **G est une bijection**

   $\Rightarrow$ G est injective

   Soit $\widehat{a} \in \ker G$; alors $G\left(\widehat{a}\right) = \widehat{\alpha} + \widehat{\alpha} = 0_{\mathbb{A}_{vect}}$, c'est à dire que nous avons $\widehat{\alpha} = 0_{\mathbb{A}_{vect}}$ ou $\widehat{\alpha} = \pi_{\mathbb{A}_{vect}}$

   Si $\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{D_1}$ sont 2 droites telles que $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)}$, $\widehat{\alpha}$ est l'angle de la rotation R qui transforme $\overrightarrow{D}$ en $\overrightarrow{D_1}$. Ainsi, si $\widehat{\alpha} = 0_{\mathbb{A}_{vect}}$ ou $\widehat{\alpha} = \pi_{\mathbb{A}_{vect}}$ nous avons $R\left(\overrightarrow{D}\right) = \overrightarrow{D} = \overrightarrow{D_1}$, et donc $\widehat{a} = 0_{\mathbb{A}_{vect}}$

   G est bien injective

   $\Rightarrow$ G est surjective

   Soit $\widehat{\alpha} \in \mathbb{A}_{vect}$.

   Il faut trouver $\widehat{a} \in \mathbb{A}_{vect}$ tel que $G\left(\widehat{a}\right) = \widehat{\alpha}$

   Soit $\widehat{\beta} \in \mathbb{A}_{vect}$ tel que $\widehat{\beta} + \widehat{\beta} = \widehat{\alpha}$; en fait, il y en a un autre : $\widehat{\alpha} + \pi_{\mathbb{A}_{vect}}$

   Soient R une rotation d'angle β et $\overrightarrow{D}$ une droite du plan.

   On appelle $\overrightarrow{D_1}$ la droite telle que $R\left(\overrightarrow{D}\right) = \overrightarrow{D_1}$ et $\widehat{a} = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)}$, nous avons :

$$G\left(\widehat{a}\right) = \widehat{\beta} + \widehat{\beta} = G\left(\widehat{a}\right) = \widehat{\alpha}$$

   G est donc surjective

   G est donc une bijection

G est bien un isomorphisme

19.3.9 Mesure d'un angle de droites

Ce petit sous-paragraphe est formel et théorique ; c'est pourtant le passage nécessaire vers la définition rigoureuse de la mesure des angles

1. Il est possible de définir une application $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{A}_{vect}$, homomorphisme de groupe surjectif de noyau $2\pi\mathbb{Z}$, définissant la mesure des angles de demi-droites *(ou de vecteurs)*
2. Nous avons défini en 19.3.6 un homomorphisme de groupes $F : \mathbb{A}_{vect} \longrightarrow \mathbb{A}_{droites}$, surjectif, liant les angles de droites et de demi-droites
3. Soit $\theta_1 = F \circ \theta$
   De par sa construction, θ_1 est un homomorphisme de groupe surjectif *(composé d'homomorphismes et de surjections)*

Définition

On dit qu'un nombre réel $x \in \mathbb{R}$ est la mesure d'un angle de droites $\widehat{a} \in \mathbb{A}_{droites}$ si et seulement si $\theta_1(x) = \widehat{a}$

19.3.10 Proposition

Soit $\overrightarrow{P}$ un plan vectoriel euclidien orienté.
Soit $\widehat{a} \in \mathbb{A}_{droites}$ un angle de droites. Nous posons :

$$\mu(\widehat{a}) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } \theta_1(x) = \widehat{a}\}$$

On dit que $\mu(\widehat{a})$ est la mesure de l'angle de droites $\widehat{a} \in \mathbb{A}_{droites}$. Alors :

$$\mu(\widehat{a}) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = x_0 + k\pi \text{ où } \theta_1(x_0) = \widehat{a}\}$$

Démonstration

Je pense que cela n'aura échappé à personne : $\mu(\widehat{a})$ *est un sous-ensemble dénombrable de* $\mathbb{R}$
Soit donc $\widehat{a} \in \mathbb{A}_{droites}$ un angle de droites.

1. **Tout d'abord, $\mu(\widehat{a}) \neq \emptyset$**
   En effet, par construction, θ_1 est un homomorphisme de groupe surjectif ; il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\theta_1(x_0) = \widehat{a}$ et donc $x_0 \in \mu(\widehat{a})$
2. **Soit $x_0 \in \mu(\widehat{a})$. Montrons que $x \in \mu(\widehat{a}) \Longleftrightarrow \theta_1(x) = \theta(x_0)$ ou $\theta(x) = \theta_1(x_0 + \pi)$**
   Si $x \in \mu(\widehat{a})$, alors $\theta_1(x) = \theta_1(x_0) = \widehat{a}$; la réciproque étant vraie, nous avons même

$$x \in \mu(\widehat{a}) \Longleftrightarrow \theta_1(x) = \theta_1(x_0)$$

   Or, $\theta_1(x) = \theta_1(x_0) \Longleftrightarrow F \circ \theta(x) = F \circ \theta(x_0) \Longleftrightarrow F[\theta(x)] = F[\theta(x_0)]$
   D'après le corollaire 19.3.7, nous avons $\theta(x_0) = \theta(x)$ ou $\theta(x) = \theta(x_0) + \pi_{\mathbb{A}_{vect}}$.
   Or, $\pi_{\mathbb{A}_{vect}} = \theta(\pi)$ et donc, de la propriété d'homomorphisme de groupe de θ, nous avons :

$$\theta(x_0) + \pi_{\mathbb{A}_{vect}} = \theta(x_0) + \theta(\pi) = \theta(x_0 + \pi)$$

3. **Montrons, maintenant, que**

$$\mu(\widehat{a}) = \{x \in \mathbb{R} \textbf{ tels que il existe } k \in \mathbb{Z} \textbf{ tel que } x = x_0 + k\pi \textbf{ où } \theta_1(x_0) = \widehat{a}\}$$

   Soit $x \in \mu(\widehat{a})$. Alors :
   ⋆ $\theta(x_0) = \theta(x) \Longleftrightarrow x = x_0 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
   ⋆ $\theta(x) = \theta_1(x_0 + \pi) \Longleftrightarrow x = x_0 + \pi + 2k\pi \Longleftrightarrow x = x_0 + (2k+1)\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
   C'est à dire que $x = x_0 + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Remarque 15 :

1. Si nous considérons, dans l'ensemble $\mathbb{R}$, la relation $\mathcal{S}$ définie par $x\mathcal{S}x' \Longleftrightarrow x - x' = k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence : c'est la relation de congruence modulo π.
   Pour tout $\widehat{a} \in \mathbb{A}_{droites}$, $\mu\left(\widehat{a}\right)$ est un élément de l'ensemble-quotient $\mathbb{R}/\mathcal{S}$
2. (a) Si $x \in \mathbb{R}$ est une mesure de l'angle de droites $\widehat{a}$ et $x' \in \mathbb{R}$ est une mesure de l'angle de droites $\widehat{b}$, alors $x + x'$ est une mesure de l'angle $\widehat{a} + \widehat{b}$ et $-x$ est la mesure de l'angle $-\widehat{a}$
   (b) 0 est une mesure de l'angle nul
   (c) $+\dfrac{\pi}{2}$ et $-\dfrac{\pi}{2}$ sont 2 mesures du même angle de droites droit.
3. Pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$ et pour toute droite vectorielle $\overrightarrow{D} \in \overrightarrow{P}$, il existe une droite $\overrightarrow{D_1} \in \overrightarrow{P}$ telle que $x \in \mu\left(\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)}\right)$
4. Pour tout couple de droites $\overrightarrow{D} \in \overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{D_1} \in \overrightarrow{P}$:
   - $\star$ $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{D_1} \Longleftrightarrow 0 \in \mu\left(\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)}\right)$
   - $\star$ $\overrightarrow{D} \perp \overrightarrow{D_1} \Longleftrightarrow +\dfrac{\pi}{2} \in \mu\left(\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)}\right)$
5. Soient $\overrightarrow{D} \in \overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{D_1} \in \overrightarrow{P}$ 2 droites vectorielles de base respectives $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u_1}$
   - $\star$ Si $x \in \mathbb{R}$ est une mesure de l'angle $\widehat{\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u_1}\right)}$, alors $x \in \mathbb{R}$ est aussi une mesure de l'angle de droites $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)}$
   - $\star$ Par contre, si $y \in \mathbb{R}$ est une mesure de l'angle $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)}$, y n'est pas forcément la mesure de l'angle $\widehat{\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u_1}\right)}$; c'est y ou $y + \pi$

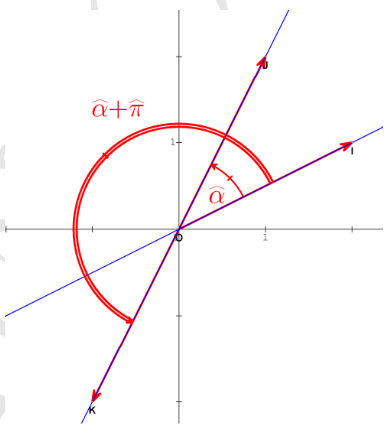


FIGURE 19.7 – Angles de droites

6. **<u>Dans le cas affine</u>**
   Soit $\mathcal{P}$ un plan affine de direction $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$
   (a) Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, pour toute droite affine $(D) \subset \mathcal{P}$, pour tout point $M_0 \in \mathcal{P}$, il existe une et une seule droite $(D_1) \subset \mathcal{P}$, contenant M_0 telle que $x \in \mu\left(\widehat{\left((D), (D_1)\right)}\right)$
   (b) Pour tout couple de droites affines $(D) \subset \mathcal{P}$ et $(D_1) \subset \mathcal{P}$
   - $\star$ $(D) \parallel (D_1) \Longleftrightarrow 0 \in \mu\left(\widehat{\left((D), (D_1)\right)}\right)$
   - $\star$ $(D) \perp (D_1) \Longleftrightarrow +\dfrac{\pi}{2} \in \mu\left(\widehat{\left((D), (D_1)\right)}\right)$

   (c) On appelle $(\Delta) = \left(O, \overrightarrow{i}\right)$ l'axe des abscisses. Soit (D) une droite quelconque.

Si $x \in \mathbb{R}$ est une mesure de l'angle $\widehat{((\Delta),(D))}$, $x+\pi$ est aussi une mesure de l'angle $\widehat{((\Delta),(D))}$.
Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur unitaire de (D), alors :

$$\overrightarrow{u} = \cos x\,\overrightarrow{i} + \sin x\,\overrightarrow{j} \text{ ou } \overrightarrow{u} = -\left(\cos x\,\overrightarrow{i} + \sin x\,\overrightarrow{j}\right)$$

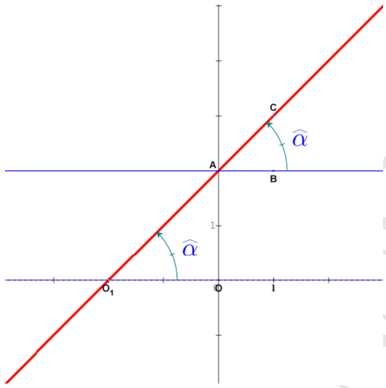


FIGURE 19.8 – Angles de droites affines où $x \in \mathbb{R}$ est une mesure de l'angle $\hat{\alpha}$

Exercice 6 :

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction $\overrightarrow{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Soit $(D) \subset \mathcal{P}$. On considère 2 points $A \in (D)$ et $A' \in (D)$ tels que $A \neq A'$. (D') est une droite passant par A' et orthogonale à (D).
A toute droite Δ passant par A, on associe une droite Δ' passant par A' telle que $\widehat{(\Delta,(D))} = \widehat{(\Delta',(D'))}$.
Il faut démontrer que Δ et Δ' sont orthogonales

19.4 Lieux géométriques définis par des relations angulaires

19.4.1 Théorème

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction $\overrightarrow{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Soient $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$, $M \in \mathcal{P}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\theta = \widehat{((MA),(MB))} \Longleftrightarrow \sin\theta\cos\left(\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)}\right) - \cos\theta\sin\left(\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)}\right) = 0$$

Démonstration

Remarquez que nous passons d'angles de droites à des angles de vecteurs (ou de demies droites)

1. Supposons que $\theta = \widehat{((MA),(MB))}$
   Intéressons nous alors aux angles de vecteurs.
   Alors $\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)} \equiv \theta\,[2\pi]$ ou $\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)} \equiv \theta + \pi\,[2\pi]$
   Et donc
   $$\cos\left(\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)}\right) = \cos\theta \text{ ou } \cos\left(\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)}\right) = \cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$$
   Et
   $$\sin\left(\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)}\right) = \sin\theta \text{ ou } \cos\left(\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)}\right) = \sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$$

Et, dans tous les cas, nous avons :

$$\sin\theta\cos\left(\widehat{\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)}\right)-\cos\theta\sin\left(\widehat{\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)}\right)=0$$

2. Réciproquement, supposons $\sin\theta\cos\left(\widehat{\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)}\right)-\cos\theta\sin\left(\widehat{\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)}\right)=0$

   On appelle θ_0 une mesure de l'angle de vecteurs $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)$, c'est à dire $\theta_0=\widehat{\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)}$.
   Alors, $\cos\theta_0=\cos\widehat{\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)}$ et $\sin\theta_0=\sin\widehat{\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)}$ et nous avons donc :

$$\sin\theta\cos\left(\widehat{\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)}\right)-\cos\theta\sin\left(\widehat{\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)}\right)=0\iff\sin\theta\cos\theta_0-\cos\theta\sin\theta_0=0$$

   Ce qui donne, par les formules d'addition $\sin(\theta-\theta_0)=0$, c'est à dire $\theta\equiv\theta_0\,[2\pi]$ ou $\theta\equiv\theta_0+\pi\,[2\pi]$, et donc, en synthèse, $\theta\equiv\theta_0\,[\pi]$
   Ainsi, θ_0 étant une mesure de l'angle de droites $((MA),(MB))$, $\theta+k\pi$ est aussi une mesure de l'angle de droites $((MA),(MB))$; et donc $\theta=\widehat{((MA),(MB))}$.

19.4.2 Théorème

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction $\overrightarrow{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.
Soient $A\in\mathcal{P}$, $B\in\mathcal{P}$ et $\theta\in\mathbb{R}$
On appelle Γ l'ensemble suivant : $\Gamma=\left\{M\in\mathcal{P}\text{ tels que }\widehat{((MA),(MB))}=\theta\right\}$

1. Si θ est un multiple de π, c'est à dire si $\theta=k\pi$ alors Γ est la droite (AB) privée des points A et B, c'est à dire : $\Gamma=(AB)\setminus\{A,B\}$
2. Si $\theta\neq k\pi$, alors il existe un cercle $\mathcal{C}$, passant par A et B tels que $\Gamma=\mathcal{C}\setminus\{A,B\}$

Démonstration

Soient donc $A\in\mathcal{P}$, $B\in\mathcal{P}$ et $\theta\in\mathbb{R}$.
Soit donc aussi $\Gamma=\left\{M\in\mathcal{P}\text{ tels que }\widehat{((MA),(MB))}=\theta\right\}$

1. L'étude faite en 19.4.1 montre que nous avons l'équivalence suivante :

$$M\in\Gamma\iff\sin\theta\cos\left(\widehat{\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)}\right)-\cos\theta\sin\left(\widehat{\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)}\right)=0\qquad(19.1)$$

2. Nous utilisons un nouveau repère $\mathcal{R}\left(\Omega,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$ de $\mathcal{P}$
   ⇒ Nous choisissons Ω comme le milieu du segment $[A;B]$
   ⇒ Nous choisons $\overrightarrow{e_1}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$
   ⇒ Et $\overrightarrow{e_2}$ est choisi de telle manière que le repère $\mathcal{R}\left(\Omega,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$ soit direct.
   Le tout est figuré dans la figure 19.9
   Si nous posons $AB=2a$, avec $a>0$, les coordonnées de A sont, par exemple $A=(-a,0)$ et celles de $B=(a,0)$
3. Pour tout point $M\in\mathcal{P}$ de coordonnées (x,y) et différent de A et B, c'est à dire $M\neq A$ et $M\neq B$, nous avons $\overrightarrow{MA}=\begin{pmatrix}-a-x\\-y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}=\begin{pmatrix}a-x\\-y\end{pmatrix}$; d'où :
   ⇒ $\cos\left(\widehat{\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)}\right)=\dfrac{\left\langle\overrightarrow{MA}\mid\overrightarrow{MB}\right\rangle}{\left\|\overrightarrow{MA}\right\|\left\|\overrightarrow{MB}\right\|}=\dfrac{x^2+y^2-a^2}{\left\|\overrightarrow{MA}\right\|\left\|\overrightarrow{MB}\right\|}$

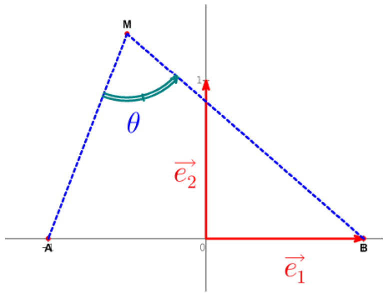


FIGURE 19.9 – Le schéma représentant le problème

$$\Rightarrow \sin\left(\widehat{\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)}\right)=\frac{\det\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)}{\left\|\overrightarrow{MA}\right\|\left\|\overrightarrow{MB}\right\|}=\frac{\begin{vmatrix}-a-x & a-x\\ -y & -y\end{vmatrix}}{\left\|\overrightarrow{MA}\right\|\left\|\overrightarrow{MB}\right\|}=\frac{2ay}{\left\|\overrightarrow{MA}\right\|\left\|\overrightarrow{MB}\right\|}$$

4. L'équivalence 19.1 s'écrit alors :

$$M\in\Gamma\iff\frac{\sin\theta\left(x^2+y^2-a^2\right)-2ay\cos\theta}{\left\|\overrightarrow{MA}\right\|\left\|\overrightarrow{MB}\right\|}$$

   Ou encore :

$$M\in\Gamma\iff\left\{\begin{array}{l}\sin\theta\left(x^2+y^2-a^2\right)-2ay\cos\theta=0\\ \text{Et } M\neq A \text{ et } M\neq B\end{array}\right.$$

5. Nous allons distinguer 2 cas :
   $\Rightarrow$ Si $\theta=k\pi$, alors $\sin\theta=0$ et $\cos\theta=(-1)^k$ et nous avons :

$$M\in\Gamma\iff 2ay=0 \text{ et } M\neq A \text{ et } M\neq B$$

   Γ est donc la droite (AB) privée des points A et B, c'est à dire : $\Gamma=(AB)\setminus\{A,B\}$
   $\Rightarrow$ Si $\theta\neq k\pi$, alors, $\sin k\pi\neq 0$ et nous avons :

$$\sin\theta\left(x^2+y^2-a^2\right)-2ay\cos\theta=0\iff x^2+y^2-2y\frac{a\cos\theta}{\sin\theta}=a^2$$

   D'où, nous avons toujours l'équivalence :

$$M\in\Gamma\iff x^2+y^2-2y\frac{a\cos\theta}{\sin\theta}=a^2 \text{ et } M\neq A \text{ et } M\neq B$$

   Or, en triturant un peu, nous obtenons :

$$x^2+y^2-2y\frac{a\cos\theta}{\sin\theta}=a^2\iff x^2+\left(y-\frac{a\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2=a^2+\frac{a^2\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{a^2}{\sin^2\theta}$$

   L'ensemble des points $M\in\mathcal{P}$ de coordonnées (x,y) vérifiant $x^2+\left(y-\frac{a\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2=\frac{a^2}{\sin^2\theta}$ est un cercle $\mathcal{C}$ de centre $C=\left(0,\frac{a\cos\theta}{\sin\theta}\right)$ et de rayon $R=\frac{a}{|\sin\theta|}$
   Ainsi $\Gamma=\mathcal{C}\setminus\{A,B\}$ *(cf figure 19.10)*

Remarque 16 :

L'ensemble des points $M\in\mathcal{P}$ tels que $\widehat{((MA),(MB))}=\frac{\pi}{2}$ est donc le cercle de centre $\Omega(0,0)$ et de rayon $R=a$.
C'est donc le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[A,B]$ sauf les points A et B

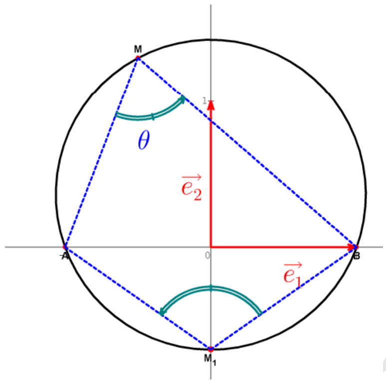


FIGURE 19.10 – L'ensemble Γ

19.4.3 Corollaire

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction $\overrightarrow{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Soient $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ et $\theta \in \mathbb{R}$
On appelle Γ_1 l'ensemble suivant : $\Gamma_1 = \left\{M \in \mathcal{P} \text{ tels que } \widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)} = \theta\right\}$

1. Si $\theta = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors Γ_1 est la droite (AB) privée du segment $[A;B]$, c'est à dire : $\Gamma_1 = (AB) \setminus [A, B]$
2. Si $\theta = (2k+1)\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$ alors Γ_1 est le segment $[A;B]$ privé des points A et B c'est à dire : $\Gamma_1 = [A, B] \setminus \{A, B\}$
3. Si $\theta \neq k\pi$, alors Γ_1 est un arc du cercle $\mathcal{C}$, passant par A et B privé de A et B

Démonstration

Nous allons ré-utiliser l'ensemble $\Gamma = \left\{M \in \mathcal{P} \text{ tels que } \widehat{((MA),(MB))} = \theta\right\}$, les résultats et les notations vus dans le théorème 19.4.2.

1. Tout d'abord, $\Gamma_1 \subset \Gamma$

   En effet, soit $M \in \Gamma_1$; alors $\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)} = \theta$ et donc $\widehat{((MA),(MB))} = \theta$, ce qui veut dire que $M \in \Gamma$.
   Donc $\Gamma_1 \subset \Gamma$
2. On suppose que $\theta = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
   Alors, d'après le théorème 19.4.2, Γ est la droite (AB) privée des points A et B. Ainsi,
   - ⋆ Si le point M est sur le segment $[A;B]$ privé des points A et B, alors $\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)} = 0\,[2\pi]$
   - ⋆ Et si $M \notin [A;B]$ alors $\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)} = \pi\,[2\pi]$

   Donc
   ⇒ Si $\theta = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors Γ_1 est la droite (AB) privée du segment $[A;B]$, c'est à dire : $\Gamma_1 = (AB) \setminus [A, B]$
   ⇒ Si $\theta = (2k+1)\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$ alors Γ_1 est le segment $[A;B]$ privé des points A et B c'est à dire : $\Gamma_1 = [A, B] \setminus \{A, B\}$
3. On suppose maintenant $\theta \neq k\pi$

   Alors, Γ est le cercle de centre $\Omega = \left(0, \dfrac{a\cos\theta}{\sin\theta}\right)$ et de rayon $R = \dfrac{a}{|\sin\theta|}$, passant par les points A et B, mais privé des points A et B
   - ⋆ Soit $M \in \Gamma_1$; alors $M \in \Gamma$ et $\sin\theta = \sin\left(\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)}\right) = \dfrac{\det\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)}{MA \times MB}$

Or, $\det\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = 2ay$ et nous avons donc $\dfrac{2ay}{MA \times MB} = \sin\theta$.

Comme $\dfrac{2a}{MA \times MB} > 0$, y et $\sin\theta$ sont de même signe, propriété que nous pouvons traduire par $y\sin\theta > 0$

⋆ Réciproquement, soit $M \in \mathcal{P}$ tel que $M \in \Gamma$ et $y\sin\theta > 0$

De $M \in \Gamma$, nous tirons $\widehat{((MA), (MB))} = \theta$, ce qui signifie que $\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)} = \theta$ ou $\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)} = \theta + \pi$

▷ Si $\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)} = \theta + \pi$, alors :

$$\sin\left(\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)}\right) = \frac{2ay}{MA \times MB} = \sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$$

Ce qui signifie, puisque $\dfrac{2a}{MA \times MB} > 0$, que y et $\sin\theta$ sont de signes contraires, ce qui est impossible.

▷ Donc, $\widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)} = \theta$, ce qui montre que $M \in \Gamma_1$ et que M parcourt l'arc de cercle de Γ tel que $y\sin\theta > 0$

19.4.4 Théorème

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction $\overrightarrow{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Soient $\Gamma \subset \mathcal{P}$ un cercle de rayon $R > 0$, $A \in \Gamma$, $B \in \Gamma$ tels que $A \neq B$
(T) est la tangente à Γ en A
Alors, pour tout point $M \in \mathcal{P}$ tel que $M \neq A$ et $M \neq B$

$$M \in \Gamma \iff \widehat{((MA), (MB))} = \widehat{((T), (AB))}$$

Démonstration

Nous considérons le cercle Γ, de centre I et passant par A et$B$

1. **Soit $M \in \Gamma$ tel que $M \neq A$ et $M \neq B$**
   On appelle (U) la médiatrice du segment $[A; M]$ et (V) la médiatrice du segment $[B; M]$. Alors, de $IM = IA = IB$, puisque I est le centre du cercle Γ, nous tirons que $I \in (U) \cap (V)$. Les 2 médiatrices passent donc par le centre I *(cf figure 19.11)*

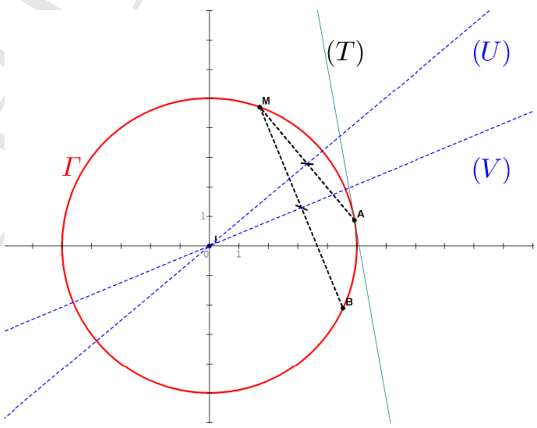


Figure 19.11 – Figure de l'énoncé du théorème

⇒ Nous avons, d'après la relation de Chasles :

$$\widehat{((MA), (MB))} = \widehat{((MA), (U))} + \widehat{((U), (V))} + \widehat{((V), (MB))}$$

Comme (U) est la médiatrice du segment $[A;M]$, alors $\widehat{((MA),(U))} = \dfrac{\pi}{2}$, et, pour les mêmes raisons, comme (V) est la médiatrice du segment $[B;M]$, nous avons $\widehat{((MB),(V))} = \dfrac{\pi}{2}$, et donc, en termes d'angles de droites :

$$\widehat{((MA),(MB))} = \frac{\pi}{2} + \widehat{((U),(V))} + \frac{\pi}{2} = \widehat{((U),(V))}$$

$\Rightarrow$ Soient $S_{(U)}$ la symétrie orthogonale par rapport à la droite (U), $S_{(V)}$ la symétrie orthogonale par rapport à la droite (V) et $\rho = S_{(V)} \circ S_{(U)}$

ρ est une rotation d'angle 2β où β est l'angle de droites $\beta = \widehat{((U),(V))}$

Ainsi $\widehat{((MA),(MB))} = \widehat{((U),(V))} = \beta$

$\Rightarrow$ Soit (Δ) la médiatrice du segment $[A;B]$

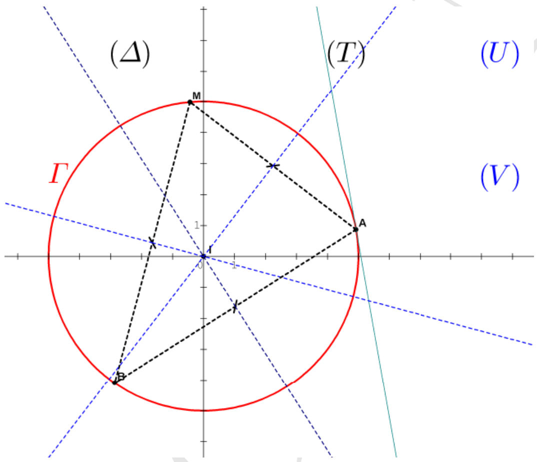


Figure 19.12 – Figure de l'énoncé du théorème

- ⋆ Nous avons aussi $\rho = S_{(\Delta)} \circ S_{(AI)}$

  En effet, nous asavons que $S_{(\Delta)} \circ S_{(AI)}$ est une rotation de centre I, puisque $(\Delta) \cap (AI) = \{I\}$.

  D'autre part, $S_{(\Delta)} \circ S_{(AI)}(A) = S_{(\Delta)}(A) = B$

  $S_{(\Delta)} \circ S_{(AI)}$ est donc une rotation de centre I qui transforme A en B

  De là, nous déduisons que $\widehat{((AI),(\Delta))} = \widehat{((U),(V))} = \widehat{((MA),(MB))}$

- ⋆ En suite, nous avons $\widehat{((T),(AB))} = \widehat{((AI),(\Delta))}$

  En effet, en utilisant la relation de Chasles :

$$\widehat{((T),(AB))} = \widehat{((T),(AI))} + \widehat{((AI),(\Delta))} + \widehat{((\Delta),(AB))}$$

  (T) étant une tangente au cercle Γ et le segment $[A;I]$ étant un rayon du cercle Γ, nous avons $\widehat{((T),(AI))} = \dfrac{\pi}{2}$

  De plus, par définition de ce qu'est une médiatrice, nous avons $\widehat{((\Delta),(AB))} = \dfrac{\pi}{2}$.

  D'où :

$$\widehat{((T),(AB))} = \frac{\pi}{2} + \widehat{((AI),(\Delta))} + \frac{\pi}{2} = \pi + \widehat{((AI),(\Delta))} = \widehat{((AI),(\Delta))}$$

- ⋆ Nous concluons que $\widehat{((T),(AB))} = \widehat{((AI),(\Delta))} = \widehat{((MA),(MB))}$

D'où, si $M \in \Gamma$, alors $\widehat{((MA),(MB))} = \widehat{((T),(AB))}$

2. **Réciproquement, soit $M \in \mathcal{P}$ tel que** $(\widehat{(MA),(MB)}) = (\widehat{(T),(AB)})$
   Montrons que $M \in \Gamma$.
   $\Rightarrow$ Supposons que La droite (MA) soit tangente à Γ en A ; alors $(MA) = (T)$, de telle sorte que :
   $$(\widehat{(MA),(MB)}) = (\widehat{(T),(MB)}) = (\widehat{(T),(AB)})$$
   De là, nous tirons que $(\widehat{(MB),(AB)}) = (\widehat{(MB),(T)}) + (\widehat{(T),(AB)}) = 0$, ce qui veut dire que les droites (MB) et (AB) sont parallèles *(ou ont même direction)* et ont un point commun B, et donc les droites (MB) et (AB) sont confondues et donc $M = A$, ce qui est impossible
   $\Rightarrow$ Supposons, maintenant que la droite (MA) ne soit pas tangente à Γ en A.

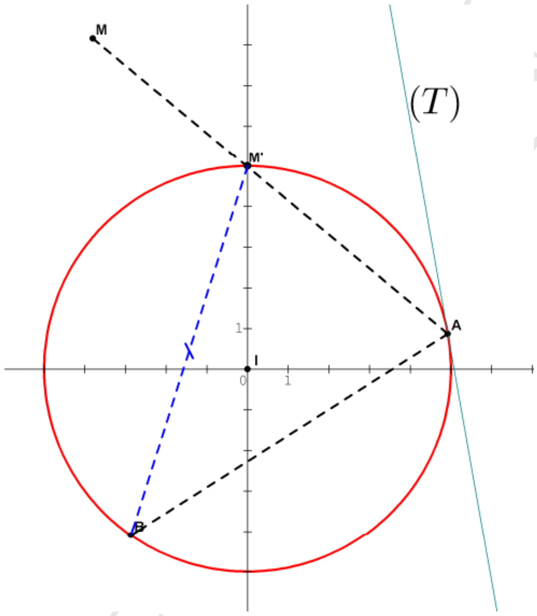


FIGURE 19.13 – Figure de l'énoncé du théorème

   Alors, la droite (MA) coupe le cercle Γ en M', distinct de A et distinct de B
   Nous avons, effectivement $M' \neq B$ puisque, si $M' = B$, alors
   $$(\widehat{(MA),(MB)}) = (\widehat{(MA),(MM')}) = \pi$$
   Et de l'hypothèse $(\widehat{(MA),(MB)}) = (\widehat{(T),(AB)})$, nous tirons $(\widehat{(T),(AB)}) = \pi$ et donc $(T) = (AB)$; il y a donc contradiction.
   D'après ce que nous venons de montrer dans la première parte de cette démonstration, nous avons $(\widehat{(M'A),(M'B)}) = (\widehat{(T),(AB)})$ et donc, de $(\widehat{(MA),(MB)}) = (\widehat{(T),(AB)}) = (\widehat{(M'A),(M'B)})$, nous avons $(\widehat{(M'A),(M'B)}) = (\widehat{(MA),(MB)})$
   $\Rightarrow$ Ainsi, nous pouvons écrire :
   $$\begin{aligned}(\widehat{(MB),(M'B)}) &= (\widehat{(MB),(MA)}) + (\widehat{(MA),(M'B)}) \\ &= (\widehat{(M'B),(M'A)}) + (\widehat{(M'A),(M'B)}) \\ &= 0\end{aligned}$$
   Ce qui veut dire que $(M'B) = (MB)$, et donc que $M = M'$ et $M \in \Gamma$

Remarque 17 :

Etant donnés 3 point sA, B et C non alignés d'un plan $\mathcal{P}$ euclidien ; il n'existe qu'un seul cercle $\mathcal{C}$ passant A, B et C ; c'est le cerrcle circonscrit au triangle ABC donc le centr eest le point de rencontre de smédiatrices des segments $[A, B]$ et $[A, C]$

19.4.5 Théorème

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction $\overrightarrow{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Soient $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ et $C \in \mathcal{P}$ 3 points du plan non alignés.
L'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ qui appartiennent au cecle circonscrit au triangle ABC, est l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que

$$\left(\widehat{(MA), (MB)}\right) = \left(\widehat{(CA), (CB)}\right)$$

Démonstration

Soient A, B et C, 3 points non alignés du plan $\mathcal{P}$ et Γ le cercle circonscrit au triangle ABC.
Si nous appelons $\theta = \left(\widehat{(CA), (CB)}\right)$, et nous avons $\theta \neq k\pi$ puisque A, B et C ne sont pas alignés.
L'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $\left(\widehat{(MA), (MB)}\right) = \theta$ est un cercle passant par A et B. $\left(\widehat{(MA), (MB)}\right) = \theta \Longleftrightarrow \left(\widehat{(MA), (MB)}\right) = \left(\widehat{(CA), (CB)}\right)$ est donc le cercle Γ

19.4.6 Théorème

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction $\overrightarrow{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Soient $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$, $C \in \mathcal{P}$ et $D \in \mathcal{P}$ 4 points du plan 2 à 2 distincts.
Les points $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$, $C \in \mathcal{P}$ et $D \in \mathcal{P}$ sont alignés ou cocycliques si et seulement si

$$\left(\widehat{(DA), (DB)}\right) = \left(\widehat{(CA), (CB)}\right)$$

Démonstration

1. **Supposons les points $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$, $C \in \mathcal{P}$ et $D \in \mathcal{P}$ alignés ou cocycliques**
   $\Rightarrow$ Supposons les points $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$, $C \in \mathcal{P}$ et $D \in \mathcal{P}$ alignés.
   Alors nous avons $\left(\widehat{(DA), (DB)}\right) = 0$ et $\left(\widehat{(CA), (CB)}\right) = 0$
   Et nous avons bien $\left(\widehat{(DA), (DB)}\right) = \left(\widehat{(CA), (CB)}\right)$
   $\Rightarrow$ Supposons, maintenant les points $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$, $C \in \mathcal{P}$ et $D \in \mathcal{P}$ cocycliques, c'est à dire qu'ils appartiennent à un même cercle Γ. Ce cercle contenant les points A, B et C est l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $\left(\widehat{(MA), (MB)}\right) = \left(\widehat{(CA), (CB)}\right)$.
   Comme le point D est sur le cercle Γ, nous avons aussi $\left(\widehat{(DA), (DB)}\right) = \left(\widehat{(CA), (CB)}\right)$
2. **Réciproquement, supposons que nous avons $\left(\widehat{(DA), (DB)}\right) = \left(\widehat{(CA), (CB)}\right)$**
   $\Rightarrow$ Si les points A, B et C sont alignés, alors $\left(\widehat{(CA), (CB)}\right) = 0$, et donc $\left(\widehat{(DA), (DB)}\right) = 0$, ce qui veut dire que les points A, D et B sont alignés, et donc les points A, B, C et D sont alignés
   $\Rightarrow$ Si les points A, B et C ne sont pas alignés, alors, ils appartiennent à Γ, cercle circonscrit au triangle ABC, et ce cercle Γ, est l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $\left(\widehat{(MA), (MB)}\right) = \left(\widehat{(CA), (CB)}\right)$
   $\Rightarrow$ De la relation $\left(\widehat{(DA), (DB)}\right) = \left(\widehat{(CA), (CB)}\right)$, nous en déduisons que $D \in \Gamma$
   Les points $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$, $C \in \mathcal{P}$ et $D \in \mathcal{P}$ sont donc cocycliques

19.5 Quelques exercices corrigés

Exercice 1 :

Dans cet exercice, $\overrightarrow{P}$ est un plan vectoriel euclidien.

1. *Soit $\varphi \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$, c'est à dire que φ est une rotation de $\overrightarrow{P}$.*

   Démontrer que, pour tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{P}$ et tout $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{P}$, nous avons $\widehat{(\varphi(\overrightarrow{u}), \varphi(\overrightarrow{v}))} = \widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$

   Par définition d'une rotation $\varphi \in O^+\left(\overrightarrow{P}\right)$, nous avons, pour tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{P}$ et tout $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{P}$ $\widehat{(\overrightarrow{u}, \varphi(\overrightarrow{u}))} = \widehat{(\overrightarrow{v}, \varphi(\overrightarrow{v}))}$
   En utilisant la relation de Chasles, nous avons :

   $$\widehat{(\varphi(\overrightarrow{u}), \varphi(\overrightarrow{v}))} = \widehat{(\varphi(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{u})} + \widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})} + \widehat{(\overrightarrow{v}, \varphi(\overrightarrow{v}))} = \widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$$

2. *Soit $\sigma \in O^-\left(\overrightarrow{P}\right)$, c'est à dire que, cette fois ci, σ est une symétrie orthogonale de $\overrightarrow{P}$.*

   Démontrer que, pour tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{P}$ et tout $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{P}$, nous avons $\widehat{(\sigma(\overrightarrow{u}), \sigma(\overrightarrow{v}))} = -\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$

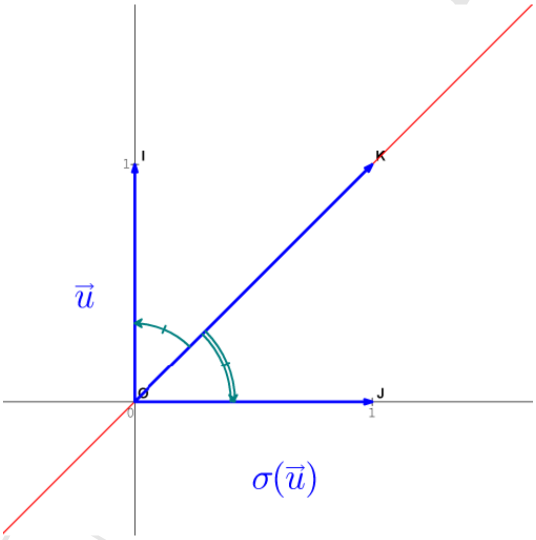


FIGURE 19.14 – Figure de l'exercice

Soit $\sigma \in O^-\left(\overrightarrow{P}\right)$ une symétrie orthogonale de $\overrightarrow{P}$, $\overrightarrow{d}$ la droite vectorielle qui est l'axe de symétrie et $\overrightarrow{i}_{\overrightarrow{d}}$ un vecteur unitaire, base de $\overrightarrow{d}$.

Par définition d'une symétrie orthogonale, nous avons $\widehat{\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{i}_{\overrightarrow{d}}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{i}_{\overrightarrow{d}}, \sigma(\overrightarrow{u})\right)}$
Ainsi :

$$\begin{aligned}
\widehat{(\sigma(\overrightarrow{u}), \sigma(\overrightarrow{v}))} &= \widehat{\left(\sigma(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{i}_{\overrightarrow{d}}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{i}_{\overrightarrow{d}}, \overrightarrow{u}\right)} + \widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})} + \widehat{\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{i}_{\overrightarrow{d}}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{i}_{\overrightarrow{d}}, \sigma(\overrightarrow{v})\right)} \\
&= 2\widehat{\left(\overrightarrow{i}_{\overrightarrow{d}}, \overrightarrow{u}\right)} + \widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})} + 2\widehat{\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{i}_{\overrightarrow{d}}\right)} \\
&= 2\widehat{(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})} + \widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})} \\
&= \widehat{(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})} = -\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\widehat{(\sigma(\overrightarrow{u}), \sigma(\overrightarrow{v}))} = -\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$
Ce que nous voulions

Exercice 2 :

Dans cet exercice, $\overrightarrow{P}$ est un plan vectoriel euclidien.

1. *Soit ABC un triangle rectangle en A et soit O le milieu de l'hypothénuse $[B, C]$. Démontrer que :*

$$\widehat{\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)} = 2\widehat{\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)}$$

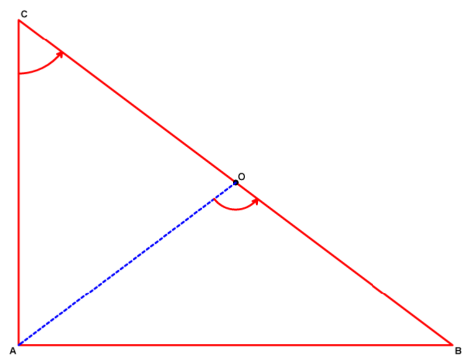


FIGURE 19.15 – Figure de l'exercice

Le point O, milieu de l'hypothénuse, est le centre du cercle circonscrit et les triangles OCA et OAB sont isocèles en O.
Nous avons donc $\widehat{\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC}\right)}$.
Donc :

$$\widehat{\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC}\right)} = 2\widehat{\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)}$$

Ce que nous voulions.

2. *Nous considérons 3 points A, B et C, 2 à 2 distincts appartenant à un même cercle Γ de centre O. Il faut démontrer que :*

$$\widehat{\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)} = 2\widehat{\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)}$$

Nous appelons C' le symétrique de C par rapport à O *(cf figure 19.16)*. Alors :
- ⋆ $C' \in \Gamma$ et $[CC'']$ est un diamètre de Γ
- ⋆ Les triangles $CC'A$ et CBC' sont rectangles et O apparaît comme le centre du cercle circonscrit à ces 2 triangles

D'après la question précédente, nous avons $\widehat{\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC'}\right)} = 2\widehat{\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CC'}\right)}$ et $\widehat{\left(\overrightarrow{OC'}, \overrightarrow{OB}\right)} = 2\widehat{\left(\overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{CB}\right)}$, ce qui fait qu'en additionnant membres à membres :

$$\widehat{\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC'}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{OC'}, \overrightarrow{OB}\right)} = 2\widehat{\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CC'}\right)} + 2\widehat{\left(\overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{CB}\right)} \Longleftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)} = 2\widehat{\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)}$$

Exercice 3 :

Le plan affine $\mathcal{P}$ est euclidien et rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. H est un point différent de O et nous notons :

$$d = OH \text{ et } \alpha = \widehat{\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OH}\right)}$$

Trouver une équation cartésienne de la droite passant par H et orthogonale à la droite (OH)

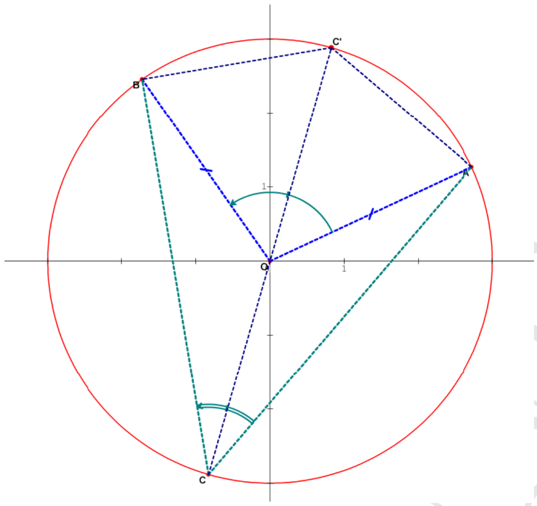


FIGURE 19.16 – Figure de l'exercice

Voilà une question qui pose peu de difficulté.
Tout d'abord, $\overrightarrow{OH} = d\cos\alpha\,\overrightarrow{i} + d\sin\alpha\,\overrightarrow{j}$ et les points $M \in \mathcal{P}$ qui se situent sur a droite passant par H et orthogonale à la droite (OH) vérifient la relation :

$$\left\langle \overrightarrow{MH} \mid \overrightarrow{OH} \right\rangle = 0$$

Or, si $M = (x, y)$, nous avons $\overrightarrow{MH} = \begin{pmatrix} d\cos\alpha - x \\ d\sin\alpha - y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{oH} = \begin{pmatrix} d\cos\alpha \\ d\sin\alpha \end{pmatrix}$, de telle sorte que :

$$\left\langle \overrightarrow{MH} \mid \overrightarrow{OH} \right\rangle = d^2\cos^2\alpha - d\cos\alpha x + d^2\sin^2\alpha - d\sin\alpha y = 0 \Longleftrightarrow \cos\alpha x + \sin\alpha y - d = 0$$

Une équation cartésienne est donc : $\cos\alpha x + \sin\alpha y - d = 0$

Exercice 4 :

Le plan affine $\mathcal{P}$ est euclidien et rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Soient $A \in \mathcal{P}$ et $A_1 \in \mathcal{P}$, 2 points dont les coordonnées sont $A = (-2, 0)$ et $A_1 = (1, 0)$

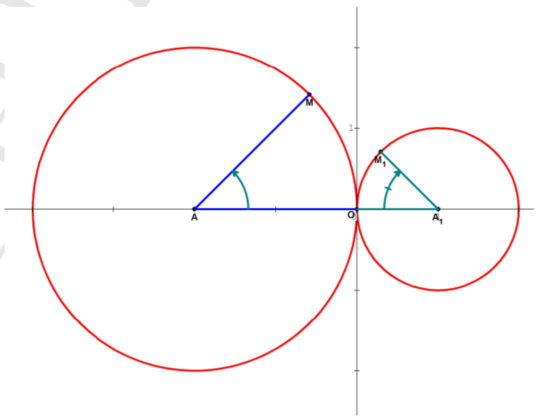


FIGURE 19.17 – Figure de l'exercice

1. *Quelle est l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 2 et du cercle $\mathcal{C}_1$ de centre A_1 et de rayon 1.*

   Voilà une question facile ! !

→ Pour le cercle $\mathcal{C}$, c'est $(x+2)^2 + y^2 = 4$
→ Pour le cercle $\mathcal{C}_1$, c'est $(x-1)^2 + y^2 = 1$

2. *À tout point $M \in \mathcal{C}$, on associe le point $M_1 \in \mathcal{C}_1$ tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{A_1O}, \overrightarrow{A_1M_1}\right)} = -\widehat{\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}\right)}$ Exprimer les coordonnées ds points M et M_1 en fonction de la mesure α de l'angle $\widehat{\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}\right)}$*

→ Pour commencer, nous avons $\overrightarrow{AM} = 2\cos\alpha\,\overrightarrow{i} + 2\sin\alpha\,\overrightarrow{j}$, d'où nous obtenons, au niveau des coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x+2 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\alpha \\ 2\sin\alpha \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = & -2 + 2\cos\alpha \\ y = & 2\sin\alpha \end{cases}$$

Et donc $M = (-2 + 2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$

→ Ensuite, nous avons $\overrightarrow{A_1M_1} = \cos(\pi+\alpha)\,\overrightarrow{i} + \sin(\pi+\alpha)\,\overrightarrow{j} = -\cos\alpha\,\overrightarrow{i} - \sin\alpha\,\overrightarrow{j}$, d'où nous obtenons, au niveau des coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = & 1 - \cos\alpha \\ y = & -\sin\alpha \end{cases}$$

Et donc $M_1 = (1 - \cos\alpha, -\sin\alpha)$

3. *Ecrire l'équation cartésienne de la médiatrice du segment $[M, M_1]$.*

Ce n'est pas très difficile!!. C'est la droite qui passe par le milieu I du segment $[M, M_1]$ et qui est orthogonale au vecteur $\overrightarrow{MM_1}$

⇒ Le milieu I du segment $[M, M_1]$ a pour coordonnées $I = \left(\dfrac{-1+\cos\alpha}{2}, \dfrac{\sin\alpha}{2}\right)$

⇒ Le vecteur $\overrightarrow{MM_1}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{MM_1} = \begin{pmatrix} 3 - 3\cos\alpha \\ -3\sin\alpha \end{pmatrix}$

⇒ $X \in \mathcal{P}$ est un point de la médiatrice du segment $[M, M_1]$ si et seulement si $\left\langle \overrightarrow{IX} \mid \overrightarrow{MM_1} \right\rangle = 0$, c'est à dire si et seulement si :

$$\left(x - \frac{-1+\cos\alpha}{2}\right)(3 - 3\cos\alpha) + \left(y - \frac{\sin\alpha}{2}\right)(3\sin\alpha) = 0$$
$$\iff$$
$$(1-\cos\alpha)(2x + (1-\cos\alpha)) + \sin\alpha\,(2y - \sin\alpha) = 0$$

Exercice 5 :

Soit $\overrightarrow{P}$ un plan vectoriel euclidien orienté par une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$

1. *Soient $\overrightarrow{D}$, $\overrightarrow{D_1}$, $\overrightarrow{\Delta}$ et $\overrightarrow{\Delta_1}$ 4 droites vectorielles. Démontrez l'équivalence suivante :*

$$\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{\Delta}, \overrightarrow{\Delta_1}\right)} \iff \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{\Delta}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{\Delta_1}\right)}$$

Voir figure 19.18

Il n'y a pas de grosses difficultés; il suffit d'utiliser la relation de Chasles.

Supposons donc que $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{\Delta}, \overrightarrow{\Delta_1}\right)}$, alors :

$$\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{\Delta}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{\Delta_1}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{\Delta_1}, \overrightarrow{\Delta}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{\Delta_1}\right)}$$

Car, par hypothèses, $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{\Delta_1}, \overrightarrow{\Delta}\right)} = 0_{\mathbb{A}}$

2. *En déduire que si $\overrightarrow{\Delta} \perp \overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{\Delta_1} \perp \overrightarrow{D_1}$, nous avons alors $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{\Delta}, \overrightarrow{\Delta_1}\right)}$*

IL n'y a pas grande difficulté. c'est l'application simple de la question précédente!!

Nous avons $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{\Delta}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{\Delta_1}\right)} = \dfrac{\pi}{2}$ et donc $\widehat{\left(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D_1}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{\Delta}, \overrightarrow{\Delta_1}\right)}$

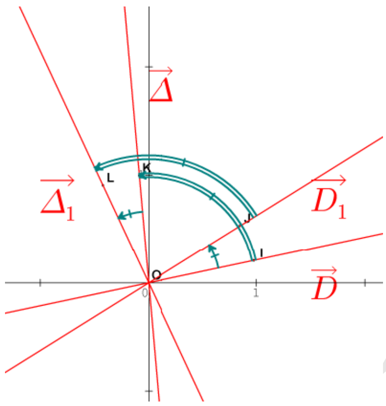


FIGURE 19.18 – Figure de l'exercice

Exercice 6 :

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction $\overrightarrow{P}$ rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Soit $(D) \subset \mathcal{P}$. On considère 2 points $A \in (D)$ et $A' \in (D)$ tels que $A \neq A'$. (D') est une droite passant par A' et orthogonale à (D).

A toute droite Δ passant par A, on associe une droite Δ' passant par A' telle que $\widehat{(\Delta, (D))} = \widehat{(\Delta', (D'))}$.
Il faut démontrer que Δ et Δ' sont orthogonales

Pas très difficile ; il suffit d'utiliser la relation de Chasles
Nous avons $\widehat{(\Delta, \Delta')} = \widehat{(\Delta, (D))} + \widehat{((D), (D'))} + \widehat{((D'), \Delta')}$
Comme $\widehat{(\Delta, (D))} + \widehat{((D'), \Delta')} = 0$ et que $\widehat{((D), (D'))} = \dfrac{\pi}{2}$, nous avons $\widehat{(\Delta, \Delta')} = \dfrac{\pi}{2}$
Ce qui montre que les 2 droites Δ et Δ' sont orthogonales

Chapitre 20

Orientation de l'espace
Produit vectoriel

20.1 Orientation de l'espace

20.1.1 Définition et théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 et $\mathcal{B}$ l'ensemble des bases orthonormées de E
On définit dans $\mathcal{B}$ la relation $\mathcal{R}$ suivante par :

$$(\forall B \in \mathcal{B})\,(\forall B' \in \mathcal{B})\,(B\mathcal{R}B') \iff \left(\exists R \in \mathcal{O}^+(E)\right) \text{ tel que } \left(B' = R(B)\right)$$

Alors :

1. $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{B}$
2. L'ensemble des classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$, noté $\mathcal{B}/\mathcal{R}$ n'a que deux éléments.
3. Orienter le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, c'est choisir arbitrairement un élément $\dot{B}_0 \in \mathcal{B}/\mathcal{R}$. Tous les éléments de $\dot{B}_0$ sont appelés bases orthonormées directes (ou positives)
4. Toutes les autres bases sont les bases orthonormées indirectes (ou négatives)

Remarque 1 :

1. Qu'est ce que cela veut dire qu'il existe $R \in \mathcal{O}^+(E)$ tel que $B' = R(B)$? Ceci veut donc dire qu'il existe une **rotation** R, telle que que si $B = \left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ et $B' = \left\{\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}\right\}$ sont deux bases orthonormées de E, alors :
$$\vec{i'} = R\left(\vec{i}\right) \quad \vec{j'} = R\left(\vec{j}\right) \quad \vec{k'} = R\left(\vec{k}\right)$$
2. Il est clair que cette définition peut aussi s'appliquer à un plan P de dimension 2 ; dans le plan vectoriel P, il existe donc des bases orthonormées directes ou indirectes.
3. Et plus généralement si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension n, il est tout à fait possible de définir une orientation de E

Démonstration

Nous allons démontrer 20.1.1

1. $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence
   $\Rightarrow$ Elle est réflexive
   En effet, pour tout $B \in \mathcal{B}$, il existe $R \in \mathcal{O}^+(E)$ telle que $B = R(B)$, et cette rotation est $R = \mathrm{Id}_E$

⇒ Elle est symétrique
Soient $B \in \mathcal{B}$ et $B' \in \mathcal{B}$ telles que $B\mathcal{R}B'$, c'est à dire qu'il existe $R \in \mathcal{O}^+(E)$ telle que $B' = R(B)$
clairement, nous avons $B = R^{-1}(B')$ et donc $B'\mathcal{R}B$.
La relation $\mathcal{R}$ est donc symétrique.

⇒ Elle est transitive
Soient donc $B \in \mathcal{B}$, $B' \in \mathcal{B}$ et $B'' \in \mathcal{B}$ telles que $B\mathcal{R}B'$ et $B'\mathcal{R}B''$
Il existe $R_1 \in \mathcal{O}^+(E)$ telle que $B' = R_1(B)$ et $R_2 \in \mathcal{O}^+(E)$ telle que $B'' = R_2(B')$
Alors, par composition $B'' = R_2 \circ R_1(B)$. Comme $\mathcal{O}^+(E)$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$, nous avons $R_2 \circ R_1 \in \mathcal{O}^+(E)$ et donc $B''\mathcal{R}B$
la relation $\mathcal{R}$ est donc transitive

Et donc, la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence

2. <u>$\mathcal{B}/\mathcal{R}$ n'a que deux classes d'équivalence</u>
   - ⋆ Tout d'abord, il y a au moins 2 classes d'équivalences.
   En effet ; prenons E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 et $B = \left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ une base orthonormée de E. $B' = \left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, -\overrightarrow{k}\right\}$ est aussi une base orthonormée de E, et l'application φ qui transforme B en B' est une transformation orthogonale ($\varphi \in \mathcal{O}(E)$). La matrice de φ dans la base B est donnée par :
   $$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   C'est la matrice d'une symétrie orthogonale et donc $\varphi \in \mathcal{O}^-(E)$. B et B' ne sont pas en relation et appartiennent donc à 2 classes différentes.
   - ⋆ Il n'y a que 2 classes
   Soient $B \in \mathcal{B}$ et $S \in \mathcal{O}^-(E)$; on appelle $B' = S(B)$; alors B' est une base orthonormée, c'est à dire $B' \in \mathcal{B}$, mais, comme ci-dessus, B et B' ne sont pas en relation.
   Soit $B'' \in \mathcal{B}$ une troisième base orthonormée.
   Il existe un et un seul endomorphisme orthogonal $\varphi \in \mathcal{O}(E)$ tel que $\varphi(B) = B''$
   De même, il existe un et un seul endomorphisme orthogonal $\psi \in \mathcal{O}(E)$ tel que $\psi(B'') = B'$
   Ainsi, $\psi \circ \varphi(B) = B'$, c'est à dire $\psi \circ \varphi = S \in \mathcal{O}^-(E)$. Il y a donc 2 possibilités
   → Ou bien $\psi \in \mathcal{O}^-(E)$ et $\varphi \in \mathcal{O}^+(E)$ et donc nous avons $B''\mathcal{R}B$
   → Ou bien $\psi \in \mathcal{O}^+(E)$ et $\varphi \in \mathcal{O}^-(E)$ et donc nous avons $B''\mathcal{R}B'$
   Il y a donc, exactement, 2 classes d'équivalences.

20.1.2 Théorème : dans le cas du plan vectoriel

Soit $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$ une base orthonormée du plan vectoriel P
Pour qu'une base orthonormée $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ soit de même orientation que $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$, il faut et il suffit que
$$\det_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}}(\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}) = +1$$

<u>**Démonstration**</u>

1. Si la base $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ est de même orientation que $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$, il existe une rotation $r \in \mathcal{O}(P)$ telle que $r\left(\overrightarrow{i}\right) = \overrightarrow{u}$ et $r\left(\overrightarrow{j}\right) = \overrightarrow{v}$. La matrice de r est donnée par :
$$\mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}}(r) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ avec } a^2 + b^2 = 1$$
Nous avons donc $\overrightarrow{u} = r\left(\overrightarrow{i}\right) = a\overrightarrow{i} - b\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = r\left(\overrightarrow{j}\right) = b\overrightarrow{i} + a\overrightarrow{j}$, et donc :
$$\det_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}}(\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}) = \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 = 1$$

2. Réciproquement, si $\det_{\{\vec{i},\vec{j}\}}(\{\vec{u},\vec{v}\}) = +1$

   Ecrivons $\vec{u} = \lambda_1\vec{i} + \lambda_2\vec{j}$ et $\vec{v} = \mu_1\vec{i} + \mu_2\vec{j}$. Comme $\{\vec{u},\vec{v}\}$ est une base orthonormée, nous avons :

   - $\star$ $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$
   - $\star$ $\mu_1^2 + \mu_2^2 = 1$
   - $\star$ $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 = 0$

   Et nous avons en plus $\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2 = 1$

   Si $\varphi \in \mathcal{O}(P)$ est l'endomorphisme orthogonal tel que $\varphi\left(\vec{i}\right) = \vec{u}$ et $\varphi\left(\vec{j}\right) = \vec{v}$, la matrice de φ dans la base $\left\{\vec{i},\vec{j}\right\}$ est donnée par :

   $$\mathcal{M}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{pmatrix}$$

   Nous sommes dans le même problème que celui de la proposition 16.3.2, avec comme contrainte supplémentaire d'un déterminant $\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2 = 1$

   D'où $\lambda_2 = -\mu_1$ et $\mu_2 = \lambda_1$; nous trouvons alors comme matrice de φ, la matrice

   $$\mathcal{M}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ -\mu_1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

   qui est une matrice de rotation.

   Nous concluons donc que la base orthonormée $\{\vec{u},\vec{v}\}$ est de même orientation que la base $\left\{\vec{i},\vec{j}\right\}$

Exercice 1 :

Soit P un plan vectoriel orienté par la base $\left\{\vec{i},\vec{j}\right\}$. Les bases suivantes sont -elles directes ? Indirectes ?

1. $\left\{\vec{j},-\vec{i}\right\}$
2. $\left\{\vec{i},-\vec{j}\right\}$
3. $\left\{-\vec{j},-\vec{i}\right\}$
4. $\left\{-\vec{i},-\vec{j}\right\}$
5. $\left\{-\vec{j},\vec{i}\right\}$
6. $\left\{\vec{j},\vec{i}\right\}$

20.1.3 Théorème

Soit P un plan vectoriel orienté par la base $\left\{\vec{i},\vec{j}\right\}$. Alors
Pour tout vecteur unitaire $\vec{u} \in P$ il existe un et un seul vecteur unitaire $\vec{v} \in P$ tel que $\{\vec{u},\vec{v}\}$ soit une base orthonormée directe de P

Démonstration

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur unitaire de P. Alors $x^2 + y^2 = 1$.

Il existe 2 vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v'} = -\vec{v}$$

$\{\vec{u},\vec{v}\}$ et $\{\vec{u},-\vec{v}\}$ forment des bases orthonormées du plan ; c'est une symétrie qui fait passer de l'une à l'autre, et donc une seule des deux est directe.

$$\det_{\{\vec{i},\vec{j}\}}(\{\vec{u},\vec{v}\}) = \begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2 + y^2 = 1$$

Nous avons, bien entendu $\det_{\{\vec{i},\vec{j}\}}(\{\vec{u},-\vec{v}\}) = -1$ et donc, seul le vecteur $\vec{v}$ convient

20.1.4 En dimension 3

Soit $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ une base orthonormée de E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3
Pour qu'une base orthonormée $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ soit de même orientation que $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$, il faut et il suffit que

$$\det_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}}(\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}) = +1$$

Démonstration

La démonstration en est très simple et semblable à 20.1.2 puisque qu'une matrice de rotation dans l'espace de dimension 3 a, elle aussi, un déterminant égal à 1.

Exercice 2 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 orienté par la base orthonormée $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$. Quelles sont les orientations des bases suivantes ?

1. $\left\{\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{i}\right\}$
2. $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{j}\right\}$
3. $\left\{\overrightarrow{k}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{i}\right\}$
4. $\left\{\overrightarrow{k}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$
5. $\left\{-\overrightarrow{i}, -\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$
6. $\left\{-\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$
7. $\left\{\overrightarrow{i}, -\overrightarrow{j}, -\overrightarrow{k}\right\}$

20.1.5 Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3
Soient $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ 2 vecteurs unitaires et orthogonaux de E, c'est à dire $\left\langle \overrightarrow{i} \mid \overrightarrow{j} \right\rangle = 0$ et $\left\|\overrightarrow{i}\right\| = \left\|\overrightarrow{j}\right\| = 1$.
Alors Il existe un et un seul vecteur unitaire $\overrightarrow{k}$ tel que $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ soit une base orthonormée directe de E

Démonstration

Soient $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ 2 vecteurs unitaires et orthogonaux de E et P le plan engendré par $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$.
Soit D la droite orthogonale à P et $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire, base de D
$\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ sera une base orthonormée de E si et seulement si $\overrightarrow{k} = \pm\overrightarrow{u}$. Or, les bases orthonormées $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{u}\right\}$ et $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, -\overrightarrow{u}\right\}$ n'ont pas la même orientation. d'où le résultat

Remarque 2 :

On démontre de même que :

1. Si $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{k}$ sont 2 vecteurs unitaires et orthogonaux de E, il existe un seul vecteur unitaire $\overrightarrow{j}$ tel que $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ soit une base orthonormée directe de E
2. Si $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont 2 vecteurs unitaires et orthogonaux de E, il existe un seul vecteur v $\overrightarrow{i}$ tel que $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ soit une base orthonormée directe de E

20.1.6 Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 euclidien et orienté
Soit P un plan vectoriel de E et D la droite orthogonale à P

1. Si P est orienté, alors il existe un unique vecteur unitaire $\overrightarrow{w} \in D$ telle que si $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ est une base directe de P alors $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ est une base directe de E
2. Réciproquement, orienter le plan P par un vecteur unitaire $\overrightarrow{k} \in D$, c'est convenir que la base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j},\right\}$ est directe si la base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ est directe.

Démonstration

1. Supposons P orienté, et soit $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ une base directe de P. D'après le théorème 20.1.5, il existe un seul vecteur $\vec{w} \in D$ tel que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ soit une base directe de E
2. Soit $\vec{k} \in D$ un vecteur unitaire fixé. Nous allons montrer que, pour toute base orthonormée $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ et $\{\vec{u_1}, \vec{v_1}\}$ de P, nous avons l'équivalence :

$$\begin{gathered}\{\vec{u}, \vec{v}\} \text{ et } \{\vec{u_1}, \vec{v_1}\} \text{ ont même orientation} \\ \text{si et seulement si} \\ \left\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}\right\} \text{ et } \left\{\vec{u_1}, \vec{v_1}, \vec{k}\right\} \text{ ont même orientation}\end{gathered}$$

   (a) <u>Supposons que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ et $\{\vec{u_1}, \vec{v_1}\}$ sont 2 bases orthonormées de P qui ont même orientation</u>
   Il existe donc une rotation $r \in \mathcal{O}^+(P)$ telle que $r(\vec{u}) = \vec{u_1}$ et $r(\vec{v}) = \vec{v_1}$.
   Il existe donc $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ avec $a^2 + b^2 = 1$ tels que :

$$\begin{cases} \vec{u_1} = & a\vec{u} - b\vec{v} \\ \vec{v_1} = & a\vec{u} + b\vec{v} \end{cases}$$

   Les 2 bases $\left\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}\right\}$ et $\left\{\vec{u_1}, \vec{v_1}, \vec{k}\right\}$ sont deux bases orthonormées de E
   Soit $\varphi \in \mathcal{O}(E)$ telle que $\varphi(\vec{u}) = \vec{u_1}$, $\varphi(\vec{v}) = \vec{v_1}$ et $\varphi\left(\vec{k}\right) = \vec{k}$ Alors, la matrice de φ dans la base $\left\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}\right\}$ est donnée par :

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   C'est une matrice de rotation ; φ est donc une rotation et les 2 bases orthonormées $\left\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}\right\}$ et $\left\{\vec{u_1}, \vec{v_1}, \vec{k}\right\}$ ont même orientation.

   (b) <u>Supposons que $\left\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}\right\}$ et $\left\{\vec{u_1}, \vec{v_1}, \vec{k}\right\}$ sont 2 bases orthonormées de E qui ont même orientation</u>
   Il existe alors une rotation $\rho \in \mathcal{O}^+(E)$ telle que $\rho(\vec{u}) = \vec{u_1}$, $\rho(\vec{v}) = \vec{v_1}$ et $\rho\left(\vec{k}\right) = \vec{k}$. La matrice de ρ dans la base $\left\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}\right\}$ est donnée par :

$$\mathcal{M}_{\left\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}\right\}}(\rho) = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } a^2 + b^2 = 1$$

   Si ψ est la restriction de ρ à P, nous avons $\psi(\vec{u}) = \rho(\vec{u}) = \vec{u_1}$, $\psi(\vec{v}) = \rho(\vec{v}) = \vec{v_1}$, et la matrice de ψ dans la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est donnée par :

$$\mathcal{M}_{\{\vec{u}, \vec{v}\}}(\psi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ avec } a^2 + b^2 = 1$$

   Qui est la matrice d'une rotation.
   Donc les bases orthonormées $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ et $\{\vec{u_1}, \vec{v_1}\}$ ont même orientation dans P

Remarque 3 :

Il faut remarquer que le choix du vecteur $\vec{k}$ directeur de la droite D détermine l'orientation du plan P qui lui est orthogonal.

20.1.7 Mesure d'une rotation vectorielle d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E orienté de dimension 3

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté et ρ une rotation de E
$\overrightarrow{k}$ est un vecteur unitaire invariant par ρ et P est le plan orthogonal à $\overrightarrow{k}$
On sait que $\psi = \rho_{|P}$ est une rotation du plan P
On appelle mesure en radians de la rotation vectorielle ρ relativement à $\overrightarrow{k}$ toute mesure en radians de la rotation vectorielle $\psi = \rho_{|P}$ dans le plan vectoriel P orienté par $\overrightarrow{k}$

20.1.8 Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et ρ une rotation vectorielle de E de mesure x relativement à un vecteur $\overrightarrow{k}$ invariant par ρ. Alors
La matrice de ρ dans une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{k}\right\}$ est donnée par :

$$\mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{k}\right\}}(\rho) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration

Soit x la mesure de l'angle de la rotation ρ. L'axe de la rotation, c'est à dire le vecteur $\overrightarrow{k}$ détermine une orientation du plan qui lui est orthogonal. Soit donc $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ une base orthonormée directe de $P = \left\{\overrightarrow{k}\right\}^{\perp}$.
On appelle $\psi = \rho_{|P}$ la restriction de la rotation ρ à P ; alors, la matrice de ψ dans la base $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ est donnée par :

$$\mathcal{M}_{\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

Et donc, la matrice de ρ dans une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{k}\right\}$ est donnée par :

$$\mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{k}\right\}}(\rho) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque 4 :

1. Une rotation ρ d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 est donc entièrement déterminée par son vecteur invariant $\overrightarrow{k}$ et sa mesure x *(modulo 2π)* autour du vecteur $\overrightarrow{k}$
2. Si $x = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $\rho = \mathrm{Id}_E$
3. Si $x = (2k+1)\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors ρ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par $\overrightarrow{k}$

20.1.9 Quelques exercices

Exercice 3 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté par la base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right\}$. Nous appelons φ_1 la rotation vectoriele de mesure $\dfrac{\pi}{2}$ et d'axe $\overrightarrow{i}$ et par φ_2 la rotation vectoriele de mesure $\dfrac{\pi}{2}$ et d'axe $\overrightarrow{j}$.

1. Déterminer, par ses coordonnées, un vecteur unitaire $\overrightarrow{k_1}$ invariant par la rotation $\varphi_2 \circ \varphi_1$
2. Déterminer, par leurs coordonnées, deux vecteurs unitaires $\overrightarrow{i_1}$ et $\overrightarrow{j_1}$ tels que $\left\{\overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}; \overrightarrow{k_1}\right\}$ soit une base orthonormée directe de E

3. Démontrer que si x est une mesure de l'angle de la rotation $\varphi_2 \circ \varphi_1$ d'axe $\overrightarrow{k_1}$, nous avons :

$$\left\langle \overrightarrow{i_1} \mid \varphi_2 \circ \varphi_1 \left(\overrightarrow{i_1}\right)\right\rangle = \cos x \quad \text{et} \quad \left\langle \overrightarrow{j_1} \mid \varphi_2 \circ \varphi_1 \left(\overrightarrow{j_1}\right)\right\rangle = \sin x$$

   En déduire x

Exercice 4 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté par la base orthonormée directe $\mathcal{B}_0 = \left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right\}$. On donne les vecteurs :

$$\overrightarrow{I} = \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}\right) \quad \overrightarrow{J} = \frac{1}{3}\left(-\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}\right) \quad \overrightarrow{K} = \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}\right)$$

1. Vérifier que la famille $\left\{\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}; \overrightarrow{K}\right\}$ forme une base orthonormée
2. Donner la définition analytique de la transformation orthogonale φ qui transforme la base $\mathcal{B}_0$ en la base $\left\{\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}; \overrightarrow{K}\right\}$
3. Montrer que φ est une rotation dont l'axe est engendré par le vecteur $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.
4. Soit P le plan vectoriel orthogonal au vecteur $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ et orienté par le vecteur unitaire $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\right)$.
   Calculer la mesure de la restriction de φ à P

20.2 Le produit vectoriel

20.2.1 Définition du produit vectoriel

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3
Soient $\overrightarrow{u} \in E$ et $\overrightarrow{v} \in E$ 2 vecteurs de E
On appelle produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ par $\overrightarrow{v}$ le vecteur noté $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ ainsi défini :

1. Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ alors $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$
2. Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$

   Soit $P = \{\overrightarrow{u}\}^{\perp}$ le plan orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et Π la projection orthogonale sur $P = \{\overrightarrow{u}\}^{\perp}$
   Soit ρ la rotation de mesure $\dfrac{\pi}{2}$ et d'axe $\overrightarrow{u}$

   Alors : $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \, \rho \circ \Pi\left(\overrightarrow{v}\right)$

Remarque 5 :

1. Il est tout à fait clair que $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est orthogonal à la fois à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$, c'est à dire que $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \in \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}^{\perp}$
2. Nous avons donc $\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\rangle = \langle \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\rangle = 0$
3. Une autre écriture de $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ peut être donnée par :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \sin\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) \overrightarrow{k}$$

4. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien d'espace directeur E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. On définit sur $\mathcal{E}$ un produit vectoriel en posant, pour tout $A \in \mathcal{E}$, tout $B \in \mathcal{E}$, tout $C \in \mathcal{E}$ et tout $D \in \mathcal{E}$:

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD}$$

20.2.2 Proposition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3
Alors, pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, tout $\overrightarrow{v_1} \in E$, tout $\overrightarrow{v_2} \in E$, tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $\mu \in \mathbb{R}$:

$$\overrightarrow{u} \wedge (\lambda \overrightarrow{v_1} + \mu \overrightarrow{v_2}) = \lambda (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v_1}) + \mu (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v_2})$$

Démonstration

1. Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, par la définition du produit vectoriel, l'égalité est toujours vérifiée.
2. Supposons, maintenant, $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ Alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \wedge (\lambda \overrightarrow{v_1} + \mu \overrightarrow{v_2}) &= \|\overrightarrow{u}\| \times \rho \circ \Pi (\lambda \overrightarrow{v_1} + \mu \overrightarrow{v_2}) \\ &= \|\overrightarrow{u}\| \times \lambda \rho \circ \Pi (\overrightarrow{v_1}) + \mu \rho \circ \Pi (\overrightarrow{v_2}) \text{ par linéarité} \\ &= \lambda \|\overrightarrow{u}\| \rho \circ \Pi (\overrightarrow{v_1}) + \mu \|\overrightarrow{u}\| \rho \circ \Pi (\overrightarrow{v_2}) \\ &= \lambda (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v_1}) + \mu (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v_2}) \end{aligned}$$

Ce que nous voulions

20.2.3 Proposition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ une base orthonormée directe de E. Alors :

$$\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \qquad \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} \qquad \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}$$

Démonstration

Nous ne démontrons que la première égalité $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}$
Nous avons, par définition du produit vectoriel :

$$\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \left\|\overrightarrow{i}\right\| \times \rho \circ \Pi \left(\overrightarrow{j}\right) = \rho \circ \Pi \left(\overrightarrow{j}\right)$$

Comme $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ est une base directe de E, le plan orthogonal à $\overrightarrow{i}$ admet pour base directe $\left\{\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ et donc $\Pi\left(\overrightarrow{j}\right) = \overrightarrow{j}$ et $\rho\left(\overrightarrow{j}\right) = \overrightarrow{k}$
D'où $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}$

Exercice 5 :

Montrer les deux autres égalités : $\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}$

20.2.4 Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3
Le produit vectoriel de 2 vecteurs est nul si et seulement si ces 2 vecteurs sont linéairement dépendants

Démonstration

1. Soient $\overrightarrow{u} \in E$ et $\overrightarrow{v} \in E$. Supposons $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$
   (a) Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ et les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont bien linéairement dépendants
   (b) Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \rho \circ \Pi (\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$.
   Comme $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, alors $\|\overrightarrow{u}\| \neq 0$ et donc $rho \circ \Pi (\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$.
   La rotation ρ étant bijective, $\Pi (\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$, c'est à dire que $\overrightarrow{v}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$
2. Soient $\overrightarrow{u} \in E$ et $\overrightarrow{v} \in E$ 2 vecteurs colinéaires
   Alors $\overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{u}$ et comme $\Pi (\overrightarrow{v}) = \Pi (\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$, nous avons $\rho \circ \Pi (\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$, c'est à dire $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$

Remarque 6 :

Ce résultat a pour conséquences évidentes :

1. Pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
2. Pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

Exercice 6 :

1. Soient $\overrightarrow{u} \in E$ et $\overrightarrow{v} \in E$. Nous posons $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ Trouver tous les vecteurs $\overrightarrow{X} \in E$ tels que $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{X} = \overrightarrow{w}$
2. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien d'espace directeur E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Soient $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{E}$ et $C \in \mathcal{E}$, 3 points non alignés
   (a) Trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{0}$
   (b) Même questions pour l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$

Exercice 7 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien d'espace directeur E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Soient $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{E}$ et $C \in \mathcal{E}$, 3 points non alignés.
Trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $\left(\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right) \wedge \left(\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right) = \overrightarrow{0}$

- ⋆ On considère le système pondéré $\{(A, 1)\,; (B, -3)\}$; ce système admet un barycentre G défini, pour tout $M \in \mathcal{E}$ par $-2\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}$
- ⋆ De même, si nous considérons le système pondéré $\{(B, 1)\,; (C, 3)\}$; ce système admet un barycentre H défini, pour tout $M \in \mathcal{E}$ par $4\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{Mc}$

Ce qui fait que nous avons l'équivalence :

$$\left(\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right) \wedge \left(\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right) = \overrightarrow{0} \iff \left(-2\overrightarrow{MG}\right) \wedge \left(4\overrightarrow{MH}\right) = \overrightarrow{0} \iff -8\left(\overrightarrow{MG} \wedge \overrightarrow{MH}\right) = \overrightarrow{0}$$

Maintenant, quels sont ces points $M \in \mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{MG} \wedge \overrightarrow{MH} = \overrightarrow{0}$?
Tout d'abord, $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GH}$ et donc :

$$\overrightarrow{MG} \wedge \overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MG} \wedge \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GH}\right) = \overrightarrow{MG} \wedge \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{0}$$

L'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ est donc l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont colinéaires. L'ensemble des ces points M est donc la droite (GH)

Exercice 8 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien d'espace directeur E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Soient $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{E}$ et $C \in \mathcal{E}$, 3 points non alignés.
Trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overleftarrow{MC}\right) \wedge \left(\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = \overrightarrow{0}$

20.2.5 Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3
Le produit vectoriel est antisymétrique, c'est à dire :

$$(\forall \overrightarrow{u} \in E)\,(\forall \overrightarrow{v} \in E)\,(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}))$$

Démonstration

1. Supposons $\overrightarrow{u} \in E$ et $\overrightarrow{v} \in E$ colinéaires
   Alors, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, et nous avons bien $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u})$

2. Supposons $\overrightarrow{u} \in E$ et $\overrightarrow{v} \in E$ linéairement indépendants

   Alors $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$.

   $\Rightarrow$ Nous normalisons ces vecteurs en posant $\overrightarrow{i} = \dfrac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}$ et $\overrightarrow{j} = \dfrac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$.

   Remarquons que $\left\|\overrightarrow{i}\right\| = 1$ et $\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{v}\|\,\overrightarrow{j}$

   Alors :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} =& \ \|\overrightarrow{u}\|\,\rho \circ \Pi\left(\overrightarrow{v}\right)\\ =& \ \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,\rho \circ \Pi\left(\overrightarrow{j}\right)\\ =& \ \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\left(\left\|\overrightarrow{i}\right\|\rho \circ \Pi\left(\overrightarrow{j}\right)\right)\\ =& \ \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j}\end{aligned}$$

   De la même manière, nous avons $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{i}$

   $\Rightarrow$ Il nous suffit donc de montrer que, pour ces 2 vecteurs unitaires $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$, nous avons $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = -\left(\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{i}\right)$

   On appelle $\overrightarrow{k}$ un vecteur unitaire orthogonal au plan P engendré par $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$

   - ⋆ Il existe un et un seul vecteur $\overrightarrow{i_1} \in P$ tel que la base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{k}\right\}$ soit une base orthonormée directe de E
   - ⋆ De même, il existe un et un seul vecteur $\overrightarrow{j_1} \in P$ tel que la base $\left\{\overrightarrow{j}, \overrightarrow{j_1}, \overrightarrow{k}\right\}$ soit une base orthonormée directe de E

   Alors, dans le plan P, les bases orthonormées $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i_1}\right\}$ et $\left\{\overrightarrow{j}, \overrightarrow{j_1}\right\}$ ont même orientation.

   Il existe donc une rotation $\varphi \in \mathcal{O}^+(P)$ telle que $\varphi\left(\overrightarrow{i}\right) = \overrightarrow{j}$ et $\varphi\left(\overrightarrow{i_1}\right) = \overrightarrow{j_1}$ et dont la matrice dans la base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i_1}\right\}$ est donnée par :

$$\mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i_1}\right\}}(\varphi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ avec } a^2 + b^2 = 1$$

   Donc :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\overrightarrow{j} &=& a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{i_1}\\ \overrightarrow{j_1} &=& -b\overrightarrow{i} + a\overrightarrow{i_1}\end{array}\right. \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}\overrightarrow{i} &=& a\overrightarrow{j} - b\overrightarrow{j_1}\\ \overrightarrow{i_1} &=& b\overrightarrow{j} + a\overrightarrow{j_1}\end{array}\right.$$

   D'où

   - ⋆ $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = veci \wedge \left(a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{i_1}\right) = a\left(\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{i}\right) + b\left(\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{i_1}\right) = b\overrightarrow{k}$
   - ⋆ $\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \wedge \left(a\overrightarrow{j} - b\overrightarrow{j_1}\right) = a\left(\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{j}\right) - b\left(\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{j_1}\right) = -b\overrightarrow{k}$

   Nous avons bien $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = -\left(\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{i}\right)$

   Ce que nous voulions

20.2.6 Corollaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3

Alors, pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, tout $\overrightarrow{v_1} \in E$, tout $\overrightarrow{v_2} \in E$, tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $\mu \in \mathbb{R}$:

$$(\lambda\overrightarrow{v_1} + \mu\overrightarrow{v_2}) \wedge \overrightarrow{u} = \lambda\left(\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{u}\right) + \mu\left(\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{u}\right)$$

Démonstration

Pour le démontrer, il suffit de conjuguer la proposition 20.2.2 et le théorème 20.2.5

Exercice 9 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.
Soient $\overrightarrow{u} \in E$ et $\overrightarrow{v} \in E$ 2 vecteurs linéairement in dépendants.
Pour a, b, c et d 4 nombres réels, on considère le produit vectoriel $(a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}) \wedge (c\overrightarrow{u} + d\overrightarrow{v})$.
Démontrez que $(a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v})$ et $(c\overrightarrow{u} + d\overrightarrow{v})$ sont linéairement indépendants si et seulement si $ad - bc \neq 0$

20.2.7 Coordonnées du produit vectoriel de 2 vecteurs

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 rapporté à une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$

Soient $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ 2 vecteurs de E

Alors $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (bc_1 - b_1c)\,\overrightarrow{i} + (ca_1 - ac_1)\,\overrightarrow{j} + (ab_1 - ba_1)\,\overrightarrow{k}$

Démonstration

La démonstration est simple et calculatoire.

Exercice 10 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 rapporté à une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$. On considère les vecteurs $\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} \end{pmatrix}$

1. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ sont unitaires et orthogonaux
2. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{e_3}$ tel que $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ soit une base orthonormée directe.

20.2.8 Exercices

Exercice 11 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 Démontrer l'identité de Lagrange :

$$(\forall \overrightarrow{u} \in E)\,(\forall \overrightarrow{v} \in E)\,\left(\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v}\rangle^2 + \|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 \times \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$$

Exercice 12 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien d'espace directeur E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Soient $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{E}$ et $C \in \mathcal{E}$, 3 points non alignés

1. Démontrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$
2. Trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que :

   (a) $\left\langle \overrightarrow{AM} \mid \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)\right\rangle = 0$

   (b) $\left\langle \overrightarrow{AM} \mid \left(\overrightarrow{BM} \wedge \overrightarrow{CM}\right)\right\rangle = 0$

Exercice 13 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3 orienté par un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ et de direction E.

1. Comment utiliser le produit vectoriel pour donner l'équation cartésienne d'un plan $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ où $A \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{u} \in E$ et $\overrightarrow{v} \in E$?
2. On considère les trois points $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{E}$ et $C \in \mathcal{E}$ de coordonnées :

$$A\,(-2, 1, 3)\ , B\,(1, -1, 0)\ , C\,(0, 0, -2)$$

   Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)

3. Soit $Z \in \mathcal{E}$ de coordonnées $Z\,(0, 0, 1)$. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que :

$$\left\langle \overrightarrow{MO} \mid \overrightarrow{MZ}\right\rangle = \left\|\overrightarrow{MO} \wedge \overrightarrow{MZ}\right\|^2$$

4. Soient $X \in \mathcal{E}$ et $Y \in \mathcal{E}$ de coordonnées respectives $X(1,0,0)$ et $Y(0,1,0)$. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MX} \wedge \overrightarrow{MY}\right\| = \left\|\overrightarrow{MY} \wedge \overrightarrow{MZ}\right\| = \left\|\overrightarrow{MZ} \wedge \overrightarrow{MX}\right\|$$

Exercice 14 :

Le produit mixte

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. On considère 3 vecteurs de E, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$

1. Démontrer que $\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\rangle = \langle \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{w}\rangle$
2. On appelle produit mixte de trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, et on le note $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$ le réel :

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\rangle$$

Démontrer que :

(a) $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}] = [\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$

(b) $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = -[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}] = -[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}] = -[\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}]$

(c) Montrer que les 3 vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ forment une base si et seulement si $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] \neq 0$

(d) On suppose que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est rapporté à une base orthonormée directe $\left[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right]$. Donner une expression analytique du produit mixte dans cette base

Exercice 15 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3 orienté par un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. On considère 4 points $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{E}$, $C \in \mathcal{E}$ et $D \in \mathcal{E}$. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que :

$$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD}$$

Exercice 16 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 orienté par une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$
Soit $P \subset E$, le plan vectoriel euclidien de base $\mathcal{B}_0 = \left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$. Soit $\overrightarrow{p} \in P$ un vecteur de norme 1.
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, nous considérons l'application φ_α de P dans E définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi_\alpha : P & \longrightarrow & E \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & \varphi_\alpha(\overrightarrow{u}) = \alpha\overrightarrow{u} + \overrightarrow{p} \wedge (\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{u}) \end{array}\right.$$

1. Démontrer que φ_α est une application linéaire de P dans P
2. On suppose $\overrightarrow{p} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right)$ et nous posons $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$

(a) Vérifier que $\overrightarrow{p} \wedge (\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{u}) = \langle \overrightarrow{p} \mid \overrightarrow{u}\rangle\, \overrightarrow{p} - \overrightarrow{u}$

(b) Quelle est la matrice de φ_α dans la base $\mathcal{B}_0$?

(c) Trouver les noyaux et images de φ_α dans les cas où $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$

Exercice 17 :

La formule du double produit vectoriel

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 orienté et $\overrightarrow{k} \in E$ un vecteur unitaire de E (i.e. $\left\|\overrightarrow{k}\right\| = 1$) Nous considérons les applications Φ et Π de E dans E définies par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Phi : E & \longrightarrow & E \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & \Phi(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{u} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \Pi : E & \longrightarrow & E \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & \Pi(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} - \left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{u}\right\rangle \overrightarrow{k} \end{array}\right.$$

1. Démontrez que :

(a) Φ et Π sont des endomorphismes de E
(b) Π est la projection orthogonale sur le plan vectoriel $\overrightarrow{P}$ othogonal à $\overrightarrow{k}$
(c) $\Phi \circ \Phi = -\Pi$
(d) Pour tout vecteur $\overrightarrow{u} \in E$, nous avons : $\overrightarrow{k} \wedge \left(\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{u}\right) = \left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{u} \right\rangle \overrightarrow{k} - \overrightarrow{u}$

2. Démontrer que, pour tout vecteur $\overrightarrow{u} \in E$ et $\overrightarrow{v} \in E$, nous avons :
$$\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle \overrightarrow{u} - \|\overrightarrow{u}\|^2 \overrightarrow{v}$$
3. Soient $\overrightarrow{u} \in E$, $\overrightarrow{v} \in E$ et $\overrightarrow{w} \in E$ trois vecteurs de E
(a) On suppose que le vecteur $\overrightarrow{u} \in E$ n'est pas nul. Montrer qu'il existe un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v_1}$ et $\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v_1} \rangle = 0$
(b) Démontrez de même qu'il existe un nombre réel $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{w} = \mu \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w_1}$ et $\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{w_1} \rangle = 0$
(c) En déduire que $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{w} \rangle \overrightarrow{v} - \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle \overrightarrow{w}$
(d) Démontrer que la formule précédente est vraie même si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

20.3 Quelques exercices corrigés

Exercice 3 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté par la base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right\}$. Nous appelons φ_1 la rotation vectoriele de mesure $\frac{\pi}{2}$ et d'axe $\overrightarrow{i}$ et par φ_2 la rotation vectoriele de mesure $\frac{\pi}{2}$ et d'axe $\overrightarrow{j}$.

1. *Déterminer, par ses coordonnées, un vecteur unitaire $\overrightarrow{k_1}$ invariant par la rotation $\varphi_2 \circ \varphi_1$*

Dans un premier temps, nous avons comme matrice de φ_1 dans la base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right\}$,
$$\mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right\}}(\varphi_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Dans un second temps, la matrice de φ_2 dans la base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right\}$ est donnée par
$$\mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right\}}(\varphi_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Pour terminer, $\mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right\}}(\varphi_2 \circ \varphi_1) = \mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right\}}(\varphi_2) \times \mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right\}}(\varphi_1)$ et donc, tous calculs faits :
$$\mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right\}}(\varphi_2 \circ \varphi_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Si $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, est un vecteur invariant par $\varphi_2 \circ \varphi_1$, ses coordonnées vérifient le système d'équation :
$$\begin{cases} x = y \\ y = -z \\ z = -x \end{cases}$$
L'ensemble des vecteurs invariants par $\varphi_2 \circ \varphi_1$ est donc une droite vectorielle d'équation $\begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ qui admet pour base $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Le vecteur unitaire $\overrightarrow{k_1}$ a donc pour coordonnées $\overrightarrow{k_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

(Il est clair que l'utilisation du produit vectoriel simplifie la chose !!)

2. *Déterminer, par leurs coordonnées, deux vecteurs unitaires $\overrightarrow{i_1}$ et $\overrightarrow{j_1}$ tels que $\left\{\overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}; \overrightarrow{k_1}\right\}$ soit une base orthonormée directe de E*

   Nous allons utiliser plusieurs propriétés de la base directe pour connaître $\overrightarrow{i_1}$ et $\overrightarrow{j_1}$
   - ⋆ $\overrightarrow{i_1}$ et $\overrightarrow{j_1}$ sont orthogonaux à $\overrightarrow{k_1}$, c'est à dire $\left\langle \overrightarrow{i_1} \mid \overrightarrow{k_1}\right\rangle = 0$, $\left\langle \overrightarrow{j_1} \mid \overrightarrow{k_1}\right\rangle = 0$ et $\left\langle \overrightarrow{i_1} \mid \overrightarrow{j_1}\right\rangle = 0$
   - ⋆ D'autre part, nous devons avoir $\left\|\overrightarrow{i_1}\right\| = \left\|\overrightarrow{j_1}\right\| = 1$
   - ⋆ Et $\det_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right\}}\left(\left\{\overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}; \overrightarrow{k_1}\right\}\right) = 1$

   Posons $\overrightarrow{i_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{j_1} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$
   - ⋆ Dans un premier temps, nous avons :

   $$\left\langle \overrightarrow{i_1} \mid \overrightarrow{k_1}\right\rangle = 0 \Longleftrightarrow x_1 + y_1 - z_1 = 0 \text{ et } \left\langle \overrightarrow{j_1} \mid \overrightarrow{k_1}\right\rangle = 0 \Longleftrightarrow x_2 + y_2 - z_2 = 0$$

   Faisons le choix $y_1 = 0$, $x_1 = z_1 = 1$, alors de $\left\langle \overrightarrow{i_1} \mid \overrightarrow{j_1}\right\rangle = 0$, nous obtenons $x_2 + z_2 = 0$
   - ⋆ Nous obtenons donc le système :

   $$\begin{cases} x_2 + y_2 - z_2 = & 0 \\ x_2 + z_2 = & 0 \end{cases}$$

   $x_2 \in \mathbb{R}$, $z_2 = -x_2$ et $y_2 = 2x_2$ et donc $\overrightarrow{j_1} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$
   - ⋆ De $\left\|\overrightarrow{i_1}\right\| = \left\|\overrightarrow{j_1}\right\| = 1$, nous tirons : $\overrightarrow{i_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{j_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ ou $\overrightarrow{j_1'} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$
   - ⋆ Maintenant, nous allons utiliser les déterminants :
     - → $\det_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right\}}\left(\left\{\overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}; \overrightarrow{k_1}\right\}\right) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = 1$
     - → $\det_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right\}}\left(\left\{\overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1'}; \overrightarrow{k_1}\right\}\right) = \det_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right\}}\left(\left\{\overrightarrow{i_1}, -\overrightarrow{j_1}; \overrightarrow{k_1}\right\}\right) = -\det_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right\}}\left(\left\{\overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}; \overrightarrow{k_1}\right\}\right) = -1$

   Nous venons ainsi de prouver que la base $\left\{\overrightarrow{i_1}, \overrightarrow{j_1}; \overrightarrow{k_1}\right\}$ est directe.

3. *Démontrer que si x est une mesure de l'angle de la rotation $\varphi_2 \circ \varphi_1$ d'axe $\overrightarrow{k_1}$, nous avons :*

   $$\left\langle \overrightarrow{i_1} \mid \varphi_2 \circ \varphi_1\left(\overrightarrow{i_1}\right)\right\rangle = \cos x \quad \text{et} \quad \left\langle \overrightarrow{j_1} \mid \varphi_2 \circ \varphi_1\left(\overrightarrow{i_1}\right)\right\rangle = \sin x$$

   En déduire x

   D'après le cours sur le produit scalaire, nous avons, pour tout $u \in E$ et tout $v \in E$:

   $$\langle u \mid v\rangle = \|u\| \times \|v\| \cos\left(\widehat{u, v}\right)$$

   Donc

   ⟶ $\left\langle \overrightarrow{i_1} \mid \varphi_2 \circ \varphi_1\left(\overrightarrow{i_1}\right)\right\rangle = \left\|\overrightarrow{i_1}\right\| \times \left\|\varphi_2 \circ \varphi_1\left(\overrightarrow{i_1}\right)\right\| \cos\left(\widehat{\overrightarrow{i_1}, \varphi_2 \circ \varphi_1\left(\overrightarrow{i_1}\right)}\right)$

   Or, $\left\|\overrightarrow{i_1}\right\| = \left\|\varphi_2 \circ \varphi_1\left(\overrightarrow{i_1}\right)\right\| = 1$, et donc $\left\langle \overrightarrow{i_1} \mid \varphi_2 \circ \varphi_1\left(\overrightarrow{i_1}\right)\right\rangle = \cos x$

   ⟶ De même, $\left\langle \overrightarrow{j_1} \mid \varphi_2 \circ \varphi_1\left(\overrightarrow{i_1}\right)\right\rangle \cos\left(\widehat{\overrightarrow{j_1}, \varphi_2 \circ \varphi_1\left(\overrightarrow{i_1}\right)}\right)$

   ⟶ Or, si x est une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{i_1}, \varphi_2 \circ \varphi_1\left(\overrightarrow{i_1}\right)}\right)$ et α une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{j_1}, \varphi_2 \circ \varphi_1\left(\overrightarrow{i_1}\right)}\right)$, nous avons $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - x$ (Cf figure 20.1, la rotation $\varphi_2 \circ \varphi_1$ dans le plan orienté de base directe $\left\{\overrightarrow{i_1}; \overrightarrow{j_1}\right\}$) Nous avons donc $\cos\alpha = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

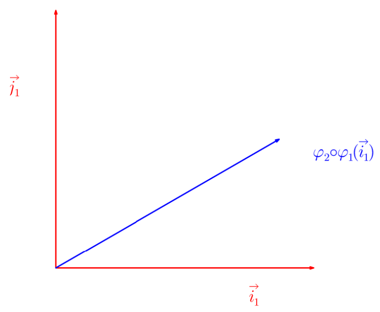


FIGURE 20.1 –

Comme $\overrightarrow{i_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, par le calcul matriciel, nous obtenons $\varphi_2 \circ \varphi_1 \left(\overrightarrow{i_1}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

D'où $\cos x = \left\langle \overrightarrow{i_1} \mid \varphi_2 \circ \varphi_1 \left(\overrightarrow{i_1}\right) \right\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-1}{2}$ et $\sin x = \left\langle \overrightarrow{j_1} \mid \varphi_2 \circ \varphi_1 \left(\overrightarrow{i_1}\right) \right\rangle = \dfrac{2}{\sqrt{12}} + \dfrac{1}{\sqrt{12}} = \dfrac{3}{\sqrt{12}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Et donc, $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 4 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté par la base orthonormée directe $\mathcal{B}_0 = \left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right\}$. On donne les vecteurs :

$$\overrightarrow{I} = \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}\right) \quad \overrightarrow{J} = \frac{1}{3}\left(-\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}\right) \quad \overrightarrow{K} = \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}\right)$$

1. *Vérifier que la famille $\left\{\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}; \overrightarrow{K}\right\}$ forme une base orthonormée*

   Il suffit de faire les calculs de $\left\langle \overrightarrow{I} \mid \overrightarrow{J} \right\rangle$, $\left\langle \overrightarrow{I} \mid \overrightarrow{K} \right\rangle$ et $\left\langle \overrightarrow{K} \mid \overrightarrow{J} \right\rangle$, $\left\|\overrightarrow{I}\right\|$, $\left\|\overrightarrow{J}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{K}\right\|$

   Et bien entendu que l'on trouve $\left\langle \overrightarrow{I} \mid \overrightarrow{J} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{I} \mid \overrightarrow{K} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{K} \mid \overrightarrow{J} \right\rangle = 0$ et $\left\|\overrightarrow{I}\right\| = \left\|\overrightarrow{J}\right\| = \left\|\overrightarrow{K}\right\| = 1$

2. *Donner la définition analytique de la transformation orthogonale φ qui transforme la base $\mathcal{B}_0$ en la base $\left\{\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}; \overrightarrow{K}\right\}$*

   Il n'existe donc qu'un seul endomorphisme orthogonal φ qui transforme la base $\mathcal{B}_0$ en la base $\left\{\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}; \overrightarrow{K}\right\}$. La matrice de φ dans la base $\mathcal{B}_0$ est donnée par :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(\varphi) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

   C'est déjà, là, la définition analytique de φ ; allons plus loin.

   Si $\overrightarrow{u} \in E$ est un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}_0$ et si $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ sont celles de $\varphi\left(\overrightarrow{u}\right)$ toujours dans la base $\mathcal{B}_0$, par le calcul matriciel, nous obtenons :

$$\begin{cases} x_1 = & \frac{1}{3}(2x - y + 2z) \\ y_1 = & \frac{1}{3}(2x + 2y - z) \\ z_1 = & \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z) \end{cases}$$

3. *Montrer que φ est une rotation dont l'axe est engendré par le vecteur $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$.*

   Pour le montrer, il suffit de démontrer que le vecteur $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$ est invariant par φ ; cependant, est-ce le seul vecteur invariant ?
   Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est invariant par φ, si et seulement si $\varphi(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u}$, c'est à dire qu'en termes de coordonnées :

$$\begin{cases} x = & \dfrac{1}{3}(2x-y+2z) \\ y = & \dfrac{1}{3}(2x+2y-z) \\ z = & \dfrac{1}{3}(-x+2y+2z) \end{cases} \iff \begin{cases} x+y-2z = & 0 \\ 2x-y-z = & 0 \\ x-2y+z = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y-2z = & 0 \\ y-z = & 0 \end{cases}$$

   L'ensemble S des solutions de ce système est donc $S=\{(\lambda,\lambda,\lambda)\ \text{avec}\ \lambda\in\mathbb{R}\}$ S est un sous-espace vectoriel de E qui admet $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$ pour base.

4. *Soit P le plan vectoriel orthogonal au vecteur $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$ et orienté par le vecteur unitaire $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}\right)$.*
   Calculer la mesure de la restriction de φ à P

   Appelons $\overrightarrow{W}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}\right)$

   Le vecteur $\overrightarrow{U}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}\right)$ est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{W}$ et le vecteur $\overrightarrow{V}=\overrightarrow{W}\wedge\overrightarrow{U}$ est tel que la base $\left\{\overrightarrow{U},\overrightarrow{V},\overrightarrow{W}\right\}$ est directe.

   Par calculs, nous trouvons $\overrightarrow{V}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$

   Par calculs, nous obtenons $\varphi\left(\overrightarrow{U}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

   Comme tout à l'heure, si x est la mesure de l'angle de la rotation, nous avons :
   $\longrightarrow\ \left\langle\overrightarrow{U}\mid\varphi\left(\overrightarrow{U}\right)\right\rangle=\cos x\iff\cos x=\dfrac{1}{2}$
   $\longrightarrow\ \left\langle\overrightarrow{V}\mid\varphi\left(\overrightarrow{U}\right)\right\rangle=\sin x\iff\sin x=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$
   D'où $x=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$
   La matrice de φ dans la base $\left\{\overrightarrow{U},\overrightarrow{V};\overrightarrow{W}\right\}$ est donnée par :

$$\mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{U},\overrightarrow{V};\overrightarrow{W}\right\}}(\varphi)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Exercice 5 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 Démontrer l'identité de Lagrange :

$$(\forall\overrightarrow{u}\in E)\,(\forall\overrightarrow{v}\in E)\left(\langle\overrightarrow{u}\mid\overrightarrow{v}\rangle^2+\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\|^2=\|\overrightarrow{u}\|^2\times\|\overrightarrow{v}\|^2\right)$$

Appelons θ la mesure de l'angle $\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}$.

- ⋆ Nous avons $\langle\overrightarrow{u}\mid\overrightarrow{v}\rangle=\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\cos\theta$, et donc

$$\langle\overrightarrow{u}\mid\overrightarrow{v}\rangle^2=\|\overrightarrow{u}\|^2\times\|\overrightarrow{v}\|^2\cos^2\theta$$

- ⋆ Nous avons aussi : $\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\|=\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\sin\theta$, et donc

$$\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\|^2=\|\overrightarrow{u}\|^2\times\|\overrightarrow{v}\|^2\sin^2\theta$$

Ce qui fait, qu'en additionnant, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v}\rangle^2 + \|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|^2 &= \|\overrightarrow{u}\|^2 \times \|\overrightarrow{v}\|^2 \cos^2\theta + \|\overrightarrow{u}\|^2 \times \|\overrightarrow{v}\|^2 \sin^2\theta \\ &= \|\overrightarrow{u}\|^2 \times \|\overrightarrow{v}\|^2 \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) \\ &= \|\overrightarrow{u}\|^2 \times \|\overrightarrow{v}\|^2\end{aligned}$$

Ce que nous voulions

Exercice 6 :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien d'espace directeur E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Soient $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{E}$ et $C \in \mathcal{E}$, 3 points non alignés

1. *Démontrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$*
   - ⋆ Nous avons $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ et donc :
   $$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}$$
   - ⋆ Sans plus de difficultés, nous avons $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$ et donc :
   $$\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB} = \left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}\right) \wedge \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$$

   D'où nous avons bien l'égalité $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$
2. *Trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que : $\left\langle \overrightarrow{AM} \mid \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)\right\rangle = 0$*

   L'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $\left\langle \overrightarrow{AM} \mid \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)\right\rangle = 0$ est le plan orthogonal à $\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)^{\perp}$ passant par A.
   Or, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Ainsi, $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
   L'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $\left\langle \overrightarrow{AM} \mid \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)\right\rangle = 0$ est donc le plan (ABC)

Exercice 14 :

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. On considère 3 vecteurs de E, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$

1. *Démontrer que $\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\rangle = \langle \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{w}\rangle$*
   - ⋆ Il est clair que l'égalité est vraie si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
   - ⋆ Supposons, maintenant que $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$

     Posons alors $\overrightarrow{i} = \dfrac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}$, et nous considérons la base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$. Dans cette base, les coordonnées du $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ dont :
   $$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \|\overrightarrow{u}\| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$
   - ⋆ Alors $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} b\gamma - c\beta \\ c\alpha - a\gamma \\ a\beta - b\alpha \end{pmatrix}$ et donc $\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\rangle = \|\overrightarrow{u}\| (b\gamma - c\beta)$
   - ⋆ Maintenant, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -c\|\overrightarrow{u}\| \\ b\|\overrightarrow{u}\| \end{pmatrix}$ et donc
   $$\langle \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{w}\rangle = -c\|\overrightarrow{u}\| \times \beta + b\|\overrightarrow{u}\| \times \gamma = \|\overrightarrow{u}\| (-c\beta + b\gamma)$$
   - ⋆ Nous avons donc bien $\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\rangle = \langle \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{w}\rangle$

2. *On appelle <u>produit mixte</u> de trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, et on le note $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]$ le réel :*

$$[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=\langle\overrightarrow{u}\mid\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}\rangle$$

Démontrer que :

(a) $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=[\overrightarrow{v},\overrightarrow{w},\overrightarrow{u}]=[\overrightarrow{w},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}]$

Pour démontrer cette question, nous allons utiliser la question 1 et la bilinéarité du produit scalaire

$\longrightarrow$ <u>Montrons que : $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=[\overrightarrow{v},\overrightarrow{w},\overrightarrow{u}]$</u>

$$\begin{aligned}[\overrightarrow{v},\overrightarrow{w},\overrightarrow{u}] &= \langle\overrightarrow{v}\mid\overrightarrow{w}\wedge\overrightarrow{u}\rangle \text{ par définition}\\ &= \langle\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}\mid\overrightarrow{u}\rangle \text{ par la question 1}\\ &= \langle\overrightarrow{u}\mid\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}\rangle \text{ par la bilinéarité du produit scalaire}\\ &= [\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}] \text{ par définition}\end{aligned}$$

Donc $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=[\overrightarrow{v},\overrightarrow{w},\overrightarrow{u}]$

$\longrightarrow$ <u>Montrons que : $[\overrightarrow{w},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}]=[\overrightarrow{v},\overrightarrow{w},\overrightarrow{u}]$</u>

$$\begin{aligned}[\overrightarrow{w},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}] &= \langle\overrightarrow{w}\mid\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\rangle \text{ par définition}\\ &= \langle\overrightarrow{w}\wedge\overrightarrow{u}\mid\overrightarrow{v}\rangle \text{ par la question 1}\\ &= \langle\overrightarrow{v}\mid\overrightarrow{w}\wedge\overrightarrow{u}\rangle \text{ par la bilinéarité du produit scalaire}\\ &= [\overrightarrow{v},\overrightarrow{w},\overrightarrow{u}]\end{aligned}$$

Nous avons donc bien $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=[\overrightarrow{v},\overrightarrow{w},\overrightarrow{u}]=[\overrightarrow{w},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}]$

(b) $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=-[\overrightarrow{v},\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}]=-[\overrightarrow{u},\overrightarrow{w},\overrightarrow{v}]=-[\overrightarrow{w},\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}]$

$\longrightarrow$ <u>Montrons que $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=-[\overrightarrow{v},\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}]$</u>

$$[\overrightarrow{v},\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}]=\langle\overrightarrow{v}\mid\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{w}\rangle=\langle\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{u}\mid\overrightarrow{w}\rangle=-\langle\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\mid\overrightarrow{w}\rangle-[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]$$

$\longrightarrow$ <u>Montrons que $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=-[\overrightarrow{u},\overrightarrow{w},\overrightarrow{v}]$</u>

$$[\overrightarrow{u},\overrightarrow{w},\overrightarrow{v}]=\langle\overrightarrow{u}\mid\overrightarrow{w}\wedge\overrightarrow{v}\rangle=-\langle\overrightarrow{u}\mid\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}\rangle=-[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]$$

$\longrightarrow$ <u>Montrons que $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=-[\overrightarrow{w},\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}]$</u>

$$[\overrightarrow{w},\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}]=\langle\overrightarrow{w}\mid\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{u}\rangle=-\langle\overrightarrow{w}\mid\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\rangle=-\langle\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\mid\overrightarrow{w}\rangle=-\langle\overrightarrow{u}\mid\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}\rangle=-[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]$$

Nous avons donc bien $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=-[\overrightarrow{v},\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}]=-[\overrightarrow{u},\overrightarrow{w},\overrightarrow{v}]=-[\overrightarrow{w},\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}]$

(c) *Montrer que les 3 vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ forment une base si et seulement si $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]\neq 0$*

De manière équivalente, nous allons montrer que $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=0$ si et seulement si la famille $\{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\}$ est liée.

⋆ Montrons que pour tout $\overrightarrow{u}\in E$ et tout $\overrightarrow{v}\in E$, $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}]=0$
D'après la question précédente où $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=-[\overrightarrow{w},\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}]$, en remplaçant $\overrightarrow{w}$ par $\overrightarrow{u}$, nous obtenons :

$$[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}]=-[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}]$$

c'est à dire $2[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}]=0$.
D'où le résultat

⋆ Supposons que la famille $\{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\}$ est liée.
Il existe alors $\lambda\in\mathbb{R}$ et $\mu\in\mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{w}=\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v}$ et donc :

$$[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=\langle\overrightarrow{u}\mid\overrightarrow{v}\wedge(\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v})\rangle=\langle\overrightarrow{u}\mid\lambda(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{u})\rangle=\lambda\langle\overrightarrow{u}\mid\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{u}\rangle=\lambda[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}]=0$$

Donc, si la famille $\{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\}$ est liée, alors $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=0$

⋆ Réciproquement, si $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=0$, alors $\langle\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\mid\overrightarrow{w}\rangle=0$.
Ceci sgnifie donc que $\overrightarrow{w}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ et que donc $\overrightarrow{w}$ est dans le plan engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
Et donc, la famille $\{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\}$ est liée.

Ainsi, les 3 vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont liés si et seulement si $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=0$ et ces 3 vecteurs forment une base si et seulement si $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]\neq 0$

Exercice 16 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 orienté par une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ Soit $P \subset E$, le plan vectoriel euclidien de base $\mathcal{B}_0 = \left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$. Soit $\overrightarrow{p} \in P$ un vecteur de norme 1.
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, nous considérons l'application φ_α de P dans E définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi_\alpha : P & \longrightarrow & E \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & \varphi_\alpha\left(\overrightarrow{u}\right) = \alpha\overrightarrow{u} + \overrightarrow{p} \wedge \left(\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{u}\right) \end{array}\right.$$

1. *Démontrer que φ_α est une application linéaire de P dans P*

   Ce n'est pas une question très difficile ; elle est, en fait, très calculatoire. Nous allons, pour plus de clarté, résoudre cette question en plusieurs temps
   ⋆ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; alors :
   $$\begin{array}{rl} \varphi_\alpha\left(\lambda\overrightarrow{u}\right) = & \alpha\left(\lambda\overrightarrow{u}\right) + \overrightarrow{p} \wedge \left(\overrightarrow{p} \wedge \left(\lambda\overrightarrow{u}\right)\right) \\ = & \lambda\left(\alpha\overrightarrow{u}\right) + \overrightarrow{p} \wedge \lambda\left(\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{u}\right) \\ = & \lambda\left(\alpha\overrightarrow{u}\right) + \lambda\left(\overrightarrow{p} \wedge \left(\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{u}\right)\right) \\ = & \lambda\left(\alpha\overrightarrow{u} + \overrightarrow{p} \wedge \left(\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{u}\right)\right) \end{array}$$
   C'est à dire $\varphi_\alpha\left(\lambda\overrightarrow{u}\right) = \lambda\varphi_\alpha\left(\overrightarrow{u}\right)$
   ⋆ Soient $\overrightarrow{u} \in E$ et $\overrightarrow{v} \in E$; alors :
   $$\begin{array}{rl} \varphi_\alpha\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) = & \alpha\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) + \overrightarrow{p} \wedge \left(\overrightarrow{p} \wedge \left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right)\right) \\ = & \alpha\overrightarrow{u} + \alpha\overrightarrow{v} + \overrightarrow{p} \wedge \left(\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{u} + \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{v}\right) \\ = & \alpha\overrightarrow{u} + \alpha\overrightarrow{v} + \overrightarrow{p} \wedge \left(\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{u}\right) + \overrightarrow{p} \wedge \left(\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{v}\right) \\ = & \alpha\overrightarrow{u} + \overrightarrow{p} \wedge \left(\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{u}\right) + \alpha\overrightarrow{v} + \overrightarrow{p} \wedge \left(\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{v}\right) \\ = & \varphi_\alpha\left(\overrightarrow{u}\right) + \varphi_\alpha\left(\overrightarrow{v}\right) \end{array}$$
   Donc $\varphi_\alpha\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) = \varphi_\alpha\left(\overrightarrow{u}\right) + \varphi_\alpha\left(\overrightarrow{v}\right)$
   ⋆ L'application φ_α est donc une application linéaire
   Comme $\overrightarrow{u} \in P$ et $\overrightarrow{p} \in P$, alors le vecteur $\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{u}$ est orthogonal à la fois à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{p}$, c'est à dire au plan P ; c'est donc un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{k}$.
   Maintenant, le vecteur $\overrightarrow{p} \wedge \left(\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{u}\right)$ est orthogonal à $\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{p}$ et est donc dans le plan P.
   Ainsi, pour tout $\overrightarrow{u} \in P$, $\varphi_\alpha\left(\overrightarrow{u}\right) \in P$; φ_α est donc une application linéaire de P dans P.
   On peut remarquer que si $\overrightarrow{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{p}$ alors $\varphi_\alpha\left(\overrightarrow{u}\right) = \alpha\overrightarrow{u}$

2. *On suppose $\overrightarrow{p} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right)$ et nous posons $\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$*

   (a) *Vérifier que $\overrightarrow{p} \wedge \left(\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{u}\right) = \left\langle\overrightarrow{p} \mid \overrightarrow{u}\right\rangle\overrightarrow{p} - \overrightarrow{u}$*

   Voilà un simple problème de calculs.

   ⋆ Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, $\overrightarrow{p}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{p} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}x\\ y\\ 0\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ y-x\end{pmatrix}$ d'où :
   $$\overrightarrow{p} \wedge \left(\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{u}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}y-x\\ x-y\\ 0\end{pmatrix}$$
   C'est à dire $\overrightarrow{p} \wedge \left(\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{u}\right) = \dfrac{y-x}{2}\left(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}\right)$
   ⋆ Ensuite, $\left\langle\overrightarrow{p} \mid \overrightarrow{u}\right\rangle = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}}$ et donc
   $$\left\langle\overrightarrow{p} \mid \overrightarrow{u}\right\rangle\overrightarrow{p} = \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right)\right) = \left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right)$$

- ⋆ Nous avons alors :

$$\langle \vec{p} \mid \vec{u} \rangle \vec{p} - \vec{u} = \left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\vec{i}+\vec{j}\right) - x\vec{i} - y\vec{j} = \frac{y-x}{2}\left(\vec{i}-\vec{j}\right)$$

Nous avons ainsi démontré que $\vec{p} \wedge (\vec{p} \wedge \vec{u}) = \langle \vec{p} \mid \vec{u} \rangle \vec{p} - \vec{u}$
Ce que nous voulions

(b) *Quelle est la matrice de φ_α dans la base $\mathcal{B}_0$?*

Nous avons, par définition de φ_α :

$$\varphi_\alpha(\vec{u}) = \alpha\vec{u} + \vec{p} \wedge (\vec{p} \wedge \vec{u})$$

C'est à dire, d'après les calculs ci-dessus :

$$\varphi_\alpha(\vec{u}) = \alpha\vec{u} + \langle \vec{p} \mid \vec{u} \rangle \vec{p} - \vec{u}$$

Trouver la matrice de φ_α dans la base $\mathcal{B}_0$ devient alors facile.
Remarquons que $\left\langle \vec{p} \mid \vec{i} \right\rangle = \left\langle \vec{p} \mid \vec{j} \right\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et qu'alors :

$$\left\langle \vec{p} \mid \vec{i} \right\rangle \vec{p} = \langle \vec{p} \mid \vec{u} \rangle \vec{j} = \frac{1}{2}\left(\vec{i}+\vec{j}\right)$$

⇒ Tout d'abord

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha\left(\vec{i}\right) &= \alpha\vec{i} + \left\langle \vec{p} \mid \vec{i} \right\rangle \vec{p} - \vec{i} \\ &= (\alpha-1)\vec{i} + \frac{1}{2}\left(\vec{i}+\vec{j}\right) \\ &= \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\end{aligned}$$

⇒ De même :

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha\left(\vec{j}\right) &= \alpha\vec{j} + \left\langle \vec{p} \mid \vec{j} \right\rangle \vec{p} - \vec{j} \\ &= (\alpha-1)\vec{j} + \frac{1}{2}\left(\vec{i}+\vec{j}\right) \\ &= \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{i}\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(\varphi_\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \alpha - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(c) *Trouver les noyaux et images de φ_α dans les cas où $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$*

- ⋆ Tout d'abord regardons les conditions pour lesquelles φ_α est bijective ; dans ces cas, noyaux et images sont faciles à trouver. Calculons alors le déterminant de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(\varphi_\alpha)$:

$$\det\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(\varphi_\alpha)\right) = \begin{vmatrix} \alpha - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \alpha - \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \alpha^2 - \alpha = \alpha(\alpha-1)$$

φ_α est donc bijective si et seulement si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$ et dans ces cas $\ker\varphi_\alpha = \left\{\vec{0}\right\}$ et $\mathrm{Im}\varphi_\alpha = P$

- ⋆ <u>Supposons maintenant $\alpha = 0$</u>

Dans ce cas, la matrice de φ_0 est $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(\varphi_0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ De là, nous tirons que $\mathrm{Im}\varphi_0 = \left\{\lambda\left(\vec{i}-\vec{j}\right) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.
Si un vecteur $\vec{u} \in \ker\varphi_0$, alors ses coordonnées vérifient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{-x+y}{2} &=& 0 \\ \dfrac{x-y}{2} &=& 0 \end{array}\right. \iff x = y$$

Ainsi $\ker \varphi_0 = \left\{\lambda\left(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}\right) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

⋆ Supposons maintenant $\alpha = 1$

Dans ce cas, la matrice de φ_1 est $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(\varphi_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ De là, nous tirons que $\mathrm{Im}\varphi_1 = \left\{\lambda\left(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}\right) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

Si un vecteur $\overrightarrow{u} \in \ker \varphi_1$, alors ses coordonnées vérifient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{x+y}{2} & = & 0 \\ \dfrac{x+y}{2} & = & 0 \end{array}\right. \iff x = -y$$

Ainsi $\ker \varphi_1 = \left\{\lambda\left(\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}\right) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

Bizarrement, nous avons $\mathrm{Im}\varphi_0 = \ker \varphi_1$ et $\mathrm{Im}\varphi_1 = \ker \varphi_0$

Exercice 17 :

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension 3 orienté et $\overrightarrow{k} \in E$ un vecteur unitaire de E (i.e. $\left\|\overrightarrow{k}\right\| = 1$) Nous considérons les applications Φ et Π de E dans E définies par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Phi : E & \longrightarrow & E \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & \Phi\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{u} \end{array}\right. \text{ et } \left\{\begin{array}{rcl} \Pi : E & \longrightarrow & E \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & \Pi\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{u} - \left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{u}\right\rangle \overrightarrow{k} \end{array}\right.$$

1. *Démontrez que :*

   (a) *Φ et Π sont des endomorphismes de E*

   i. Que Φ soit un endomorphisme est une propriété complètement liée à la linéarité par rapport à l'une des variables du produit vectoriel

   ii. Montrons que Π est un endomorphisme de E

   Cette linéarité est aussi liée à la linéarité par rapport à l'une des variables du produit scalaire. Très simplement :

   $\longrightarrow$ Pour $\overrightarrow{u} \in E$ et $\overrightarrow{v} \in E$, nous avons :

$$\Pi\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}-\left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right\rangle \overrightarrow{k} = \overrightarrow{u}-\left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{u}\right\rangle \overrightarrow{k}+\overrightarrow{v}-\left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{v}\right\rangle \overrightarrow{k} = \Pi\left(\overrightarrow{u}\right)+\Pi\left(\overrightarrow{v}\right)$$

   $\longrightarrow$ Pour $\overrightarrow{u} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$\Pi\left(\lambda\overrightarrow{u}\right) = \lambda\overrightarrow{u} - \left\langle \overrightarrow{k} \mid \lambda\overrightarrow{u}\right\rangle \overrightarrow{k} = \lambda\overrightarrow{u} - \lambda\left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{u}\right\rangle \overrightarrow{k} = \lambda\Pi\left(\overrightarrow{u}\right)$$

   Π est donc bien linéaire de E dans E, soit un endomorphisme de E

   (b) *Π est la projection orthogonale sur le plan vectoriel $\overrightarrow{P}$ othogonal à $\overrightarrow{k}$*

   Nous allons utiliser, ici, les résultats de 16.1.18

   ⋆ Nous avons $\Pi \circ \Pi = \Pi$

   En effet, pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, nous avons :

$$\begin{aligned} \Pi \circ \Pi\left(\overrightarrow{u}\right) = & \ \Pi\left[\Pi\left(\overrightarrow{u}\right)\right] \\ = & \ \Pi\left(\overrightarrow{u}\right) - \left\langle \overrightarrow{k} \mid \Pi\left(\overrightarrow{u}\right)\right\rangle \overrightarrow{k} \\ = & \ \overrightarrow{u} - \left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{u}\right\rangle \overrightarrow{k} - \left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{u} - \left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{u}\right\rangle \overrightarrow{k}\right\rangle \overrightarrow{k} \\ = & \ \overrightarrow{u} - \left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{u}\right\rangle \overrightarrow{k} - \left(\left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{u}\right\rangle - \left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{u}\right\rangle \left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{k}\right\rangle\right) \overrightarrow{k} \end{aligned}$$

   Comme $\left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{k}\right\rangle = \left\|\overrightarrow{k}\right\|^2 = 1$, nous avons $\left(\left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{u}\right\rangle - \left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{u}\right\rangle \left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{k}\right\rangle\right) = 0$, et donc $\Pi \circ \Pi\left(\overrightarrow{u}\right) = \Pi\left(\overrightarrow{u}\right)$

   Donc, $\Pi \circ \Pi = \Pi$ est un projecteur.

- ⋆ <u>Le noyau de Π est la droite engendrée par $\overrightarrow{k}$</u>
  On commence par calculer $\Pi\left(\overrightarrow{k}\right)$:
  $$\Pi\left(\overrightarrow{k}\right) = \overrightarrow{k} - \left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{k} \right\rangle \overrightarrow{k} = \overrightarrow{k} - \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$$
  Donc $\overrightarrow{k} \in \ker \Pi$
  Réciproquement, si $\overrightarrow{u} \in \ker \Pi$, alors $\Pi\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{0}$ et donc :
  $$\overrightarrow{u} - \left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{u} \right\rangle \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{u} = \left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{u} \right\rangle \overrightarrow{k}$$
  Ce qui veut dire que $\overrightarrow{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{k}$ et donc que le noyau de Π est exactement la droite engendrée par $\overrightarrow{k}$
- ⋆ <u>Démontrons maintenant que pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, nous avons $\left\langle \Pi\left(\overrightarrow{u}\right) \mid \overrightarrow{k} \right\rangle = 0$</u>
  C'est assez simple :
  $$\begin{aligned}\left\langle \Pi\left(\overrightarrow{u}\right) \mid \overrightarrow{k} \right\rangle &= \left\langle \overrightarrow{u} - \left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{u} \right\rangle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{k} \right\rangle \\ &= \left\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{k} \right\rangle - \left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{u} \right\rangle \left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{k} \right\rangle \\ &= 0 \text{ car } \left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{k} \right\rangle = \left\|\overrightarrow{k}\right\|^2 = 1\end{aligned}$$

(c) $\Phi \circ \Phi = -\Pi$

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de E. alors :
$$\Phi \circ \Phi\left(\overrightarrow{u}\right) = \Phi\left[\Phi\left(\overrightarrow{u}\right)\right] = \overrightarrow{k} \wedge \Phi\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{k} \wedge \left(\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{u}\right)$$
Soit $\overrightarrow{j} \in E$ un vecteur tel que $\left\|\overrightarrow{j}\right\| = 1$ et $\left\langle \overrightarrow{j} \mid \overrightarrow{k} \right\rangle = 0$ et tel que $\overrightarrow{u}$ soit dans le plan de base $\left\{\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$.
Alors $\overrightarrow{u} = \left\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{j} \right\rangle \overrightarrow{j} + \left\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{k} \right\rangle \overrightarrow{k}$
Soit $\overrightarrow{i} \in E$ un vecteur tel que $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ forme une base orthonormée directe de E. Alors :
$$\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{k} \wedge \left(\left\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{j} \right\rangle \overrightarrow{j} + \left\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{k} \right\rangle \overrightarrow{k}\right) = \left\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{j} \right\rangle \left(\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{j}\right) = -\left\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{j} \right\rangle \overrightarrow{i}$$
Maintenant,
$$\overrightarrow{k} \wedge \left(\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{k} \wedge \left(-\left\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{j} \right\rangle \overrightarrow{i}\right) = -\left\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{j} \right\rangle \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i} = -\left\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{j} \right\rangle \overrightarrow{j}$$
Nous avons :
$$\overrightarrow{u} = \left\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{j} \right\rangle \overrightarrow{j} + \left\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{k} \right\rangle \overrightarrow{k} \iff \left\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{j} \right\rangle \overrightarrow{j} = \overrightarrow{u} - \left\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{k} \right\rangle \overrightarrow{k} = \Pi\left(\overrightarrow{u}\right)$$
C'est à dire que, pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, nous avons $\Phi \circ \Phi\left(\overrightarrow{u}\right) = -\Pi\left(\overrightarrow{u}\right)$, c'est à dire $\Phi \circ \Phi = -\Pi$.
Ce que nous voulions
Nous venons donc de démontrer que, pour tout vecteur $\overrightarrow{u} \in E$, nous avons :
$$\overrightarrow{k} \wedge \left(\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{u}\right) = \left\langle \overrightarrow{k} \mid \overrightarrow{u} \right\rangle \overrightarrow{k} - \overrightarrow{u}$$

2. *Démontrer que, pour tout vecteur $\overrightarrow{u} \in E$ et $\overrightarrow{v} \in E$, nous avons :*
$$\overrightarrow{u} \wedge \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right) = \left\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \right\rangle \overrightarrow{u} - \left\|\overrightarrow{u}\right\|^2 \overrightarrow{v}$$

Soient $\overrightarrow{u} \in E$ et $\overrightarrow{v} \in E$

$\longrightarrow$ Si $\vec{u} = \vec{0}$, il est clair que nous avons $\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{0}$ et $\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle \vec{u} - \|\vec{u}\|^2 \vec{v} = \vec{0}$. Nous avons donc l'égalité souhaitée

$\longrightarrow$ Supposons maintenant $\vec{u} \neq \vec{0}$ et posons $\vec{k} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$. Alors, nous avons $\left\|\vec{k}\right\| = 1$, et d'après ce que nous avons démontré précédemment, pour tout $\vec{v} \in E$:

$$\vec{k} \wedge \left(\vec{k} \wedge \vec{v}\right) = \left\langle \vec{k} \mid \vec{v} \right\rangle \vec{k} - \vec{v}$$

Or :

$$\vec{k} \wedge \left(\vec{k} \wedge \vec{v}\right) = \left\langle \vec{k} \mid \vec{v} \right\rangle \vec{k} - \vec{v}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \wedge \left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \wedge \vec{v}\right) = \left\langle \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \mid \vec{v} \right\rangle \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} - \vec{v}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{1}{\|\vec{u}\|^2} (\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v})) = \frac{1}{\|\vec{u}\|^2} \langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle \vec{u} - \vec{v}$$

En multipliant les deux membres de la dernière égalité par $\|\vec{u}\|^2$, nous obtenons :

$$\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle \vec{u} - \|\vec{u}\|^2 \vec{v}$$

3. *Soient $\vec{u} \in E$, $\vec{v} \in E$ et $\vec{w} \in E$ trois vecteurs de E*

 (a) *On suppose que le vecteur $\vec{u} \in E$ n'est pas nul. Il faut montrer que $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \langle \vec{u} \mid \vec{w} \rangle \vec{v} - \langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle \vec{w}$*

 Voilà une question qui demande calculs et soins...

 Comme $\vec{u} \neq \vec{0}$, nous appellons $\vec{u_1} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ et donc $\|\vec{u_1}\| = 1$.

 $\Rightarrow$ On montre qu'il existe un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \lambda \vec{u} + \vec{v_1}$ et $\langle \vec{u} \mid \vec{v_1} \rangle = 0$

 Soit $\vec{j} \in E$ tel que $\left\|\vec{j}\right\| = 1$, $\left\langle \vec{u_1} \mid \vec{j} \right\rangle = 0$ et $\vec{v}$ appartienne au plan de base orthonormée $\left\{\vec{u_1}, \vec{j}\right\}$.

 Alors $\vec{v} = \langle \vec{u_1} \mid \vec{v} \rangle \vec{u_1} + \left\langle \vec{j} \mid \vec{v} \right\rangle \vec{j} = \dfrac{\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} + \left\langle \vec{j} \mid \vec{v} \right\rangle \vec{j}$

 En posant $\lambda = \dfrac{\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|^2}$ et $\vec{v_1} = \left\langle \vec{j} \mid \vec{v} \right\rangle \vec{j}$, nous obtenons $\vec{v} = \lambda \vec{u} + \vec{v_1}$

 $\Rightarrow$ On montre qu'il existe un nombre réel $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{w} = \mu \vec{u} + \vec{w_1}$ et $\langle \vec{u} \mid \vec{w_1} \rangle = 0$

 La méthode est la même.
 Soit $\vec{k} \in E$ tel que $\left\|\vec{k}\right\| = 1$, $\left\langle \vec{u_1} \mid \vec{k} \right\rangle = 0$ et $\vec{w}$ appartienne au plan de base orthonormée $\left\{\vec{u_1}, \vec{k}\right\}$.

 Alors $\vec{w} = \langle \vec{u_1} \mid \vec{w} \rangle \vec{u_1} + \left\langle \vec{k} \mid \vec{w} \right\rangle \vec{k} = \dfrac{\langle \vec{u} \mid \vec{w} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} + \left\langle \vec{k} \mid \vec{w} \right\rangle \vec{k}$

 En posant $\mu = \dfrac{\langle \vec{u} \mid \vec{w} \rangle}{\|\vec{u}\|^2}$ et $\vec{w_1} = \left\langle \vec{k} \mid \vec{w} \right\rangle \vec{k}$, nous obtenons $\vec{w} = \mu \vec{u} + \vec{w_1}$

 $\Rightarrow$ Intéressons nous maintenant à $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$

 - Commençons par $\vec{v} \wedge \vec{w}$
 D'après ce que nous venons de voir, nous avons :

$$\begin{aligned} \vec{v} \wedge \vec{w} &= (\lambda \vec{u} + \vec{v_1}) \wedge (\mu \vec{u} + \vec{w_1}) \\ &= \lambda\mu (\vec{u} \wedge \vec{u}) + \lambda (\vec{u} \wedge \vec{w_1}) + \mu (\vec{v_1} \wedge \vec{u}) + \vec{v_1} \wedge \vec{w_1} \\ &= \lambda (\vec{u} \wedge \vec{w_1}) + \mu (\vec{v_1} \wedge \vec{u}) + \vec{v_1} \wedge \vec{w_1} \\ &= \lambda (\vec{u} \wedge \vec{w_1}) - \mu (\vec{u} \wedge \vec{v_1}) + \vec{v_1} \wedge \vec{w_1} \end{aligned}$$

 - Attelons nous, maintenant à $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$
 D'après les calculs précédents, nous avons :

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) &= \vec{u} \wedge (\lambda (\vec{u} \wedge \vec{w_1}) - \mu (\vec{u} \wedge \vec{v_1}) + \vec{v_1} \wedge \vec{w_1}) \\ &= \lambda (\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{w_1})) - \mu (\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v_1})) + \vec{u} \wedge (\vec{v_1} \wedge \vec{w_1}) \end{aligned}$$

- D'après une question précédente,

$$\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w_1}) = \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{w_1} \rangle \overrightarrow{u} - \|\overrightarrow{u}\|^2 \overrightarrow{w_1}$$

  Et aussi

$$\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v_1}) = \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v_1} \rangle \overrightarrow{u} - \|\overrightarrow{u}\|^2 \overrightarrow{v_1}$$

- Regardons $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{w_1})$
  Tout d'abord, $\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{w_1}$ est un vecteur colinéaire à un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{w_1}$, donc colinéaire à $\overrightarrow{u}$. Ainsi, $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{w_1}) = \overrightarrow{0}$
- Et donc :

$$\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = \lambda \left(\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{w_1} \rangle \overrightarrow{u} - \|\overrightarrow{u}\|^2 \overrightarrow{w_1} \right) - \mu \left(\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v_1} \rangle \overrightarrow{u} - \|\overrightarrow{u}\|^2 \overrightarrow{v_1} \right)$$

  ....Le travail n'est pas fini !!
- Regardons $\lambda \left(\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{w_1} \rangle \overrightarrow{u} - \|\overrightarrow{u}\|^2 \overrightarrow{w_1} \right)$
  La clef de la démonstration tient en :

$$\overrightarrow{w} = \mu \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w_1} \Longleftrightarrow \overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{w} - \mu \overrightarrow{u}$$

  Donc :

$$\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{w_1} \rangle = \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{w} - \mu \overrightarrow{u} \rangle = \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{w} \rangle - \mu \|\overrightarrow{u}\|^2 = \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{w} \rangle - \frac{\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{w} \rangle}{\|\overrightarrow{u}\|^2} \times \|\overrightarrow{u}\|^2 = 0$$

  Et pour finir ce point :

$$\lambda \left(\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{w_1} \rangle \overrightarrow{u} - \|\overrightarrow{u}\|^2 \overrightarrow{w_1} \right) = -\lambda \|\overrightarrow{u}\|^2 (\overrightarrow{w} - \mu \overrightarrow{u}) = -\lambda \|\overrightarrow{u}\|^2 \overrightarrow{w} + \lambda\mu \overrightarrow{u}$$

- Regardons maintenant $\mu \left(\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v_1} \rangle \overrightarrow{u} - \|\overrightarrow{u}\|^2 \overrightarrow{v_1} \right)$
  Symétriquement, nous avons $\mu \left(\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v_1} \rangle \overrightarrow{u} - \|\overrightarrow{u}\|^2 \overrightarrow{v_1} \right) = -\mu \|\overrightarrow{u}\|^2 \overrightarrow{v} + \lambda\mu \overrightarrow{u}$
- En synthèse :

$$\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = \mu \|\overrightarrow{u}\|^2 \overrightarrow{v} - \lambda \|\overrightarrow{u}\|^2 \overrightarrow{w} = \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{w} \rangle \overrightarrow{v} - \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle \overrightarrow{w}$$

Ce que nous voulions

(b) *Démontrer que la formule précédente est vraie même si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$*

Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{0} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{0}$ et $\left\langle \overrightarrow{0} \mid \overrightarrow{w} \right\rangle \overrightarrow{v} - \left\langle \overrightarrow{0} \mid \overrightarrow{v} \right\rangle \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$

La formule précédente est donc vraie même si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

Chapitre 21

Isométries affines

21.1 Groupe des isométries

21.1.1 Définition

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien
On appelle isométrie de $\mathcal{E}$ toute application $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ telle que :

$$(\forall M \in \mathcal{E})\,(\forall N \in \mathcal{E})\left(\left\|\overrightarrow{f(M)\,f(N)}\right\| = \left\|\overrightarrow{MN}\right\|\right)$$

Remarque 1 :

En posant $M' = f(M)$ et $N' = f(N)$, f est une isométrie si et seulement si $M'N' = MN$

Exemple 1 :

Les isométries existent !! Nous allons commencer par en présenter les plus simples :

1. Bien entendu, **l'application identique** $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ est une isométrie
2. **Les translations** sont des isométries.

   Soit $\overrightarrow{u} \in E$ et $T_{\overrightarrow{u}} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.
   Alors, pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $N \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{MT_{\overrightarrow{u}}(M)} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{NT_{\overrightarrow{u}}(N)} = \overrightarrow{u}$. Donc :

   $$\overrightarrow{T_{\overrightarrow{u}}(M)\,T_{\overrightarrow{u}}(N)} = \overrightarrow{T_{\overrightarrow{u}}(M)\,M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NT_{\overrightarrow{u}}(N)} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{u} = \overrightarrow{MN}$$

   Ainsi, $\left\|\overrightarrow{T_{\overrightarrow{u}}(M)\,T_{\overrightarrow{u}}(N)}\right\| = \left\|\overrightarrow{MN}\right\|$. Et donc, une translation est une isométrie.
   Nous venons aussi de redémontrer que l'endomorphisme associé à une translation est l'application identique
3. Soit $\Omega \in \mathcal{E}$; alors, **la symétrie centrale de centre Ω ou l'homothétie de centre Ω et de rapport** -1 est une isométrie

   Nous appelons $H_{\Omega,-1}$ l'homothétie de centre Ω et de rapport -1.
   Alors, pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $N \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{\Omega H_{\Omega,-1}(M)} = -\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{\Omega H_{\Omega,-1}(N)} = -\overrightarrow{\Omega N}$. Donc :

   $$\overrightarrow{H_{\Omega,-1}(M)\,H_{\Omega,-1}(N)} = \overrightarrow{H_{\Omega,-1}(M)\,\Omega} + \overrightarrow{\Omega H_{\Omega,-1}(N)} = \overrightarrow{\Omega M} - \overrightarrow{\Omega N} = \overrightarrow{NM}$$

   Ainsi, $\left\|\overrightarrow{H_{\Omega,-1}(M)\,H_{\Omega,-1}(N)}\right\| = \left\|-\overrightarrow{MN}\right\| = \left\|\overrightarrow{MN}\right\|$. Et donc, une symétrie centrale est une isométrie.
4. Toute homothétie de rapport $k \neq \pm 1$ n'est pas une isométrie

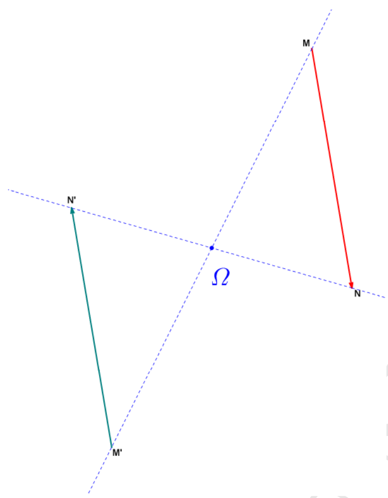


FIGURE 21.1 – Une homothétie de centre Ω et de rapport -1 est une isométrie

21.1.2 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien et $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une isométrie. Alors
f conserve le produit scalaire, c'est à dire que pour tout point $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{E}$, $C \in \mathcal{E}$ et $D \in \mathcal{E}$:

$$\left\langle \overrightarrow{f(A)\,f(B)} \mid \overrightarrow{f(C)\,f(D)} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{CD} \right\rangle$$

Démonstration

Nous utilisons la formule de polarisation vue en 16.1.9 ; de là, nous tirons, pour tout point $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{E}$, $C \in \mathcal{E}$:

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle = -\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{CA} \right\rangle &= \frac{1}{2}\left[\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}\right\|^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{CB}\right\|^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left\|\overrightarrow{f(A)\,f(B)}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{f(A)\,f(C)}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{f(C)\,f(B)}\right\|^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left\|\overrightarrow{f(A)\,f(B)}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{f(A)\,f(C)}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{f(A)\,f(B)} - \overrightarrow{f(A)\,f(C)}\right\|^2\right] \\
&= \left\langle \overrightarrow{f(A)\,f(B)} \mid \overrightarrow{f(A)\,f(C)} \right\rangle
\end{aligned}$$

Soient, maintenant 4 points $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{E}$, $C \in \mathcal{E}$ et $D \in \mathcal{E}$, alors :

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{CD} \right\rangle &= \left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \right\rangle \\
&= \left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AD} \right\rangle - \left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle \\
&= \left\langle \overrightarrow{f(A)\,f(B)} \mid \overrightarrow{f(A)\,f(D)} \right\rangle - \left\langle \overrightarrow{f(A)\,f(B)} \mid \overrightarrow{f(A)\,f(C)} \right\rangle \\
&= \left\langle \overrightarrow{f(A)\,f(B)} \mid \overrightarrow{f(A)\,f(D)} - \overrightarrow{f(A)\,f(C)} \right\rangle \\
&= \left\langle \overrightarrow{f(A)\,f(B)} \mid \overrightarrow{f(C)\,f(D)} \right\rangle
\end{aligned}$$

f, isométrie, conserve donc le produit scalaire.

Remarque 2 :

Une isométrie conserve donc les angles droits et les angles non orientés puisque :

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{\left\langle \overrightarrow{f(A)f(B)} \mid \overrightarrow{f(A)f(C)} \right\rangle}{\left\|\overrightarrow{f(A)f(B)}\right\| \left\|\overrightarrow{f(A)f(C)}\right\|} = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{f(A)f(B)}, \overrightarrow{f(A)f(C)}}\right)$$

21.1.3 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien et $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application quelconque. Alors f est une isométrie de $\mathcal{E}$ si et seulement si :

1. f est une application affine
2. $\overrightarrow{f}$, l'endomorphisme associé à f est un endomorphisme orthogonal (c'est à dire $\overrightarrow{f} \in \mathcal{O}(E)$)

Démonstration

1. Supposons f affine et $\overrightarrow{f} \in \mathcal{O}(E)$
   En d'autres termes, commençons par le plus simple !
   Soient $M \in \mathcal{E}$ et $N \in \mathcal{E}$. Alors :
   $$\left\|\overrightarrow{f(M)f(N)}\right\| = \left\|\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{MN}\right)\right\| = \left\|\overrightarrow{MN}\right\|$$
   f est donc une isométrie de $\mathcal{E}$
2. Réciproquement, supposons que f soit une isométrie de $\mathcal{E}$
   Ce ci veut dire que, pour tout $M \in \mathcal{E}$ et $N \in \mathcal{E}$, nous avons $\left\|\overrightarrow{f(M)f(N)}\right\| = \left\|\overrightarrow{MN}\right\|$
   Fixons $A \in \mathcal{E}$ [1].
   Nous construisons $\varphi : E \longrightarrow E$, en posant :
   $$\begin{cases} \varphi : E & \longrightarrow & E \\ \overrightarrow{AM} & \longmapsto & \varphi\left(\overrightarrow{AM}\right) = \overrightarrow{f(A)f(M)} \end{cases}$$
   Pour montrer que φ est un endomorphisme orthogonal, il suffit, d'après le théorème 16.2.4, de démontrer que φ conserve le produit scalaire.
   Soient $\overrightarrow{u} \in E$ et $\overrightarrow{v} \in E$
   Il existe un unique point $M \in \mathcal{E}$ et un unique point $N \in \mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AN}$, et donc :
   $$\left\langle \varphi(\overrightarrow{u}) \mid \varphi(\overrightarrow{v}) \right\rangle = \left\langle \varphi\left(\overrightarrow{AM}\right) \mid \varphi\left(\overrightarrow{AN}\right) \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{f(A)f(M)} \mid \overrightarrow{f(A)f(N)} \right\rangle$$
   Nous avons :
   $$\begin{aligned} \left\|\overrightarrow{MN}\right\|^2 &= \left\|\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}\right\|^2 \\ &= \left\langle \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} \right\rangle \\ &= \left\|\overrightarrow{AN}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 - 2\left\langle \overrightarrow{AN} \mid \overrightarrow{AM} \right\rangle \end{aligned}$$
   C'est à dire :
   $$2\left\langle \overrightarrow{AN} \mid \overrightarrow{AM} \right\rangle = \left\|\overrightarrow{AN}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{MN}\right\|^2$$
   De même, par un calcul semblable, nous obtenons :
   $$2\left\langle \overrightarrow{f(A)f(N)} \mid \overrightarrow{f(A)f(M)} \right\rangle = \left\|\overrightarrow{f(A)f(N)}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{f(A)f(M)}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{f(M)f(N)}\right\|^2$$
   Comme f est une isométrie, nous avons $\left\langle \overrightarrow{AN} \mid \overrightarrow{AM} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{f(A)f(N)} \mid \overrightarrow{f(A)f(M)} \right\rangle$, c'est à dire :
   $$\left\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \right\rangle = \left\langle \varphi(\overrightarrow{u}) \mid \varphi(\overrightarrow{v}) \right\rangle$$
   φ est donc un endomorphisme orthogonal, et f est affine d'endomorphisme associé φ

1. Nous nous fixons donc une origine dans l'espace affine $\mathcal{E}$. Ce faisant, nous « tuons » la structure affine pour aller vers la structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Remarque 3 :

1. Une isométrie f de $\mathcal{E}$ est entièrement déterminée par l'image d'un point $A \in \mathcal{E}$ et la donnée de son endomorphisme orthogonal associé $\overrightarrow{f} \in \mathcal{O}(E)$
2. Une isométrie, étant une application affine, conserve les barycentres.

21.1.4 Corollaire

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien et $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une isométrie
Alors f transforme tout repère orthonormé en un autre repère orthonormé

21.1.5 Proposition

Toute isométrie affine est bijective

Voilà un énoncé brutal ; bien plus facile à retenir dans sa forme résumée

Démonstration

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien et f une isométrie de $\mathcal{E}$ d'application linéaire associée $\overrightarrow{f} \in \mathcal{O}(E)$.
$\overrightarrow{f}$ étant un endomorphisme orthogonal est, d'après 16.2.5 bijectif ; d'après 18.2.6, f est aussi bijective.

Remarque 4 :

Donc, une isométrie transforme une droite en une droite et un plan en un plan

Exemple 2 :

Le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Soit f, l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ de définition analytique :

$$\begin{cases} x' = & -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 1 \\ y' = & \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 2 \end{cases}$$

Il faut montrer que f est une isométrie de $\mathcal{P}$

Soient $M(x_M, y_M) \in \mathcal{P}$ et $N(x_N, y_N) \in \mathcal{P}$.
On appelle $M' = f(M)$ et $N' = f(N)$, alors, d'après la définition :

$$\begin{cases} x'_M = & -\frac{3}{5}x_M + \frac{4}{5}y_M - 1 \\ y'_M = & \frac{4}{5}x_M + \frac{3}{5}y_M + 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x'_N = & -\frac{3}{5}x_N + \frac{4}{5}y_N - 1 \\ y'_N = & \frac{4}{5}x_N + \frac{3}{5}y_N + 2 \end{cases}$$

Et :

$$\begin{aligned} M'N'^2 = & \left(x'_M - x'_N\right)^2 + \left(y'_M - y'_N\right)^2 \\ = & \left[-\frac{3}{5}x_M + \frac{4}{5}y_M + \frac{3}{5}x_N - \frac{4}{5}y_N\right]^2 + \left[\frac{4}{5}x_M + \frac{3}{5}y_M - \frac{4}{5}x_N - \frac{3}{5}y_N\right]^2 \\ = & \left[-\frac{3}{5}\left(x_M - x_N\right) + \frac{4}{5}\left(y_M - y_N\right)\right]^2 + \left[\frac{4}{5}\left(x_M - x_N\right) + \frac{3}{5}\left(y_M - y_N\right)\right]^2 \\ = & \frac{9}{25}\left(x_M - x_N\right)^2 + \frac{16}{25}\left(y_M - y_N\right)^2 - \frac{24}{5}\left(x_M - x_N\right)\left(y_M - y_N\right) + \\ & \frac{16}{25}\left(x_M - x_N\right)^2 + \frac{9}{25}\left(y_M - y_N\right)^2 + \frac{24}{25}\left(x_M - x_N\right)\left(y_M - y_N\right) \\ = & \left(x_M - x_N\right)^2 + \left(y_M - y_N\right)^2 \\ = & MN^2 \end{aligned}$$

Comme $M'N'^2 = MN^2 \Longleftrightarrow M'N' = MN$, nous venons de démontrer que f est une isométrie de $\mathcal{P}$

21.1.6 Proposition

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien
Soient $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ et $C \in \mathcal{P}$ 3 points non alignés (Ils forment donc un repère affine de $\mathcal{P}$)
Soient $A' \in \mathcal{P}$, $B' \in \mathcal{P}$ et $C' \in \mathcal{P}$ 3 points tels que $A'B' = AB$, $B'C' = BC$ et $A'C' = AC$.
Alors il existe une et une seule isométrie f de $\mathcal{P}$ telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$

Démonstration

1. Nous montrons que $\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{A'B'} \mid \overrightarrow{A'C'} \right\rangle$
   - ⋆ Nous avons $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, et donc, comme $CB^2 = \left\langle \overrightarrow{CB} \mid \overrightarrow{CB} \right\rangle$, nous avons :
   $$CB^2 = AB^2 + AC^2 - 2\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle$$
   - ⋆ De même, $C'B'^2 = A'B'^2 + A'C'^2 - 2\left\langle \overrightarrow{A'B'} \mid \overrightarrow{A'C'} \right\rangle$
   - ⋆ De l'égalité $B'C' = BC$, nous tirons :
   $$A'B'^2 + A'C'^2 - 2\left\langle \overrightarrow{A'B'} \mid \overrightarrow{A'C'} \right\rangle = AB^2 + AC^2 - 2\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle$$
   Et des égalités $A'B' = AB$, $B'C' = BC$, nous déduisons $\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{A'B'} \mid \overrightarrow{A'C'} \right\rangle$
2. Il existe une et une seule isométrie f de $\mathcal{P}$ telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$
   Nous appelons $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ le plan vectoriel associé au plan affine $\mathcal{P}$
   Comme (A, B, C) est un repère affine de $\mathcal{P}$, la famille de vecteurs $\left\{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right\}$ est une base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.
   Il existe un et un seul endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}\left(\overrightarrow{\mathcal{P}}\right)$ tel que $\varphi\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{A'B'}$ et $\varphi\left(\overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{A'C'}$
   D'après 18.2.4, il existe une et une seule application affine f telle que $f(A) = A'$ d'application linéaire associée $\varphi \in \mathcal{L}\left(\overrightarrow{\mathcal{P}}\right)$.
   Il faudra donc montrer que f est une isométrie.
   Soient donc $M \in \mathcal{P}$ et $N \in \mathcal{P}$; nous appelons $M' = f(M)$ et $N' = f(N)$; alors $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ et :
   $$\overrightarrow{M'N'} = \varphi\left(\overrightarrow{MN}\right) = \varphi\left(x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}\right) = x\varphi\left(\overrightarrow{AB}\right) + y\varphi\left(\overrightarrow{AC}\right) = x\overrightarrow{A'B'} + y\overrightarrow{A'C'}$$
   Alors : $M'N'^2 = \left\langle \overrightarrow{M'N'} \mid \overrightarrow{M'N'} \right\rangle = x^2A'B'^2 + y^2A'C'^2 + 2\left\langle \overrightarrow{A'B'} \mid \overrightarrow{A'C'} \right\rangle$
   Des égalités de l'hypothèse, nous tirons $M'N'^2 = x^2AB^2 + y^2AC^2 + 2\left\langle \overrightarrow{A'B'} \mid \overrightarrow{A'C'} \right\rangle$ et comme nous avons démontré que $\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{A'B'} \mid \overrightarrow{A'C'} \right\rangle$, nous avons :
   $$M'N'^2 = x^2AB^2 + y^2AC^2 + 2\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle = MN^2$$
   Donc, comme $M'N'^2 = MN^2 \iff M'N' = MN$, nous en déduisons que f est une isométrie.

21.1.7 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien ; on appelle $\mathcal{I}s(\mathcal{E})$, l'ensemble des isométries de $\mathcal{E}$
Alors, $(\mathcal{I}s(\mathcal{E}), \circ)$ l'ensemble des isométries de $\mathcal{E}$ muni de la loi de composition des applications est un groupe

Démonstration

1. Tout d'abord, $\mathcal{I}s(\mathcal{E})$ est non vide
   En effet, nous avons vu que l'application identique $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ est une isométrie et donc $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$

2. La loi $\circ$ est-elle interne ?
   Autrement dit, si f et g sont 2 isométries, est-ce que $f \circ g$ est une isométrie ? ?
   Soient donc f et g 2 isométries et $M \in \mathcal{E}$ et $N \in \mathcal{E}$ 2 points de $\mathcal{E}$. Alors :
$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{f \circ g(M) f \circ g(N)}\right\| &= \left\|\overrightarrow{f(g(M)) f(g(N))}\right\| \\ &= \left\|\overrightarrow{g(M) g(N)}\right\| \text{ car } f \text{ est une isométrie} \\ &= \left\|\overrightarrow{MN}\right\| \text{ car } g \text{ est une isométrie}\end{aligned}$$
   Ainsi, pour tout $M \in \mathcal{E}$ et $N \in \mathcal{E}$, nous avons $\left\|\overrightarrow{f \circ g(M) f \circ g(N)}\right\| = \left\|\overrightarrow{MN}\right\|$ et $f \circ g$ est donc une isométrie et la loi $\circ$ est donc une loi interne.
3. Si $f \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$, avons-nous $f^{-1} \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$?
   Soit donc $f \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$
   - ⋆ f étant une isométrie, f est bijective et f^{-1} existe donc
   - ⋆ Il faut maintenant montrer que f^{-1} est une isométrie.
     Soient $M \in \mathcal{E}$ et $N \in \mathcal{E}$ et $M_1 = f(M)$ tout comme $N_1 = f(N)$
     Nous avons donc $M = f^{-1}(M_1)$ et $N = f^{-1}(N_1)$. Nous avons :
$$\left\|\overrightarrow{f^{-1}(M_1) f^{-1}(N_1)}\right\| = \left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \left\|\overrightarrow{f(M) f(N)}\right\| = \left\|\overrightarrow{M_1N_1}\right\|$$
     Nous avons donc bien $f^{-1} \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$
4. Associativité de $\circ$
   La loi $\circ$ étant associative pour la composition de toutes les applications, elle le sera, en particulier dans $\mathcal{I}s(\mathcal{E})$

Nous venons de montrer que $(\mathcal{I}s(\mathcal{E}), \circ)$ est un groupe.

21.1.8 Définition de déplacement

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien E
Soit $f \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$ d'endomorphisme associé $\overrightarrow{f}$
Alors f est un déplacement (ou une isométrie positive) si et seulement si $\overrightarrow{f} \in \mathcal{O}^+(E)$

Exemple 3 :

Il est clair que les translations font parties des déplacements puisque l'endomorphisme associé est l'identité.

21.1.9 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien ; on appelle $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ ou $\mathcal{I}s^+(\mathcal{E})$, l'ensemble des déplacements de $\mathcal{E}$
Alors, $(\mathcal{D}(\mathcal{E}), \circ)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{I}s(\mathcal{E}), \circ)$

Démonstration

1. Tout d'abord $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \neq \emptyset$
   En effet, on y trouve au moins les translations ! ! On y trouve surtout $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ qui est le neutre pour la composition des applications.
2. Soient $f \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ et $g \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Montrons que $f \circ g^{-1} \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$
   - ⋆ Que $f \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ signifie que f est une isométrie et que l'endomorphisme associé $\overrightarrow{f} \in \mathcal{O}^+(E)$
   - ⋆ De la même manière, puisque $g \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$, g est une isométrie telle que $\overrightarrow{g} \in \mathcal{O}^+(E)$

   $\mathcal{O}^+(E)$ étant un groupe, $\overrightarrow{g}^{-1} \in \mathcal{O}^+(E)$ et $\overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}^{-1} \in \mathcal{O}^+(E)$
   D'autre part, $(\mathcal{I}s(\mathcal{E}), \circ)$ étant aussi un groupe, $f \circ g^{-1} \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$ et comme $\overrightarrow{f \circ g^{-1}} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}^{-1}$, nous avons $f \circ g^{-1} \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$

Nous venons de démontrer que $(\mathcal{D}(\mathcal{E}), \circ)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{I}s(\mathcal{E}), \circ)$

Remarque 5 :

1. L'ensemble $\mathcal{T}$ des translations de $\mathcal{E}$ est un sous groupe de $(\mathcal{D}(\mathcal{E}), \circ)$
2. Soit $f \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ et $\overrightarrow{f} \in \mathcal{O}^+(E)$ la rotation qui lui est associée. L'angle de $f \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ est celui de la rotation $\overrightarrow{f} \in \mathcal{O}^+(E)$
Par exemple, l'angle associé à une translation est l'angle nul.
3. Soient $f \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ et $g \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$, $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{g}$ les rotations associées. Alors, l'angle de $f \circ g$ est celui de $\overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$ *(somme des anles de* $\overrightarrow{f}$ *et* $\overrightarrow{g}$*)*
4. L'angle du déplacement f^{-1} est l'opposé de celui de f

21.1.10 Définition d'antidéplacement

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien E
Soit $f \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$ d'endomorphisme associé $\overrightarrow{f}$
Alors f est un antidéplacement (ou une isométrie négative) si et seulement si $\overrightarrow{f} \in \mathcal{O}^-(E)$
On appelle $\mathcal{I}s^-(\mathcal{E})$, l'ensemble des antidéplacements de $\mathcal{E}$

21.1.11 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien

1. La composée de 2 antidéplacements de $\mathcal{E}$ est un déplacement de $\mathcal{E}$
2. La composée d'un déplacement de $\mathcal{E}$ et d'un antidéplacement de $\mathcal{E}$ est un antidéplacement de $\mathcal{E}$

Démonstration

La démonstration est complètement liée aux propriétés de $\mathcal{O}(E)$, $\mathcal{O}^+(E)$ et $\mathcal{O}^-(E)$ et laissée au lecteur

21.1.12 Théorème : décomposition d'une isométrie affine

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien
Toute isométrie $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ peut s'écrire de la forme $f = T \circ g$ où T est une translation et g une isométrie de $\mathcal{E}$ qui admet au moins un point fixe

Démonstration

Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une isométrie et $A \in \mathcal{E}$.
On pose $A' = f(A)$ et $T_{\overrightarrow{AA'}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ et considérons $g = T_{\overrightarrow{AA'}} \circ f$. Alors :

$$g(A) = T_{\overrightarrow{AA'}} \circ f(A) = T_{\overrightarrow{AA'}}(A') = A$$

g est donc une isométrie telle que $g(A) = A$; elle admet donc un point fixe.
De $g = T_{\overrightarrow{AA'}} \circ f$, nous tirons $f = T_{-\overrightarrow{AA'}} \circ g = T_{\overrightarrow{A'A}} \circ g$
Le théorème est donc démontré

Remarque 6 :

Il nous est tout à fait possible aussi de démontrer que, si nous avons toujours $A' = f(A)$, alors $f = g_1 \circ T_{\overrightarrow{A'A}}$ où g_1 est une isométrie admettant comme point fixe A', c'est à dire telle que $g_1(A') = A'$
En fait, nous venons de démontrer que toute isométrie $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ peut s'écrire de la forme $f = g_1 \circ T_{\overrightarrow{u}} = T_{-\overrightarrow{u}} \circ g$ où g et g_1 sont des isométries de $\mathcal{E}$ admettant au moins un point fixe

Exercice 1 :

$\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ définie analytiquement par :

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = & -z+1 \\ y' = & -x \\ z' = & y-2 \end{array}\right.$$

Démontrer que f est un déplacement.

Exercice 2 :

On considère le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ de direction le plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.
Soit f un antidéplacement de $\mathcal{P}$

1. Démontrer que $f \circ f$ est une translation. On appelle $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ le vecteur de cette translation.
2. Démontrer que si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, alors f est une symétrie par rapport à une droite
3. On suppose que $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et nous désignons par T la translation de $\mathcal{P}$ de vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{u}$. Démontrer que :
   (a) $f \circ f = T \circ T$
   (b) $f \circ T^{-1}$ est un antidéplacement involutif et que donc $f \circ T^{-1}$ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ
   (c) Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de Δ

Exercice 3 :

$\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ définie analytiquement par :

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = & \dfrac{1}{9}(-8x+4y+z+12) \\ y' = & \dfrac{1}{9}(4x+7y+4z-5) \\ z' = & \dfrac{1}{9}(x+4y-8z+8) \end{array}\right.$$

1. Démontrer que f est un déplacement.
2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f
3. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ de transformé $M' = f(M)$ tels que le milieiu I du segment $[M; M']$ appartienne :
   (a) A la droite d'équation $x = y = 0$
   (b) Au plan d'équation $z = 0$
   (c) A la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Exercice 4 :

$\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ définie analytiquement par :

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = & x+2 \\ y' = & y \\ z' = & -z+2 \end{array}\right.$$

1. Démontrer que f est un antidéplacement.
2. Démontrer que, pour tout point $M \in \mathcal{E}$ de transformé $M' = f(M)$, le miliei I du segment $[M; M']$ appartient à un plan fixe P

3. Démontrer que le point M_1, symétrique du point M dans la symétrie orthogonale par rapport au plan P est tel que le vecteur $\overrightarrow{M_1M'}$ est contant.
4. En déduire que f peut se décomposer en le produit de 2 transformations simples
5. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ de transformé $M' = f(M)$ tels que :
   (a) $OM = OM'$
   (b) Les points O, M et M' sont alignés
   (c) $MM' = a$ où $a \geqslant 0$

21.2 Isométries Planes

21.2.1 Symétries par rapport à une droite

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction $\overrightarrow{\mathcal{P}}$
Soit $D \subset \mathcal{P}$ une droite de $\mathcal{P}$ de direction $\overrightarrow{D}$ et $\mathcal{S}_D$ la symétrie orthogonale par rapport à D
Alors, $\mathcal{S}_D$ est une isométrie d'application linéaire associée $\sigma_{\overrightarrow{D}}$, la symétrie orthogonale de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ par rapport à $\overrightarrow{D}$, la direction de D

Démonstration

D'après 18.3.8, $\mathcal{S}_D$ est une application affine d'endomorphisme associé $\sigma_{\overrightarrow{D}}$ qui est une symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle $\overrightarrow{D}$. $\sigma_{\overrightarrow{D}} \in \mathcal{O}^-\left(\overrightarrow{\mathcal{P}}\right) \subset \mathcal{O}\left(\overrightarrow{\mathcal{P}}\right)$.

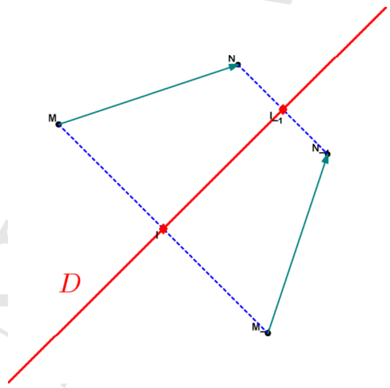


FIGURE 21.2 – Visualisation d'une symétrie orthogonale

Donc $\mathcal{S}_D$ est une isométrie affine

21.2.2 Isométries involutives

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$
L'ensemble des isométries involutives de $\mathcal{P}$ est composé de :
1. L'identité $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$
2. Les symétries par rapport à un point
3. Les symétries orthogonales par rapport à une droite

Démonstration

1. Les involutions
   ⋆ L'identité et les symétries centrales sont bien entendu des isométries involutives

- ⋆ Dans 21.2.1 nous venons de montrer qu'une symétrie orthogonale par rapport à une droite est une isométrie

2. Réciproquement, supposons que f soit une isométrie involutive

   f étant une isométrie involutive, f est affine involutive et donc f est une symétrie. Si $\overrightarrow{f}$ est l'endomorphisme orthogonal associé, alors :
   - ⋆ Si $\overrightarrow{f} = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$, alors $f = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$
   - ⋆ Si $\overrightarrow{f} = -\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$, alors f est une symétrie par rapport à un point *(ou une homothétie de rapport* -1*)*
   - ⋆ Si $\overrightarrow{f} = \sigma_{\overrightarrow{\Delta}}$, alors f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite D de direction $\overrightarrow{\Delta}$

21.2.3 Théorème

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$
Tout antidéplacement f de $\mathcal{P}$ admettant au moins un point invariant $A \in \mathcal{P}$ (c'est à dire tel que $f(A) = A$) est une symétrie orthogonale par rapport à une droite passant par A

Démonstration

1. Toute symétrie orthogonale par rapport à une droite
   underline est un antidéplacement qui admet au moins un point fixe
   En effet, si $\mathcal{S}_D$ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite D, elle admet comme points invariants l'ensemble D et d'après 21.2.1, l'application linéaire associée est $\sigma_{\overrightarrow{D}}$, la symétrie orthogonale de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ par rapport à $\overrightarrow{D}$, la direction de D ; comme $\sigma_{\overrightarrow{D}} \in \mathcal{O}^-\left(\overrightarrow{\mathcal{P}}\right)$, $\mathcal{S}_D$ est bien un antidéplacement.
2. Soit f un antidéplacement de $\mathcal{P}$ admettant au moins un point invariant $A \in \mathcal{P}$
   - ⋆ L'endomorphisme associé $\overrightarrow{f}$ est un élément de $\mathcal{O}^-\left(\overrightarrow{\mathcal{P}}\right)$; d'après 16.3.4 $\overrightarrow{f}$ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle $\overrightarrow{D}$, c'est à dire, en utilisant les notations habituelles, $\overrightarrow{f} = \sigma_{\overrightarrow{D}}$
   - ⋆ Soit $D \in \mathcal{P}$ de direction $\overrightarrow{D}$ et passant par A. Alors :
     - → Si $\mathcal{S}_D$ est la symétrie orthogonale par rapport à D, $\mathcal{S}_D(A) = A$ et l'endomorphisme associé est $\overrightarrow{\mathcal{S}_D} = \sigma_{\overrightarrow{D}}$
     - → Nous avons donc : $\mathcal{S}_D(A) = f(A) = A$ et $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{\mathcal{S}_D} = \sigma_{\overrightarrow{D}}$
     - → D'où $f = \mathcal{S}_D$

   f est donc une symétrie orthogonale

Remarque 7 :

1. Il existe des antidéplacements du plan qui n'admettent pas de point fixe.
   Par exemple, soit $D \in \mathcal{P}$ et une droite d'un plan affine euclidien de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.
   Considérons $f = \mathcal{S}_D \circ t_{\overrightarrow{u}}$, composée de la symétrie orthogonale $\mathcal{S}_D$ et de la translation $t_{\overrightarrow{u}}$.
   Alors f est un antidéplacement, puisque son endomorphisme associé est $\overrightarrow{f} = \sigma_{\overrightarrow{D}} \circ \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}} = \sigma_{\overrightarrow{D}}$. Mais f n'admet aucun point fixe.
2. Dans un plan affine euclidien, toute symétrie orthogonale par rapport à une droite D conserve les angles de droites, c'est à dire que si Δ_1 et Δ_2 sont deux droites de transgormée Δ'_1 et Δ'_2, alors $\widehat{\Delta_1, \Delta_2} = \widehat{\Delta'_1, \Delta'_2}$

Exercice 5 :

Le plan $\mathcal{P}$ étant rapporté à un repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ orthonormé, définir analytiquement la symétrie orthogonale par rapport à la droite D d'équation cartésienne : $x - 2y + 3 = 0$

Exercice 6 :

Le plan $\mathcal{P}$ étant rapporté à un repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ orthonormé,nous considérons l'application $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ dont la définition analytique est donnée par :

$$\begin{cases} x' = & -y+1 \\ y' = & -x+1 \end{cases}$$

Il faut montrer que f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite que vous déterminerez par son équation cartésienne *(par exemple)*

21.2.4 Théorème

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$
Tout déplacement f de $\mathcal{P}$ est égal à la composition de deux symétries orthogonales

Démonstration

Soit donc f un déplacement du plan affine euclidien $\mathcal{P}$ et $A \in \mathcal{P}$. On appelle $A' = f(A)$
Il existe une droite $D \in \mathcal{P}$ telle que $A' = S_D(A)$; il suffit de prendre pour D, la médiatrice du segment $[AA']$
Soit $S_1 = f \circ S_D$.
S_1 est un antidéplacement *(ou isométrie négative)* de $\mathcal{P}$ comme composée d'un déplacement f et d'un antidéplacement S_D. Montrons que S_1 est une symétrie orthogonale. Pour ce faire, nous allons démontrer que S_1 admet un point invariant, et que ce point est A'. En effet, nous avons :

$$S_1(A') = f \circ S_D(A') = f(S_D(A')) = f(A) = A'$$

S_1 est donc une symétrie orthogonale par rapport à une droite D' passant par A'. Ainsi :

$$S_1 = f \circ S_D \Longleftrightarrow f = S_1 \circ S_D$$

Ce que nous voulions

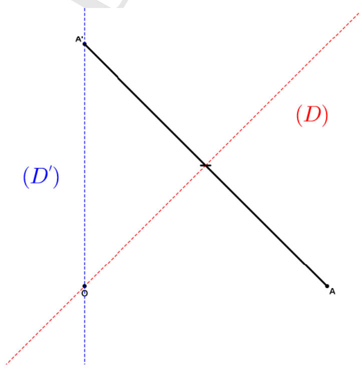


FIGURE 21.3 – Décomposition d'un déplacement du plan

21.2.5 Proposition

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$
Soient $D \subset \mathcal{P}$ et $D_1 \subset \mathcal{P}$ 2 droites parallèles de $\mathcal{P}$ *(nous avons $D \parallel D_1$)*
Alors $S_D \circ S_{D_1}$ est une translation.

Démonstration

Tout d'abord, nous pouvons faire remarquer que S_D et S_{D_1} sont 2 antidéplacements, que la composée de 2 antidéplacements est un déplacement ; comme une translation est un déplacement, le résultat est cohérent
Si $D \parallel D_1$, alors les 2 droites ont la même direction $\overrightarrow{D}$ et donc, l'application linéaire associée à $S_D \circ S_{D_1}$ est $\sigma_{\overrightarrow{D}} \circ \sigma_{\overrightarrow{D}} = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$.
C'est donc une translation, de vecteur éventuellement nul !

Remarque 8 :

Si ce résultat est remarquable, il ne nous donne pas le vecteur de la translation ! !

Pour trouver le vecteur de cette translation, nous allons utiliser l'outil qui tue en géométrie : le schéma ; reportez vous donc au schéma 21.4

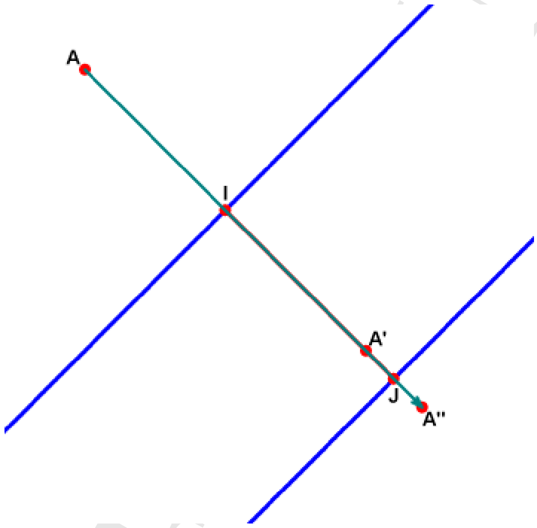


FIGURE 21.4 – Composition de deux symétries orthogonales d'axes parallèles

Soient donc $D \subset \mathcal{P}$ et $D_1 \subset \mathcal{P}$ 2 droites parallèles de $\mathcal{P}$, c'est à dire $D \parallel D_1$.
Soit $A \in \mathcal{P}$ et nous appelons $A' = S_{D_1}(A)$ et $A'' = S_D(A')$, c'est à dire $A'' = S_D \circ S_{D_1}(A)$.
Nous avons $(AA') \perp D_1$ et $(A'A'') \perp D$, et comme $D \parallel D_1$ nous avons $(AA') \parallel (A'A'')$; Comme A' est commun aux deux droites, les points A, A' et A'' sont alignés.
Soient I le milieu du segment $[AA']$ et J celui du segment $[A'A'']$. En fait, J est la projection orthogonale de I sur D. Nous avons alors :

$$\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A''} = 2\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{A'J} = 2\overrightarrow{AI} + 2\left(\overrightarrow{A'I} + \overrightarrow{IJ}\right) = 2\left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{A'I}\right) + +2\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{IJ}$$

Donc $\overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{IJ}$.
Et donc $S_D \circ S_{D_1} = T_{2\overrightarrow{IJ}}$

L'application composée de 2 symétries orthogonales $S_D \circ S_{D_1}$ d'axes parallèles $D \parallel D_1$ est une translation de vecteurs $2\overrightarrow{HK}$ où, si $H \in D_1$, K est le projeté orthogonal de H sur D

21.2.6 Une réciproque de 21.2.5

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$
Pour toute translation $T_{\overrightarrow{u}}$ de vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ et toute droite $D \subset \mathcal{P}$ admettant $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ comme vecteur normal, il existe une et une seule droite $D_1 \subset \mathcal{P}$, parallèle à D *(i.e.$D \parallel D_1$)* telle que $S_D \circ S_{D_1} = T_{\overrightarrow{u}}$

Démonstration

Soit donc $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ et $T_{\overrightarrow{u}}$ la translation de $\mathcal{P}$ correspondante.
Soit $D \subset \mathcal{P}$ admettant $\overrightarrow{u}$ comme vecteur normal et $H \in D$
Soit $K \in \mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{HK} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{u}$ et D' la doite parallèle à D et passant par K *(cf figure 21.5)*

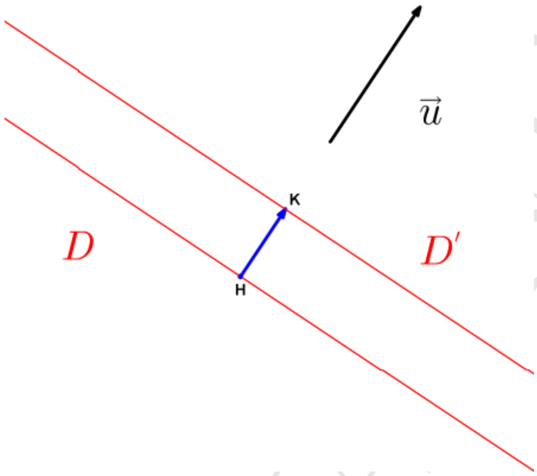


FIGURE 21.5 – Décomposition d'une translation

Alors, d'après 21.2.5, $S_{D'} \circ S_D$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$, c'est à dire : $S_{D'} \circ S_D = T_{\overrightarrow{u}}$
Montrons, qu'une fois choisie la droite D, la droite D' est unique.
Soit donc une droite D_1 telle que $S_{D_1} \circ S_D = T_{\overrightarrow{u}}$. Nous avons donc : $S_{D_1} \circ S_D = S_{D'} \circ S_D$, c'est à dire, en utilisant la composition à droite par S_D, $S_{D'} = S_{D_1}$.
Par conséquent, $D' = D_1$

Remarque 9 :

1. Notons que D' est l'image de D par la translation $T_{\frac{1}{2}\overrightarrow{u}}$
2. De la même manière, nous pouvons montrer l'existence et l'unicité d'une droite D'' telle que $S_D \circ S_{D''} = T_{\overrightarrow{u}}$; la droite D'' étant, cette fois ci, la transformée de la droite D par la translation $T_{-\frac{1}{2}\overrightarrow{u}}$

21.2.7 Définition de rotation

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$
Soient $\Omega \in \mathcal{P}$ et $\theta \in \mathbb{R}$
On appelle rotation de centre Ω et d'angle θ le déplacement $R(\Omega, \theta) \in \mathcal{I}s^+(\mathcal{P})$ laissant Ω invariant (c'est à dire $R(\Omega,\theta)(\Omega) = \Omega$) et dont l'endomorphisme associé ρ est une rotation de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ d'angle θ

Remarque 10 :

1. Le point fixe de la rotation Ω est aussi appelé **centre de la rotation**
2. Une rotation d'angle de mesure $2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ est l'identité de $\mathcal{P}$
3. Plusieurs rotations affines peuvent avoir la même rotation vectorielle associée ; elle se différencient alors par leur centre de rotation.
4. Soit $R(\Omega, \theta)$ une rotation de centre Ω et d'angle θ et soit ρ, sa rotation associée.
   Pour tout point $M \in \mathcal{P}$ et tout point $N \in \mathcal{P}$, posons $M' = R(\Omega,\theta)(M)$ et $N' = R(\Omega,\theta)(N)$; alors :
$$\overrightarrow{M'N'} = \rho\left(\overrightarrow{MN}\right) \text{ et donc } \left(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}}\right) \equiv \theta\,[2\pi]$$

5. Soit $R(\Omega,\theta)$ une rotation de $\mathcal{P}$ de centre Ω et d'angle θ et soient B, S et C 3 points du plan $\mathcal{P}$; nous posons $S' = R(\Omega,\theta)(S)$, $B' = R(\Omega,\theta)(B)$ et $C' = R(\Omega,\theta)(C)$. Alors :
   - ⋆ D'après l'item précédent, $\widehat{\left(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{S'B'}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{S'C'}\right)} \equiv \theta\,[2\pi]$
   - ⋆ Donc,

$$\widehat{\left(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{S'B'}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{S'B'}, \overrightarrow{SC}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{S'B'}, \overrightarrow{SC}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{S'C'}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{S'B'}, \overrightarrow{S'C'}\right)}$$

   - ⋆ Ainsi, pour tout point B, S et C 3 points du plan $\mathcal{P}$, nous avons :

$$[\widehat{\left(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{S'B'}, \overrightarrow{S'C'}\right)}$$

6. Soit $D \subset \mathcal{P}$ une droite du plan $\mathcal{P}$. Soient $M \in D$ et $N \in D$ et une rotation R du plan d'angle θ. On appelle $M' = R(M)$ et $N' = R(N)$

   Nous avons donc $\widehat{\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}\right)} = \theta\,[2\pi]$, c'est à dire $\widehat{(MN), (M'N')} = \theta\,[\pi]$. Aisi :

   L'image par une rotation R du plan d'angle θ d'une doite $D \subset \mathcal{P}$ est une autre droite D' telle que $\widehat{D, D'} = \theta\,[\pi]$

7. Si $R(\Omega,\theta)$ est une rotation de $\mathcal{P}$, **avec** $\theta \neq 2k\pi$, alors Ω est le seul point invariant de $R(\Omega,\theta)$

   En effet,
   Soit $I \in \mathcal{P}$ un second point invariant de $R(\Omega,\theta)$ et ρ la rotation associée à $R(\Omega,\theta)$.
   Le seul vecteur invariant par ρ est $\overrightarrow{0}$. Alors :

$$\overrightarrow{\Omega I} = \overrightarrow{R(\Omega,\theta)(\Omega)\,R(\Omega,\theta)(I)} = \rho\left(\overrightarrow{\Omega I}\right)$$

   Donc, de $\overrightarrow{\Omega I} = \rho\left(\overrightarrow{\Omega I}\right)$, nous tirons $\overrightarrow{\Omega I} = \overrightarrow{0}$, c'est à dire $\Omega = I$
   Ω est donc le seul point invariant de $R(\Omega,\theta)$

Exercice 7 :

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. On considère une rotation de $\mathcal{P}$ $R(A,\theta)$, $D \subset \mathcal{P}$ et $D' \subset \mathcal{P}$ 2 droites de $\mathcal{P}$ sécantes en $I \neq A$ et telles que $R(A,\theta)(D) = D'$

1. On suppose θ non congru à 0 modulo π
   Montrer que pour tout point $M \in D$, si $M' = R(A,\theta)(M)$, les points M, A, I et M' sont cocycliques
2. Que se passe-t-il si $\theta \equiv 0\,[\pi]$?

21.2.8 Définition analytique d'une rotation

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$
Alors, $R(\Omega,\theta)$ est une rotation de $\mathcal{P}$ d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ si et seulement si sa définition analytique est donnée par :

$$\begin{cases} x' = & x\cos\theta - y\sin\theta + \lambda \\ y' = & x\sin\theta + y\cos\theta + \mu \end{cases}$$

Démonstration

Soit $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ le centre de la rotation $R(\Omega,\theta)$ d'angle $\theta \in \mathbb{R}$; soit ρ l'endomorphisme associé. Alors $\mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}}(\rho) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Soient $M(x,y) \in \mathcal{P}$ et $M' = R(M)(x', y')$. Comme nous avons $\rho\left(\overrightarrow{\Omega M}\right) = \overrightarrow{R(\Omega)\,R(M)} = \overrightarrow{\Omega M'}$, nous avons :

$$\begin{pmatrix} x' - x_\Omega \\ y' - y_\Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_\Omega \\ y - y_\Omega \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} x' - x_\Omega = & \cos\theta\,(x - x_\Omega) - \sin\theta\,(y - y_\Omega) \\ y' - y_\Omega = & \sin\theta\,(x - x_\Omega) + \cos\theta\,(y - y_\Omega) \end{array} \right.$$

C'est à dire :

$$\left\{ \begin{array}{rl} x' = & x\cos\theta - y\sin\theta + x_\Omega\,(1 - \cos\theta) + y_\Omega \sin\theta \\ y' = & x\sin\theta + y\cos\theta + y_\Omega\,((1 - \cos\theta)) - x_\Omega \sin\theta \end{array} \right.$$

En posant $\lambda = x_\Omega\,(1 - \cos\theta) + y_\Omega \sin\theta$ et $\mu = y_\Omega\,((1 - \cos\theta)) - x_\Omega \sin\theta$, nous avons bien :

$$\left\{ \begin{array}{rl} x' = & x\cos\theta - y\sin\theta + \lambda \\ y' = & x\sin\theta + y\sin\theta + \mu \end{array} \right.$$

Exercice 8 :

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$
Soit $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ l'application dont la définition analytique est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{rl} x' = & \dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{3} + y + 3 - \sqrt{3}\right) \\ y' = & \dfrac{1}{2}\left(-x + y\sqrt{3} - 1 + \sqrt{3}\right) \end{array} \right.$$

Exercice 9 :

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
On appelle $R(A, \theta)$ la rotation de $\mathcal{P}$, de centre A et d'angle θ.
Si $a \in \mathbb{C}$ est l'affixe du point $A \in \mathcal{P}$, $z \in \mathbb{C}$ celui du point $M \in \mathcal{P}$, exprimez l'affixe $z' \in \mathbb{C}$ du point $M' = R(A, \theta)(M)$ en fonction de a, z et θ

21.2.9 Corollaire : définition analytique d'un antidéplacement

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$
Alors, f est un antidéplacement de $\mathcal{P}$ si et seulement si sa définition analytique est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{rl} x' = & x\cos\theta + y\sin\theta + \lambda \\ y' = & x\sin\theta - y\cos\theta + \mu \end{array} \right.$$

Démonstration

La démonstration est laissée au lecteur ; elle est sur le modèle de 21.2.8

21.2.10 Proposition

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$
Soient $D \subset \mathcal{P}$ et $D_1 \subset \mathcal{P}$ 2 droites de $\mathcal{P}$ sécantes en Ω, c'est à dire telles que $D \cap D_1 = \{\Omega\}$
θ est une mesure modulo π de l'angle de droites $\widehat{(D, D_1)}$
Alors, l'application composée $S_{D_1} \circ S_D$ est la rotation de centre Ω et d'angle 2θ, c'est à dire :

$$S_{D_1} \circ S_D = R(\Omega, 2\theta)$$

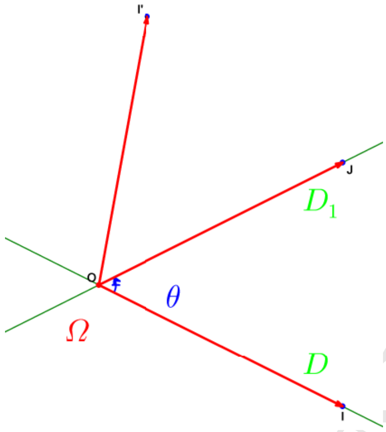


FIGURE 21.6 – Composition de 2 symétries orthogonales

Démonstration

Nous appelons $\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{D_1}$ les directions respectives de D et D_1.
Alors, $R = S_{D_1} \circ S_D$ a pour endomorphisme associé $\rho = \sigma_{\overrightarrow{D_1}} \circ \sigma_{\overrightarrow{D}}$ et ρ est une rotation et donc R est un déplacement de $\mathcal{P}$
De plus, Ω est forcément invariant par R, et donc R est une rotation de centre Ω
Soient $I \in D$ et $J \in D_1$ tels que $\Omega I = \Omega J = 1 \iff \left\|\overrightarrow{\Omega I}\right\| = \left\|\overrightarrow{\Omega J}\right\| = 1$
Nous appelons $I' = R(I) = S_{D_1} \circ S_D(I) = S_{D_1}(I)$. I' est donc le symétrique de I par rapport à D_1.
Nous avons aussi :

$$\overrightarrow{\Omega I'} = \overrightarrow{\Omega R(I)} = \rho\left(\overrightarrow{\Omega I}\right)$$

ρ est bien la rotation qui transforme le vecteur $\overrightarrow{\Omega I}$ en le vecteur $\overrightarrow{\Omega I'}$
Regardons les angles

Une symétrie conservant les angles, nous avons $\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega J}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega I'}\right)} = \theta\,[\pi]$
Donc :

$$\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega I'}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega J}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega I'}\right)} = 2\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega J}\right)}$$

Comme $\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega J}\right)} = \theta + k\pi$, nous avons $\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega I'}\right)} = 2\theta + 2k\pi$, c'est à dire que :

$$S_{D_1} \circ S_D = R(\Omega, 2\theta)$$

Exercice 10 :

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$
D est la droite d'équation $x + y - 1 = 0$ et Δ est la droite d'équation $x + y - 1 = 0$.
On appelle $\mathcal{S}_D$ la symétrie orthogonale par rapport à D et $\mathcal{S}_\Delta$ la symétrie orthogonale par rapport à Δ

1. Quelles sont les définitions analytiques de $\mathcal{S}_D$ et $\mathcal{S}_\Delta$
2. Soit $f = \mathcal{S}_D \circ \mathcal{S}_\Delta$. Donner la définition analytique de f ; en déduire les éléments caractéristique de f
3. Même question pour $g = \mathcal{S}_\Delta \circ \mathcal{S}_D$

Remarque 11 :

De la décomposition d'une rotation en un produit de 2 symétries d'axes sécants sécants en Ω et d'angle $\widehat{(\Delta, D)} = \frac{\theta}{2}$, c'est à dire $R(\Omega, \theta) = \mathcal{S}_D \circ \mathcal{S}_\Delta$, nous avons alors :

$$R^{-1}(\Omega, \theta) = (\mathcal{S}_D \circ \mathcal{S}_\Delta)^{-1} = (\mathcal{S}_\Delta)^{-1} \circ (\mathcal{S}_D)^{-1} = \mathcal{S}_\Delta \circ \mathcal{S}_D$$

Nous en déduisons que $R^{-1}(\Omega, \theta) = \mathcal{S}_\Delta \circ \mathcal{S}_D$, c'est à dire que $R^{-1}(\Omega, \theta)$ est une rotation de centre Ω et d'angle $-\theta$ et donc :

$$R^{-1}(\Omega, \theta) = R(\Omega, -\theta)$$

21.2.11 Une réciproque de 21.2.10

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$
Pour toute rotation $R(\Omega, \theta)$ de $\mathcal{P}$, il existe 2 droites D et D', toutes 2 passant par Ω telles que $R(\Omega, \theta) = S_{D'} \circ S_D$

Démonstration

La démonstration pose peu de problème.
Soit donc une rotation $R(\Omega, \theta)$ de centre Ω et d'angle θ.
Construisons une droite D passant par Ω et une droite D', passant par Ω et formant avec D un angle de mesure $\frac{\theta}{2}$, c'est à dire $\widehat{(D, D')} = \frac{\theta}{2}$ modulo π
Alors $S_{D'} \circ S_D$ est une rotation de centre Ω et d'angle θ
Cette droite D' est unique
En effet, s'il existait une droite D_1 telle que $S_{D_1} \circ S_D = S_{D'} \circ S_D$, alors $S_{D_1} = S_{D'}$ et $D_1 = D'$

Remarque 12 :

Il est bien évident que la décomposition de la rotation $R(\Omega, \theta)$ en le produit de 2 symétries orthogonales n'est pas unique. Par contre, une fois choisie arbitrairement la droite D passant par Ω, la droite D' est unique.

21.2.12 Etude de la composition de 2 déplacements du plan

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$

1. Soient $R(\Omega_1, \theta_1)$ une rotation de centre Ω_1 et d'angle θ_1, et $R(\Omega_2, \theta_2)$ une rotation de centre Ω_2 et d'angle θ_2. Alors :
   (a) Si $\theta_1 + \theta_2 = 2k\pi$, alors $R(\Omega_1, \theta_1) \circ R(\Omega_2, \theta_2)$ est une translation
   (b) Si $\theta_1 + \theta_2 \neq 2k\pi$, alors $R(\Omega_1, \theta_1) \circ R(\Omega_2, \theta_2)$ est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$
2. Soient $R(\Omega, \theta)$ une rotation de centre Ω et d'angle θ et $T_{\overrightarrow{u}}$ une translation de vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$. Alors, $R(\Omega, \theta) \circ T_{\overrightarrow{u}}$ est une rotation d'angle θ

Démonstration

1. Soient $R(\Omega_1, \theta_1)$ une rotation de centre Ω_1 et d'angle θ_1, et $R(\Omega_2, \theta_2)$ une rotation de centre Ω_2 et d'angle θ_2
   Alors, si ρ_1 est l'endomorphisme associé à $R(\Omega_1, \theta_1)$ et ρ_2 celui associé à $R(\Omega_2, \theta_2)$, l'endomorphisme associé à $R(\Omega_1, \theta_1) \circ R(\Omega_2, \theta_2)$ est $\rho_1 \circ \rho_2$. ρ_1 est une rotation d'angle θ_1, tout comme ρ_2 est une rotation d'angle θ_2 et donc $\rho_1 \circ \rho_2$ est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$. Ainsi, dans un premier temps :
   $\rightarrow$ Si $\theta_1 + \theta_2 = 2k\pi$, $\rho_1 \circ \rho_2 = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$ et $R(\Omega_1, \theta_1) \circ R(\Omega_2, \theta_2)$ est une translation de $\mathcal{P}$

→ Si $\theta_1 + \theta_2 \neq 2k\pi$, $\rho_1 \circ \rho_2$ est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$ et $R(\Omega_1, \theta_1) \circ R(\Omega_2, \theta_2)$ est donc une rotation de $\mathcal{P}$ d'angle $\theta_1 + \theta_2$

Utilisons maintenant, la décomposition des rotations

Soit D la droite qui passe par Ω_1 et Ω_2.

On appelle D_2 la droite passant par Ω_2 et telle que $\widehat{(D_2, D)} = \dfrac{\theta_2}{2}$. Alors, $R(\Omega_2, \theta_2) = S_D \circ S_{D_2}$

On appelle maintenant D_1 la droite passant par Ω_1 et telle que $\widehat{(D, D_1)} = \dfrac{\theta_1}{2}$. Alors, $R(\Omega_1, \theta_2) = S_{D_1} \circ S_D$

Alors :

$$R(\Omega_1, \theta_1) \circ R(\Omega_2, \theta_2) = (S_{D_1} \circ S_D) \circ (S_D \circ S_{D_2}) = S_{D_1} \circ S_{D_2}$$

Et maintenant, quel est l'angle $\widehat{(D_2, D_1)}$. Nous avons :

$$\widehat{(D_2, D_1)} = \widehat{(D_2, D)} + \widehat{(D, D_1)} = \frac{\theta_2 + \theta_1}{2}\,[\pi]$$

→ Si $\dfrac{\theta_2 + \theta_1}{2} \equiv 0\,[\pi]$, alors les droites D_2 et D_1 sont parallèles et donc $R(\Omega_1, \theta_1) \circ R(\Omega_2, \theta_2)$ est une translation.

Or $\dfrac{\theta_2 + \theta_1}{2} \equiv 0\,[\pi] \iff \dfrac{\theta_2 + \theta_1}{2} = k\pi \iff \theta_1 + \theta_2 = 2k\pi$

→ Si $\dfrac{\theta_2 + \theta_1}{2}$ n'est pas congru à 0 modulo π, alors $R(\Omega_1, \theta_1) \circ R(\Omega_2, \theta_2) = S_{D_1} \circ S_{D_2}$ est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$ de centre $\{O\} = D_1 \cap D_2$

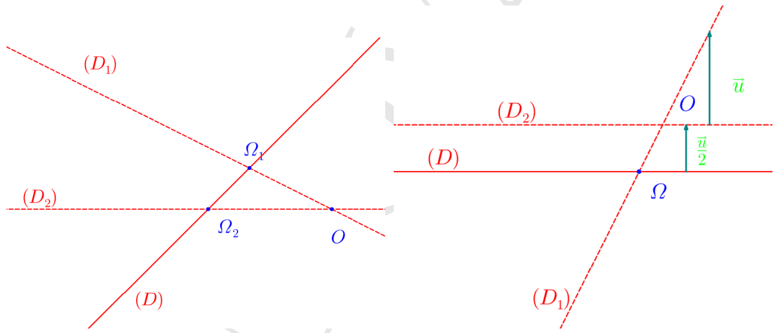


FIGURE 21.7 – Composition de 2 rotations ; composition d'une rotation et d'une translation

2. Soient $R(\Omega, \theta)$ une rotation de centre Ω et d'angle θ et $T_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$

Soit D une droite orthogonale à $\vec{u}$ et passant par ω.

On appelle D_1, la droite parallèle à D, image de D_1 par la translation de vecteur $\dfrac{\vec{u}}{2}$. Alors, $T_{\vec{u}} = S_{D_1} \circ S_D$

Soit D_2 la droite passant par Ω et telle que $\widehat{(D_2, D)} = \dfrac{\theta}{2}$; alors $R(\Omega, \theta) = S_D \circ S_{D_2}$

Et donc $T_{\vec{u}} \circ R(\Omega, \theta) = (S_{D_1} \circ S_D) \circ (S_D \circ S_{D_2}) = S_{D_1} \circ S_{D_2}$

Nous avons $\widehat{(D_2, D_1)} = \widehat{(D_2, D)} + \widehat{(D, D_1)} = \dfrac{\theta}{2} + k\pi$

Ainsi, $T_{\vec{u}} \circ R(\Omega, \theta)$ est une rotation d'angle θ et de centre $\{O\} = D_1 \cap D_2$

21.2.13 Théorème

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\vec{\mathcal{P}}$

Soit f un antidéplacement de $\mathcal{P}$.

Alors, il existe une symétrie orthogonale S_D d'axe $D \subset \mathcal{P}$ et une translation $T_{\vec{u}}$ dont le vecteur $\vec{u}$ appartient à $\vec{D}$ la direction de D uniques telles que :

$$f = S_D \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}} \circ S_D$$

Démonstration

Soit f un antidéplacement de $\mathcal{P}$; son endomorphisme associé est une symétrie vectorielle $\sigma_{\overrightarrow{D}}$ par rapport à une droite $\overrightarrow{D} \subset \overrightarrow{\mathcal{P}}$.
Soit $A \in \mathcal{P}$ un point de $\mathcal{P}$, $A' = f(A)$ et I le milieu du segment $[A; A']$. Nous appelons D la droite de direction $\overrightarrow{D}$, passant par I et S_D, la symétrie orthogonale par rapport à D.
Nous appelons $T = S_D \circ f$

1. <u>T est une translation</u>
   - ⋆ Tout d'abord, T composée de 2 antidéplacements est une isométrie positive, c'est à dire une translation ou une rotation.
   - ⋆ L'endomorphisme associé à T est $\overrightarrow{T} = \overrightarrow{S_D} \circ \overrightarrow{f} = \sigma_{\overrightarrow{D}} \circ \sigma_{\overrightarrow{D}} = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$.
     T est donc une translation
   - ⋆ Recherchons le vecteur de cette translation.
     Soit $A'' = S_D(A')$. Alors $T(A) = S_D \circ f(A) = S_D(A') = A''$. T est donc la translation de vecteur $\overrightarrow{AA''}$
   - ⋆ D'autre part, $\overrightarrow{AA''} \in \overrightarrow{D}$
     En effet, I le milieu du segment $[A; A']$ est sur D, et J le milieu du segment $[A'; A'']$ est aussi sur D. En considérant le triangle $AA'A''$, nous avons $\overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{IJ}$; et comme $\overrightarrow{IJ} \in \overrightarrow{D}$, nous avons $\overrightarrow{AA''} \in \overrightarrow{D}$
2. Et donc, par composition $f = S_D \circ T$
3. <u>La décomposition $f = S_D \circ T$ est unique</u>

   Supposons $f = S_D \circ T$ où T est une translation dont le vecteur appartient à la direction $\overrightarrow{D}$ de D
   Et supposons de plus, que $f = S_{D_1} \circ T_1$ où T_1 est une translation dont le vecteur appartient à la direction $\overrightarrow{D_1}$ de D_1
   L'endomorphisme associé à $S_D \circ T$ est $\sigma_{\overrightarrow{D}}$ et celui associé à $S_{D_1} \circ T_1$ est $\sigma_{\overrightarrow{D_1}}$ et nous avons alors $\sigma_{\overrightarrow{D_1}} = \sigma_{\overrightarrow{D}}$, c'est à dire $\overrightarrow{D_1} = \overrightarrow{D}$, et donc $D \parallel D_1$
   Pour tout $M \in \mathcal{P}$, si $M_1 = T(M)$, la droite (MM_1) est parallèle à D. Si $M_2 = S_D(M_1)$, le milieu du segment $[M_1M_2]$ est sur D, et en considérant le triangle MM_1M_2, le milieu de $[MM_2]$ est aussi sur D ; or, $M_2 = f(M)$.
   De la même manière, en étudiant $S_{D_1} \circ T_1$, nous montrerions que le milieu de $[MM_2]$ est sur D_1.
   D'où $D = D_1$, et donc $S_{D_1} = S_D$ et $T = T_1$. La décomposition est donc unique
4. <u>Nous avons $S_D \circ T = T \circ S_D$</u>
   L'endomorphisme associé à $S_D \circ T$ ou $T \circ S_D$ est le même, c'est à dire $\sigma_{\overrightarrow{D}}$.
   Soit $A \in \mathcal{P}$
   → Intéressons nous à $T \circ S_D$
     Posons $A_1 = S_D(A)$, $A_2 = T(A_1)$, c'est à dire $T \circ S_D(A) = A_2$
   → Intéressons nous à $S_D \circ T$
     Posons $A' = T(A)$, $A'' = S_D(A')$, c'est à dire $S_D \circ T(A) = A''$
     Il faut donc montrer que $A_2 = A''$
   → De $A_2 = T(A_1)$ et $A' = T(A)$, nous avons $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{A_1A_2}$ et donc le quadrilatère $AA'A_2A_1$ est un parallélogramme et donc $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{A'A_2}$
   → Ensuite, les droites $(A'A_2)$ et (AA_1) étant toutes deux othogonales à D sont parallèles.
     Soit I le milieu du segement $[A, A_1]$ et J celui du segment $[A', A'']$. Alors, puisque $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AA'}$, le quadrilatère $AA'JI$ est un rectangle et donc $\overrightarrow{A'J} = \overrightarrow{AI}$. Or :
     - ⋆ $\overrightarrow{AA_1} = 2\overrightarrow{AI}$
     - ⋆ Et $\overrightarrow{A'A''} = 2\overrightarrow{A'J} = 2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{A'A_2}$

     De $\overrightarrow{A'A''} = \overrightarrow{A'A_2}$, nous tirons $A'' = A_2$

   C'est à dire que pour tout $A \in \mathcal{P}$, nous avons $S_D \circ T(A) = T \circ S_D(A)$, c'est à dire $S_D \circ T = T \circ S_D$

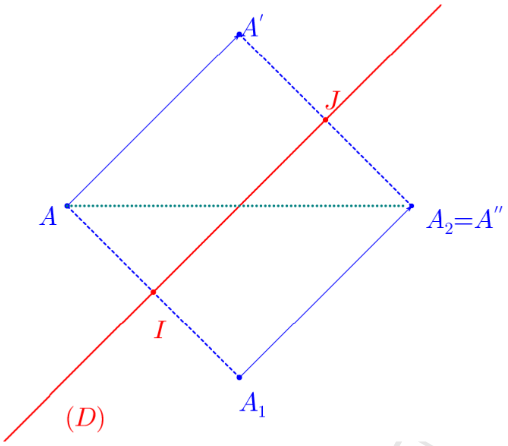


FIGURE 21.8 – La composition d'une symétrie et d'une translation

21.2.14 Définition

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$
On appelle symétrie glissée d'axxe $D \subset \mathcal{P}$ et de vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D}$, le produit $\sigma = S_D \circ T_{\overrightarrow{u}}$

Remarque 13 :

1. Une symétrie orthogonale est une symétrie glissée particulière : $S_D = S_D \circ T_{\overrightarrow{0}}$.
2. L'antidéplacement f que nous évoquons en 21.2.13 peut très bien être une simple symétrie orthogonale.
3. En 21.2.13, nous avons aussi démontré la commutativité ; nous avons donc, pour les symétries glissées : $\sigma = S_D \circ T_{\overrightarrow{u}} = T_{\overrightarrow{u}} \circ S_D$
4. Nous avons $\sigma \circ \sigma = T_{2\overrightarrow{u}}$ et cette égalité détermine le vecteur $\overrightarrow{u}$

   En effet :

$$\sigma \circ \sigma = (T_{\overrightarrow{u}} \circ S_D) \circ (S_D \circ T_{\overrightarrow{u}}) = T_{\overrightarrow{u}} \circ (S_D \circ S_D) \circ T_{\overrightarrow{u}} = T_{\overrightarrow{u}} \circ T_{\overrightarrow{u}} = T_{2\overrightarrow{u}}$$

Remarque 14 :

Pour démontrer la commutativité $S_D \circ T = T \circ S_D$ où le vecteur de la translation est un vecteur directeur de D, il est possible d'utiliser la décomposition des translations en 2 symétries d'axes parallèles. Faisons le !!

1. Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$
   La composition de 2 symétries orthogonales d'axes orthogonaux est commutative, autrement dit :

$$(\forall D_1 \in \mathcal{P})\,(\forall D_2 \in \mathcal{P})\,((D_1 \perp D_2) \Longrightarrow (S_{D_1} \circ S_{D_2} = S_{D_2} \circ S_{D_1}))$$

Démonstration

Soient $D_1 \in \mathcal{P}$ et $D_2 \in \mathcal{P}$ tels que $D_1 \perp D_2$
Soit $\{\Omega\} = D_1 \cap D_2$; alors $S_{D_1} \circ S_{D_2}$ est une rotation de centre Ω et d'angle π, notée $R(\Omega, \pi)$; c'est aussi une homothétie de centre Ω et de rapport -1.
De la même manière $S_{D_2} \circ S_{D_1} = R(\Omega, \pi)$, et donc $S_{D_1} \circ S_{D_2} = S_{D_2} \circ S_{D_1}$

2. Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$
   Soit $D \subset \mathcal{P}$ et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$; alors :

$$T_{\overrightarrow{u}} \circ S_D = S_D \circ T_{\overrightarrow{u}}$$

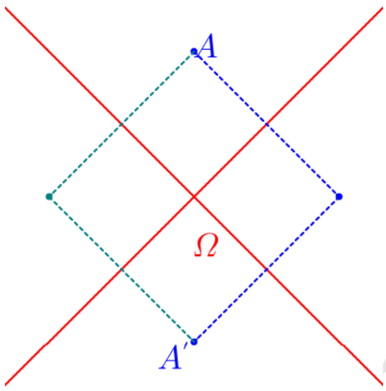


FIGURE 21.9 – La composition de 2 symétries orthogonales

Démonstration

Soit D_1 une droite quelconque parpendiculaire à D, et $D_2 \parallel D$ telle que D_2 soit l'image de D par la translation de vecteur $\dfrac{\overrightarrow{u}}{2}$; donc, nous avons aussi $D_2 \perp D$ et $T_{\overrightarrow{u}} = S_{D_2} \circ S_{D_1}$

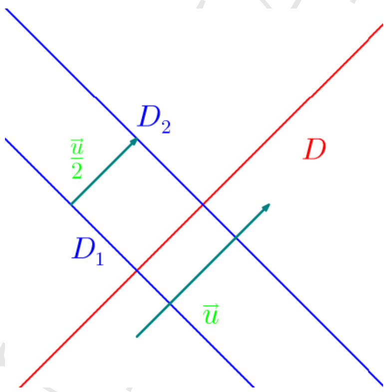


FIGURE 21.10 – Autre façon de démontrer la commutativité

De là, nous tirons :

$$\begin{array}{rcll}
S_D \circ T_{\overrightarrow{u}} & = & S_D \circ (S_{D_2} \circ S_{D_1}) & \\
& = & (S_D \circ S_{D_2}) \circ S_{D_1} & \text{par associativité de la composition} \\
& = & (S_{D_2} \circ S_D) \circ S_{D_1} & \text{par commutativité de la composition} \\
& & & \quad \text{de symétries d'axes orthogonaux} \\
& = & S_{D_2} \circ (S_D \circ S_{D_1}) & \text{par associativité de la composition} \\
& = & S_{D_2} \circ (S_{D_1} \circ S_D) & \text{par commutativité de la composition} \\
& & & \quad \text{de symétries d'axes orthogonaux} \\
& = & (S_{D_2} \circ S_{D_1}) \circ S_D & \text{par associativité de la composition} \\
& = & T_{\overrightarrow{u}} \circ S_D &
\end{array}$$

Nous avons donc $S_D \circ T_{\overrightarrow{u}} = T_{\overrightarrow{u}} \circ S_D$; ce que nous voulions

Exercice 11 :

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien orienté de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

1. Soit S_D une symétrie orthogonale de $\mathcal{P}$ et T une translation quelconque de $\mathcal{P}$.
   Démontrez, qu'en général, $T \circ S_D$ et $S_D \circ T$ sont des symétries glissées d'axe parallèle à D, en général distinctes.

2. Démontrer que tout antidéplacement de la forme $f = T_{\overrightarrow{u}} \circ S_D$ où $\overrightarrow{u}$ est un vecteur de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ non nul n'admet aucun point invariant.

Exercice 12 :

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien orienté de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

1. Soit σ une symétrie glissée de $\mathcal{P}$ d'axe D. Démontrer que, pour tout point $M \in \mathcal{P}$, si $M' = \sigma(M)$, le milieu I du segment $[MM']$ est sur D
2. Soit σ une symétrie glissée de $\mathcal{P}$ d'axe D et de vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul $(\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0})$. Démontrez que σ n'admet aucun point fixe.
3. Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ et $D \subset \mathcal{P}$. Démontrer que si $T_{\overrightarrow{u}} \circ S_D = S_D \circ T_{\overrightarrow{u}}$, alors $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D}$

Exercice 13 :

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien orienté de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et rapporté à un repère orthonomé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Nous considérons le point $A\left(0, \sqrt{3}\right)$ et le point $B(1;0)$. On considère les rotations $R\left(A; \frac{\pi}{6}\right)$ et $R\left(B; \frac{\pi}{3}\right)$

1. Caractériser $R\left(B; \frac{\pi}{3}\right) \circ R\left(A; \frac{\pi}{6}\right)$
2. Soient $A \in \mathcal{P}$ et $B \in \mathcal{P}$ 2 points du plan, d'image respective A' et B' par $R\left(B; \frac{\pi}{3}\right) \circ R\left(A; \frac{\pi}{6}\right)$. Démontrer que la droite $(A'B')$ est la médiatrice du segment $[A; B]$

Exercice 14 :

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien orienté de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et rapporté à un repère orthonomé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Nous considérons la transformation ponctuelle $\mathcal{U}_\alpha$ dont la définition analytique est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{rl} x' = & 4\cos\alpha - x\cos 2\alpha - y\sin 2\alpha \\ y' = & 4\sin\alpha - x\sin 2\alpha - y\cos 2\alpha \end{array}\right. \quad \text{avec } \alpha \in \left]-\pi; +\pi\right]$$

1. Démontrer que $\mathcal{U}_\alpha$ est une symétrie orthogonale par rapport à un axe D_α
2. Démontrer que pour tout $\alpha \in \left]-\pi; +\pi\right]$, la droite D_α reste tangente au cercle de centre O et de rayon 2

21.2.15 Définition

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$
On dit que 2 triangles non aplatis ABC et $A'B'C'$ sont isométriques si et seulement si nous avons les égalités $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $BC = B'C'$

Remarque 15 :

Cette définition, et surtout l'utilisation du mot isométrique est cohérente ; en effet :

Si $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ est une isométrie du plan, que $\{A, B, C\}$ soit un repère affine de $\mathcal{P}$, l'isométrie f étant une bijection, $\{f(A), f(B), f(C)\}$ est aussi un repère affine tel que, si nous posons $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$, nous avons :

$$AB = A'B' \quad AC = A'C' \quad BC = B'C'$$

21.2.16 Théorème

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$
Soient ABC et $A'B'C'$ 2 triangles non aplatis isométriques ; alors, il existe une unique isométrie $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ telle que $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$

Démonstration

1. Que ABC et $A'B'C'$ soient des triangles non aplatis signifie que $\{A, B, C\}$ et $\{A', B', C'\}$ sont des repères affines de $\mathcal{P}$ et que, donc, $\left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ et $\left\{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right\}$ forment 2 bases différentes *(à priori)* de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$
   - $\rightarrow$ Il existe une et une seule application linéaire φ de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ telle que $\varphi\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{A'B'}$ et $\varphi\left(\overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{A'C'}$. Comme nous avons affaire à 2 bases de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, cette application linéaire φ est bijective
   - $\rightarrow$ D'après 18.2.4 il existe une et une seule application affine f, d'application linéaire associée φ et telle que $f(A) = A'$
   - $\rightarrow$ Dans ce cas, nous avons :
     - $\star$ $\varphi\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{f(A)\,f(B)} = \overrightarrow{A'f(B)} = \overrightarrow{A'B'}$ et donc $f(B) = B'$
     - $\star$ De la même manière, nous avons $f(C) = C'$
   - $\rightarrow$ Il existe donc une et une seule application affine telle que $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$

   Reste, maintenant à prouver que c'est une isométrie
2. Nous allons, en fait, construire une isométrie qui transforme le triangle ABC en le triangle $A'B'C'$; cette isométrie étant une application affine particulière, l'unicité en découlera.

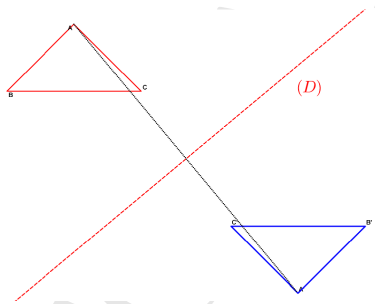


FIGURE 21.11 – Les triangles isométriques

   (a) Soit D la médiatrice du segment $[AA']$; alors $S_D(A) = A'$
   Posons $B_1 = S_D(B)$ et $C_1 = S_D(C)$. Si $B_1 = B'$ et $C_1 = C'$, alors S_D est l'isométrie qui convient.

   (b) Sinon, si $B_1 \neq B'$, nous appelons Δ la médiatrice de $[B_1; B']$.
   Comme tout à l'heure $S_\Delta(B_1) = B'$ et nous avons donc $S_\Delta \circ S_D(B) = B'$.
   Mais, que dire de $S_\Delta \circ S_D(A)$?
   Nous avons $A'B_1 = S_D(A)\,S_D(B) = AB$, car S_D est une isométrie. Comme $AB = A'B'$, nous avons $A'B_1 = A'B'$, ce qui veut dire que A' est sur la médiatrice de $[B_1; B']$, c'est à dire $A' \in \Delta$ et donc, $S_\Delta(A') = A'$. Nous avons donc $S_\Delta \circ S_D(A) = A'$
   Posons $C_2 = S_\Delta(C_1) = S_\Delta \circ S_D(C)$; alors, si $C_2 = C'$, $f = S_\Delta \circ S_D$ convient

   (c) Sinon, si $C_2 \neq C'$, appelons Δ_1 la médiatrice de $[C_2; C']$.
   Nous avons alors $S_{\Delta_1}(C_2) = C'$, c'est à dire $S_{\Delta_1} \circ S_\Delta \circ S_D(C) = C'$.
   Maintenant, que dire de $S_{\Delta_1}(B')$ et $S_{\Delta_1}(A')$
   - $\star$ Nous avons $A'C_2 = S_\Delta(A')\,S_\Delta(C_1) = A'C_1 = S_D(A)\,S_D(C) = AC = A'C'$, et donc, de $A'C_2 = A'C'$ et donc A' est situé sur la médiatrice de $[C_2; C']$, c'est à dire $A' \in \Delta_1$ et donc $S_{\Delta_1}(A') = A'$, c'est à dire $S_{\Delta_1} \circ S_\Delta \circ S_D(A) = A'$
   - $\star$ De même, nous avons $B'C_2 = S_\Delta(B_1)\,S_\Delta(C_1) = B_1C_1 = S_D(B)\,S_D(C) = BC = B'C'$, et donc de $B'C_2 = B'C'$ nous tirons que B' est situé sur la médiatrice de $[C_2; C']$, c'est à dire $B' \in \Delta_1$ et donc $S_{\Delta_1}(B') = B'$, c'est à dire $S_{\Delta_1} \circ S_\Delta \circ S_D(B) = B'$

   Et donc, l'isométrie $f = S_{\Delta_1} \circ S_\Delta \circ S_D$, convient

Remarque 16 :

Nous venons de montrer qu'étant donnés 2 repères affines du plan $\mathcal{P}$, il existe une et une seule application affine f qui transforme l'un des repères en l'autre repère. Qui plus est, cette application affine est bijective ; ce résultat se généralise facilement à la dimension n

21.2.17 Corollaire

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$
Alors :

1. Soit ABC un triangle non aplati, f et g 2 isométries telles que $f(A) = g(A)$, $f(B) = g(B)$ et $f(C) = g(C)$, alors $f = g$
2. Toute isométrie du plan est le produit d'au plus 3 symétries orthogonales par rapport à des droites.

Remarque 17 :

Une autre formulation de l'énoncé précédent, est de dire que *l'ensemble des symétries orthogonales du plan génère le groupe des isométries du plan*[2].

Exercice 15 :

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien orienté de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

1. On considère un carré $PQRS$ de centre O, pour lequel $\widehat{\left(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}\right)} = \dfrac{\pi}{2}$. Soient A, B, C et D un parallélogrammetel que les points P, Q, R et S appartiennent respectivement aux segments $[A;B]$, $[B;C]$, $[C;D]$ et $[D;A]$
   (a) Montrer que les droites (AD) et (DC) sont les images, par la symétrie centrale S de centre O des droites (BC) et (AB)
   (b) Montrer que O est le centre du parallélogramme $ABCD$
   (c) Soit Δ l'image de la droite AB par la rotation $R\left(O, \dfrac{\pi}{2}\right)$ de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Etablir que $(BC) \cap \Delta = \{Q\}$
2. On considère les points $A(1,-2)$, $B(3,2)$, $C(-1,2)$ et $D(-3,-2)$. En utilisant la question précédente, construire un carré inscrit dans le parallélogramme $ABCD$

21.3 Isométries laissant une figure invariante

Dans ce paragraphe, nous considérerons toujours un ensemble $\mathcal{E}$ qui est un espace affine euclidien de dimension finie

21.3.1 Définition

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien et $A \subset \mathcal{E}$ un sous-ensemble de $\mathcal{E}$
Une bijection f de $\mathcal{E}$, c'est à dire $f \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ est dite laisser la figure $A \subset \mathcal{E}$ invariante si $f(A) = A$

Remarque 18 :

Que veut dire $f(A) = A$?

1. Tout d'abord que, pour tout $M \in A$, $f(M) \in A$
2. D'autre part, ce n'est pas parce que si $M \in A$ alors $f(M) \in A$ que nous avons $M = f(M)$. En fait, **la plupart du temps**, nous avons $M \neq f(M)$

2. C'est le titre d'une leçon de CAPES

21.3.2 Proposition

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien et $A \subset \mathcal{E}$ un sous-ensemble de $\mathcal{E}$. On appelle I_A l'ensemble des bijections f de $\mathcal{E}$, laissant la figure $A \subset \mathcal{E}$ invariante.
Alors $(I_A, \circ)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{B}(\mathcal{E}), \circ)$

Démonstration

Rappelons que $(\mathcal{B}(\mathcal{E}), \circ)$ est un groupe. Nous allons montrer que $(I_A, \circ)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{B}(\mathcal{E}), \circ)$

1. Tout d'abord $I_A \neq \emptyset$ puisque l'identité $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ est un élément évident de I_A
2. Montrons que la composition est interne
   Soient $f \in I_A$ et $g \in I_A$; alors $f \circ g(A) = f[g(A)] = f(A) = A$
   Donc $f \circ g \in I_A$
3. Soit $f \in I_A$. Avons $f^{-1} \in I_A$?
   $f^{-1}(A) = f^{-1}[f(A)] = f^{-1} \circ f(A) = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}(A) = A$
   Et donc $f^{-1} \in I_A$

Ainsi $(I_A, \circ)$ est un groupe, sous-groupe de $(\mathcal{B}(\mathcal{E}), \circ)$

Remarque 19 :

Le résultat 21.3.2 est valable pour tout bijection qui laisse invariant un sous-ensemble d'un ensemble quelconque et pas seulement un espace affine euclidien *(l'adaptation de la démonstration est évidente)*. Nous allons aller plus loin en nous intéressant aux isométries laissant globalement invariant un sous-ensemble d'un espace affine euclidien.

21.3.3 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien et $A \subset \mathcal{E}$ un sous-ensemble de $\mathcal{E}$. On appelle $\mathcal{I}_A$ l'ensemble des isométries f de $\mathcal{E}$, laissant la figure $A \subset \mathcal{E}$ invariante. Alors :

1. $(\mathcal{I}_A, \circ)$ est un groupe
2. Si $\mathcal{I}_A^+$ est l'ensemble des isométries positives de $\mathcal{E}$, laissant la figure $A \subset \mathcal{E}$ invariante, alors $(\mathcal{I}_A^+, \circ)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{I}_A, \circ)$

Démonstration

Les démonstrations du premier et second points est évidente et semblable à 21.3.2

21.3.4 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien. On considère la famille $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n\}$ de n points de $\mathcal{E}$
Soit $f$une isimétrie laissant A invariant, c'est à dire telle que $f(A_i) = A_j$
Alors f l'isobarycentre des points $\{A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n\}$ est invariant

Démonstration

Ce qui veut dire que si G est le barycentre du système pondéré $\{(A_1, 1), (A_2, 1), \ldots, (A_{n-1}, 1), (A_n, 1)\} = \{(A_i, 1)\, i = 1, \cdots, n\}$, alors $f(G) = G$

1. f étant une isométrie, f est une application affine et conserve donc le barycentre. Ainsi, si G est le barycentre du système pondéré $\{(A_1, 1), (A_2, 1), \ldots, (A_{n-1}, 1), (A_n, 1)\}$, alors $f(G)$ est le barycentre du système pondéré $\{(f(A_1), 1), (f(A_2), 1), \ldots, (f(A_{n-1}), 1), (f(A_n, 1))\}$.
   Comme
   $$\{(f(A_1), 1), (f(A_2), 1), \ldots, (f(A_{n-1}), 1), (f(A_n, 1))\} = \{(A_1, 1), (A_2, 1), \ldots, (A_{n-1}, 1), (A_n, 1)\}$$
   Nous avons bien $f(G) = G$

2. **En voici une démonstration détaillée :**

   Si G est l'isobarycentre de $\{(A_1,1),(A_2,1),\dots,(A_{n-1},1),(A_n,1)\}$, alors $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$. Comme f conserve le barycentre, nous avons donc $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{f(G)f(A_i)} = \overrightarrow{0}$. Comme f laisse A invariant, nous avons :

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{f(G)f(A_i)} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{f(G)A_i} = \overrightarrow{0}$$

   Et donc $f(G) = G$

Remarque 20 :

Nous n'avons pas du tout le même résultat avec un système pondéré quelconque

Exemple

Soit $A = \{A, B\}$ et f une isométrie telle que $f(A) = B$ et $f(B) = A$

Soit H le barycentre du système pondéré $\{(A,2),(B,1)\}$. Nous avons alors $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, et donc :

$$\overrightarrow{f(A)f(H)} = \frac{1}{3}\overrightarrow{f(A)f(B)} \Longleftrightarrow \overrightarrow{Bf(H)} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$$

Nous avons donc $f(H) \neq H$ et $f(H)$ apparaît comme le barycentre du système pondéré $\{(A,1),(B,2)\}$

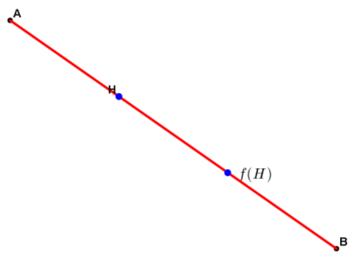


FIGURE 21.12 – Un barycentre quelconque n'est pas forcément invariant

21.3.5 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien. On considère la famille $A = \{A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n\}$ de n points de $\mathcal{E}$
On appelle $\mathcal{I}_A$ le groupe des isométries laissant l'ensemble A invariant. On appelle $\mathcal{I}_A^+$ l'ensemble des déplacements qui laissent A invariant et $\mathcal{I}_A^-$ les antidéplacements qui laissent aussi A invariant.
Si $\mathcal{I}_A^- \neq \emptyset$, alors, pour tout $s \in \mathcal{I}_A^-$, nous avons $\mathcal{I}_A = \mathcal{I}_A^+ \cup s\mathcal{I}_A^+$

Démonstration

On considère la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathcal{I}_A$ par :

$$(\forall f \in \mathcal{I}_A)(\forall g \in \mathcal{I}_A)\left(f\mathcal{R}g \Longleftrightarrow f^{-1} \circ g \in \mathcal{I}_A^+\right)$$

1. **$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence**
   (a) Elle est réflexive.
   En effet, soit $f \in \mathcal{I}_A$; alors $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}} \in \mathcal{I}_A^+$ et donc $f\mathcal{R}f$

(b) Elle est symétrique

Soient $f \in \mathcal{I}_A$ et $g \in \mathcal{I}_A$ telles que $f\mathcal{R}g$, c'est à dire $f^{-1} \circ g \in \mathcal{I}_A^+$.

Comme $(\mathcal{I}_A^+, \circ)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{I}_A, \circ)$, nous avons $\left(f^{-1} \circ g\right)^{-1} \in \mathcal{I}_A^+$. Comme $\left(f^{-1} \circ g\right)^{-1} = g^{-1} \circ f$, nous avons donc $g^{-1} \circ f \in \mathcal{I}_A^+$, c'est à dire que nous avons $g\mathcal{R}f$.

La relation est bien symétrique

(c) Elle est transitive

Soient $f \in \mathcal{I}_A$, $g \in \mathcal{I}_A$ et $h \in \mathcal{I}_A$ telles que $f\mathcal{R}g$ et $g\mathcal{R}h$;

Alors $f^{-1} \circ g \in \mathcal{I}_A^+$ et $g^{-1} \circ h \in \mathcal{I}_A^+$.

Comme $(\mathcal{I}_A^+, \circ)$ est un groupe, nous avons $\left(f^{-1} \circ g\right) \circ \left(g^{-1} \circ h\right) \in \mathcal{I}_A^+$. Or

$$\left(f^{-1} \circ g\right) \circ \left(g^{-1} \circ h\right) = f^{-1} \circ \left(g \circ g^{-1} \circ\right) h = f^{-1} \circ h$$

Donc $f^{-1} \circ h \in \mathcal{I}_A^+$ et nous avons $f\mathcal{R}h$; la relation $\mathcal{R}$ est donc transitive.

$\mathcal{R}$ est donc une relation d'équivalence

2. **Il n'y a que 2 classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$**

(a) Il y a au moins 2 classes d'équivalence

Nous appelons $\mathcal{I}_A^-$ les antidéplacements qui laissent A invariant.

Soient $f \in \mathcal{I}_A^+$ et $s \in \mathcal{I}_A^-$; s est donc un antidéplacement qui laisse A invariant.

Comme $f \in \mathcal{I}_A^+$ et que $\mathcal{I}_A^+$ est un groupe, alors $f^{-1} \in \mathcal{I}_A^+$ et d'après le cours sur les isométries affines $f^{-1} \circ s$ est un antidéplacement, c'est à dire $f^{-1} \circ s \in \mathcal{I}_A^-$ et donc nous n'avons pas $f\mathcal{R}s$

f et s ne sont donc pas dans la même classe d'équivalence.

(b) Nous allons montrer que $\varphi \in \mathcal{I}_A^- \Longleftrightarrow \varphi \in s\mathcal{I}_A^+$ où $s \in \mathcal{I}_A^-$ est un élément quelconque

i. Soit $s \in \mathcal{I}_A^-$; si $\varphi \in \mathcal{I}_A^-$ alors $\varphi \in s\mathcal{I}_A^+$

- ⋆ En effet, s étant une isométrie est bijective et $s = S_D \circ t_{\overrightarrow{u}}$ où S_D est une symétrie orthogonale par rapport à une droite D et $t_{\overrightarrow{u}}$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ où $\overrightarrow{u}$ est le vecteur nul ou un vecteur directeur de la droite D.
- ⋆ Donc $s^{-1} = t_{\overrightarrow{-u}} \circ S_D$ et donc $s^{-1} \in \mathcal{I}_A^-$
- ⋆ Nous avons $s^{-1} \circ \varphi \in \mathcal{I}_A^+$ comme composée de 2 antidéplacements
  Il existe donc $f \in \mathcal{I}_A^+$ tel que $s^{-1} \circ \varphi = f \Longleftrightarrow \varphi = s \circ f$ et donc $\varphi \in s\mathcal{I}_A^+$

ii. Réciproquement, si $\varphi \in s\mathcal{I}_A^+$, alors φ est un antidéplacement puisque $\varphi = s \circ f$ où f est un déplacement, c'est à dire $f \in \mathcal{I}_A^+$

Nous avons montré l'équivalence $\varphi \in \mathcal{I}_A^- \Longleftrightarrow \varphi \in s\mathcal{I}_A^+$ où $s \in \mathcal{I}_A^-$ est un élément quelconque

(c) D'autre part, comme $\mathcal{I}_A^+ \cap \mathcal{I}_A^+ = \emptyset$, nous pouvons facilement remarquer que :

- ⋆ Pour tout $f \in \mathcal{I}_A^+$ et tout $g \in \mathcal{I}_A^+$, nous avons $f\mathcal{R}g$
- ⋆ Pour tout $f_1 \in \mathcal{I}_A^-$ et tout $g_1 \in \mathcal{I}_A^-$, nous avons $f_1\mathcal{R}g_1$

Il n'y a donc que 2 classes d'équivalences $s\mathcal{I}_A^+$ et $\mathcal{I}_A^+$ avec s fixé de manière quelconque dans $\mathcal{I}_A^-$

Nous avons donc $\mathcal{I}_A = \mathcal{I}_A^+ \cup s\mathcal{I}_A^+$

Remarque 21 :

En résumé

Pour connaître l'ensemble des isométries laissant globalement invariant un ensemble ou une figure de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$, il suffit de connaître tous les déplacements laissant globalement invariant cet ensemble et un seul antidéplacement.

21.3.6 Isométries laissant fixe l'ensemble $A = \{X\}$

L'ensemble $\mathcal{I}_A$ des isométries laissant $A = \{X\}$ invariant est la réunion de l'ensemble des rotations de centre X et des symétries orthogonales par rapport aux droites passant par X

Démonstration

C'est une démonstration très simple.

1. Si f est un déplacement laissant X fixe, f est une rotation de centre X
2. Si f est un antidéplacement laissant X fixe, f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite passant par X

21.3.7 Isométries laissant fixe l'ensemble $A = \{X, Y\}$ où $X \neq Y$

L'ensemble $\mathcal{I}_A$ des isométries laissant $A = \{X, Y\}$ où $X \neq Y$ invariant est l'ensemble $\mathcal{I}_A$ où

$$\mathcal{I}_A = \left\{\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}, S_I, S_{(XY)}, S_\Delta\right\}$$

Pour lesquels :

⇒ $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ est l'application identique
⇒ S_I est la symétrie centrale de centre I où I est le milieu du segment $[X;Y]$. S_I est aussi l'homothétie de centre I et de rapport -1, ou encore la rotation de centre I et d'angle π
⇒ $S_{(XY)}$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite passant par X et Y
⇒ S_Δ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ, médiatrice du segment $[X;Y]$

Démonstration

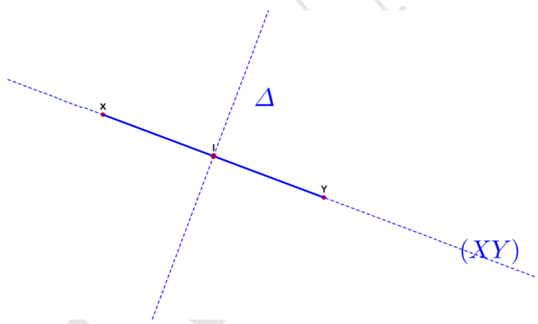


FIGURE 21.13 – Isométries laissant $A = \{X, Y\}$ où $X \neq Y$ invariant

1. **On suppose que f est un déplacement**
   → Si $f(X) = X$ et $f(Y) = Y$ alors, la droite (XY) est invariante et $f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$
   → Si $f(X) = Y$ et $f(Y) = X$, alors, comme le milieu I du segment $[X;Y]$ est invariant, f est une rotation de centre I et d'angle π, notée S_I
   Ainsi, $\mathcal{I}_A^+ = \{\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}, S_I\}$
2. **On suppose que f est un antidéplacement**
   I le milieu du segment $[X;Y]$ est toujours invariant
   → Si $f(X) = X$ et $f(Y) = Y$ alors, la droite (XY) est invariante et f est la symétrie orthogonale par rapport à la droite (XY), c'est à dire $f = S_{(XY)}$
   → Si $f(X) = Y$ et $f(Y) = X$, alors, comme le milieu I du segment $[X;Y]$ est invariant, f est la symétrie orthogonale par rapport à la droite passant par I et orthogonale à la droite (XY) *(puisque $f(X) = Y$ et $f(Y) = X$)*. Cette droite est la médiatrice Δ du segment $[X;Y]$ et donc $f = S_\Delta$
   Et donc, $\mathcal{I}_A^- = \left\{S_{(XY)}, S_\Delta\right\}$

Remarque 22 :

Quelques remarques importantes

1. Comme Δ et (XY) sont perpendiculaires et qu'elles se coupent en I, nous avons :
$$S_I = S_{(XY)} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ S_{(XY)}$$
Et il est facile de revérifier que $\mathcal{I}_A^- = S_{(XY)}\mathcal{I}_A^+$.
Nous avons :
   - ⋆ $S_I \circ S_{(XY)} = S_\Delta \circ S_{(XY)} \circ S_{(XY)} = S_\Delta$
   - ⋆ $S_{(XY)} \circ S_I = S_{(XY)} \circ S_{(XY)} \circ S_\Delta = S_\Delta$
   - ⋆ $S_\Delta \circ S_I = S_\Delta \circ S_\Delta \circ S_{(XY)} = S_{(XY)}$
   - ⋆ $S_I \circ S_\Delta = S_{(XY)} \circ S_\Delta \circ S_\Delta = S_{(XY)}$

   On peut donc en tirer une « table de multiplication »

$\circ$	$\mathrm{Id}_\mathcal{E}$	S_I	$S_{(XY)}$	S_Δ
$\mathrm{Id}_\mathcal{E}$	$\mathrm{Id}_\mathcal{E}$	S_I	$S_{(XY)}$	S_Δ
S_I	S_I	$\mathrm{Id}_\mathcal{E}$	S_Δ	$S_{(XY)}$
$S_{(XY)}$	$S_{(XY)}$	S_Δ	$\mathrm{Id}_\mathcal{E}$	S_I
S_Δ	S_Δ	$S_{(XY)}$	S_I	$\mathrm{Id}_\mathcal{E}$

2. On peut remarquer que pour tout $f \in \mathcal{I}_A$, $f \circ f = f^2 = \mathrm{Id}_\mathcal{E}$
3. Nous avons $(\mathcal{I}_A, \circ)$ isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$. C'est le groupe de Klein

   En effet, on montre facilement que Φ, ainsi définie :
$$\left\{\begin{array}{rcl} \Phi : \mathcal{I}_A & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \mathrm{Id}_\mathcal{E} & \longmapsto & \Phi(\mathrm{Id}_\mathcal{E}) = (0,0) \\ S_I & \longmapsto & \Phi(S_I) = (1,1) \\ S_{(XY)} & \longmapsto & \Phi\left(S_{(XY)}\right) = (0,1) \\ S_\Delta & \longmapsto & \Phi(S_\Delta) = (1,0) \end{array}\right.$$
   est un isomorphisme de groupe.

21.3.8 Isométries laissant fixe l'ensemble $A = \{X, Y, Z\}$ où XYZ est un triangle équilatéral

L'ensemble $\mathcal{I}_A$ des isométries laissant invariant $A = \{X, Y, Z\}$, où XYZ est un triangle équilatéral, est l'ensemble $\mathcal{I}_A$ où
$$\mathcal{I}_A = \left\{\mathrm{Id}_\mathcal{E}, R, R^2, S_{(OX)}, S_{(OY)}, S_{(OZ)}\right\}$$
Pour lesquels, si O est le centre de gravité de $A = \{X, Y, Z\}$:
- ⇒ $\mathrm{Id}_\mathcal{E}$ est l'application identique
- ⇒ R est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$
- ⇒ $S_{(OX)}$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite passant par O et X
- ⇒ $S_{(OY)}$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite passant par O et Y
- ⇒ $S_{(OZ)}$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite passant par O et Z

Démonstration

Tout d'abord, O, l'isobarycentre *(ou centre de gravité)* de $A = \{X, Y, Z\}$ est invariant pour tout élément $f \in \mathcal{I}_A$

1. **Supposons f antidéplacement**

   Comme $f(O) = O$, f est sûrement une symétrie orthogonale par rapport à une droite passant par O. Nous trouvons donc
$$\mathcal{I}_A^- = \left\{S_{(OX)}; S_{(OY)}; S_{(OZ)}\right\}$$
2. **Supposons f déplacement**

   Comme $f(O) = O$, il n'y a que 3 possibilités : $f = \mathrm{Id}_\mathcal{E}$, $f = R\left(O, \dfrac{2\pi}{3}\right)$ et $f = R^2\left(O, \dfrac{2\pi}{3}\right)$

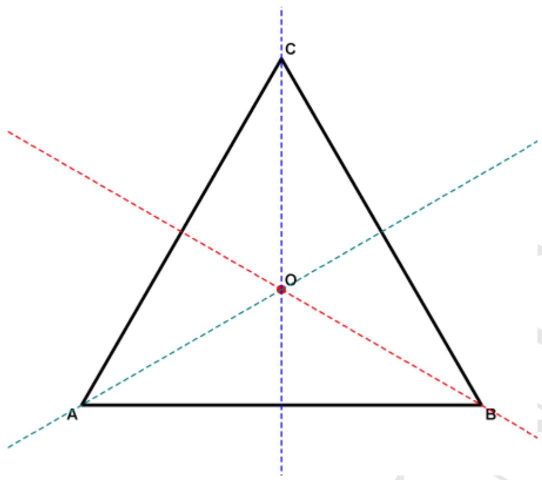


FIGURE 21.14 – Isométries laissant invariant $E = \{A, B, C\}$ où ABC est un triangle rectangle

Remarque 23 :

1. L'ensemble $\left\{\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}; R; R^2\right\}$ est un sous-groupe cyclique de $\mathcal{I}_A$
2. Comme montré dans l'introduction de cette section, $\mathcal{I}_A = \mathcal{I}_A^+ \cup S_{(OX)}\mathcal{I}_A^+$
3. Nous avons les identités suivantes :

$$R\left(O, \frac{2\pi}{3}\right) = R = S_{(OX)} \circ S_{(OY)} = S_{(OZ)} \circ S_{(OX)} = S_{(OY)} \circ S_{(OZ)}$$

   De telle sorte que :
   $\Rightarrow$ $S_{(OX)} \circ R = S_{(OX)} \circ S_{(OX)} \circ S_{(OY)} = S_{(OY)}$
   $\Rightarrow$ $R \circ S_{(OX)} = S_{(OZ)} \circ S_{(OX)} \circ S_{(OX)} = S_{(OZ)}$
   $\Rightarrow$ $S_{(OY)} \circ R = S_{(OY)} \circ S_{(OY)} \circ S_{(OZ)} = S_{(OZ)}$
   $\Rightarrow$ $R \circ S_{(OY)} = S_{(OX)} \circ S_{(OY)} \circ S_{(OY)} = S_{(OX)}$
   $\Rightarrow$ $S_{(OZ)} \circ R = S_{(OZ)} \circ S_{(OZ)} \circ S_{(OX)} = S_{(OX)}$
   $\Rightarrow$ $R \circ S_{(OZ)} = S_{(OY)} \circ S_{(OZ)} \circ S_{(OZ)} = S_{(OY)}$
   Nous pouvons aussi aller plus loin en calculant, par exemple $S_{(OX)} \circ R^2$:

$$S_{(OX)} \circ R^2 = S_{(OX)} \circ R \circ R = S_{(OX)} \circ \left(S_{(OX)} \circ S_{(OY)}\right) \circ \left(S_{(OY)} \circ S_{(OZ)}\right) = S_{(OZ)}$$

   Nous laissons le lecteur calculer, par la même méthode, $R^2 \circ S_{(OX)}$, etc...
4. $\mathcal{I}_A$ est appelé groupe diédral noté Δ_3 engendré par $S_{(OX)}$ qui est d'ordre 2 et R qui est d'ordre 3
   On peut, à nouveau, en tirer une « table de multiplication »

$\circ$	$\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$	R	R^2	$S_{(OX)}$	$S_{(OY)}$	$S_{(OZ)}$
$\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$	$\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$	R	R^2	$S_{(OX)}$	$S_{(OY)}$	$S_{(OZ)}$
R	R	R^2	$\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$	$S_{(OZ)}$	$S_{(OX)}$	$S_{(OY)}$
R^2	R^2	$\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$	R	$S_{(OY)}$	$S_{(OZ)}$	$S_{(OX)}$
$S_{(OX)}$	$S_{(OX)}$	$S_{(OY)}$	$S_{(OZ)}$	$\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$	R	R^2
$S_{(OY)}$	$S_{(OY)}$	$S_{(OZ)}$	$S_{(OX)}$	R^2	$\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$	R
$S_{(OZ)}$	$S_{(OZ)}$	$S_{(OX)}$	$S_{(OY)}$	R	R^2	$\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$

Exercice 16 :

Trouver les isométries laissant invariant un carré

21.4 Les isométries de l'espace

21.4.1 Plan médiateur

Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien de dimension 3 et direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{E}}$
Soient $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{E}$, avec $A \neq B$ et $\mathcal{M}$ l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $MA = MB$, c'est à dire

$$\mathcal{M} = \{M \in \mathcal{E} \text{ tels que } MA = MB\}$$

Alors, $\mathcal{M}$ est un plan, de direction orthogonale au vecteur $\overrightarrow{AB}$, passant par le milieu I du segment $[A; B]$
$\mathcal{M}$ est appelé plan médiateur du segment $[A; B]$

Démonstration

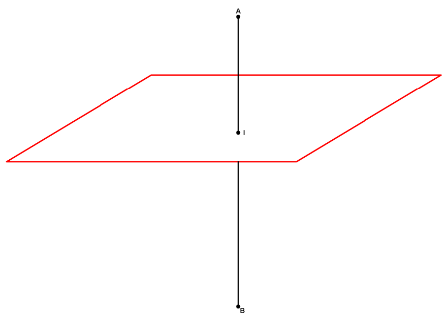


FIGURE 21.15 – Le plan médiateur

1. Nous avons $\mathcal{M} \neq \emptyset$ puisque I le milieu du segment $[A; B]$ est tel que $IA = IB$ et donc $I \in \mathcal{M}$
2. Plus généralement, soit $M \in \mathcal{M}$. Nous avons donc $MA = MB$ et

$$MA = MB \iff MA^2 = MB^2 \iff MA^2 - MB^2 = 0 \iff \left\langle \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \mid \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} \right\rangle = 0 \iff \left\langle 2\overrightarrow{MI} \mid \overrightarrow{BA} \right\rangle = 0$$

   Et donc, nous avons $\left\langle \overrightarrow{MI} \mid \overrightarrow{BA} \right\rangle = 0$

   Ainsi, $\mathcal{M}$ est un plan, de direction orthogonale au vecteur $\overrightarrow{AB}$, passant par le milieu I du segment $[A; B]$

21.4.2 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien de dimension 3 et direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{E}}$
Soit $f \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$ une isométrie de $\mathcal{E}$ qui admet 4 points invariants non coplanaires.
Alors, $f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$

Démonstration

Appelons $\{A, B, C, D\}$ les 4 points non coplanaires et invariants. Du fait que ces 4 points sont non coplanaires, ils forment un repère affine de $\mathcal{E}$.
D'après le cours sur les applications affines, par conservation du barycentre, pour tout $X \in \mathcal{E}$, nous avons $f(X) = X$ et donc $f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$

21.4.3 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien de dimension 3 et direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{E}}$
Soit $f \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$ une isométrie de $\mathcal{E}$ qui admet 3 points A, B et C non alignés invariants.
Alors, f est une symétrie orthogonale par rapport au plan (ABC)
Une symétrie orthogonale par rapport à un plan est une isométrie négative

Démonstration

1. Les points A, B et C non alignés étant invariants, d'après les propriétés des conservations des barycentres, le plan (ABC) est invariant.
2. Pour tout point $M \notin (ABC)$ et tout point $X \in (ABC)$, comme X est invariant par f et que f est une isométrie, nous avons $XM = Xf(M)$ et donc le plan (ABC) est le plan médiateur du segment $[M; f(M)]$
3. Le vecteur $\overrightarrow{Mf(M)}$ est orthogonal au plan (ABC), le milieu I du segment $[M; f(M)]$ est invariant, et donc f est une symétrie orthogonale par rapport au plan (ABC)

21.4.4 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien de dimension 3 et direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{E}}$
Soit $f \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$ une isométrie de $\mathcal{E}$ distincte de l'identité et d'une symétrie orthogonale par rapport à un plan et qui admet 2 points A, B avec $A \neq B$ invariants.
Alors, f est la composée de 2 symétries orthogonales par rapport à 2 plans.
f est une isométrie positive

Démonstration

1. Comme dans les théorèmes précédents, on peut déjà dire que la droite (AB) est invariante par f
2. Soit $C \notin (AB)$, alors, pour tout $X \in (AB)$, nous avons, du fait que f est une isométrie, nous avons $XC = Xf(C)$ et donc la droite (AB) est incluse dans le plan médiateur du segment $[C; f(C)]$. Nous appelons $\mathcal{P}$ ce plan médiateur
3. Intéressons nous, maintenant, à la fonction $g = \mathcal{S}_{\mathcal{P}} \circ f$ où $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$. Alors :

   $$g(A) = \mathcal{S}_{\mathcal{P}} \circ f(A) = \mathcal{S}_{\mathcal{P}}(A) = A \quad g(B) = \mathcal{S}_{\mathcal{P}} \circ f(B) = \mathcal{S}_{\mathcal{P}}(B) = B \quad g(C) = \mathcal{S}_{\mathcal{P}} \circ f(C) = \mathcal{S}_{\mathcal{P}}(f(C)) = C$$

   Nous avons donc les 3 points A, B et C invariants par g et d'après 21.4.3, g est la symétrie orthogonale par rapport au plan (ABC) que nous pouvons écrire $g = \mathcal{S}_{(ABC)}$.
   Ainsi, nous avons $\mathcal{S}_{(ABC)} = \mathcal{S}_{\mathcal{P}} \circ f \iff f = \mathcal{S}_{\mathcal{P}} \circ \mathcal{S}_{(ABC)}$
   f est donc bien la composée de 2 symétries orthogonales planes.

Remarque 24 :

On vient de démontrer qu'une isométrie qui admet comme ensemble de points invariants une droite est la composée de deux symétries orthogonales par rapport à des plans

21.4.5 Définition de demi-tour

Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien de dimension 3 et de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{E}}$
Soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ une droite de l'espace $\mathcal{E}$
A tout point $M \in \mathcal{E}$ on associe le point $H \in \mathcal{D}$ projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$, puis le point $M' \in \mathcal{E}$ tel que H soit le milieu du segment $[M; M']$. M' est donc le symétrique orthogonal de M par rapport à $\mathcal{D}$
L'application $S_{\mathcal{D}}$ qui à M associe M' est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}$ ou demi-tour d'axe $\mathcal{D}$

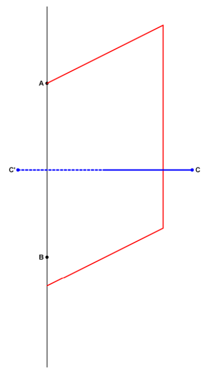


FIGURE 21.16 – Illustration du problème

Exercice 17 :

Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien de dimension 3 et de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
Définir analytiquement le demi-tour dont l'axe est la droite $\mathcal{D}$ de repère $(A, \overrightarrow{u})$ où :

1. $A = (-1, 2, 1)$ et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$
2. $A = (0, 0, 0)$ et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

21.4.6 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien de dimension 3 et direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{E}}$
Soit $f \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$ une isométrie de $\mathcal{E}$ qui n'admet qu'unseul point invariant A.
Alors, f est la composée de 3 symétries orthogonales par rapport à 3 plans passant par A et 2à2 sécants.
f est une isométrie négative

Démonstration

1. Soit $B \in \mathcal{E}$ distinct de A *(c'est à dire $B \neq A$)*; alors, f étant une isométrie, $AB = Af(B)$ et donc A est un point du plan médiateur de $[Bf(B)]$. Soit $\mathcal{P}$ ce plan médiateur et $S_{\mathcal{P}}$ la symétrie orthogonale par rapport à ce plan $\mathcal{P}$ et nous considérons $g = S_{\mathcal{P}} \circ f$
   Alors $g(A) = S_{\mathcal{P}} \circ f(A) = S_{\mathcal{P}}(A) = A$ et $g(B) = S_{\mathcal{P}} \circ f(B) = S_{\mathcal{P}}(f(B)) = B$
   g est donc une isométrie admettant 2 points invariants A et B
2. g ne peut pas être l'identité, puisque nous aurions alors $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} = S_{\mathcal{P}} \circ f$ et donc $f = (S_{\mathcal{P}})^{-1} = S_{\mathcal{P}}$, ce qui est en contradiction avec le nombre de points invariants de f
3. g ne peut pas être une symétrie orthogonale par rapport à un plan. sinon, si $g = S_{\Pi}$, alors $f = S_{\mathcal{P}} \circ S_{\Pi}$ et, alors f a plus d'un point invariant si $\mathcal{P}$ et Π sont sécants ou aucun si $\mathcal{P}$ et Π sont parallèles.
4. Ainsi, d'après 21.4.4, g est la composée de 2 symétries orthogonales par rapport à 2 plans :
   $$g = S_Q \circ S_R = S_{\mathcal{P}} \circ f \Longleftrightarrow f = S_{\mathcal{P}} \circ S_Q \circ S_R$$
   f est donc bien le produit de 2 symétries orthogonales par rapport à des plans où aucun de ces 3 plans ne peuvent être parallèles 2 à 2

21.4.7 Quelques exercices

Exercice 18 :

Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien de dimension 3 et de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

Définir analytiquement la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x + 2y - z + 2 = 0$

Exercice 19 :

Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien de dimension 3 et de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
On considère l'application $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ définie analytiquement par :

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = & \frac{1}{3}(x - 2y - 2z + 3) \\ y' = & \frac{1}{3}(-2x + y - 2z) \\ z' = & \frac{1}{3}(-2x - 2y + z - 6) \end{array}\right.$$

1. Démontrer que, pour tout point $M \in \mathcal{E}$ d'image $f(M)$, le milieu du segement $[M; f(M)]$ appartient à un plan fixe $\mathcal{P}$
2. Démontrer que le point M_1, symétrique de M par rapport au plan $\mathcal{P}$ est tel que le vecteur $\overrightarrow{M_1 f(M)}$ est constant.
3. En déduire que f est le produit de 2 transformations simples.
4. Soit $A \in \mathcal{E}$ tel que $A \notin \mathcal{P}$. Déterminer, géométriquement, l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ d'image $f(M)$ tels que :
   (a) $AM = Af(M)$
   (b) Les points A, M et $f(M)$ sont alignés
   (c) $Mf(M) = a$ où $a \geqslant 0$ est un réel positif donné

Exercice 20 :

Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien de dimension 3 et de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
On considère l'application $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ dont la définition analytique est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = & \frac{1}{9}(-8x + 4y + z + 16) \\ y' = & \frac{1}{9}(4x + 7y + 4z - 6) \\ z' = & \frac{1}{9}(x + 4y - 8z + 8) \end{array}\right.$$

1. Démontrer que l'ensemble des points invariants par f est une droite $\mathcal{D}$ dont on donnera un repère $(A, \overrightarrow{u})$
2. Démontrer que f est un demi-tour
3. Donner la matrice dans la base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ de $\overrightarrow{f}$, l'application linéaire associée à f

Exercice 21 :

Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien de dimension 3 et de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
On considère l'application $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ dont la définition analytique est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = & x + 2 \\ y' = & y \\ z' = & -z + 2 \end{array}\right.$$

1. Démontrer que f est une isométrie
2. Démontrer que, pour tout $M \in \mathcal{E}$, le milieu de $[M; f(M)]$ appartient à un plan fixe $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$
3. On appelle M_1 le symétrique de M par rapport à $\mathcal{P}$. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{M_1 f(M)}$ est constant
4. En déduire que f est la composée de 2 applications simples.

Exercice 22 :

Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien de dimension 3 et de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
On considère l'application $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ dont la définition analytique est donnée par :

$$\begin{cases} x' = & \dfrac{1}{3}(2x - 2y - z + 4) \\ y' = & \dfrac{1}{3}(-2x - y - 2z + 8) \\ z' = & \dfrac{1}{3}(-x - 2y + 2z + 4) \end{cases}$$

1. Démontrer que f est une isométrie involutive de $\mathcal{E}$
2. Rechercher l'ensemble des points invariants par f
3. Quelle est la nature de f ? En donner les éléments caractéristiques

21.5 Les rotations de l'espace

21.5.1 Angle de 2 plans dans l'espace

Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien de dimension 3 et de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

1. Soient $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$ et $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{E}$ 2 plans de $\mathcal{E}$ sécants et passant par une même droite Δ de vecteur directeur $\overrightarrow{k}$
2. La droite orientée par $\overrightarrow{k}$ est un axe $\Delta_{\overrightarrow{k}}$
3. Le triplet $\left(\mathcal{P}, \Delta_{\overrightarrow{k}}, \mathcal{P}_1\right)$ est un angle orienté de plans.
4. Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_1$ sont les faces de cet angle et l'axe $\Delta_{\overrightarrow{k}}$ est une arête.
5. Tout plan Π, orthogonal à l'arête $\Delta_{\overrightarrow{k}}$ est orienté par le vecteur $\overrightarrow{k}$. Ce plan coupe Δ en O, et les faces $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_1$ en 2 droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_1$ passant toutes 2 par O. Nous posons :

$$\widehat{\left(\mathcal{P}, \Delta_{\overrightarrow{k}}, \mathcal{P}_1\right)} \equiv \widehat{(\mathcal{D}, \mathcal{D}_1)}\,[\pi]$$

Remarque 25 :

En écrivant $\widehat{\left(\mathcal{P}, \Delta_{\overrightarrow{k}}, \mathcal{P}_1\right)} \equiv \widehat{(\mathcal{D}, \mathcal{D}_1)}\,[\pi]$, on écrit que les mesures de l'angle de plans $\widehat{\left(\mathcal{P}, \Delta_{\overrightarrow{k}}, \mathcal{P}_1\right)}$ sont les mesures de droites déterminées par un plan Π, orthogonal à Δ et orienté par $\overrightarrow{k}$

21.5.2 Propriété

Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien de dimension 3 et de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.
Etant donné un axe $\Delta_{\overrightarrow{k}}$ et un réel $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout plan $\mathcal{P}$ contenant Δ, il existe un plan $\mathcal{P}_1$ contenant Δ tel que

$$\widehat{\left(\mathcal{P}, \Delta_{\overrightarrow{k}}, \mathcal{P}_1\right)} \equiv \alpha\,[\pi]$$

Démonstration

Soient $\Delta_{\overrightarrow{k}}$, un réel $\alpha \in \mathbb{R}$ et un $\mathcal{P}$ contenant Δ

1. Soit P un plan orthogonal à Δ, alors l'intersection de P et de $\mathcal{P}$ est une droite D, c'est à dire $P \cap \mathcal{P} = D$
2. Dans ce plan P, il existe une droite D_1 et une seule telle que $\widehat{(D, D_1)} \equiv \alpha\,[\pi]$

3. D_1 et Δ définissent donc un plan $\mathcal{P}_1$ et donc :

$$\widehat{\left(\mathcal{P}, \Delta_{\overrightarrow{k}}, \mathcal{P}_1\right)} \equiv \widehat{(D, D_1)} \equiv \alpha\,[\pi]$$

21.5.3 Relation de Chasles

Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien de dimension 3 et de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.
Etant donnés une droite orientée $\Delta_{\overrightarrow{k}}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ 3 plans orthogonaux à $\Delta_{\overrightarrow{k}}$

1. Nous avons la relation de Chasles :

$$\widehat{\left(\mathcal{P}, \Delta_{\overrightarrow{k}}, \mathcal{P}_1\right)} + \widehat{\left(\mathcal{P}_1, \Delta_{\overrightarrow{k}}, \mathcal{P}_2\right)} \equiv \widehat{\left(\mathcal{P}, \Delta_{\overrightarrow{k}}, \mathcal{P}_2\right)}\,[\pi]$$

2. Et la conséquence de cette relation de Chasles :

$$\widehat{\left(\mathcal{P}, \Delta_{\overrightarrow{k}}, \mathcal{P}_1\right)} \equiv -\widehat{\left(\mathcal{P}_1, \Delta_{\overrightarrow{k}}, \mathcal{P}\right)}\,[\pi]$$

Remarque 26 :

Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien de dimension 3 et de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. Etant donnés une droite orientée $\Delta_{\overrightarrow{k}}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_1$, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_1$ sont orthogonaux si et seulement si

$$\widehat{\left(\mathcal{P}, \Delta_{\overrightarrow{k}}, \mathcal{P}_1\right)} \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$$

21.5.4 Question

Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien de dimension 3 et de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. On se donne $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_1$ 2 plans sécants et nous allons nous intéresser à $f = S_{\mathcal{P}} \circ S_{\mathcal{P}_1}$.

Nous posons $\Delta = S_{\mathcal{P}} \cap S_{\mathcal{P}_1}$ et $\widehat{\left(\mathcal{P}_1, \Delta_{\overrightarrow{k}}, \mathcal{P}\right)} \equiv \alpha\,[\pi]$

1. Δ est évidemment une droite invariante
2. Soit $M \notin \Delta$. Il existe un plan P, orthogonal à Δ passant par M et on appelle $P \cap \Delta = \{O\}$ et nous posons $\mathcal{D}_1 = \mathcal{P}_1 \cap P$ et $\mathcal{D} = \mathcal{P} \cap P$. Nous nous intéressons à la restriction de $f = S_{\mathcal{P}} \circ S_{\mathcal{P}_1}$ à P
   Si $M_1 = S_{\mathcal{D}}(M)$, nous avons aussi $M_1 = S_{\mathcal{P}}(M)$ et, de même, $M' = S_{\mathcal{D}_1}(M_1)$ et donc $M' = S_{\mathcal{P}_1}(M_1)$
3. Ainsi, dans le plan P, orienté par $\Delta_{\overrightarrow{k}}$, nous avons aussi $\widehat{(\mathcal{D}_1, \mathcal{D})} \equiv \alpha\,[\pi]$ et donc, la restriction de $f = S_{\mathcal{P}} \circ S_{\mathcal{P}_1}$ à P est une rotation plane de centre O et d'angle 2α

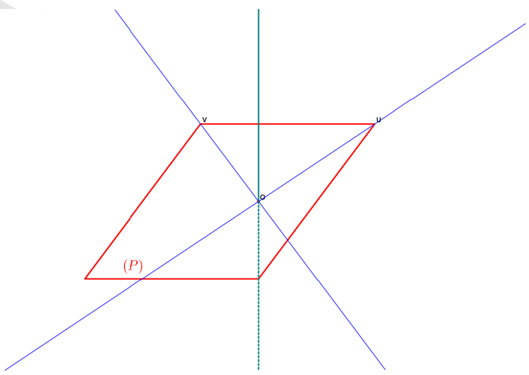


FIGURE 21.17 – Rotation dans l'espace

21.5.5 Définition d'une rotation

Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien de dimension 3 et de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.
On appelle <u>rotation</u> une isométrie R de l'espace $\mathcal{E}$ tout <u>déplacement</u> ayant au moins un point invariant

Remarque 27 :

Une rotation R de l'espace $\mathcal{E}$ est déterminée par un des points invariants $O \in \mathcal{E}$ et par l'isométrie positive $\overrightarrow{R}$ associée.
Cette isométrie positive $\overrightarrow{R}$ est un déplacement de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, c'est à dire une rotation vectorielle. Il existe donc une base orthonormée $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ dans laquelle la matrice de $\overrightarrow{R}$ est donnée par :

$$\mathcal{M}_{\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}}\left(\overrightarrow{R}\right) = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ où } a^2 + b^2 = 1$$

$\overrightarrow{R}$ admet comme ensemble de vecteurs invariants une droite vectorielle $\overrightarrow{\Delta}$

21.5.6 Propriété

Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien de dimension 3 et de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.
Soit R une rotation de $\mathcal{E}$, différente de l'application identique $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$, admettant O comme point invariant.
L'ensemble des points invariants de R est une droite passant par O appelé axe de la rotation
La <u>mesure</u>, en radians de la rotation R est la mesure en radians (modulo 2π) de la rotation vectorielle $\overrightarrow{R}$

<u>Démonstration</u>

Soit R une rotation de $\mathcal{E}$, différente de l'application identique, et O son point invariant.
$\overrightarrow{R}$ est l'application linéaire associée et admet $\overrightarrow{F}$ comme ensemble des vecteurs invariants. Nous savons que $\overrightarrow{F}$ est une droite vectorielle de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.
Appelons $\mathcal{I} \subset \mathcal{E}$ l'ensemble des points invariants de R. bien entendu, $\mathcal{I} \neq \emptyset$ puisque $O \in \mathcal{I}$.
Maintenant, nous avons les équivalences :

$$M \in \mathcal{I} \iff \overrightarrow{R}\left(\overrightarrow{OM}\right) = \overrightarrow{R(O)\,R(M)} = \overrightarrow{OM}$$

Nous avons donc $\overrightarrow{OM} \in \overrightarrow{F}$ et nous en déduisons que $\mathcal{I}$ admet pour direction $\overrightarrow{F}$

Remarque 28 :

1. Dans un espace affine euclidien $\mathcal{E}$, une rotation R d'axe $\Delta_{\overrightarrow{k}}$ et d'angle θ est telle que la restriction à tout plan P orthogonal à Δ en un point O, orienté par le vecteur $\overrightarrow{k}$ soit une rotation d'angle θ et de centre O
2. Si nous appelons $R\left(\Delta_{\overrightarrow{k}}, \theta\right)$ la rotation d'axe $\Delta_{\overrightarrow{k}}$ et d'angle θ, nous avons :
   (a) $R\left(\Delta_{\overrightarrow{k}}, 0\right) = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$
   (b) $R\left(\Delta_{\overrightarrow{k}}, \pi\right) = R\left(\Delta_{\overrightarrow{k}}, -\pi\right) = \mathcal{S}_{\Delta}$; c'est un demi-tour ou symétrie orthogonale par rapport à Δ
   (c) Nous pouvons noter que $R\left(\Delta_{\overrightarrow{k}}, -\theta\right) = R\left(\Delta_{-\overrightarrow{k}}, \theta\right)$
3. La composition de 2 symétries planes par rapport à 2 plans $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$ et $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{E}$ sécants suivant une droite Δ est une rotation $R\left(\Delta_{\overrightarrow{k}}, 2\widehat{\left(\mathcal{P}, \Delta_{\overrightarrow{k}}, \mathcal{P}_1\right)}\right)$
   Ainsi, si 2 plans $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$ et $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{E}$ sont perpendiculaires et sécants en Δ, puisque $\widehat{\left(\mathcal{P}, \Delta_{\overrightarrow{k}}, \mathcal{P}_1\right)} = \dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$, alors $S_{\mathcal{P}_1} \circ S_{\mathcal{P}} = R\left(\Delta_{\overrightarrow{k}}, \pi\right) = S_{\Delta}$; c'est donc un demi-tour d'axe Δ ou symétrie orthogonale par rapport à Δ

4. Réciproquement, toute rotation $R\left(\Delta_{\overrightarrow{k}}, \theta\right)$ de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ peut se décomposer en un produit $R\left(\Delta_{\overrightarrow{k}}, \theta\right) = S_{\mathcal{P}} \circ S_{\mathcal{P}_1}$ de 2 symétries orthogonales par rapport à 2 plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_1$ tels que :
$$\begin{cases} \mathcal{P} \cap \mathcal{P}_1 = \Delta \\ \widehat{\left(\mathcal{P}_1, \Delta_{\overrightarrow{k}}, \mathcal{P}\right)} \equiv \dfrac{\theta}{2}\,[\pi] \end{cases}$$
Il est clair que si le choix du plan $\mathcal{P}$ est arbitraire, celui de $\mathcal{P}_1$ est entièrement déterminé par celui de $\mathcal{P}$ *(Et réciproquement !)*

Exercice 23 :

Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien de dimension 3 et de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. Soit Δ la droite passant par le point A de coordonnées $(x_0, y_0, 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{k}$. Définir analytiquement la rotation d'axe $\Delta_{\overrightarrow{k}}$ et de mesure θ

<u>Résolution de cet exercice</u>

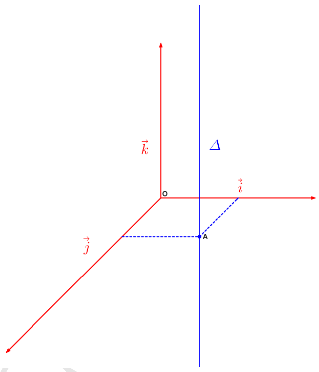


FIGURE 21.18 – Figure illustrant l'exercive

1. Considérons la rotation vectorielle $\overrightarrow{R}$ associée à $R = R\left(A, \Delta_{\overrightarrow{k}}\right)$. Comme $\overrightarrow{k}$ est un vecteur invariant, la matrice de $\overrightarrow{R}$, dans la base orthonormée $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ est donnée par :
$$\mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}}\left(\overrightarrow{R}\right) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Comme $A \in \Delta$, A est un point invariant par R, alors, pour tout $M \in \mathcal{E}$, nous avons :
$$\overrightarrow{R}\left(\overrightarrow{AM}\right) = \overrightarrow{R(A)\,R(M)} = \overrightarrow{AR(M)}$$
C'est à dire que si nous posons $M = (x, y, z)$ et $R(M) = (x', y', z')$, nous avons, en termes matriciels :
$$\begin{pmatrix} x' - x_0 \\ y' - y_0 \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z \end{pmatrix}$$
Nous tirons, après le calcul matriciel :
$$\begin{cases} x' - x_0 = & \cos\theta\,(x - x_0) - \sin\theta\,(y - y_0) \\ y' - y_0 = & \sin\theta\,(x - x_0) + \cos\theta\,(y - y_0) \\ z' = & z \end{cases}$$

3. D'où nous obtenons la définition analytique de $R = R\left(A, \Delta_{\overrightarrow{k}}\right)$

$$\left\{\begin{array}{rl} x' = & \cos\theta\,(x-x_0) - \sin\theta\,(y-y_0) + x_0 \\ y' = & \sin\theta\,(x-x_0) + \cos\theta\,(y-y_0) + y_0 \\ z' = & z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} x' = & x\cos\theta - y\sin\theta + x_0\,(1-\cos\theta) + y_0\sin\theta \\ y' = & x\sin\theta + y\cos\theta + y_0\,(1-\cos\theta) - x_0\sin\theta \\ z' = & z \end{array}\right.$$

Exercice 24 :

Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien de dimension 3 et de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. Démontrer que l'application $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, analytiquement définie par :

$$\left\{\begin{array}{rl} x' = & z+3 \\ y' = & x-2 \\ z' = & y-1 \end{array}\right.$$

Il faut montrer que f est une rotation dont on donnera l'axe et une mesure de l'angle

<u>**Résolution de cet exercice**</u>

1. Clairement, cette application est une application affine. Si $\overrightarrow{f}$ est l'application linéaire associée a pour matrice dans la base orthonormée $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$.

$$\mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}}\left(\overrightarrow{f}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Dans un premier temps, nous voyons que $\overrightarrow{f}$ transforme la base orthonomée $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ en la base orthonormée $\left\{\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{i}\right\}$, $\overrightarrow{f}$ est donc un endomorphisme orthogonal.

   D'autre part, $\det\left(\mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}}\left(\overrightarrow{f}\right)\right) = 1$, $\overrightarrow{f}$ est donc un déplacement ou isométrie positive.

2. <u>Recherchons les points invariants par f</u>

   Un point $M \in \mathcal{E}$ est invariant par f si et seulement si $f(M) = M$, c'est à dire, si les coordonnées (x, y, z) de M vérifient :

$$\left\{\begin{array}{rl} x = & z+3 \\ y = & x-2 \\ z = & y-1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} x-z-3 = & 0 \\ -x+y+2 = & 0 \\ -y+z+1 = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} x = & z+3 \\ y = & z+1 \end{array}\right.$$

   Le dernier système d'équations caractérise l'équation d'une droite passant par le point A de coordonnées $(3, 1, 0)$ et donc un vecteur directeur est $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$

   Comme l'ensemble des points invariants est une droite, f est donc une rotation

3. <u>Recherchons l'angle de cette rotation</u>

   Si α est une mesure, en radian de la rotation vectorielle $\overrightarrow{f}$, relativement à une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}', \overrightarrow{k}'\right\}$ bien choisie, la matrice est donnée par :

$$\mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}', \overrightarrow{k}'\right\}}\left(\overrightarrow{f}\right) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   L'axe de la rotation vectorielle est le vecteur $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ qui n'est pas normé. Nous le normons donc en choisissant $\overrightarrow{k}' = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\right)$

   Prenons pour $\overrightarrow{i}'$, un vecteur normé orthogonal à $\overrightarrow{k}'$. Soit donc $\overrightarrow{i}' = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Nous choisissons pour $\overrightarrow{j}'$, le vecteur obtenu par le produit vectoriel $\overrightarrow{k}' \wedge \overrightarrow{i}'$. Nous obtiendrons alors une base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}', \overrightarrow{k}'\right\}$

Par calculs, nous obtenons : $\overrightarrow{j}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

Pour connaître l'angle de la rotation, nous allons utiliser le fait que : $\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{i}'\right) = \cos\alpha\,\overrightarrow{i}' + \sin\alpha\,\overrightarrow{j}'$

Puis nous utilisons le produit scalaire

$\Rightarrow \left\langle \overrightarrow{i}' \mid \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{i}'\right)\right\rangle = \left\langle \overrightarrow{i}' \mid \cos\alpha\,\overrightarrow{i}' + \sin\alpha\,\overrightarrow{j}'\right\rangle = \cos\alpha \left\langle \overrightarrow{i}' \mid \overrightarrow{i}'\right\rangle + \sin\alpha \left\langle \overrightarrow{i}' \mid \overrightarrow{j}'\right\rangle = \cos\alpha$

$\Rightarrow$ De la même manière, nous avons $\left\langle \overrightarrow{j}' \mid \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{i}'\right)\right\rangle = \cos\alpha \left\langle \overrightarrow{j}' \mid \overrightarrow{i}'\right\rangle + \sin\alpha \left\langle \overrightarrow{j}' \mid \overrightarrow{j}'\right\rangle = \sin\alpha$ [3]

En utilisant les coordonnées de $\overrightarrow{i}'$ et la matrice $\mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}}\left(\overrightarrow{f}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, nous obtenons les coordonnées de $\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{i}'\right)$. Nous avons donc $\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{i}'\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ de telle sorte que :

- ⋆ $\cos\alpha = \left\langle \overrightarrow{i}' \mid \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{i}'\right)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \times -\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{2}$
- ⋆ $\sin\alpha = \left\langle \overrightarrow{j}' \mid \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{i}'\right)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{-1}{\sqrt{2}} \times \frac{-2}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ainsi, de $\cos\alpha = \frac{-1}{2}$ et $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, nous déduisons que $\alpha \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

f est donc une rotation la droite Δ passant par le point A de coordonnées $(3, 1, 0)$, de vecteur directeur $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

21.5.7 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien de dimension 3 et de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.
Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_1$ de plans de $\mathcal{E}$, parallèles. Alors
$S_{\mathcal{P}_1} \circ S_{\mathcal{P}}$ est une translation de vecteur $2\overrightarrow{HK}$ où si $H \in \mathcal{P}$ est un point de $\mathcal{P}$, K est le projeté orhogonal de H sur $\mathcal{P}_1$

Démonstration

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_1$ de plans de $\mathcal{E}$, parallèles.

1. On montre que le vecteur $\overrightarrow{HK}$ est constant *(ne dépend pas de H)*

   Le vecteur $\overrightarrow{HK}$ est orthogonal à $\overrightarrow{P}$ direction commune des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_1$. Pour $H_0 \in \mathcal{P}$ et K_0 est le projeté orthogonal de H_0 sur $\mathcal{P}_1$, nous allons montrer que $\overrightarrow{H_0K_0} = \overrightarrow{HK}$
   Supposons le contraire, c'est à dire $\overrightarrow{H_0K_0} \neq \overrightarrow{HK}$.
   Tout d'abord, nous avons, les points H, K, H_0 et K_0, coplanaires et, clairement, les vecteurs $\overrightarrow{H_0K_0}$ et $\overrightarrow{HK}$ colinéaires ; il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 1$ tel que $\overrightarrow{H_0K_0} = \lambda\overrightarrow{HK}$.
   Appelons Q le plan contenant H, K, H_0 et K_0. Comme $\lambda \neq 1$, il existe $\Omega \in Q$ tels que $\overrightarrow{\Omega K_0} = \lambda\overrightarrow{\Omega K}$ et $\overrightarrow{\Omega H_0} = \lambda\overrightarrow{\Omega H}$ *(Théorème de Thalès)*

3. Nous aurions aussi pu utiliser un autre produit scalaire comme $\left\langle \overrightarrow{i}' \mid \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{j}'\right)\right\rangle$ et nous aurions obtenu $\left\langle \overrightarrow{i}' \mid \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{j}'\right)\right\rangle = -\sin\alpha$

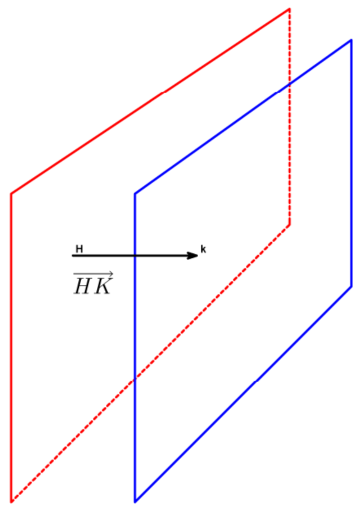


FIGURE 21.19 – Les plans parallèles

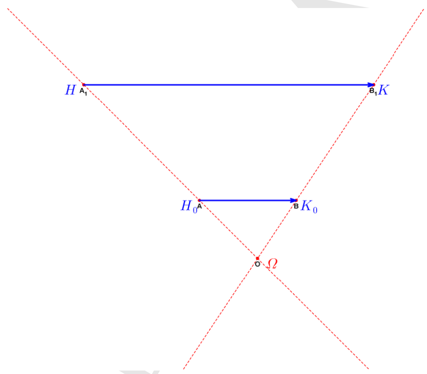


FIGURE 21.20 – Les 5 points coplanaires

En écrivant $\overrightarrow{\Omega K_0} = \lambda \left(\overrightarrow{\Omega K_0} + \overrightarrow{K_0 K}\right)$ nous obtenons $\overrightarrow{\Omega K_0} = \dfrac{\lambda}{\lambda - 1}\overrightarrow{K_0 K}$.

De même, nous avons $\overrightarrow{\Omega H_0} = \dfrac{\lambda}{\lambda - 1}\overrightarrow{H_0 H}$, ceci voulant dire que Ω est à la fois dans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_1$, ce qui est impossible puisque $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_1$ sont parallèles ; il y a contradiction et donc $\overrightarrow{H_0 K_0} = \overrightarrow{HK}$

2. Où on démontre que $S_{\mathcal{P}_1} \circ S_{\mathcal{P}}$ est une translation.
   Soit $M \in \mathcal{E}$ et nous appelons $M_1 = S_{\mathcal{P}}(M)$, puis $M' = S_{\mathcal{P}_1}(M)$
   Appelons I le milieu du segment $[M; M_1]$.
   Pour commencer, $I \in \mathcal{P}$, et $\overrightarrow{MM_1}$ est orthogonal à la direction du plan $\mathcal{P}$.
   De la même manière, si nous appelons J le milieu du segment $[M_1; M']$, $J \in \mathcal{P}_1$, et $\overrightarrow{M_1M'}$ est orthogonal à la direction du plan $\mathcal{P}_1$ qui est aussi celle de $\mathcal{P}$..
   Les points M, I, M_1, J et M' sont alignés ; J est la projection orthogonale de I sur $\mathcal{P}_1$.
   D'autre part :
   $$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IM_1} + \overrightarrow{M_1J} + \overrightarrow{JM'} = 2\overrightarrow{IM_1} + 2\overrightarrow{M_1J} = 2\overrightarrow{IJ}$$
   Et donc $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{IJ}$; ce vecteur étant constant, nous avons $M' = t_{2\overrightarrow{IJ}}(M)$
   $S_{\mathcal{P}_1} \circ S_{\mathcal{P}}$ est donc bien une translation

21.5.8 Une réciproque

Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien de dimension 3 et de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.
Toute translation de $\mathcal{E}$ de vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul peut se décomposer sous la forme

$$t_{\overrightarrow{u}} = S_{\mathcal{P}_1} \circ S_{\mathcal{P}}$$

Où $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_1$ sont 2 plans parallèles de direction orthogonale à $\overrightarrow{u}$, l'un des plans pouvant être choisi arbitrairement, l'autre étant défini par :

1. Si le choix se porte sur $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_1$ est l'image de $\mathcal{P}$ dans la translation de vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{u}$
2. Si le choix se porte sur $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}$ est l'image de $\mathcal{P}_1$ dans la translation de vecteur $-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{u}$

21.5.9 Produit de rotations d'axes coplanaires

Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien de dimension 3 et de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.
L'application composée de 2 rotations $R\left(\Delta_{\overrightarrow{k}}, \theta\right)$ et $R\left(\Delta^1_{\overrightarrow{k_1}}, \theta_1\right)$ d'axes Δ et Δ^1 coplanaires est une rotation ou une translation

Démonstration

Soient $R\left(\Delta_{\overrightarrow{k}}, \theta\right)$ et $R\left(\Delta^1_{\overrightarrow{k_1}}, \theta_1\right)$ 2 rotations d'axes coplanaires et P le plan contenant les droites Δ et Δ^1. Nous pouvons alors écrire :

$\Rightarrow$ $R\left(\Delta_{\overrightarrow{k}}, \theta\right) = S_P \circ S_{P_1}$ $\Rightarrow$ $R\left(\Delta^1_{\overrightarrow{k_1}}, \theta_1\right) = S_{P_2} \circ S_P$

Alors, $R\left(\Delta^1_{\overrightarrow{k_1}}, \theta_1\right) \circ R\left(\Delta_{\overrightarrow{k}}, \theta\right) = (S_{P_2} \circ S_P) \circ (S_P \circ S_{P_1}) = S_{P_2} \circ S_{P_1}$ et donc

$$R\left(\Delta^1_{\overrightarrow{k_1}}, \theta_1\right) \circ R\left(\Delta_{\overrightarrow{k}}, \theta\right) = S_{P_2} \circ S_{P_1}$$

Alors :
- ⋆ Si P_1 et P_2 sont parallèles, alors $R\left(\Delta^1_{\overrightarrow{k_1}}, \theta_1\right) \circ R\left(\Delta_{\overrightarrow{k}}, \theta\right)$ est une translation
- ⋆ Si P_1 et P_2 sont sécants, alors $R\left(\Delta^1_{\overrightarrow{k_1}}, \theta_1\right) \circ R\left(\Delta_{\overrightarrow{k}}, \theta\right)$ est une rotation

Remarque 29 :

Parmi les rotations de l'espace, il y a les demi-tours

21.5.10 Produit de 2 demi-tours d'axes parallèles

Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien de dimension 3 et de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.
L'application composée $S_D \circ S_{D_1}$ de 2 demi-tours d'axes D et D_1 parallèles est la translation de vecteur $2\overrightarrow{HK}$ où, si $H \in D_1$ est un point de D_1, K est la projection orthogonale de H sur D

Démonstration

Nous appelons P le plan qui contient D et D_1
- $\Rightarrow$ Il existe alors un plan $\mathcal{P}$, perpendiculaire à P passant par D, c'est à dire tel que $P \cap \mathcal{P} = D$, tel que $S_D = S_{\mathcal{P}} \circ S_P$
- $\Rightarrow$ De même, il existe alors un plan $\mathcal{P}_1$, perpendiculaire à P passant par D_1, c'est à dire tel que $P \cap \mathcal{D} = D$, tel que $S_D = S_P \circ S_{\mathcal{P}_1}$
- $\Rightarrow$ Il faut remarquer que les 2 plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_1$ sont perpendiculaires au même plan P sont donc parallèles ; nous avons $\mathcal{P} \parallel \mathcal{P}_1$

Ainsi :

$$S_D \circ S_{D_1} = (S_{\mathcal{P}} \circ S_P) \circ (S_P \circ S_{\mathcal{P}_1}) = S_{\mathcal{P}} \circ S_{\mathcal{P}_1}$$

Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_1$ étant parallèles, $S_D \circ S_{D_1}$ est donc une translation
Si $H \in D_1$ et K le projeté orthogonal de H sur D. Nous avons $S_D \circ S_{D_1}(H) = S_D(H) = H'$, où nous avons $\overrightarrow{HH'} = 2\overrightarrow{HK}$
$S_D \circ S_{D_1}$ est donc une translation de vecteur $2\overrightarrow{HK}$

21.5.11 Produit de 2 demi-tours d'axes sécants

Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien de dimension 3 et de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.
L'application composée $S_D \circ S_{D_1}$ de 2 demi-tours d'axes D et D_1 sécants en O est une rotation d'axe Δ, passant par O et perpendiculaire au plan P contenant D et D_1 et d'angle θ de mesure $\theta \equiv 2\widehat{(D_1, D)}\ [2\pi]$

Démonstration

Les droites D et D_1 étant sécantes, elles sont coplanaires et soit donc P le plan qui contient D et D_1.
- ⇒ Soit $\mathcal{P}_1$ le plan perpendiculaire à P passant par D_1, c'est à dire tel que $\mathcal{P}_1 \cap P = D_1$; alors $S_{D_1} = S_P \circ S_{\mathcal{P}_1}$
- ⇒ De même, soit $\mathcal{P}$ le plan perpendiculaire à P passant par D, c'est à dire tel que $\mathcal{P} \cap P = D$; alors $S_D = S_{\mathcal{P}} \circ S_P$

Donc, $S_D \circ S_{D_1} = (S_{\mathcal{P}} \circ S_P) \circ (S_P \circ S_{\mathcal{P}_1}) = S_{\mathcal{P}} \circ S_{\mathcal{P}_1}$
D'après le résultat ci-dessus, c'est une rotation ou une translation.
Nous avons $O \in D \cap D_1$, et comme $D_1 \subset \mathcal{P}_1$ et $D \subset \mathcal{P}$, $O \in mathcal P_1 \cap mathcal P$. Les plans $mathcal P_1$ et $mathcal P$ sont donc sécants suivant une droite passant par O.
Ainsi, $S_D \circ S_{D_1} = S_{\mathcal{P}} \circ S_{\mathcal{P}_1}$ est une rotation suivant une droite orthogonale au plan P *(Et donc aux droites D et D_1)*. L'angle de cette rotation est celui de la rotation qui est la restriction de $S_D \circ S_{D_1}$ au plan P ; la rotation est donc une rotation d'angle $2\widehat{(D_1, D)}\ [2\pi]$

21.5.12 Produit de 2 demi-tours d'axes non coplanaires

Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien de dimension 3 et de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.
L'application composée $S_D \circ S_{D_1}$ de 2 demi-tours d'axes D et D_1 non coplanaires est la composée d'une rotation d'axe Δ et d'une translation $T_{\overrightarrow{u}_\Delta}$ de vecteur $\overrightarrow{u}_\Delta$ directeur de la droite Δ

Démonstration

Soient donc 2 droites D et D_1 non coplanaires et soit Δ la perpendiculaire commune à D et D_1.
Nous posons $\{H\} = \Delta \cap D$ et $\{H'\} = \Delta \cap D_1$
- ⇒ Soit $\mathcal{D}'$ la parallèle à D passant par H'. Alors

  $$S_D \circ S_{D_1} = (S_D \circ S_{\mathcal{D}'}) \circ (S_{\mathcal{D}'} \circ S_{D_1})$$

  - ⋆ Comme $D \parallel \mathcal{D}'$, $S_D \circ S_{\mathcal{D}'}$ est une translation de vecteur $2\overrightarrow{HH'}$
  - ⋆ $S_{\mathcal{D}'} \circ S_{D_1}$ est une rotation d'axe Δ et d'angle $2\widehat{(D_1, \mathcal{D}')} \equiv 2\widehat{(D_1, D)}\ [2\pi]$

  $S_D \circ S_{D_1}$ est bien la composée d'une rotation et d'une translation de vecteur un vecteur directeur de l'axe Δ de la rotation.
- ⇒ Il est possible de raisonner autrement.
  Considérons $\mathcal{D}_2$ la parallèle à D_1 passant par H, et nous avons donc :

  $$S_D \circ S_{D_1} = (S_D \circ S_{\mathcal{D}_2}) \circ (S_{\mathcal{D}_2} \circ S_{D_1})$$

  - ⋆ Comme $\mathcal{D}_2 \parallel D_1$, $S_{\mathcal{D}_2} \circ S_{D_1}$ est une translation de vecteur $2\overrightarrow{HH'}$
  - ⋆ Et $S_D \circ S_{\mathcal{D}_2}$ est une rotation d'axe Δ et d'angle $2\widehat{(\mathcal{D}_2, D)} \equiv 2\widehat{(D_1, D)}\ [2\pi]$

  $S_D \circ S_{D_1}$ est bien la composée d'une rotation et d'une translation de vecteur un vecteur directeur de l'axe Δ de la rotation, et on peut remarquer que cette composition est commutative.

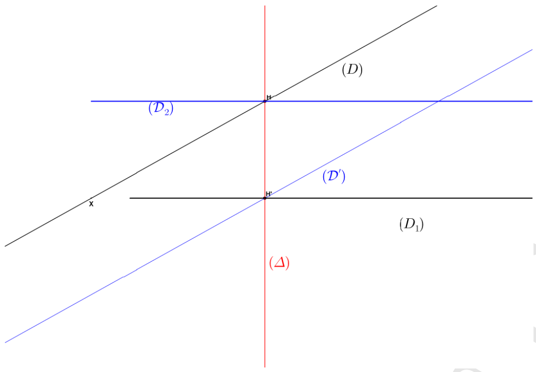


FIGURE 21.21 – Produit de 2 demi-tours d'axes non coplanaires

21.5.13 Définition

Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien de dimension 3 et de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.
On appelle vissage toute isométrie de l'espace $\mathcal{E}$ pouvant s'écrire sous la forme $T \circ R$ où R est une rotation d'axe $\Delta_{\overrightarrow{k}}$ et d'angle non nul, et T une translation dont le vecteur, non nul est un vecteur directeur de la droite Δ

Exemple 4 :

La composition de 2 symétries orthogonales par rapport à des axes non coplanaires, est un vissage.

21.5.14 Propriété

Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien de dimension 3 et de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

1. Tout vissage se décompose, de manière unique sous la forme $T \circ R$ où R est une rotation d'axe $\Delta_{\overrightarrow{k}}$ et d'angle non nul, et T une translation dont le vecteur, non nul est un vecteur directeur de la droite Δ
2. Pour tout vissage f, nous avons $f = T \circ R = R \circ T$: la rotation et la translation commutent

21.5.15 Exercices

Exercice 25 :

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. On désigne par D la droite de repère $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$ et par D' la droite de repère $\left(O, \overrightarrow{j}\right)$ et l'on considère les deux rotations :

→ r, d'axe D et de mesure 2α relativement au vecteur $\overrightarrow{i}$ *(Nous avons $2\alpha \in]0, \pi]$)*
→ r', d'axe D' et de mesure 2β relativement au vecteur $\overrightarrow{j}$ *(Nous avons $2\beta \in]0, \pi]$)*

1. (a) En considérant chaque rotation comme l'application composée de deux demi-tours, démontrer que l'on peut faire en sorte que l'un des demi-tours soit commun.
   (b) En conclure que l'application composée $r' \circ r$ est une rotation d'axe Δ contenant le point O.
   (c) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} \cot\beta \\ \cot\alpha \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ
   (d) Démontrer que, si 2θ est une mesure de la rotation $r' \circ r$, on a :
   $$\cos\theta = \cos\alpha\cos\beta$$
   A quelle condition la rotation r' o r est-elle un demi-tour ?
   (e) Quel est l'ensemble des droites Δ lorsque β décrit $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, α restant fixe ? I 2l

2. (a) L'axe Δ coupe le plan $\mathcal{P}$ d'équation $z = -1$ en un point M dont on donnera les coordonnées en fonction de α et β
Lorsque β décrit $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, α restant fixe, quel est l'ensemble des points M ?
Retrouver ainsi le résultat du $1 - e$.
   (b) On suppose que $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$
Quel est l'ensemble des points M lorsque lorsque α décrit $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$?
   (c) On suppose que $\alpha = \frac{\beta}{2}$. Démontrer que lorsque β décrit $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, l'ensemble des points M est, dans le plan $\mathcal{P}$, une courbe $\mathcal{C}$ qui se projette orthogonalement sur le plan d'équation $z = 0$ suivant une partie de la courbe d'équation $y^2 - 2xy - 1 = 0$.
Construire cette courbe.
   (d) On considère la surface engendrée par Δ lorsque M décrit la courbe $\mathcal{C}$. Le plan Q d'équation $y = 1$ coupe cette surface suivant une courbe $\mathcal{C}'$. Construire la courbe $\mathcal{C}'$, projetée orthogonale de $\mathcal{C}$ sur le plan d'équation $y = 0$

Exercice 26 :

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
On considère l'application f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = & -y \\ y' = & z - 1 \\ z' = & -x + 1 \end{cases}$$

1. (a) Démontrer que f est une isométrie.
   (b) Quelle est la matrice, dans la base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$, de l'endomorphisme orthogonal $\overrightarrow{f}$ associé à f ?
   (c) Démontrer que l'ensemble des vecteurs invariants par $\overrightarrow{f}$ est une droite vectorielle $\overrightarrow{\Delta}$ dont on déterminera un vecteur unitaire $\overrightarrow{k}'$. En déduire que l'endomorphisme $\overrightarrow{f}$ est une rotation vectorielle et que l'isométrie f est un déplacement.
   (d) Déterminer un vecteur unitaire $\overrightarrow{j}'$ orthogonal a $\overrightarrow{k}'$. Déterminer le vecteur unitaire $\overrightarrow{i}'$ tel que $\left\{\overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}', \overrightarrow{k}'\right\}$ soit une base orthonormée directe.
   (e) Démontrer que α est une mesure de la rotation vectorielle $\overrightarrow{f}$ relative au vecteur $\overrightarrow{k}'$ si et seulement si :
$$\begin{cases} \cos\alpha = & \left\langle \overrightarrow{i}' \mid \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{i}'\right)\right\rangle \\ \sin\alpha = & \left\langle \overrightarrow{j}' \mid \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{i}'\right)\right\rangle \end{cases}$$
En déduire une mesure de la rotation $\overrightarrow{f}$, reiative à $\overrightarrow{k}'$.
   (f) Démontrer que f est une rotation et déterminer l'axe Δ de cette rotation
2. (a) Déterminer l'ensemble des points M du plan P d'équation $z = 0$ dont les transformés par f appartiennent aussi à P.
   (b) Déterminer l'ensemble des points M du plan P dont les transformés M' par f sont tels que $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{OM'}$
   (c) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace $\mathcal{E}$ dont les transformés M' par f sont tels que les points O, M, M' sont alignés.
   (d) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace $\mathcal{E}$ dont les transformés M' par f sont tels que le milieu I du segment $[M; M']$:
      i. Appartient à la droite d'équations $x = y = 0$.
      ii. Appartient au plan P.
      iii. Appartient à la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
      iv. Appartient au cercle de centre O et de rayon 1 inclus dans P.

Exercice 27 :

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
On considère l'application f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = & z+1 \\ y' = & x+1 \\ z' = & y+1 \end{cases}$$

1. (a) Démontrer que f est une isométrie.
   (b) Quelle est la matrice, dans la base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$, de l'endomorphisme orthogonal $\overrightarrow{f}$ associé à f ?
   (c) Démontrer que l'ensemble des vecteurs invariants par $\overrightarrow{f}$ est une droite vectorielle $\overrightarrow{\Delta}$ dont on déterminera un vecteur unitaire $\overrightarrow{k}'$. En déduire que l'endomorphisme $\overrightarrow{f}$ est une rotation vectorielle et que l'isométrie f est un déplacement.
   (d) Déterminer un vecteur unitaire $\overrightarrow{j}'$ orthogonal a $\overrightarrow{k}'$. Déterminer le vecteur unitaire $\overrightarrow{i}'$ tel que $\left\{\overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}', \overrightarrow{k}'\right\}$ soit une base orthonormée directe.
   (e) Démontrer que α est une mesure de la rotation vectorielle $\overrightarrow{f}$ relative au vecteur $\overrightarrow{k}'$ si et seulement si :
   $$\begin{cases} \cos\alpha = & \left\langle \overrightarrow{i}' \mid \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{i}'\right)\right\rangle \\ \sin\alpha = & \left\langle \overrightarrow{j}' \mid \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{i}'\right)\right\rangle \end{cases}$$
   En déduire une mesure de la rotation $\overrightarrow{f}$, reiative à $\overrightarrow{k}'$.
   (f) Démontrer que f est un vissage dont on déterminera 1'axe Δ. une mesure de l'angle et le vecteur
2. (a) Déterminer l'ensemble des points M du plan P d'équation $z=0$ dont les transformés par f appartiennent aussi à P.
   (b) Déterminer l'ensemble des points M du plan P dont les transformés M' par f sont tels que $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{OM'}$
   (c) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace $\mathcal{E}$ dont les transformés M' par f sont tels que le milieu I du segment $[M; M']$:
      i. Appartient à la droite d'équations $x=y=0$.
      ii. Appartient au plan P.
      iii. Appartient à la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2=1$
      iv. Appartient au cercle de centre O et de rayon 1 inclus dans P.

21.6 Décomposition canonique d'une isométrie affine

Dans cette section, nous allons élever le débat en nous intéressant, non plus aux espaces affines de dimension 2 ou 3, mais aux espaces de dimension finie n

21.6.1 Lemme

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie et φ un endomorphisme orthogonal de E (c'est à dire $\varphi \in \mathcal{O}(E)$)
Alors $E = \ker(\varphi - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id}_E)$

Démonstration

Nous allons le démontrer en plusieurs étapes

1. Tout d'abord $\ker(\varphi - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id}_E) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$

   Soit $x \in \ker(\varphi - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id}_E)$.
   Alors, comme $x \in \ker(\varphi - \mathrm{Id}_E)$, nous avons $\varphi(x) = x$ et comme $x \in \mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id}_E)$, il existe $y \in E$ tel que $(\varphi - \mathrm{Id}_E)(y) = x$, ou encore, ce qui est équivalent, tel que $\varphi(y) = x + y$. Alors :

   $$\langle x \mid y\rangle = \langle \varphi(x) \mid \varphi(x)\rangle = \langle x \mid x + y\rangle = \langle x \mid x\rangle + \langle x \mid y\rangle$$

   Nous avons donc : $\langle x \mid y\rangle = \langle x \mid x\rangle + \langle x \mid y\rangle$, d'où nous tirons $\langle x \mid x\rangle = \|x\|^2 = 0$ et donc $x = \overrightarrow{0}$
   Nous avons donc bien $\ker(\varphi - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id}_E) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$

2. Montrons que $\ker(\varphi - \mathrm{Id}_E) = (\mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id}_E))^{\perp}$

   (a) **On montre que** $\ker(\varphi - \mathrm{Id}_E) \subset (\mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id}_E))^{\perp}$
   - ⋆ Soit $\overrightarrow{u} \in \ker(\varphi - \mathrm{Id}_E)$; alors, $(\varphi - \mathrm{Id}_E)(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow \varphi(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$
   - ⋆ Soit $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id}_E)$; il existe alors $\overrightarrow{v_1} \in E$ tel que

   $$(\varphi - \mathrm{Id}_E)(\overrightarrow{v_1}) = \overrightarrow{v} \Longleftrightarrow \overrightarrow{v} = \varphi(\overrightarrow{v_1}) - \overrightarrow{v_1}$$

   - ⋆ Donc :

   $$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v}\rangle &= \langle \varphi(\overrightarrow{u}) \mid \varphi(\overrightarrow{v_1}) - \overrightarrow{v_1}\rangle \\ &= \langle \varphi(\overrightarrow{u}) \mid \varphi(\overrightarrow{v_1})\rangle - \langle \varphi(\overrightarrow{u}) \mid \overrightarrow{v_1}\rangle \\ &= \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v_1}\rangle - \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v_1}\rangle = 0 \end{aligned}$$

   Donc $\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v}\rangle = 0$ et $\overrightarrow{u} \in (\mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id}_E))^{\perp}$ et donc $\ker(\varphi - \mathrm{Id}_E) \subset (\mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id}_E))^{\perp}$

   (b) **On montre que** $(\mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id}_E))^{\perp} \subset \ker(\varphi - \mathrm{Id}_E)$
   - ⋆ Soit $z \in (\mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id}_E))^{\perp}$; alors, pour tout $v \in \mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id}_E)$, nous avons $\langle z \mid v\rangle = 0$, ou, ce qui est équivalent, pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, nous avons :

   $$\langle z \mid \varphi(\overrightarrow{u}) - \overrightarrow{u}\rangle = 0 \Longleftrightarrow \langle z \mid \varphi(\overrightarrow{u})\rangle = \langle z \mid \overrightarrow{u}\rangle$$

   - ⋆ Donc, pour $z \in (\mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id}_E))^{\perp}$, nous avons :

   $$\begin{aligned} \|\varphi(\overrightarrow{z}) - \overrightarrow{z}\|^2 &= \langle \varphi(\overrightarrow{z}) - \overrightarrow{z} \mid \varphi(\overrightarrow{z}) - \overrightarrow{z}\rangle \\ &= \langle \varphi(\overrightarrow{z}) \mid \varphi(\overrightarrow{z})\rangle + \langle \overrightarrow{z} \mid \overrightarrow{z}\rangle - 2\langle \varphi(\overrightarrow{z}) \mid \overrightarrow{z}\rangle \\ &= 2\langle \overrightarrow{z} \mid \overrightarrow{z}\rangle - 2\langle \overrightarrow{z} \mid \overrightarrow{z}\rangle = 0 \end{aligned}$$

   - ⋆ Nous avons donc $\|\varphi(\overrightarrow{z}) - \overrightarrow{z}\|^2 = 0 \Longleftrightarrow \|\varphi(\overrightarrow{z}) - \overrightarrow{z}\| = 0 \Longleftrightarrow \varphi(\overrightarrow{z}) - \overrightarrow{z} = \overrightarrow{0}$ Et donc $z \in \ker(\varphi - \mathrm{Id}_E)$

   D'où nous concluons que $(\mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id}_E))^{\perp} \subset \ker(\varphi - \mathrm{Id}_E)$

   Et nous avons démontré que $\ker(\varphi - \mathrm{Id}_E) = (\mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id}_E))^{\perp}$

En conclusion : $E = \ker(\varphi - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id}_E)$.

Remarque 30 :

Et en plus, nous avons démontré que $\ker(\varphi - \mathrm{Id}_E) = (\mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id}_E))^{\perp}$

21.6.2 Lemme

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E ;
Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application affine d'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$;
Alors, l'ensemble $\mathcal{F}$ des points fixes de f, c'est à dire $\mathcal{F} = \{X \in \mathcal{E} \text{ tel que } f(X) = X\}$, est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $\overrightarrow{\mathcal{F}} = \ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E\right)$

Démonstration

1. Soit $A \in \mathcal{F}$; alors $f(A) = A$, et donc, pour tout $X \in \mathcal{E}$:

$$\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AX}\right) = \overrightarrow{f(A)\,f(X)} = \overrightarrow{Af(X)}$$

2. Ainsi, pour tout $X \in \mathcal{F}$, comme $f(X) = X$

$$\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AX}\right) = \overrightarrow{AX} \Longleftrightarrow \left(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E\right)\left(\overrightarrow{AX}\right) = \overrightarrow{0}$$

Et donc, $\overrightarrow{AX} \in \ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E\right)$ et nous avons bien $\overrightarrow{\mathcal{F}} = \ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E\right)$

Remarque 31 :

Le lemme 21.6.2 est vrai pour tous les espaces affines *(de dimension finie ou non)* et toutes les applications affines *(qu'elles soient ou non des isométries)*. Ce résultat est encore vrai pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel

21.6.3 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension n et E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel associé.
Soit $f \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$ une isométrie de $\mathcal{E}$ d'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$. Alors :
Il existe une unique isométrie $g \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$ admettant un ensemble de points fixes $\mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ et un unique vecteur $\overrightarrow{h} \in \overrightarrow{\mathcal{G}}$ appartenant à la direction de $\mathcal{G}$ tels que :

$$f = t_{\overrightarrow{h}} \circ g$$

$t_{\overrightarrow{h}}$ étant la translation de vecteur $\overrightarrow{h}$.
Dans ces conditions, nous avons $\overrightarrow{\mathcal{G}} = \ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E\right)$ et $t_{\overrightarrow{h}}$ et g commutent, c'est à dire

$$f = t_{\overrightarrow{h}} \circ g = g \circ t_{\overrightarrow{h}}$$

Démonstration

1. **Dans un premier temps, nous supposons que g $t_{\overrightarrow{h}}$ et $\mathcal{G}$ existent**

   $\Rightarrow$ Nous montrons que $\overrightarrow{\mathcal{G}} = \ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E\right)$

   Alors, d'après 21.6.2, nous avons $\overrightarrow{\mathcal{G}} = \ker\left(\overrightarrow{g} - \mathrm{Id}_E\right)$
   De $f = t_{\overrightarrow{h}} \circ g$, nous déduisons que $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{t_{\overrightarrow{h}} \circ g} = \overrightarrow{t_{\overrightarrow{h}}} \circ \overrightarrow{g}$.
   Comme $t_{\overrightarrow{h}}$ est une translation, nous avons $\overrightarrow{t_{\overrightarrow{h}}} = \mathrm{Id}_E$ et donc $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{g}$. Donc, f et g ont la même application linéaire associée.
   Donc, de $\overrightarrow{\mathcal{G}} = \ker\left(\overrightarrow{g} - \mathrm{Id}_E\right)$, nous déduisons $\overrightarrow{\mathcal{G}} = \ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E\right)$

   $\Rightarrow$ Nous montrons que $X \in \mathcal{G} \Longleftrightarrow (\forall X \in \mathcal{E})\left(\overrightarrow{Xf(X)} \in \ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E\right)\right)$

   - ⋆ Si $X \in \mathcal{G}$, alors $g(X) = X$ et alors $f(X) = t_{\overrightarrow{h}} \circ g(X) = t_{\overrightarrow{h}}(X)$, et donc $\overrightarrow{Xf(X)} = \overrightarrow{h}$.
     Comme $\overrightarrow{h} \in \ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E\right)$, nous avons $\overrightarrow{Xf(X)} \in \ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E\right)$
   - ⋆ Soit $X \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{Xf(X)} \in \ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E\right)$
     Alors, $g = \left[t_{\overrightarrow{Xf(X)}}\right]^{-1} \circ f = t_{\overrightarrow{f(X)X}} \circ f$ et donc, pour notre $X \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{Xf(X)} \in \ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E\right)$, nous avons :

$$g(X) = t_{\overrightarrow{f(X)X}} \circ f(X) = t_{\overrightarrow{f(X)X}}[f(X)] = X$$

     Nous avons $f = t_{\overrightarrow{Xf(X)}} \circ g$. X est donc invariant par g et donc $X \in \mathcal{G}$

$\Rightarrow$ Soit $\Gamma = \left\{X \in \mathcal{E} \text{ tels que } \overrightarrow{Xf(X)} \in \ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E\right)\right\}$

Comme nous avons l'équivalence $X \in \mathcal{G} \iff (\forall X \in \mathcal{E})\left(\overrightarrow{Xf(X)} \in \ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E\right)\right)$, nous avons alors $\mathcal{G} = \Gamma$

Cette considération est nécessaire pour la suite

2. **Nous allons, maintenant, montrer que g $t_{\overrightarrow{h}}$ et $\mathcal{G}$ existent**

D'après l'item précédent, montrer l'existence de $\mathcal{G}$ est montrer l'existence de Γ.

Nous allons démontrer que $\Gamma \neq \emptyset$

Nous donnons une origine à l'espace affine euclidien en choisissant un point $O \in \mathcal{E}$.

Alors, en considérant le lemme 21.6.1, nous avons $\overrightarrow{Of(O)} = \overrightarrow{h} + \overrightarrow{h'}$ où $\overrightarrow{h} \in \ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E\right)$ et $\overrightarrow{h'} \in \mathrm{Im}\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E\right)$

Nous avons donc $\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{h}\right) = \overrightarrow{h}$ et, il existe $\overrightarrow{t} \in E$ tel que $\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{t}\right) - \overrightarrow{t} = \overrightarrow{h'}$

Soit $X \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{OX} = -\overrightarrow{t} \iff \overrightarrow{XO} = \overrightarrow{t}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{h} = \overrightarrow{Of(O)} - \overrightarrow{h'} &= \overrightarrow{Of(O)} - \left(\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{t}\right) - \overrightarrow{t}\right) \\
&= \overrightarrow{Of(O)} - \left(\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{XO}\right) - \overrightarrow{XO}\right) \\
&= \overrightarrow{Of(O)} - \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{XO}\right) + \overrightarrow{XO} \\
&= \overrightarrow{XO} + \overrightarrow{Of(O)} - \overrightarrow{f(X)f(O)} \\
&= \overrightarrow{Xf(O)} + \overrightarrow{f(O)f(X)} \\
&= \overrightarrow{Xf(X)}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\overrightarrow{h} = \overrightarrow{Xf(X)}$, et comme $\overrightarrow{h} \in \ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E\right)$, alors $\overrightarrow{Xf(X)} \in \ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E\right)$ et donc $X \in \Gamma$ et nous concluons que $\Gamma \neq \emptyset$ et donc $\mathcal{G} \neq \emptyset$

3. **Démontrons maintenant, que pour tout point $X \in \mathcal{G}$, le vecteur $\overrightarrow{Xf(X)}$ est constant**

Nous allons donc montrer que pour tout $X \in \mathcal{G}$ et tout $Y \in \mathcal{G}$ nous avons $\overrightarrow{Xf(X)} = \overrightarrow{Yf(Y)}$.

Soient donc $X \in \mathcal{G}$ et $Y \in \mathcal{G}$

Rappelons, tout d'abord que, comme $\mathcal{G} = \Gamma$, nous avons aussi $X \in \Gamma$ et $Y \in \Gamma$ et donc $\overrightarrow{Xf(X)} \in \ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E\right)$ et $\overrightarrow{Yf(Y)} \in \ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E\right)$

- $\star$ Comme $\ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E\right)$ est un sous-espace vectoriel de E, nous avons $\overrightarrow{Xf(X)} - \overrightarrow{Yf(Y)} \in \ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E\right)$
- $\star$ Puis, comme d'habitude, nous allons évaluer $\overrightarrow{Xf(X)} - \overrightarrow{Yf(Y)}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{Xf(X)} - \overrightarrow{Yf(Y)} &= \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{Yf(X)} - \left(\overrightarrow{Yf(X)} + \overrightarrow{f(X)f(Y)}\right) \\
&= \overrightarrow{XY} - \overrightarrow{f(X)f(Y)} \\
&= \overrightarrow{XY} - \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{XY}\right) \\
&= \left(\mathrm{Id}_E - \overrightarrow{f}\right)\left(\overrightarrow{XY}\right) \\
&= \left(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E\right)\left(\overrightarrow{YX}\right)
\end{aligned}$$

Il existe donc un vecteur $\overrightarrow{YX} \in E$ tel que $\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E\right)\left(\overrightarrow{YX}\right) = \overrightarrow{Xf(X)} - \overrightarrow{Yf(Y)}$, et donc $\overrightarrow{Xf(X)} - \overrightarrow{Yf(Y)} \in \mathrm{Im}\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E\right)$

- $\star$ D'après le lemme 21.6.1, nous avons $E = \ker(\varphi - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id}_E)$ et donc

$$\ker(\varphi - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{Id}_E) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$$

Et comme $\overrightarrow{Xf(X)} - \overrightarrow{Yf(Y)} \in \mathrm{Im}\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E\right) \cap \ker(\varphi - \mathrm{Id}_E)$, nous avons $\overrightarrow{Xf(X)} - \overrightarrow{Yf(Y)} = \overrightarrow{0}$, c'est à dire $\overrightarrow{Xf(X)} = \overrightarrow{Yf(Y)}$

Ce que nous voulions

4. **Nous démontrons la commutativité, c'est à dire $t_{\overrightarrow{h}} \circ g = g \circ t_{\overrightarrow{h}}$ où $\overrightarrow{h} \in \overrightarrow{\mathcal{G}}$**

   (a) Il semble assez évident que pour tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{G}}$, nous avons $\overrightarrow{g}\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{u}$
   En effet, et la démonstration est simple.
   Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{G}}$; il existe alors $X \in \mathcal{G}$ et $Y \in \mathcal{G}$ tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{XY}$. Alors :
   $$\overrightarrow{g}\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{g}\left(\overrightarrow{XY}\right) = \overrightarrow{g(X)\,g(Y)} = \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{u}$$

   (b) Soit maintenant $X \in \mathcal{E}$ quelconque.
   - ⋆ Alors, si $Z = t_{\overrightarrow{h}}(X)$ alors $\overrightarrow{h} = \overrightarrow{XZ}$ et $\overrightarrow{h} \in \overrightarrow{\mathcal{G}}$.
     Nous avons donc $g(Z) = g \circ t_{\overrightarrow{h}}(X)$
   - ⋆ D'autre part, $\overrightarrow{g}\left(\overrightarrow{h}\right) = \overrightarrow{g(X)\,g(Z)} = \overrightarrow{h}$
     Ainsi, nous avons $g(Z) = t_{\overrightarrow{h}}(g(X))$, puisque $\overrightarrow{g(X)\,g(Z)} = \overrightarrow{h}$
   - ⋆ Nous avons donc $g(Z) = t_{\overrightarrow{h}}(g(X)) = t_{\overrightarrow{h}} \circ g(X) = g \circ t_{\overrightarrow{h}}(X)$
     Et donc $t_{\overrightarrow{h}} \circ g = g \circ t_{\overrightarrow{h}}$

   Ce que nous voulions

21.6.4 Corollaire

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension n et E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel associé.
Soit $f \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$ une isométrie de $\mathcal{E}$ d'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$. Alors :
Si $\ker\left(\overrightarrow{f} - \mathrm{Id}_E\right) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ l'isométrie f n'admet qu'un seul point fixe

21.6.5 Conséquences

1. Les isométries planes
   (a) Les isométries positives sont :
      i. Les translations (dont l'identité est un cas particulier -translation de vecteur nul-)
      ii. Les rotations dont l'identité est un cas particulier). Les rotations différentes de l'identité n'admettent qu'un seul point fixe
   (b) Les isométries négatives sont le produit d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ avec une translation de vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\Delta}$, vecteur éventuellement nul
2. Les isométries de l'espace
   (a) Les isométries positives sont :
      i. Les translations (dont l'identité est un cas particulier -translation de vecteur nul-)
      ii. Les vissages qui sont les composées d'une rotation d'axe Δ avec une translation de vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\Delta}$, vecteur éventuellement nul (les rotations sont donc des cas particuliers de vissages)
   (b) Les isométries négatives sont :
      i. Les symétries par rapport à un point
      ii. Le produit d'une symétrie plane avec une rotation
      iii. Le produit d'une symétrie plane avec une translation

21.7 Correction de quelques exercices

Exercice 1 :

$\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = & -z+1 \\ y' = & -x \\ z' = & y-2 \end{cases}$$

Démontrer que f est un déplacement.

Il suffit de démontrer que l'application linéaire $\vec{f}$ associée à f est une isméterie vectorielle positive.
La matrice de $\vec{f}$ dans la base orthonormée $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ est donnée par :

$$\mathcal{M}_{\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}}\left(\vec{f}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons, à la lecture de cette matrice $\left\|\vec{f}\left(\vec{i}\right)\right\| = \left\|\vec{f}\left(\vec{j}\right)\right\| = \left\|\vec{f}\left(\vec{k}\right)\right\| = 1$ et $\left\langle \vec{f}\left(\vec{i}\right) \mid \vec{f}\left(\vec{j}\right)\right\rangle = \left\langle \vec{f}\left(\vec{i}\right) \mid \vec{f}\left(\vec{k}\right)\right\rangle = \left\langle \vec{f}\left(\vec{j}\right) \mid \vec{f}\left(\vec{k}\right)\right\rangle = 0$

$\vec{f}$ est bien un endomorphisme orthogonal. D'autre part $\det \mathcal{M}_{\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}}\left(\vec{f}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$

f est donc bien un déplacement

Exercice 3 :

$\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = & \frac{1}{9}(-8x+4y+z+12) \\ y' = & \frac{1}{9}(4x+7y+4z-5) \\ z' = & \frac{1}{9}(x+4y-8z+8) \end{cases}$$

1. *Démontrer que f est un déplacement.*
2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f
3. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ de transformé $M' = f(M)$ tels que le miliei I du segment $[M; M']$ appartienne :
   (a) A la droite d'équation $x = y = 0$
   (b) Au plan d'équation $z = 0$
   (c) A la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Exercice 4 :

$\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = & x+2 \\ y' = & y \\ z' = & -z+2 \end{cases}$$

1. Démontrer que f est un antidéplacement.

2. Démontrer que, pour tout point $M \in \mathcal{E}$ de transformé $M' = f(M)$, le miliei I du segment $[M; M']$ appartient à un plan fixe P
3. Démontrer que le point M_1, symétrique du point M dans la symétrie orthogonale par rapport au plan P est tel que le vecteur $\overrightarrow{M_1M'}$ est contant.
4. En déduire que f peut se décomposer en le produit de 2 transformations simples
5. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ de transformé $M' = f(M)$ tels que :
   (a) $OM = OM'$
   (b) Les points O, M et M' sont alignés
   (c) $MM' = a$ où $a \geqslant 0$

Exercice 18 :

Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien de dimension 3 et de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. Définir analytiquement la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x + 2y - z + 2 = 0$

Comme beaucoup de questions semblables, cet exercice ne pose pas de difficultés sinon calculatoires. En appelant S cette symétrie, le principe de la résolution est donné par :

$\Rightarrow$ Le vecteur $\overrightarrow{MS(M)}$ est orthogonal au plan d'équation $x + 2y - z + 2 = 0$

$\Rightarrow$ Le milieu I du segment $[M; S(M)]$ appartient au plan

Nous appellerons $M = (x, y, z)$ et $S(M) = (x', y', z')$

1. Dire que le vecteur $\overrightarrow{MS(M)}$ est orthogonal au plan d'équation $x + 2y - z + 2 = 0$, c'est dire qu'il est colinéaire au vecteur normal $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ceci veut donc dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{MS(M)} = \lambda \overrightarrow{n}$. En revenant aux coordonnées, nous avons :
$$\begin{cases} x' - x = & \lambda \\ y' - y = & 2\lambda \\ z' - z = & -\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} x' = & x + \lambda \\ y' = & y + 2\lambda \\ z' = & z - \lambda \end{cases}$$
2. Les coordonnées du milieu I du segment $[M; S(M)]$ sont $I = \left(\dfrac{x + x'}{2}, \dfrac{y + y'}{2}, \dfrac{z + z'}{2}\right)$.

   Nous avons donc $\dfrac{x + x'}{2} + 2\dfrac{y + y'}{2} - \dfrac{z + z'}{2} + 2 = 0$. Or :
$$\begin{aligned} \frac{x + x'}{2} + 2\frac{y + y'}{2} - \frac{z + z'}{2} + 2 = 0 \iff & \quad x + x' + 2y + 2y' - z - z' + 4 = 0 \\ \iff & \quad x' + 2y' - z' = -x - 2y + z - 4 \\ \iff & \quad x + \lambda + 2y + 4\lambda - z + \lambda = -x - 2y + z - 4 \\ \iff & \quad 6\lambda = -2x - 4y + 2z - 4 \\ \iff & \quad \lambda = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z - \frac{2}{3} \end{aligned}$$
3. En remplaçant λ par sa valeur dans le premier système d'équation, nous obtenons :
$$\begin{cases} x' = & x + \lambda \\ y' = & y + 2\lambda \\ z' = & z - \lambda \end{cases} \iff \begin{cases} x' = & x - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z - \frac{2}{3} \\ y' = & y + 2\left(-\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z - \frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{4}{3} \\ z' = & z - \left(-\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3} \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi la définition analytique de S :
$$\begin{cases} x' = & \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z - \frac{2}{3} \\ y' = & -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{4}{3} \\ z' = & \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3} \end{cases}$$

La matrice de l'application linéaire associée est donnée par :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Chapitre 22

Les similitudes

22.1 Les similitudes vectorielles

22.1.1 Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien. Une similitude de E est une application linéaire φ de E dans E (i.e. $\varphi \in \mathcal{L}(E)$) telle que :

$$(\exists k > 0)\,(\forall \overrightarrow{u} \in E)\,(\|\varphi(\overrightarrow{u})\| = k\,\|\overrightarrow{u}\|)$$

k est appelé le rapport de la similitude

22.1.2 Proposition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien.

1. La composition de 2 similitudes est encore une similitude
2. Une similitude est une application linéaire injective

Démonstration

1. Soient f et g 2 similitudes de rapports respectifs k_f et k_g.
   Soit $\overrightarrow{u} \in E$. Alors :
   $$\|g \circ f(\overrightarrow{u})\| = \|g[f(\overrightarrow{u})]\| = k_g\,\|f(\overrightarrow{u})\| = k_g \times k_f\,\|\overrightarrow{u}\|$$
   Ainsi, $g \circ f$ est une similitude de rapport $k_g \times k_f$
2. Soit f une similitude de rapport k_f
   Soit $\overrightarrow{u} \in \ker f$
   Alors $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$ et donc $\|f(\overrightarrow{u})\| = 0$. Comme f est une similitude, $k_f\,\|\overrightarrow{u}\| = 0$ et donc, comme $k_f > 0$, nous avons $\|\overrightarrow{u}\| = 0$, c'est à dire $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
   Donc, comme $\ker f = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, f est injective

Remarque 1 :

Si E est de dimension finie, f est en fait bijective.

22.1.3 Décomposition d'une similitude

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien. Alors, $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ est une similitude si et seulement si elle se décompose en le produit d'une homothétie vectorielle H et d'une isométrie $\theta \in \mathcal{L}(E)$, c'est à dire :

$$\varphi = H \circ \theta = \theta \circ H$$

Démonstration

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien

1. Soit $\varphi = \theta \circ H$ où H est une homothétie de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ et θ une isométrie de $\mathcal{L}(E)$
   Alors φ est une application linéaire comme composée de 2 applications linéaires .
   D'autre part, soit $\overrightarrow{u} \in E$, alors :
   $$\|\varphi(\overrightarrow{u})\| = \|\theta(H(\overrightarrow{u}))\| = \|\theta(k\overrightarrow{u})\| = \|k\theta(\overrightarrow{u})\| = |k|\,\|\theta(\overrightarrow{u})\| = k\,\|\overrightarrow{u}\|$$
   Ce qui montre que φ est une similitude de rapport $|k| > 0$
2. Réciproquement, soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ où φ est une similitude de rapport $k > 0$
   On considère l'homothétie H de rapport $\dfrac{1}{k}$, et soit $\theta = H \circ \varphi$.
   Tout d'abord θ est linéaire comme composée de 2 applications linéaires .
   De plus, on démontre, sans difficulté que θ est une isométrie et donc que $\varphi = H^{-1} \circ \theta$.
   H^{-1} est aussi une homothétie, mais de rapport k. et donc φ est la composée d'une homothétie et d'une isométrie.

Remarque 2 :

1. D'autre part, dans la décomposition $\varphi = H \circ \theta = \theta \circ H$, les θ et H sont, à priori, différents
2. Le rapport de la similitude $k > 0$ est bien entendu unique et ne dépend que de la similitude

Exercice 1 :

Montrer que le rapport k d'une similitude S est unique.

Exemple 1 :

Exemples de similitudes
Commençons par donner des exemples de similitudes

1. Toute isométrie du $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien E est une similitude; c'est une similitude de rapport $k = 1$
2. Toute homothétie de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien E est une similitude; c'est une similitude de rapport $|k|$

22.1.4 Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien. Alors :
$\varphi \in \mathcal{L}(E)$ est une similitude si et seulement si φ est une application linéaire de E non constante telle qu'il existe $\alpha > 0$ telle que pour tout $\overrightarrow{u} \in E$ et tout $\overrightarrow{v} \in E$, nous ayons $\langle \varphi(\overrightarrow{u}) \mid \varphi(\overrightarrow{v}) \rangle = \alpha \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle$

Démonstration

1. Soit φ une similitude de E de rapport $k > 0$
   Alors, d'après 22.1.3, $\varphi = H \circ \theta$ où $\theta \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie de E, c'est à dire un endomorphisme orthogonal conservant le produit scalaire et H une homothétie de rapport k.
   Alors, pour tout $\overrightarrow{u} \in E$ et tout $\overrightarrow{v} \in E$, nous avons :
   $$\begin{aligned} \langle \varphi(\overrightarrow{u}) \mid \varphi(\overrightarrow{v}) \rangle &= \langle H \circ \theta(\overrightarrow{u}) \mid H \circ \theta(\overrightarrow{v}) \rangle \\ &= \langle H[\theta(\overrightarrow{u})] \mid H[\theta(\overrightarrow{v})] \rangle \\ &= \langle k\theta(\overrightarrow{u}) \mid k\theta(\overrightarrow{v}) \rangle \\ &= k^2 \langle \theta(\overrightarrow{u}) \mid \theta(\overrightarrow{v}) \rangle \\ &= k^2 \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle \text{ car } \theta \text{ est un endomorphisme orthogonal} \end{aligned}$$
   Ainsi, si φ est une similitude de E de rapport $k > 0$, alors, il existe $\alpha = k^2 > 0$ tel que pour tout $\overrightarrow{u} \in E$ et tout $\overrightarrow{v} \in E$, nous avons $\langle \varphi(\overrightarrow{u}) \mid \varphi(\overrightarrow{v}) \rangle = \alpha \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle$

2. Réciproquement
Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, non constante, tel qu'il existe $\alpha > 0$ telle que pour tout $\overrightarrow{u} \in E$ et tout $\overrightarrow{v} \in E$, nous ayons $\langle \varphi(\overrightarrow{u}) \mid \varphi(\overrightarrow{v}) \rangle = \alpha \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle$
$\longrightarrow$ Tout d'abord, $\alpha \neq 0$
Supposons $\alpha = 0$; alors, pour tout $\overrightarrow{u} \in E$ et tout $\overrightarrow{v} \in E$, nous ayons $\langle \varphi(\overrightarrow{u}) \mid \varphi(\overrightarrow{v}) \rangle = 0$
Donc, lorsque $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$, pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, nous avons $\langle \varphi(\overrightarrow{u}) \mid \varphi(\overrightarrow{u}) \rangle = \|\varphi(\overrightarrow{u})\|^2 = 0$, c'est à dire $\varphi(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$
Et φ est une application linéaire constante. Il y a donc contradiction. Donc $\alpha \neq 0$
$\longrightarrow$ Ensuite, nous avons $\alpha > 0$
En effet, pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, nous avons :
$$\langle \varphi(\overrightarrow{u}) \mid \varphi(\overrightarrow{u}) \rangle = \alpha \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{u} \rangle \iff \|\varphi(\overrightarrow{u})\|^2 = \alpha \|\overrightarrow{u}\|^2$$
Et donc $\alpha > 0$
Soit $\theta = H_{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} \circ \varphi$ où $H_{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}$ est une homothétie de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$
Alors, θ est linéaire comme composée d'applications linéaires et θ est une isométrie puisque, si $\overrightarrow{u} \in E$:
$$\|\theta(\overrightarrow{u})\|^2 = \left\| H_{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} \circ \varphi(\overrightarrow{u}) \right\|^2 = \frac{1}{\alpha} \|\varphi(\overrightarrow{u})\|^2 = \frac{1}{\alpha} \times \alpha \|\overrightarrow{u}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2$$
C'est à dire que nous avons $\|\theta(\overrightarrow{u})\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 \iff \|\theta(\overrightarrow{u})\| = \|\overrightarrow{u}\|$.
θ est donc une isométrie.
Ainsi, $\varphi = \left(H_{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} \right)^{-1} \circ \theta = H_{\sqrt{\alpha}} \circ \theta$
Ce qui montre que φ, composée d'une homothétie de rapport $\sqrt{\alpha}$ et d'une isométrie θ est une similitude de rapport $\sqrt{\alpha}$

Remarque 3 :

Une remarque importante, **c'est que nous avons aussi démontré que $\alpha > 0$ et que la similitude a un rapport de $\sqrt{\alpha}$**

22.1.5 Corollaire de 22.1.4

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie. Alors, toute similitude φ de E est un automorphisme

Démonstration

On sait qu'une similitude est injective. Comme E est de dimension finie, et que la similitude est une application linéaire , cette similitude est donc aussi une bijection.
Ce qu'il fallait démontrer

22.1.6 Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie. Nous appellons $\mathcal{S}im(E)$ l'ensemble des similitudes de E. Alors $\mathcal{S}im(E)$ muni de la composition des applications est un groupe non commutatif

Démonstration

1. La loi $\circ$ est associative
2. Nous savons déjà que la composition de 2 similitudes est une similitude. La composition des applications est donc interne.
3. E étant de dimension finie, toute similitude $\varphi \in \mathcal{S}im(E)$ est un automorphisme, donc bijective : φ est donc inversible

Mais, si φ est une similitude, est ce que φ^{-1} est une similitude ?
Si φ est une similitude, alors φ se décompose en un produite d'une homothétie H et d'une isométrie θ , et donc $\varphi = H \circ \theta$.
Nous avons $\varphi^{-1} = (H \circ \theta)^{-1} = \theta^{-1} \circ H^{-1}$
→ H étant une homothétie, H^{-1} en est une aussi
→ Si θ est une isométrie, θ^{-1} en est une aussi

Donc $\varphi^{-1} = \theta^{-1} \circ H^{-1}$ est une similitude.

Nous pouvons donc conclure que $\mathcal{S}im\,(E)$ muni de la composition des applications est un groupe.

22.1.7 Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien et $\mathcal{S}im\,(E)$ l'ensemble des similitudes de E. Alors, $\mathcal{S}im\,(E)$ est exactement l'ensemble des endomorphismes de E qui conservent l'orthogonalité, c'est à dire l'ensemble des endomorphismes $\varphi \in \mathcal{L}\,(E)$ tels que :

$$(\forall \overrightarrow{u} \in E)\,(\forall \overrightarrow{v} \in E)\,((\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle = 0) \Longrightarrow (\langle \varphi\,(\overrightarrow{u}) \mid \varphi\,(\overrightarrow{v}) \rangle = 0))$$

Démonstration

1. Soit $\varphi \in \mathcal{S}im\,(E)$
   Alors, d'après 22.1.4, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $\overrightarrow{u} \in E$ et tout $\overrightarrow{v} \in E$, nous ayons $\langle \varphi\,(\overrightarrow{u}) \mid \varphi\,(\overrightarrow{v}) \rangle = \alpha \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle$
   Donc, si $\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle = 0$, alors $\langle \varphi\,(\overrightarrow{u}) \mid \varphi\,(\overrightarrow{v}) \rangle = 0$
2. Réciproquement
   Soit $\varphi \in \mathcal{L}\,(E)$ telle que

$$(\forall \overrightarrow{u} \in E)\,(\forall \overrightarrow{v} \in E)\,((\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle = 0) \Longrightarrow (\langle \varphi\,(\overrightarrow{u}) \mid \varphi\,(\overrightarrow{v}) \rangle = 0))$$

   Nous allons démontrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $\overrightarrow{u} \in E$ et tout $\overrightarrow{v} \in E$, nous ayons $\langle \varphi\,(\overrightarrow{u}) \mid \varphi\,(\overrightarrow{v}) \rangle = \alpha \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle$, et d'après 22.1.4, nous aurons démontré que φ est une similitude.
   → Soit $\overrightarrow{x} \in E$ tel que $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$ et nous considérons :

$$\begin{cases} \Phi : E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \quad y & \longmapsto & \Phi\,(y) = \langle \varphi\,(\overrightarrow{y}) \mid \varphi\,(\overrightarrow{x}) \rangle \end{cases}$$

   - **Φ est une forme linéaire**
     Soient $y_1 \in E$, $y_2 \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} \Phi\,(\lambda \overrightarrow{y_1} + \mu \overrightarrow{y_2}) &= \langle \varphi\,(\lambda \overrightarrow{y_1} + \mu \overrightarrow{y_2}) \mid \varphi\,(\overrightarrow{x}) \rangle \\ &= \langle \lambda \varphi\,(\overrightarrow{y_1}) + \mu \varphi\,(\overrightarrow{y_2}) \mid \varphi\,(\overrightarrow{x}) \rangle \\ &= \lambda \langle \varphi\,(\overrightarrow{y_1}) \mid \varphi\,(\overrightarrow{x}) \rangle + \mu \langle \varphi\,(\overrightarrow{y_2}) \mid \varphi\,(\overrightarrow{x}) \rangle \\ &= \lambda \Phi\,(\overrightarrow{y_1}) + \mu \Phi\,(\overrightarrow{y_2}) \end{aligned}$$

   - $\{\overrightarrow{x}\}^{\perp} \subset \ker \Phi$
     Rappel : $\{\overrightarrow{x}\}^{\perp} = \{\overrightarrow{y} \in E$ tels que $\langle \overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x} \rangle = 0\}$
     Soit $\overrightarrow{y} \in \{\overrightarrow{x}\}^{\perp}$; alors $\langle \overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x} \rangle = 0$.
     $\Phi\,(\overrightarrow{y}) = \langle \varphi\,(\overrightarrow{y}) \mid \varphi\,(\overrightarrow{x}) \rangle$; or, comme $\langle \overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x} \rangle = 0$, alors $\langle \varphi\,(\overrightarrow{y}) \mid \varphi\,(\overrightarrow{x}) \rangle = 0$, c'est à dire $\overrightarrow{y} \in \ker \Phi$
     Nous avons dons $\{\overrightarrow{x}\}^{\perp} \subset \ker \Phi$
     Ce qui signifie que la forme linéaire est nulle sur l'ensemble $\{\overrightarrow{x}\}^{\perp}$

   → Nous appelons $\Gamma\,(\{\overrightarrow{x}\})$ le sous-espace vectoriel de E engendré par le vecteur $\overrightarrow{x}$, c'est à dire :

$$\Gamma\,(\{\overrightarrow{x}\}) = \{\overrightarrow{y} \in E \text{ tel qu'il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{y} = \lambda \overrightarrow{x}\}$$

   Nous avons $E = \Gamma\,(\{\overrightarrow{x}\}) \oplus \{\overrightarrow{x}\}^{\perp}$, c'est à dire que tout $\overrightarrow{y} \in E$ peut s'écrire de manière unique $\overrightarrow{y} = \lambda \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}_1$ où $\overrightarrow{y}_1 \in \{\overrightarrow{x}\}^{\perp}$

- Pour tout $\overrightarrow{y} \in E$, $\overrightarrow{y} = \lambda \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}_1$ où $\overrightarrow{y}_1 \in \{\overrightarrow{x}\}^{\perp}$, nous avons $\Phi(\overrightarrow{y}) = \lambda\Phi(\overrightarrow{x})$ puisque la forme linéaire Φ est nulle sur $\{\overrightarrow{x}\}^{\perp}$
  Nous avons :
$$\Phi(\overrightarrow{y}) = \lambda\Phi(\overrightarrow{x}) \Longleftrightarrow \langle\varphi(\overrightarrow{y}) \mid \varphi(\overrightarrow{x})\rangle = \lambda\langle\varphi(\overrightarrow{x}) \mid \varphi(\overrightarrow{x})\rangle = \lambda\|\varphi(\overrightarrow{x})\|^2$$
- Comme $\Phi(\overrightarrow{y})$ il existe un nombre $\alpha_x \in \mathbb{R}^*$ tel que $\Phi(\overrightarrow{y}) = \alpha_x\langle\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x}\rangle$
  Nous avons :
$$\alpha_x\langle\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x}\rangle = \alpha_x\langle\lambda\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}_1 \mid \overrightarrow{x}\rangle = \alpha_x\lambda\langle\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x}\rangle = \lambda\alpha_x\|\overrightarrow{x}\|^2$$
  De l'égalité $\Phi(\overrightarrow{y}) = \lambda\|\varphi(\overrightarrow{x})\|^2 = \lambda\alpha_x\|\overrightarrow{x}\|^2$, nous tirons : $\alpha_x = \dfrac{\|\varphi(\overrightarrow{x})\|^2}{\|\overrightarrow{x}\|^2}$
  Ainsi, pour tout $\overrightarrow{y} \in E$, nous avons $\langle\varphi(\overrightarrow{y}) \mid \varphi(\overrightarrow{x})\rangle = \dfrac{\|\varphi(\overrightarrow{x})\|^2}{\|\overrightarrow{x}\|^2}\langle\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x}\rangle$
- Nous allons démontrer que la quantité $\alpha_x = \dfrac{\|\varphi(\overrightarrow{x})\|^2}{\|\overrightarrow{x}\|^2}$ est constante et indépendante de $\overrightarrow{x}$
  - ⋆ **Supposons 2 vecteurs** $\overrightarrow{x}_1 \in E \setminus \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ **et** $\overrightarrow{x}_2 \in E \setminus \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ **dépendants,** c'est à dire que $\overrightarrow{x}_2 = \lambda\overrightarrow{x}_1$, alors, nous avons :
$$\begin{aligned}
\alpha_{\overrightarrow{x}_2} &= \frac{\|\varphi(\overrightarrow{x}_2)\|^2}{\|\overrightarrow{x}_2\|^2} \\
&= \frac{\|\varphi(\lambda\overrightarrow{x}_1)\|^2}{\|\lambda\overrightarrow{x}_1\|^2} \\
&= \frac{\|\lambda\varphi(\overrightarrow{x}_1)\|^2}{\|\lambda\overrightarrow{x}_1\|^2} \\
&= \frac{\lambda^2\|\varphi(\overrightarrow{x}_1)\|^2}{\lambda^2\|\overrightarrow{x}_1\|^2} \\
&= \frac{\|\varphi(\overrightarrow{x}_1)\|^2}{\|\overrightarrow{x}_1\|^2} \\
&= \alpha_{\overrightarrow{x}_1}
\end{aligned}$$
    Nous avons donc $\alpha_{\overrightarrow{x}_2} = \alpha_{\overrightarrow{x}_1}$ et le nombre $\alpha_{\overrightarrow{x}}$ ne dépend pas du vecteur $\overrightarrow{x}$
  - ⋆ **Soient, maintenant,** $\overrightarrow{x}_1 \in E \setminus \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ **et** $\overrightarrow{x}_2 \in E \setminus \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ **2 vecteurs linéairement indépendants**.
    Alors, pour tout $\overrightarrow{y} \in E$, nous avons :
$$\begin{aligned}
\langle\varphi(\overrightarrow{y}) \mid \varphi(\overrightarrow{x}_1 + \overrightarrow{x}_2)\rangle &= \alpha_{(\overrightarrow{x}_1+\overrightarrow{x}_2)}\langle\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x}_1 + \overrightarrow{x}_2\rangle \\
&= \alpha_{(\overrightarrow{x}_1+\overrightarrow{x}_2)}\langle\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x}_1\rangle + \alpha_{(\overrightarrow{x}_1+\overrightarrow{x}_2)}\langle\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x}_2\rangle \\
&= \langle\varphi(\overrightarrow{y}) \mid \varphi(\overrightarrow{x}_1)\rangle + \langle\varphi(\overrightarrow{y}) \mid \varphi(\overrightarrow{x}_2)\rangle \\
&= \alpha_{\overrightarrow{x}_1}\langle\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x}_1\rangle + \alpha_{\overrightarrow{x}_2}\langle\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x}_2\rangle
\end{aligned}$$
    Ainsi, nous avons :
$$\alpha_{(\overrightarrow{x}_1+\overrightarrow{x}_2)}\langle\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x}_1\rangle + \alpha_{(\overrightarrow{x}_1+\overrightarrow{x}_2)}\langle\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x}_2\rangle = \alpha_{\overrightarrow{x}_1}\langle\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x}_1\rangle + \alpha_{\overrightarrow{x}_2}\langle\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x}_2\rangle$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\left(\alpha_{(\overrightarrow{x}_1+\overrightarrow{x}_2)} - \alpha_{\overrightarrow{x}_1}\right)\langle\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x}_1\rangle + \left(\alpha_{(\overrightarrow{x}_1+\overrightarrow{x}_2)} - \alpha_{\overrightarrow{x}_2}\right)\langle\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x}_2\rangle = 0$$
    En posant $\lambda_1 = \alpha_{(\overrightarrow{x}_1+\overrightarrow{x}_2)} - \alpha_{\overrightarrow{x}_1}$ et $\lambda_2 = \alpha_{(\overrightarrow{x}_1+\overrightarrow{x}_2)} - \alpha_{\overrightarrow{x}_2}$, nous pouvons écrire :
$$\left(\alpha_{(\overrightarrow{x}_1+\overrightarrow{x}_2)} - \alpha_{\overrightarrow{x}_1}\right)\langle\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x}_1\rangle + \left(\alpha_{(\overrightarrow{x}_1+\overrightarrow{x}_2)} - \alpha_{\overrightarrow{x}_2}\right)\langle\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x}_2\rangle = 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\lambda_1\langle\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x}_1\rangle + \lambda_2\langle\overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x}_2\rangle = 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\langle\overrightarrow{y} \mid \lambda_1\overrightarrow{x}_1 + \lambda_2\overrightarrow{x}_2\rangle = 0$$

Ceci étant vrai pour tout $\overrightarrow{y} \in E$, nous avons $\lambda_1 \overrightarrow{x}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{x}_2 = \overrightarrow{0}$
Les vecteurs $\overrightarrow{x}_1$ et $\overrightarrow{x}_2$ étant indépendants, alors $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et donc

$$\lambda_1 = \alpha_{(\overrightarrow{x}_1+\overrightarrow{x}_2)} - \alpha_{\overrightarrow{x}_1} = 0 \text{ et } \lambda_2 = \alpha_{(\overrightarrow{x}_1+\overrightarrow{x}_2)} - \alpha_{\overrightarrow{x}_2} = 0$$

C'est à dire :

$$\alpha_{(\overrightarrow{x}_1+\overrightarrow{x}_2)} = \alpha_{\overrightarrow{x}_1} = \alpha_{\overrightarrow{x}_2}$$

α ne dépend donc pas du vecteur $\overrightarrow{x}$
Le nombre α est donc indépendant de $\overrightarrow{x} \in E$
Donc, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $\overrightarrow{u} \in E$ et tout $\overrightarrow{v} \in E$, nous ayons $\langle \varphi(\overrightarrow{u}) \mid \varphi(\overrightarrow{v}) \rangle = \alpha \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle$, et d'après 22.1.4, nous avons démontré que φ est une similitude.

22.1.8 Théorème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien. Alors, les similitudes conservent les angles non orientés, c'est à dire que, pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, tout $\overrightarrow{v} \in E$ et toute similitude $\varphi \in \mathcal{S}im(E)$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) = \cos\left(\widehat{\varphi(\overrightarrow{u}), \varphi(\overrightarrow{v})}\right)$$

Démonstration

Soient $\overrightarrow{u} \in E$, tout $\overrightarrow{v} \in E$ et $\varphi \in \mathcal{S}im(E)$, une similitude de rapport $k > 0$. Alors :

$$\cos\left(\widehat{\varphi(\overrightarrow{u}), \varphi(\overrightarrow{v})}\right) = \frac{\langle \varphi(\overrightarrow{u}) \mid \varphi(\overrightarrow{v}) \rangle}{\|\varphi(\overrightarrow{u})\| \times \|\varphi(\overrightarrow{v})\|} = \frac{k^2 \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle}{k\|\overrightarrow{u}\| \times k\|\overrightarrow{v}\|} = \frac{\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle}{\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|} = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)$$

22.2 Les similitudes affines

22.2.1 Définition

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien E
On appelle similitude de $\mathcal{E}$ toute application $S : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ telle que :

$$(\exists k > 0)\,(\forall M \in \mathcal{E})\,(\forall N \in \mathcal{E})\left(\left\|\overrightarrow{S(M)\,S(N)}\right\| = k\left\|\overrightarrow{MN}\right\|\right)$$

k est appelé le rapport de la similitude

Remarque 4 :

Pour $M \in \mathcal{E}$ et $N \in \mathcal{E}$, si $M' = S(M)$ et $N' = S(N)$, on peut aussi écrire $M'N' = kMN$ *(Utilisation de la distance entre 2 points)*

22.2.2 Proposition : décomposition d'une similitude

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien E. Alors :
$f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ est une similitude affine de rapport $k > 0$ si et seulement si f est le produit d'une homothétie de rapport k et d'une isométrie de $\mathcal{E}$

Démonstration

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien E

1. Soit $g = f \circ h$ où h est une homothétie de rapport $k > 0$ et f une isométrie
   On remarque que l'homothétie a un centre quelconque.
   Pour $M \in \mathcal{E}$ et $N \in \mathcal{E}$, nous appelons $M_1 = h(M)$, $N_1 = h(N)$, $N_2 = f(N_1)$ et $M_2 = f(M_1)$, alors :
$$M_2N_2 = M_1N_1 = kMN$$
   $g = f \circ h$ est donc une similitude de rapport k
2. Soit g une similitude de rapport $k > 0$
   On considère la transformation $f = h_{\frac{1}{k}} \circ g$. Comme tout à l'heure, posons, pour $M \in \mathcal{E}$ et $N \in \mathcal{E}$, $M_1 = g(M)$, $N_1 = g(N)$, $N_2 = h_{\frac{1}{k}}(N_1)$ et $M_2 = h_{\frac{1}{k}}(M_1)$, alors :
$$M_2N_2 = \frac{1}{k}M_1N_1 = \frac{1}{k} \times kMN = MN$$
   Ce qui montre que f est une isométrie de $\mathcal{E}$ et donc, de $f = h_{\frac{1}{k}} \circ g$, nous tirons que $g = \left(h_{\frac{1}{k}}\right)^{-1} \circ f = h_k \circ f$
   g peut donc se décomposer en le produit d'une isométrie et d'une homothétie de rapport k

Remarque 5 :

1. Si nous avions $g = h \circ f$ où h est une homothétie de rapport $k > 0$ et f une isométrie, g serait aussi une similitude de rapport k
2. Comme dans le cas des similitudes vectorielles, le rapport de la similitude $k > 0$ est bien entendu unique et ne dépend que de la similitude.

Exemple 2 :

Exemples de similitudes
Commençons par donner des exemples de similitudes

1. Toute isométrie de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ est une similitude ; c'est une similitude de rapport $k = 1$
2. Toute homothétie de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ est une similitude ; c'est une similitude de rapport $|k|$

   En effet, si H est une homothétie de rapport k, pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $N \in \mathcal{E}$, nous avons $\overrightarrow{H(M)H(N)} = k\overrightarrow{MN}$, c'est à dire $\left\|\overrightarrow{H(M)H(N)}\right\| = |k| \left\|\overrightarrow{MN}\right\|$
   H est donc une similitude de rapport $|k|$

Exercice 2 :

Exercice résolu
La plan euclidien $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On considère l'application $S : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ dont la définition analytique est donnée par :
$$\begin{cases} x' = & 2x + y + 1 \\ y' = & x - 2y \end{cases}$$
Montrer que S est une similitude dont on donnera le rapport

Soient $M(x, y)$ et $N(x_1, y_1)$ 2 points de $\mathcal{P}$. Posons $M' = S(M)(x', y')$ et $N' = S(N)(x'_1, y'_1)$.
Alors :
$$\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} x_1 - x \\ y_1 - y \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{M'N'} = \begin{pmatrix} x'_1 - x' \\ y'_1 - y' \end{pmatrix}$$
Et donc $MN^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2$ et $M'N'^2 = (x'_1 - x')^2 + (y'_1 - y')^2$

Et nous avons :
$$\left\{\begin{array}{ll} x'_1 - x' = & 2(x_1 - x) + (y_1 - y) \\ y'_1 - y' = & (x_1 - x) - 2(y_1 - y) \end{array}\right.$$

Donc,

$$\begin{array}{rcl} M'N'^2 & = & (2(x_1 - x) + (y_1 - y))^2 + ((x_1 - x) - 2(y_1 - y))^2 \\ & = & 4(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + 4(x_1 - x)(y_1 - y) + (x_1 - x)^2 + 4(y_1 - y)^2 - 4(x_1 - x)(y_1 - y) \\ & = & 5(x_1 - x)^2 + 5(y_1 - y)^2 \\ & = & 5MN^2 \end{array}$$

Nous avons donc $M'N'^2 = 5MN^2 \Longleftrightarrow M'N' = \sqrt{5}MN$
S est donc une similitude de rapport $\sqrt{5}$

22.2.3 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien E. Alors :

1. La composition de 2 similitudes affines est une similitude affine
2. Une similitude est une application affine
3. Si $\mathcal{S}im(\mathcal{E})$ est l'ensemble des similitudes affine de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ et $\mathcal{S}im(E)$ l'ensemble des similitudes du $\mathbb{R}$-espace vectoriel associé E, alors :
$$f \in \mathcal{S}im(\mathcal{E}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{f} \in \mathcal{S}im(E)$$
4. Si $\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien de dimension finie, alors :
   (a) Une similitude est une bijection affine.
   (b) L'ensemble $\mathcal{S}im(\mathcal{E})$ des similitudes de $\mathcal{E}$ muni de la loi de composition est un groupe

Démonstration

1. La composition de 2 similitudes affine est une similitude affine
Soient S_1 et S_2 2 similitudes de $\mathcal{E}$ de rapport respectif $k_1 > 0$ et $k_2 > 0$.
Alors, pour tout $M \in \mathcal{E}$ et tout $N \in \mathcal{E}$, nous avons :
$$S_2 \circ S_1(M) S_2 \circ S_1(N) = k_2 S_1(M] S_1(N) = k_2 k_1 MN$$
Ce qui montre, très simplement que $S_2 \circ S_1$ est une similitude de $\mathcal{E}$ de rapport $k_1 \times k_2$.
Ainsi, la loi $\circ$ est une loi interne de $\mathcal{S}im(\mathcal{E})$
2. Une similitude est une application affine
Dans 22.2.2, nous venons de montrer que toute similitude est la composition d'une homothétie et d'une isométrie. Une homothétie et une isométrie sont des applications affines, leur composition est une application affine ; une similitude est donc une application affine
3. $f \in \mathcal{S}im(\mathcal{E}) \Longleftrightarrow \overrightarrow{f} \in \mathcal{S}im(E)$
   - Soit f une similitude de $\mathcal{E}$ de rapport $k > 0$, c'est à dire $f \in \mathcal{S}im(\mathcal{E})$
   Alors, d'après 22.2.2, f est la composée d'une homothétie affine h_k de rapport k et d'une isométrie affine θ, c'est à dire que $f = h_k \circ \theta$.
   Si $\overrightarrow{f}$ est l'application linéaire associée à f, alors $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{h_k} \circ \overrightarrow{\theta}$ où $\overrightarrow{h_k}$ est une homothétie vectorielle de rapport k et $\overrightarrow{\theta}$ une isométrie vectorielle.
   Donc, d'après 22.1.3, $\overrightarrow{f}$ est une similitude vectorielle et $\overrightarrow{f} \in \mathcal{S}im(E)$

   Il est possible d'en donner une autre démonstration
   Soit donc $f \in \mathcal{S}im(\mathcal{E})$ de rapport $k > 0$.
   Alors f est une application affine et soit $\overrightarrow{f}$ l'application linéaire associée. Soit aussi $P \in \mathcal{E}$ *(En quelque sorte, nous mettons une origine à $\mathcal{E}$)* et $\overrightarrow{u} \in E$.

Il existe un unique point $M \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{f(P)f(M)}$, et donc :

$$\left\|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})\right\| = \left\|\overrightarrow{f(P)f(M)}\right\| = k\left\|\overrightarrow{PM}\right\| = k\|\overrightarrow{u}\|$$

$\overrightarrow{f}$ est donc une similitude vectorielle, c'est à dire $\overrightarrow{f} \in \mathcal{S}im(E)$

- Démontrer la réciproque n'a rien de difficile.
  Soit f une application affine de $\mathcal{E}$ d'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$ telle que $\overrightarrow{f} \in \mathcal{S}im(E)$ et $\overrightarrow{f}$ similitude de rapport $k > 0$.
  Soient $P \in \mathcal{E}$ et $Q \in \mathcal{E}$, alors :

$$\left\|\overrightarrow{f(P)f(Q)}\right\| = \left\|\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{PQ}\right)\right\| = k\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|$$

  Et donc, $f \in \mathcal{S}im(\mathcal{E})$

Ce que nous voulions démontrer.

4. Supposons $\mathcal{E}$ de dimension finie
   (a) Une similitude est une bijection affine
   - Une homothétie est toujours une bijection. Dans les espaces de dimension finie, les isométries sont des bijections.
     Ainsi, dans les espaces de dimension finie, les similitudes sont donc des bijections comme composées d'applications bijectives
   - Si $S = h_k \circ f$ est une isométrie, alors l'endomorphisme associé est

$$\overrightarrow{S} = \overrightarrow{h_k \circ f} = \overrightarrow{h_k} \circ \overrightarrow{f} = k\mathrm{Id}_E \circ \overrightarrow{f} = k\overrightarrow{f}$$

   (b) L'ensemble $\mathcal{S}im(\mathcal{E})$ des similitudes de $\mathcal{E}$ muni de la loi de composition est un groupe
   - On vient de montrer que la loi de composition $\circ$ était une loi interne
   - La loi $\circ$ est, par construction, associative.
   - Le neutre, pour la loi de composition, $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ est une similitude
   - Les similitudes étant bijectives, il faut montrer que la réciproque d'une similitude l'est aussi.
     Soit donc S une similitude de rapport $k > 0$. Nous la décomposons en un produit d'une homothétie de rapport k avec une isométrie f. Nous avons donc : $S = h_k \circ f$. Alors :

$$S^{-1} = (h_k \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ (h_k)^{-1} = f^{-1} \circ h_{\frac{1}{k}}$$

     f^{-1} est une isométrie, et donc S^{-1}, composée d'une isométrie et d'une homothétie de rapport $\dfrac{1}{k}$ est donc une similitude de rapport $\dfrac{1}{k}$

   $\mathcal{S}im(\mathcal{E})$ muni de la loi de composition est un groupe

22.2.4 Proposition

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien E
Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application quelconque
f est une similitude de $\mathcal{E}$ si et seulement si pour tout $M \in \mathcal{E}$, tout $N \in \mathcal{E}$, tout $P \in \mathcal{E}$ et tout $Q \in \mathcal{E}$, avec $M \neq N$ et $P \neq Q$ tel que :

$$\frac{\left\|\overrightarrow{f(P)f(Q)}\right\|}{\left\|\overrightarrow{f(M)f(N)}\right\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|}{\left\|\overrightarrow{MN}\right\|}$$

Démonstration

1. Supposons que f est une similitude de $\mathcal{E}$ de rapport $k > 0$

Alors, pour tout $M \in \mathcal{E}$, tout $N \in \mathcal{E}$, avec $M \neq N$, nous avons $\left\|\overrightarrow{f(M)f(N)}\right\| = k\left\|\overrightarrow{MN}\right\|$ et donc $\dfrac{\left\|\overrightarrow{f(M)f(N)}\right\|}{\left\|\overrightarrow{MN}\right\|} = k$

De la même manière, nous avons pour tout $P \in \mathcal{E}$, tout $Q \in \mathcal{E}$, avec $P \neq Q$, nous avons $\left\|\overrightarrow{f(P)f(Q)}\right\| = k\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|$ et donc $\dfrac{\left\|\overrightarrow{f(P)f(Q)}\right\|}{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|} = k$

De là, nous déduisons que

$$\frac{\left\|\overrightarrow{f(M)f(N)}\right\|}{\left\|\overrightarrow{MN}\right\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{f(P)f(Q)}\right\|}{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|} \Longleftrightarrow \frac{\left\|\overrightarrow{f(P)f(Q)}\right\|}{\left\|\overrightarrow{f(M)f(N)}\right\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|}{\left\|\overrightarrow{MN}\right\|}$$

2. Réciproquement, supposons $\dfrac{\left\|\overrightarrow{f(P)f(Q)}\right\|}{\left\|\overrightarrow{f(M)f(N)}\right\|} = \dfrac{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|}{\left\|\overrightarrow{MN}\right\|}$

   Si cette égalité est vraie pour tout $M \in \mathcal{E}$, tout $N \in \mathcal{E}$, tout $P \in \mathcal{E}$ et tout $Q \in \mathcal{E}$, avec $M \neq N$ et $P \neq Q$, nous avons :

$$\frac{\left\|\overrightarrow{f(P)f(Q)}\right\|}{\left\|\overrightarrow{f(M)f(N)}\right\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|}{\left\|\overrightarrow{MN}\right\|} \Longleftrightarrow \frac{\left\|\overrightarrow{f(P)f(Q)}\right\|}{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{f(M)f(N)}\right\|}{\left\|\overrightarrow{MN}\right\|} = k$$

   Nous avons donc $\dfrac{\left\|\overrightarrow{f(M)f(N)}\right\|}{\left\|\overrightarrow{MN}\right\|} = k \Longleftrightarrow \left\|\overrightarrow{f(M)f(N)}\right\| = k\left\|\overrightarrow{MN}\right\|$ et donc f est une similitude de rapport k

Remarque 6 :

1. On dit qu'une similitude conserve le rapport des distances. On peut ré-écrire 22.2.4 comme ceci :

   Si S est une similitude, $P' = S(P)$, $Q' = S(P)$, $M' = S(M)$ et $N' = S(N)$, nous avons :

$$\frac{P'Q'}{M'N'} = \frac{PQ}{MN}$$

2. **Rappelez vous les triangles semblables**

   Dans le plan affine euclidien $\mathcal{P}$, 2 triangles ABC et $A'B'C'$ sont dits semblables si et seulements si :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

   Ce qui signifie qu'il existe une similitude qui transforme le triangle ABC en le triangle $A'B'C'$

22.2.5 Théorème

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension finie, de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien E et S une similitude de rapport $k > 0$ et $k \neq 1$. Alors :

1. S admet un point fixe unique
2. $S = H_{O,k} \circ \theta = \theta \circ H_{O,k}$ où $\theta \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$ est une isométrie de $\mathcal{E}$ admettant O comme point fixe.

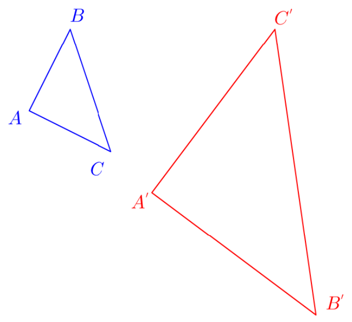


FIGURE 22.1 – 2 triangles semblables

Démonstration

Soit S un similitude de rapport $k > 0$ et $k \neq 1$

1. **S admet un unique point fixe**
   (a) Si S admet un point fixe, alors il est unique
   On suppose que S admet 2 points fixes I et J avec $I \neq J$. Alors $S(I) = I$ et $S(J) = J$; donc :
   $$S(I)\,S(J) = kIJ \iff IJ = kIJ \iff (1-k)\,IJ = 0$$
   Comme $k \neq 1$, nous avons $1 - k \neq 0$ et donc $IJ = 0$, c'est à dire $I = J$
   (b) On démontre que S admet un point fixe
   → Soit $\overrightarrow{S}$ l'application linéaire associée à S ; alors $\overrightarrow{S} = k \times \theta$ où θ est une isométrie du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E ; alors, pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, nous avons
   $$\|S(\overrightarrow{u})\| = k\,\|\overrightarrow{u}\|$$
   → Considérons $\overrightarrow{S} - \mathrm{Id}_E$; alors $\ker\left(\overrightarrow{S} - \mathrm{Id}_E\right) = \{\overrightarrow{u} \in E \text{ tels que } S(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}\}$
   Pour tout $\overrightarrow{u} \in \ker\left(\overrightarrow{S} - \mathrm{Id}_E\right)$, alors $\|S(\overrightarrow{u})\| = \|\overrightarrow{u}\| = k\,\|\overrightarrow{u}\| \iff \|\overrightarrow{u}\|\,(1-k) = 0$.
   Comme $k \neq 1$, $1 - k \neq 0$ et donc $\|\overrightarrow{u}\| = 0$ et donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$. Nous en concluons que $\ker\left(\overrightarrow{S} - \mathrm{Id}_E\right)$ est réduit au seul vecteur nul, que $\overrightarrow{S} - \mathrm{Id}_E$ est donc injective. Comme le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est de dimension finie $\overrightarrow{S} - \mathrm{Id}_E$ est donc bijective.
   → Soit $O \in \mathcal{E}$. Ce faisant, nous donnons une origine à l'espace affine E.
   Alors, pour tout $X \in \mathcal{E}$, nous avons :
   $$\begin{aligned}\overrightarrow{XS(X)} = \overrightarrow{OS(X)} - \overrightarrow{OX} &= \overrightarrow{OS(O)} + \overrightarrow{S(O)S(X)} - \overrightarrow{OX} \\ &= \overrightarrow{OS(O)} + \overrightarrow{S}\left(\overrightarrow{OX}\right) - \overrightarrow{OX} \\ &= \overrightarrow{OS(O)} + \left(\overrightarrow{S} - \mathrm{Id}_E\right)\left(\overrightarrow{OX}\right)\end{aligned}$$
   L'application linéaire $\overrightarrow{S} - \mathrm{Id}_E$ étant bijective, il existe un et un seul vecteur $\overrightarrow{u} \in E$ tel que $\left(\overrightarrow{S} - \mathrm{Id}_E\right)(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{S(O)O}$
   Il existe aussi un seul point $I \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OI}$, et alors nous avons :
   $$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{S} - \mathrm{Id}_E\right)\left(\overrightarrow{OI}\right) = \overrightarrow{S(O)O} &\iff \left(\overrightarrow{S} - \mathrm{Id}_E\right)\left(\overrightarrow{OI}\right) + \overrightarrow{OS(O)} = \overrightarrow{0} \\ &\iff \overrightarrow{IS(I)} = \overrightarrow{OS(O)} + \left(\overrightarrow{S} - \mathrm{Id}_E\right)\left(\overrightarrow{OI}\right) = \overrightarrow{0}\end{aligned}$$
   Donc de $\overrightarrow{IS(I)} = \overrightarrow{0}$, nous déduisons que $S(I) = I$. I est donc le point invariant de S ; on en prouve, en même temps l'unicité

2. **Nous avons $S = H_{O,k} \circ \theta = \theta \circ H_{O,k}$ où $\theta \in \mathcal{I}s(\mathcal{E})$ est une isométrie de $\mathcal{E}$ admettant O comme point fixe.**
   Nous appelons I le poinrt invariant de la similitude S et $H_{I,\frac{1}{k}}$ l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{k}$. Alors :
   - $\theta = S \circ H_{I,\frac{1}{k}}$ est une isométrie
   - De même, $\theta_1 = H_{I,\frac{1}{k}} \circ S$ est aussi une isométrie

   et donc $S = \theta \circ H_{I,k} = H_{I,k} \circ \theta_1$.
   Nous avons $\overrightarrow{S} = k\overrightarrow{\theta} = k\overrightarrow{\theta_1}$, ce qui veut dire que θ et θ_1 ont même endomorphisme associé.
   Or, $\theta(I) = \theta_1(I) = I$; et donc, d'après 18.2.4, $\theta = \theta_1$
   Nous avons donc $S = H_{O,k} \circ \theta = \theta \circ H_{O,k}$

Remarque 7 :

1. Remarquez l'importance de la dimension finie ; c'est grâce à cet argument que nous pouvons affirmer que $\overrightarrow{S} - \mathrm{Id}_E$ est bijective
2. Remarquez aussi l'importance de $k \neq 1$; c'est lorsque $k \neq 1$ que nous avons un seul point fixe. Pour $k = 1$, nous avons affaire à des isométries qui peuvent admettre une infinité *(comme les symétries orthogonales)* ou aucun point fixe *(comme les translations)*
3. Nous venons aussi de montrer qu'un homothétie et une isométrie qui ont même point fixe, commutent

Exercice 3 :

On considère le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1. On considère la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et l'homothétie H de centre $A(1,0)$ et de rapport 2. Etudier $R \circ H$ et $H \circ R$
2. On considère, cette fois ci, l'homothétie H_1 de centre O. Etudier $R \circ H_1$ et $H_1 \circ R$

Que conclure ?

Exercice 4 :

Démontrer qu'une similitude qui admet 2 points invariants est une isométrie

22.2.6 Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension finie et direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien E
Soient S une similitude de $\mathcal{E}$, $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{E}$, $C \in \mathcal{E}$ et $D \in \mathcal{E}$ 4 points de $\mathcal{E}$

1. S conserve l'orthogonalité, c'est à dire :
$$\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{CD} \right\rangle = 0 \Longrightarrow \left\langle \overrightarrow{S(A)S(B)} \mid \overrightarrow{S(C)S(D)} \right\rangle = 0$$
2. S conserve les angles non orientés, c'est à dire
$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{S(A)S(B)}, \overrightarrow{S(C)S(D)}}\right)$$

Démonstration

Cette démonstration est exactement la redite, dans sa version affine, de 22.1.7 et de 22.1.8 L'endomorphisme associé à S est $\overrightarrow{S} = k\overrightarrow{f}$ où $\overrightarrow{f}$ est un endomorphisme orthogonal de E, c'est à dire qui conserve norme et produit scalaire.
Ainsi, comme nous avons :

$$\overrightarrow{S(A)\,S(B)} = \overrightarrow{S}\left(\overrightarrow{AB}\right) = k\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AB}\right)$$

De la même manière, nous avons $\overrightarrow{S(C)\,S(D)} = k\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{CD}\right)$ Ainsi :

$$\left\langle \overrightarrow{S(A)\,S(B)} \mid \overrightarrow{S(C)\,S(D)} \right\rangle = k^2 \left\langle \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AB}\right) \mid \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{CD}\right) \right\rangle = k^2 \left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{CD} \right\rangle$$

1. <u>Supposons que $\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{CD} \right\rangle = 0$</u>
   Alors, de $\left\langle \overrightarrow{S(A)\,S(B)} \mid \overrightarrow{S(C)\,S(D)} \right\rangle = k^2 \left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{CD} \right\rangle$, nous déduisons que $\left\langle \overrightarrow{S(A)\,S(B)} \mid \overrightarrow{S(C)\,S(D)} \right\rangle = 0$
2. <u>Démontrons le second point</u>

$$\begin{aligned}
\cos\left(\widehat{\overrightarrow{S(A)\,S(B)}, \overrightarrow{S(C)\,S(D)}}\right) &= \frac{\left\langle \overrightarrow{S(A)\,S(B)} \mid \overrightarrow{S(C)\,S(D)} \right\rangle}{\left\| \overrightarrow{S(A)\,S(B)} \right\| \times \left\| \overrightarrow{S(C)\,S(D)} \right\|} \\
&= \frac{k^2 \left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{CD} \right\rangle}{k^2 \left\| \overrightarrow{AB} \right\| \times \left\| \overrightarrow{CD} \right\|} \\
&= \frac{\left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{CD} \right\rangle}{\left\| \overrightarrow{AB} \right\| \times \left\| \overrightarrow{CD} \right\|} \\
&= \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right)
\end{aligned}$$

Remarque 8 :

Les similitudes **ne conservent pas** le produit scalaire. En effet, nous venons de montrer que

$$\left\langle \overrightarrow{S(A)\,S(B)} \mid \overrightarrow{S(C)\,S(D)} \right\rangle = k^2 \left\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{CD} \right\rangle$$

22.2.7 Définition de similitude directe, de similitude inverse

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension finie et direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien E

1. On appelle <u>similitude directe</u> de $\mathcal{E}$ toute similitude $S \in \mathcal{S}im(\mathcal{E})$ qui se décompose sous la forme $S = H \circ \theta$ où H est une homothétie et θ une isométrie positive de $\mathcal{E}$ $(\theta \in \mathcal{I}s^+(\mathcal{E}))$
2. On appelle <u>similitude inverse</u> de $\mathcal{E}$ toute similitude $S \in \mathcal{S}im(\mathcal{E})$ qui se décompose sous la forme $S = H \circ \theta$ où H est une homothétie et θ une isométrie négative de $\mathcal{E}$ $(\theta \in \mathcal{I}s^-(\mathcal{E}))$

L'ensemble des similitudes directes de $\mathcal{E}$ est noté $\mathcal{S}im^+(\mathcal{E})$, alors que l'ensemble des similitudes inverses est noté $\mathcal{S}im^-(\mathcal{E})$

Remarque 9 :

Nous avons $\mathcal{S}im^+(\mathcal{E}) = \mathcal{S}im(\mathcal{E}) \setminus \mathcal{S}im^-(\mathcal{E})$

22.2.8 Proposition

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension finie et direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien E
$\mathcal{S}im^+(\mathcal{E})$ muni de la loi de composition des applications est un sous-groupe de $\mathcal{S}im(\mathcal{E})$

Démonstration

La démonstration est évidente et laissée au lecteur

Remarque 10 :

Il faut aussi remarquer, à partir de leur décomposition, que la composition de 2 similitudes inverses donne une similitude directe

22.3 Les similitudes planes

Après avoir travaillé les similitudes dans le cas général, nous nous situons, dans ce paragraphe, dans le cadre plus restreint du plan affine euclidien $\mathcal{P}$ de dimension finie égale à 2.
Nous allons donc étudier les similitudes planes

22.3.1 Théorème

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien de direction le $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{\mathcal{P}}$

1. L'application $S : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ est une similitude directe du plan si et seulement si il existe un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ dans lequel la définition analytique de S soit :

$$\begin{cases} x' = & ax - by + x_0 \\ y' = & bx + ay + y_0 \end{cases} \quad \text{avec } a^2 + b^2 > 0$$

   Le rapport de la similitude est donné par $\sqrt{a^2 + b^2}$

2. L'application $S : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ est une similitude inverse du plan si et seulement si il existe un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ dans lequel la définition analytique de S soit :

$$\begin{cases} x' = & ax + by + x_0 \\ y' = & bx - ay + y_0 \end{cases} \quad \text{avec } a^2 + b^2 > 0$$

   Le rapport de la similitude est donné par $\sqrt{a^2 + b^2}$

Démonstration

1. **Démonstration du premier point**

   → Supposons que S soit une similitude directe de rapport $k > 0$
   Alors, S se décompose en une homothétie de rapport k et une isométrie φ positive ($\varphi \in \mathcal{I}s^+(\mathcal{P})$), c'est à dire, puisque nous sommes dans le plan, une rotation.
   Nous avons donc $\overrightarrow{S} = k\overrightarrow{\varphi}$.
   $\overrightarrow{\varphi}$ étant une rotation de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, il existe une base orthonormée $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$ de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ dans laquelle la matrice de $\overrightarrow{\varphi}$ est donnée par :

$$\mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}}\left(\overrightarrow{\varphi}\right) = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \text{ avec } a_1^2 + b_1^2 = 1$$

   La matrice de $\overrightarrow{S}$ dans la base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$ est donc :

$$\mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}}\left(\overrightarrow{S}\right) = \begin{pmatrix} ka_1 & -kb_1 \\ kb_1 & ka_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ en posant } a = ka_1 \text{ et } b = kb_1$$

   Soit $O \in \mathcal{P}$; le repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est un repère orthonormé et posons $O' = S(O)\,(x_0, y_0)$

Alors, pour tout point $M(x,y)$ d'image $M' = S(M)(x',y')$, nous avons

$$\overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{S(O)\,S(M)} = \overrightarrow{S}\left(\overrightarrow{OM}\right)$$

Matriciellement, nous avons alors :

$$\begin{pmatrix} x'-x_0 \\ y'-y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x'-x_0 = & ax-by \\ y'-y_0 = & bx+ay \end{cases}$$

C'est à dire que si S est une similitude directe du plan alors sa définition analytique est donnée par :

$$\begin{cases} x' = & ax-by+x_0 \\ y' = & bx+ay+y_0 \end{cases}$$

Nous avons $k^2 = k^2\left(a_1^2+b_1^2\right) = (ka_1)^2 + (kb_1)^2 = a^2+b^2$ et donc $k = \sqrt{a^2+b^2}$

→ Réciproquement, soit f une application affine dont la définition analytique dans un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est donnée par :

$$\begin{cases} x' = & ax-by+x_0 \\ y' = & bx+ay+y_0 \end{cases} \quad \text{avec } a^2+b^2>0$$

Si $\overrightarrow{f}$ est l'endomorphisme associé à f, alors, sa matrice dans la base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$ est donnée par :

$$\mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}}\left(\overrightarrow{f}\right) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Soient $a_1 = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $b_1 = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$; alors :

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a^2+b^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2+b^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$$

La matrice $\begin{pmatrix} \sqrt{a^2+b^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2+b^2} \end{pmatrix}$ est la matrice d'une homothétie de rapport $\sqrt{a^2+b^2}$, alors que la matrice $\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$ est celle d'une rotation du plan

f est donc la composée d'une homothétie de rapport $\sqrt{a^2+b^2}$ et d'une rotation. C'est donc une similitude directe de rapport $\sqrt{a^2+b^2}$

2. **Démonstration du second point**
   La démonstration de ce second point est totalement semblable à celle du premier ; elle est donc laissée au lecteur.

Exemple 3 :

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère othonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et une application f de définition analytique :

$$\begin{cases} x' = & x-y+1 \\ y' = & x+y \end{cases}$$

C'est la définition analytique d'une similitude directe de rapport $k = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$
Son point fixe est donné par le système d'équations :

$$\begin{cases} x = & x-y+1 \\ y = & x+y \end{cases} \iff y=1 \text{ et } x=0$$

Le centre de similitude *(ou point fixe)* est donc $\Omega(0,1)$.

Il est facile aussi de trouver l'angle de la rotation. La matrice de cette rotation est donnée par $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

L'angle de la rotation est donc $\dfrac{\pi}{4}$ et le centre de la rotation affine, comme celui de l'homothétie est $\Omega\,(0,1)$. Nous avons donc :

$$f = H_{\Omega,\frac{1}{\sqrt{2}}} \circ R\left(\Omega, \frac{\pi}{4}\right) = R\left(\Omega, \frac{\pi}{4}\right) \circ H_{\Omega,\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Pour visualiser cette transformation, reportez vous à la figure 22.2

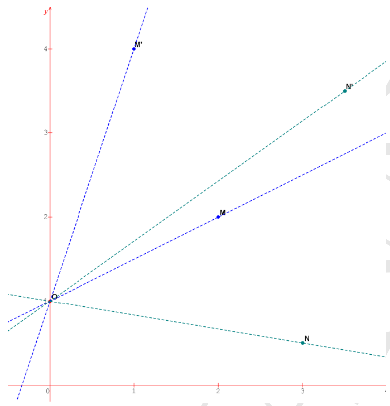


FIGURE 22.2 – Visualisation de la similitude f

22.3.2 Théorème

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère othonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ que l'on identifie au corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

1. (a) Toute similitude plane directe S de rapport $k > 0$ peut être définie par une relation de la forme

   $$z' = az + b \text{ avec } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}$$

   où, si $z \in \mathbb{C}$ est l'affixe de $M \in \mathcal{P}$, $z' \in \mathbb{C}$ est celle de $M' = S(M)$
   Le rapport de la similitude est $k = |a|$

   (b) Réciproquement, toute application f du plan $\mathcal{P}$ définie de manière complexe par

   $$z' = az + b \text{ avec } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}$$

   est une similitude directe de rapport $|a|$

2. (a) Toute similitude plane inverse S de rapport $k > 0$ peut être définie par une relation de la forme

   $$z' = a\overline{z} + b \text{ avec } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}$$

   où, si $z \in \mathbb{C}$ est l'affixe de $M \in \mathcal{P}$, $z' \in \mathbb{C}$ est celle de $M' = S(M)$
   Le rapport de la similitude est $k = |a|$

   (b) Réciproquement, toute application f du plan $\mathcal{P}$ définie de manière complexe par

   $$z' = a\overline{z} + b \text{ avec } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}$$

   est une similitude inverse de rapport $|a|$

Démonstration

1. **Démonstration du premier point**

(a) Supposons S similitude plane directe
Alors, d'après 22.3.1, sa définition analytique est donnée par

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = & ax - by + x_0 \\ y' = & bx + ay + y_0 \end{array}\right. \quad \text{avec } a^2 + b^2 > 0 \tag{22.1}$$

Et le rapport de cette similitude est $\sqrt{a^2 + b^2}$
En réutilisant le système (22.1) et en multipliant la seconde ligne par le nombre complxe i, nous avons :

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = & ax - by + x_0 \\ iy' = & ibx + iay + iy_0 \end{array}\right.$$

et en additionnant, nous obtenons :

$$\begin{aligned}(x' + iy') = (a + ib)\,x + (ai - b)\,y + x_0 + iy_0 \iff & (x' + iy') = (a + ib)\,x + i\,(a + ib)\,y + x_0 + iy_0 \\ \iff & (x' + iy') = (a + ib)\,(x + iy) + x_0 + iy_0\end{aligned}$$

En posant $z' = x' + iy'$, $z = x + iy$, $A = a + ib$ et $B = x_0 + iy_0$, nous obtenons une égalité de la forme $z' = Az + B$ avec $|A| = \sqrt{a^2 + b^2}$ qui est le rapport de la similitude

(b) Réciproquement, soit $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une transformation complexe définie par $\varphi(z) = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. Si nous identifions $\mathcal{P}$ à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, en prenant $M(x, y)$ d'affixe z et $M'(x', y')$ d'affixe $\varphi(z)$, nous avons :

$$x' + iy' = a\,(x + iy) + b$$

En posant $a = a_1 + ia_2$ et $b = b_1 + ib_2$, nous obtenons :

$$x' + iy' = a\,(x + iy) + b \iff x' + iy' = (a_1 + ia_2)\,(x + iy) + (b_1 + ib_2)$$

En identifiant parties réelles et imaginaires, nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = & a_1 x - a_2 y + b_1 \\ y' = & a_2 x - a_2 y + b_2 \end{array}\right.$$

Ainsi, la transformation f du plan $\mathcal{P}$ de définition analytique

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = & a_1 x - a_2 y + b_1 \\ y' = & a_2 x - a_2 y + b_2 \end{array}\right.$$

est une similitude directe de rapport $\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |a|$

Ce que nous voulions.

2. **Démonstration du second point**
Comme tout à l'heure, la démonstration de ce second point est la copie conforme du premier ; je la laisse donc au lecteur

Exemple 4 :

Quelques exercices résolus

1. *Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère othonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ que l'on identifie au corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.*
Définir analytiquement la similitude inverse S définie par $z' = 2i\overline{z} + 1 - i$; on déterminera aussi l'ensemble des points invariants par S

La résolution de cet exercice est très rudimentaire ; nous donnerons, dans un prochain paragraphe, des outils plus efficaces

Soit $M(x, y) \in \mathcal{P}$ de transformé $M'(x', y') \in \mathcal{P}$ par S. Alors, nous avons :

$$x' + iy' = 2i\,(x - iy) + 1 - i$$

Ce qui nous donne, en identifiant parties réelles et parties imaginaires :

$$\left\{\begin{array}{rl} x' = & 2y+1 \\ y' = & 2x-1 \end{array}\right.$$

On peut remarquer que la matrice de $\overrightarrow{S}$ dans la base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$ est donnée par $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{S}$ est donc la composée d'une homothétie de rapport 2 et de la symétrie orthogonale par rapport à la droite $y = x$.
Si $I(x, y)$ est un point fixe de de S, nous avons :

$$\left\{\begin{array}{rl} x = & 2y+1 \\ y = & 2x-1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x-2y = & 1 \\ -2x+y = & -1 \end{array}\right.$$

D'où nous tirons $x = \dfrac{1}{3}$ et $y = -\dfrac{1}{3}$

2. *Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère othonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ que l'on identifie au corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.*
Soient $A \in \mathcal{P}$, , $B \in \mathcal{P}$, $A' \in \mathcal{P}$ et $B' \in \mathcal{P}$ 4 points de $\mathcal{P}$ tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$
Montrer qu'il existe 2 similitudes S et 2 seulement telles que $A' = S(A)$ et $B' = S(B)$

Nous allons résoudre cette question de 2 façons : la première avec les nombres complexes, la seconde à l'aide de transformations géométriques plus classiques

(a) **Utilisation des nombres complexes**
Nous appelons z_A l'affixe de A, z_B, celle de B, z'_A, l'affixe de A' et z'_B celle de B'

i. Recherche d'une similitude directe
S'il existe une similitide directe S telle que $A' = S(A)$ et $B' = S(B)$, nous avons le système :

$$\left\{\begin{array}{rl} z'_A = & az_A + b \\ z'_B = & az_B + b \end{array}\right. \quad \text{avec } a \in \mathbb{C} \text{ et } b \in \mathbb{C}$$

D'où nous tirons :

$\rightarrow a = \dfrac{z'_A - z'_B}{z_A - z_B}$ $\qquad\qquad$ $\rightarrow b = \dfrac{z_A z'_B - z_B z'_A}{z_A - z_B}$

Comme nous avons $A \neq B$, nous avons donc $z_A - z_B \neq 0$ et les valeurs a et b sont bien définies.
Il existe donc une seule similitude *directe* S telle que $A' = S(A)$ et $B' = S(B)$
Le rapport de la similitude est donc $|a| = \left|\dfrac{z'_A - z'_B}{z_A - z_B}\right| = \dfrac{|z'_A - z'_B|}{|z_A - z_B|} = \dfrac{A'B'}{AB}$
L'angle de la similitude est donné par

$$\arg a = \arg\left(\frac{z'_A - z'_B}{z_A - z_B}\right) = \arg(z'_A - z'_B) - \arg(z_A - z_B) = \widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)}$$

ii. Recherche d'une similitude inverse
S'il existe une similitide inverse S telle que $A' = S(A)$ et $B' = S(B)$, nous avons le système :

$$\left\{\begin{array}{rl} z'_A = & a\overline{z_A} + b \\ z'_B = & a\overline{z_B} + b \end{array}\right. \quad \text{avec } a \in \mathbb{C} \text{ et } b \in \mathbb{C}$$

De ce système, nous tirons $b = z'_A - a\overline{z_A}$ et donc, en remplaçant dans la seconde équation :

$$z'_B = a\overline{z_B} + b \Longleftrightarrow z'_B = a\overline{z_B} + z'_A - a\overline{z_A} \Longleftrightarrow z'_B - z'_A = a\left(\overline{z_B} - \overline{z_A}\right) \Longleftrightarrow a = \frac{z'_B - z'_A}{\overline{z_B - z_A}}$$

Comme tout à l'heure, nous avons $z_A - z_B \neq 0$ et la valeur de a est bien définie.
D'où, par calcul, nous trouvons $b = \dfrac{z'_A\overline{z_B} - \overline{z_A}z'_B}{\overline{z_B} - \overline{z_A}}$
Il existe donc une seule similitude *inverse* S telle que $A' = S(A)$ et $B' = S(B)$.

(b) **Méthode géométrique**

i. Recherche de la similitude directe

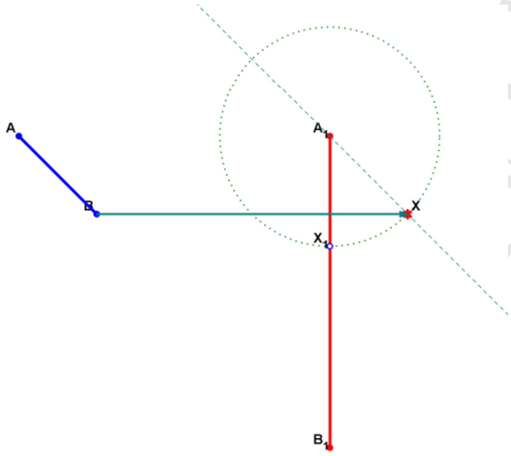


FIGURE 22.3 – Les différentes étapes de la construction de la similitude directe

→ Considérons la translation $T_{\overrightarrow{AA'}}$
Alors $T_{\overrightarrow{AA'}}(A) = A'$ et posons $T_{\overrightarrow{AA'}}(B) = X$. Ainsi, $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BX} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'X}$

→ Nous considérons maintenant, la rotation $R(A', \theta)$ où θ est une mesure de l'angle de vecteurs $\widehat{\overrightarrow{A'X}, \overrightarrow{A'B'}}$ modulo 2π.
Alors $R(A', \theta)(A') = A'$ et $R(A', \theta)(X) = X_1$

→ Nous considérons maintenant l'homothétie $H_{A', \frac{A'B'}{A'X_1}}$
$R(A', \theta)$ étant une isométrie, nous avons $A'X_1 = A'X = AB$ et donc, $H_{A', \frac{A'B'}{A'X_1}} = H_{A', \frac{A'B'}{AB}}$
Alors $H_{A', \frac{A'B'}{AB}}(A') = A'$ et $H_{A', \frac{A'B'}{AB}}(X_1) = B'$

→ Ainsi, la transformation $S = H_{A', \frac{A'B'}{AB}} \circ R(A', \theta) \circ T_{\overrightarrow{AA'}}$ est telle que $A' = S(A)$ et $B' = S(B)$ et S est bien une similitude directe.

ii. Recherche de la similitude inverse

Cette fois ci, rien de plus facile : il suffit de remplacer la rotation $R(A', \theta)$ par S_D la symétrie orthogonale par rapport à la droite D médiatrice du segment $[X, X_1]$.
La similitude inverse cherchée est donc $S_I = H_{A', \frac{A'B'}{AB}} \circ S_D \circ T_{\overrightarrow{AA'}}$

22.3.3 Exercices

Exercice 5 :

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère othonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On considère l'application $S : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ dont la définition analytique est :

$$\begin{cases} x' = & 2x + y - 1 \\ y' = & -x + 2y + 1 \end{cases}$$

1. Démontrer que S est une similitude dont on donnera le rapport et l'unique point fixe

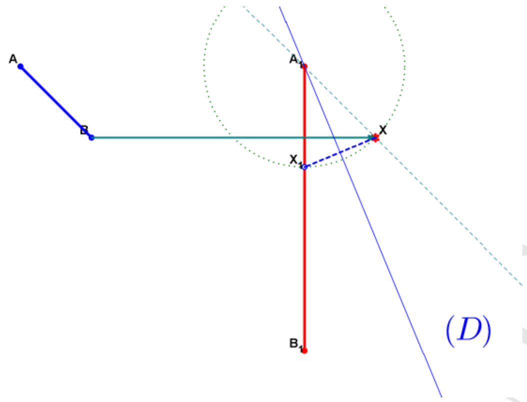


FIGURE 22.4 – Les différentes étapes de la construction de la similitude inverse

2. Démontrer que S transforme une droite (D) d'équation $y = ax + b$ en une droite (D_1) dont on donnera l'équation.

Exercice 6 :

Le plan $\mathcal{P}$ étant un plan affine euclidien rapporté à un repère othonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On considère l'application $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ dont la définition analytique est :

$$\begin{cases} x' = & x - 3y - 3 \\ y' = & -3x - y + 1 \end{cases}$$

1. Démontrer qu'il existe 2 droites (D) et (Δ) et 2 seulement invariantes par f
2. Démontrer que (D) et (Δ) sont perpendiculaires et donner les coordonnées du point d'intersection I.

Exercice 7 :

Enoncé du concours général de 1877
Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien. Nous considérons un triangle ABC rectangle en A et de hauteur AH.
On désigne par r_1, r_2 et r_3, les rayons des cercles inscrits aux triangles ABC, ABH et ACH.
Il faut montrer que $r_1^2 = r_2^2 + r_3^2$.
Pour le démontrer, répondez aux questions suivantes :

1. Soit D le symétrique de A par rapport à la droite (BC). Montrer que les triangles HBD et ABC sont semblables
2. Soit S la similitude de rapport $k > 0$ qui transforme le triangle ABC en HBD. Evaluer k en fonction de BA et BC. En déduire que $r_2 = \dfrac{BA}{BC} r_1$
3. Pourquoi avons nous $r_3 = \dfrac{AC}{BC} r_1$?
4. Montrer que $\left(\dfrac{BA}{BC}\right)^2 + \left(\dfrac{AC}{BC}\right)^2 = 1$.
5. En déduire l'égalité demandée

22.4 Etude des similitudes définies par $z' = az + b$ et $z' = a\overline{z} + b$

Comme vu dans le chapitre 9, nous identifions le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$. Ainsi, si $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est un repère orthonormé de $\mathcal{P}$, si $M \in \mathcal{P}$ est un point de coordonnées (x, y), on appelle affixe de M le nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = x + iy$.

Pour tout fonction $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$, nous pouvons associer une fonction complexe $f_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tel que si z est l'affixe de M, alors $z' = f_{\mathbb{C}}(z)$ est l'affixe de $M' = f(M)$.
Dans la suite, nous ne faisons pas de différence entre f et $f_{\mathbb{C}}$

22.4.1 Théorème

Soit $S : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une similitude directe définie par $S(z) = z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$. Alors :

1. Le rapport de la similitude est $|a|$
2. Si $a = 1$, alors S est une translation
3. Si $a \neq 1$, alors S possède un unique point invariant Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$
   - Une forme réduite de S est donnée par $z' - \omega = a(z - \omega)$
   - $S = r \circ h = h \circ r$ où r est une rotation de centre Ω et d'angle $\arg a$ et h est une homothétie de rapport $|a|$

Démonstration

1. Soit $M \in \mathcal{E}$ d'affixe $z \in \mathbb{C}$ et $N \in \mathcal{E}$ d'affixe $z_1 \in \mathbb{C}$. Alors :
$$M'N' = |z_1' - z'| = |az_1 + b - (az + b)| = |a(z_1 - z)| = |a|\,|z_1 - z| = |a|\,MN$$
Et donc $|a|$ est le rapport de la similitude.
2. Supposons $a = 1$
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{M'N'}$ est $z_1' - z'$. Or $z_1' - z' = (z_1 + b) - (z + b) = z_1 - z$; et $z_1 - z$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MN}$. Nous avons donc $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$
S est donc bien une translation.
3. Recherchons les points invariants par S
Soit $\omega \in \mathbb{C}$, l'affixe de ce point invariant, alors, nous avons :
$$\omega = a\omega + b \Longleftrightarrow \omega(1 - a) = b$$
Donc :
→ Si $a = 1$ et $b = 0$, alors, l'ensemble des points invariants est $\mathbb{C}$
→ Si $a = 1$ et $b \neq 0$, alors, l'ensemble des points invariants est vide *(Il n'y a pas de point invariant)*
→ Si $a \neq 1$, alors il n'y a qu'un seul point invariant $\omega = \dfrac{b}{1-a}$
4. Supposons $a \neq 1$
Nous pouvons écrire $z' = az + b$ et $\omega = a\omega + b$, et en soustrayant, nous avons $z' - \omega = a(z - \omega)$
→ De $z' - \omega = a(z - \omega)$, nous tirons
$$\arg(z' - \omega) = \arg a + \arg(z - \omega) \Longleftrightarrow \arg(z' - \omega) - \arg(z - \omega) = \arg a$$
Et donc $\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right)} = \arg a$
→ D'autre part, $\Omega M' = |a|\,\Omega M$
→ Donc S est la composée commutative d'une homothétie $H_{\Omega,|a|}$ de centre Ω et de rapport $|a|$ et d'une rotation $R(\Omega, \arg a)$ de centre Ω et d'angle $\arg a$
C'est à dire que nous avons $S = H_{\Omega,|a|} \circ R(\Omega, \arg a) = R(\Omega, \arg a) \circ H_{\Omega,|a|}$

Remarque 11 :

Dans cette remarque, nous ré-écrivons ou reprécisons ce que nous avons démontré dans le théorème 22.4.1

1. **Centre, rapport et mesure de l'angle** d'une similitude directe sont les éléments caractéristiques de la similitude.

2. On peut écrire la forme réduite d'une similitude par $z' - \omega = \rho e^{i\theta}(z - \omega)$. Dans ce cas :
   - ρ est le rapport de la similitude
   - θ est l'angle de la similitude
   - ω est l'affixe du centre de la similitude.
3. Soit S une similitude directe définie par la relation complexe $z' = az + b$
   $\to$ S est une dilatation *(ou homothétie-translation)* si et seulement si $a \in \mathbb{R}$
   $\to$ S est une translation si et seulement si $a = 1$
4. Une similitude directe S définie par la relation complexe $z' = az + b$ est une isométrie positive *(ou déplacement)* si et seulement si $|a| = 1$

Exemple 5 :

Quelques exercices résolus

1. *Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$. On considère l'application S dont la définition complexe est donnée par $z' = \left(1 + i\sqrt{3}\right)z - \sqrt{3}$. En donner les éléments caractéristiques*

   De manière évidente, S est une similitude directe

   $\to$ Le point invariant a pour affixe $\omega = \dfrac{-\sqrt{3}}{1 - \left(1 + i\sqrt{3}\right)} = \dfrac{1}{i} = -i$; le point invariant $\Omega \in \mathcal{P}$ a donc pour coordonnées $(0, -1)$

   $\to$ Le rapport de la similitude est donné par $\left|1 + i\sqrt{3}\right| = 2$

   $\to$ La forme trigonométrique de $1 + i\sqrt{3}$ est $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et l'angle de la similitude est donc de $\dfrac{\pi}{3}$

   $\to$ La forme réduite de S est $z' + i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}(z + i)$
2. *Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$. Soit S une similitud edirecte de centre O transformant 2 points $M \in \mathcal{P}$ et $N \in \mathcal{P}$ respectivement en $M' \in \mathcal{P}$ et $N' \in \mathcal{P}$.*
   Démontrer que la similitude directe S_1 de centre O qui transforme M en N transforme aussi M' en N'

   Cette question pose peu de difficultés.
   Nous appelons $m \in \mathbb{C}$ l'affixe de $M \in \mathcal{P}$, $n \in \mathbb{C}$ l'affixe de $N \in \mathcal{P}$, $m' \in \mathbb{C}$ l'affixe de $M' \in \mathcal{P}$ et $n' \in \mathbb{C}$ l'affixe de $N' \in \mathcal{P}$
   Comme $M' = S(M)$, $N' = S(N)$ et que S est une similitude de centre O, nous avons $m' = am$ et $n' = an$ avec $a \in \mathbb{C}$.
   Soit S_1 la similitude directe de centre O qui transforme M en N ; il existe alors $a_1 \in \mathbb{C}$ tel que $n = a_1 m$. Alors :
   $$n' = an = a(a_1 m) = a_1(am) = a_1 m'$$
   C'est à dire $N' = S_1(M')$
3. *Déterminer la similitude directe s (centre, rapport, mesure) transformant le bipoint (A, B) en le bipoint (A', B'), dans le cas où $A(1; 2)$, $B(3; -1)$,$A'(0; -3)$ et $B'(1; 1)$*

   C'est une question qui ne pose aucune difficulté, mais qui introduit aux systèmes linéaires en nombres complexes.

   - $\star$ Si z_A est l'affixe du point A, z_B, celle du point B, z'_A l'affixe du point A' z'_B celle de B', nous avons :

     $\longrightarrow z_A = 1 + 2i$ $\qquad\longrightarrow z_B = 3 - i$ $\qquad\longrightarrow z'_A = -3i$ $\qquad\longrightarrow z'_B = 1 + i$

   - $\star$ S'il existe une similitude directe s telle que $s(A) = A'$ et $s(B) = B'$, l'expression complexe de s est donnée par $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$, et nous avons :
     $$\begin{cases} z'_A = & az_A + b \\ z'_B = & az_B + b \end{cases}$$

Il faut donc trouver a et b
En soustrayant les différentes lignes, nous obtenons $z'_A - z'_B = a(z_A - z_B)$ d'où $a = \dfrac{z'_A - z'_B}{z_A - z_B}$ d'où nous tirons $b = \dfrac{z_A z'_B - z'_A z_B}{z_A - z_B}$. D'où, la similitude s a pour expression :

$$z' = \frac{(z'_A - z'_B)\,z + z_A z'_B - z'_A z_B}{z_A - z_B}$$

Ce qui est une expression générale

⋆ La fin de l'exercice n'est qu'une application numérique. Nous trouvons donc :

$\rightarrow\ a = \dfrac{1}{13}(-10 + 11i)$ $\rightarrow\ b = \dfrac{4}{13}(11 - 3i)$

Donc s a pour expression complexe :

$$z' = \frac{1}{13}\left((-10 + 11i)\,z + 4(11 - 3i)\right)$$

Nous venons aussi de montrer qu'il n'existe qu'une seule similitude directe qui transforme un bipoint (A, B) en un autre bipoint (A', B')

22.4.2 Exercices

Dans tous les exercices qui suivent, $\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

Exercice 8 :

1. On considère l'application S du plan qui, à tout point $M \in \mathcal{P}$ d'affixe $z \in \mathbb{C}$ associe le point $M' \in \mathcal{P}$ d'affixe $z' \in \mathbb{C}$ donnée par la relation $z' = 2iz + 1 - i$
   Déterminer la nature de S et en donner les éléments caractéristiques
2. Reprendre la question précédente dans les cas suivants :
   (a) $z' = z + 2 - i$
   (b) $z' = 2z + i$
   (c) $z' = iz$
   (d) $z' = (1 + i)\,z - i$
   (e) $z' = \left(\sqrt{3} - i\right) z + 1 + i\left(\sqrt{3} - i\right)$
   (f) $z' = \left(\dfrac{1 + i}{\sqrt{2}}\right) z - (1 - i)$

Exercice 9 :

Déterminer la similitude directe s *(centre, rapport, mesure)* transformant le bipoint (A, B) en le bipoint (A', B'), dans les cas suivants :

1. $A(1; 0)$, $B(3; -1)$, $A'(0; 1)$ et $B'(2; 2)$
2. $A(0; 1)$, $B(0; 3)$, $A'(2; 2)$ et $B'(-1; -1)$
3. $A(1; 0)$, $B(0; 1)$, $A'(3; 0)$ et $B'(0; -3)$

Exercice 10 :

Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation suivante d'inconnue z

$$z^3 - \left(4 + i\sqrt{3}\right) z^2 + \left(3 + 4i\sqrt{3}\right) z - 3i\sqrt{3} = 0$$

1. Montrer que cette équation admet deux racines réelles *(on les notera α et β avec $\alpha < \beta$)* et une racine imaginaire pure notée ω

2. Soit f une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que :

$$f(z) = az + b \text{ avec } a \in \mathbb{C} \text{ et } b \in \mathbb{C}$$

   (a) Calculer les nombres complexes a et b de telle sorte que $f(\alpha) = \beta$ et $f(\omega) = \omega$

   (b) Calculer le module et l'argument de a et caractériser géométriquement la transformation ponctuelle Φ du plan complexe associée à f.

Exercice 11 :

On considère 2 transformations du plan $\mathcal{P}$ appelées T_1 et T_2 qui associent respectivement au point $M \in \mathcal{P}$ d'affixe $z \in \mathbb{C}$ le point $M_1 = T_1(M)$ et le point $M_2 = T_2(M)$ d'affixe $z_1 = \left(-1 + i\sqrt{3}\right) z$ et $z_2 = \dfrac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right) z$

1. Quelle est la nature de ces deux transformations ? Donner leurs éléments respectifs
2. Exprimer, en fonction de z, l'affixe de l'image de M par la transformation composée $T_2 \circ T_l$ et donner les éléments de cette transformation

Exercice 12 :

Dans le plan complexe, au point $M \in \mathcal{P}$, d'affixe z, on fait correspondre le point M' d'affixe Z, par la transformation T_k définie par :

$$Z = kiz + 1 + k^2$$

k étant un paramètre réel strictement positif et i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Quelle est la nature de la transformation T_k ?
2. Montrer que T_k, possède un point invariant ω_k, et un seul, que l'on déterminera.
3. Préciser les éléments caractéristiques de T_k
4. Déterminer l'ensemble des points ω_k lorsque k décrit l'ensemble des réels positifs.
5. k_1 et k_2 étant deux réels strictement positifs, on considère les transformations $T_{k_2} \circ T_{k_1}$ et $T_{k_1} \circ T_{k_2}$ Montrer que $T_{k_2} \circ T_{k_1} = T_{k_1} \circ T_{k_2}$ si et seulement si $k_1 = k_2$
6. Quelle est la nature de la transformation $T_k \circ T_k$?

Exercice 13 :

Soit $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

1. On considère l'application f de $\mathcal{P}$ dans lui-même qui, à tout point M de coordonnées (x, y) fait correspondre le point M' de coordonnées (x', y') définies par :

$$\begin{cases} x' = & x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y' = & x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases}$$

   Déterminer le point double de f *(ou point invariant de f)*

2. On désigne par $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$ les affixes des points M et M'. Montrer que z et z' sont par une relation du type :

$$z' - z_0 = a(z - z_0)$$

   où a et z_0 sont des nombres complexes que l'on déterminera. Caractériser alors la transformation f.

Exercice 14 :

Le plan $\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.
On considère les points A et B qui ont respectivement pour coordonnées $(1, 0)$ et $(-1, 0)$ et la droite D passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{j}$

Soit S la similitude directe dont le centre est B, dont l'angle est $+\dfrac{\pi}{2}$ et dont le rapport est $\dfrac{1}{2}$

1. (a) Déterminer $A' = S(A)$.
   (b) Montrer que l'ensemble des images M' des points $M \in D$ par S est une droite D' qui coupe D en un point I,
   (c) Déterminer $I' = S(I)$ et démontrer que, pour tout $M \in D$, si $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AI}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\overrightarrow{A'M'} = \lambda\overrightarrow{A'I'}$
   (Représenter graphiquement les points et les droites)
2. Soit $M"$ le barycentre des points M et M' respectivement affectés des coefficients 2 et -1.
   (a) Démontrer que $M"$ est l'image de M dans une similitude directe S_1 de centre B
   (b) Démontrer que l'ensemble des points $M"$ images des points $M \in D$ est une droite D_1 que l'on déterminera.

22.4.3 Théorème

Soit $S : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une similitude inverse définie par $S(z) = z' = a\overline{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$. Alors :

1. Si $|a| = 1$, alors S est un antidéplacement (ou isométrie négative)
   (a) Si $a\overline{b} + b = 0$, alors S est une symétrie ortogonale par rapport à une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ d'affixe $u = a\overline{b} + b$
   (b) Si $a\overline{b}+b \neq 0$, alors S est la composée d'une symétrie ortogonale et d'une translation. La translation a pour vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe $u = \dfrac{1}{2}\left(a\overline{b} + b\right)$ et l'axe de la symétrie orthogonale a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ d'affixe $v = a\overline{b} + b$
2. Si $|a| \neq 1$, alors S admet une unique point fixe Ω d'affixe $\omega = \dfrac{a\overline{b} + b}{1 - |a|^2}$
   S est alors la composée commutative d'une homothétie $H(\Omega, |a|)$ de centre Ω et de rapport $|a|$ et d'une symétrie orthogonale S_Δ d'axe Δ passant par Ω, c'est à dire :
$$S = H(\Omega, |a|) \circ S_\Delta = S_\Delta \circ H(\Omega, |a|)$$

Démonstration

1. **Recherchons les points invariants de S**
   (a) Si $z \in \mathbb{C}$ est invariant par S, alors $z = a\overline{z} + b$ et donc $\overline{z} = \overline{a}z + \overline{b}$; d'où :
$$z = a\overline{z} + b \Longleftrightarrow z = a\left(\overline{a}z + \overline{b}\right) + b \Longleftrightarrow z = |a|^2 z + a\overline{b} + b \Longleftrightarrow \left(1 - |a|^2\right) z = a\overline{b} + b$$
   (b) Si $|a| = 1$ et $a\overline{b} + b \neq 0$, alors, il n'y a aucun point invariant
   (c) Si $|a| = 1$ et $a\overline{b} + b = 0$, alors, il existe une infinité de points invariants
   (d) Si $|a| \neq 1$ alors il n'existe qu'un seul point invariant Ω d'affixe $\omega = \dfrac{a\overline{b} + b}{1 - |a|^2}$
2. **Supposons maintenant que $|a| = 1$**
   Alors, S est un antidéplacement *(ou isométrie négative)*. D'après 21.2.13 est la composée d'une symétrie orthogonale S_D d'axe $D \subset \mathcal{P}$ et d'une translation $T_{\overrightarrow{u}}$ dont le vecteur $\overrightarrow{u}$ est directeur D. De plus, nous avons $S = S_D \circ T_{\overrightarrow{u}} = T_{\overrightarrow{u}} \circ S_D$, de telle sorte que nous ayions
$$S \circ S = \left(T_{\overrightarrow{u}} \circ S_D\right) \circ \left(S_D \circ T_{\overrightarrow{u}}\right) = T_{2\overrightarrow{u}}$$

⇒ Calculons $S \circ S(z)$
Nous avons donc :

$$S \circ S(z) = S[S(z)] = a\overline{S(z)} + b = a\left(\overline{a}z + \overline{b}\right) + b = |a|^2 z + a\overline{b} + b = z + a\overline{b} + b$$

⇒ Si $a\overline{b} + b = 0$, alors $S \circ S = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$ et S est donc une symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ qui a pour vecteur directeur, un vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe $a\overline{b} + b$

⇒ Si $a\overline{b} + b = 0$, alors $S \circ S$ est une translation de vecteur d'affixe $a\overline{b} + b$, c'est à dire que S est la composée d'une symétrie orthogonale d'axe Δ qui a pour vecteur directeur, un vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe $a\overline{b} + b$ et d'une translation $T_{\frac{1}{2}\overrightarrow{u}}$

3. **Supposons maintenant que $|a| \neq 1$**

Alors S admet un seul point invariant Ω d'affixe $\omega = \dfrac{a\overline{b} + b}{1 - |a|^2}$

Des 2 équations $z' = a\overline{z} + b$ et $\omega = a\overline{\omega} + b$, nous tirons :

$$z' - \omega = a(\overline{z} - \overline{\omega}) = a\overline{(z - \omega)}$$

→ Nous avons alors $|z' - \omega| = |a|\left|\overline{(z - \omega)}\right| = |a|\,|z - \omega|$
Ainsi, si M a pour affixe z et M' pour affixe z', nous avons alors $M'\Omega = |a|\,M\Omega$

→ En termes d'argument, nous avons :

$$\arg(z' - \omega) = \arg a - \arg(z - \omega)$$

→ Soit $U \in \mathcal{P}$ d'affixe $u \in \mathbb{C}$ tel que $\arg(u - \omega) = \dfrac{\arg a}{2}$.

En fait U appartient à une droite Δ fixe, passant par Ω et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{\arg a}{2}\right) \\ \sin\left(\dfrac{\arg a}{2}\right) \end{pmatrix}$

Nous avons donc :

$$\begin{cases} \arg(z' - \omega) + \arg(z - \omega) = \arg a \\ \arg(u - \omega) + \arg(u - \omega) = \arg a \end{cases}$$

Et donc

$$\arg(z' - \omega) - \arg(u - \omega) + \arg(z - \omega) - \arg(u - \omega) = 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\arg(z' - \omega) - \arg(u - \omega) = \arg(u - \omega) - \arg(z - \omega)$$

C'est à dire, en termes d'angles :

$$\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega U}, \overrightarrow{\Omega M'}\right)} = \widehat{\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega U}\right)}$$

Ce qui montre que S est la composée d'une symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ et d'une homothétie de rapport $|a|$

Exemple 6 :

Exercice résolu

1. *Le plan $\mathcal{P}$ étant un plan affine euclidien rapporté à un repère othonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$. On considère la similitude inverse s définie par :*

$$s(z) = (2 + i)\,\overline{z} + 1 - 3i$$

C'est une similitude inverse qu'il faut caractériser

- Le rapport de cette similitude est donné par $|2 + i| = \sqrt{5}$

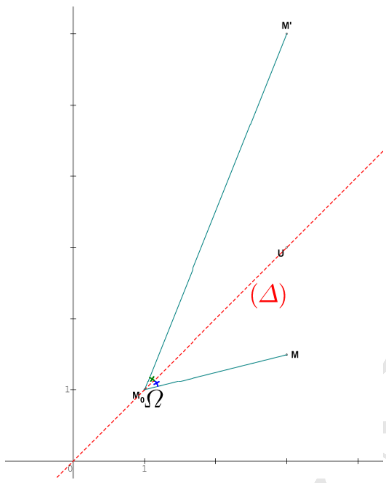


FIGURE 22.5 – Visialisation d'une similitude inverse avec un point invariant

- Comme $|a| \neq 1$, s admet un unique point fixe Ω d'abscisse
$$\omega = \frac{a\overline{b}+b}{1-|a|^2} = \frac{(2+i)(1+3i)+1-3i}{-4} = -i$$
Le point $\Omega(0,-1)$ est donc le point fixe de s. La forme réduite de s est donc donnée par :
$$z'-\omega = (2+i)\overline{(z-\omega)} \Longleftrightarrow z' = (2+i)\overline{(z-\omega)}+\omega$$
- s se décompose en le produit d'une homothétie H de centre Ω et de centre $\sqrt{5}$ et d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ passant par Ω.
Nous avons donc $s = H \circ S_\Delta \Longleftrightarrow S_\Delta = H^{-1} \circ s$
L'écriture complexe de l'homothétie H est donnée par $z'-\omega = \sqrt{5}(z-\omega) \Longleftrightarrow z' = \sqrt{5}(z-\omega)+\omega$ et celle de H^{-1} est donnée par $z' = \frac{1}{\sqrt{5}}(z-\omega)+\omega$; d'où nous avons la définition complexe de S_Δ :
$$S_\Delta(z) = H^{-1}(s(z)) = \frac{1}{\sqrt{5}}(s(z)-\omega)+\omega = \frac{1}{\sqrt{5}}\left((2+i)\overline{(z-\omega)}+\omega-\omega\right)+\omega = \frac{2+i}{\sqrt{5}}\overline{(z-\omega)}+\omega$$
Et donc $S_\Delta(z) = \frac{2+i}{\sqrt{5}}\overline{(z+i)}-i$
Si $z = x+iy$ et $S_\Delta(z) = x'+iy'$, nous avons :
$$\begin{aligned} x'+iy' &= \frac{2+i}{\sqrt{5}}(x-iy-i)-i \\ &= \frac{2+i}{\sqrt{5}}x+\frac{1-2i}{\sqrt{5}}y+\frac{1-2i}{\sqrt{5}}-i \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}}x+\frac{1}{\sqrt{5}}y+\frac{1}{\sqrt{5}}+i\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x-\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{2}{\sqrt{5}}-1\right) \end{aligned}$$
Nous obtenons donc le système :
$$\begin{cases} x' = & \frac{2}{\sqrt{5}}x+\frac{1}{\sqrt{5}}y+\frac{1}{\sqrt{5}} \\ y' = & \frac{1}{\sqrt{5}}x-\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{2}{\sqrt{5}}-1 \end{cases}$$
Δ est l'ensemble des points fixes. Les coordonnées des points de Δ vérifient donc :
$$\begin{cases} x = & \frac{2}{\sqrt{5}}x+\frac{1}{\sqrt{5}}y+\frac{1}{\sqrt{5}} \\ y = & \frac{1}{\sqrt{5}}x-\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{2}{\sqrt{5}}-1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5}x = & 2x+y+1 \\ \sqrt{5}y = & x-2y-2-\sqrt{5} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{5}-2\right)x-y-1 = & 0 \\ -x+\left(\sqrt{5}+2\right)y+2+\sqrt{5} = & 0 \end{cases}$$

La première ligne est obtenue en multipliant la seconde ligne par $2-\sqrt{5}$, en d'autres termes, le système est donc équivalent à une seule équation :

$$x-\left(\sqrt{5}+2\right)y-\left(2+\sqrt{5}\right)=0$$

C'est l'équation cartésienne de la droite Δ

2. *Déterminer la similitude inverse s transformant le bipoint (A,B) en le bipoint (A',B'), dans le cas où $A\,(1;2)$, $B\,(3;-1)$,$A'\,(0;-3)$ et $B'\,(1;1)$*

   Remarquez que nous avons déjà cherché la similitude directe qui transforme (A,B) en le bipoint (A',B'). Ainsi, s'il n'existe qu'une seule similitude inverse qui transforme (A,B) en le bipoint (A',B'), il n'existe donc que 2 similitudes (l'une directe, l'autre inverse) transformant un bipoint (A,B) en un bipoint (A',B'). Nous reprenons la trame de la résolution de l'exercice résolu précédent.

   ⋆ Si z_A est l'affixe du point A, z_B, celle du point B, z'_A l'affixe du point A' z'_B celle de B', nous avons :

   $\longrightarrow\ z_A=1+2i \qquad \longrightarrow\ z_B=3-i \qquad \longrightarrow\ z'_A=-3i \qquad \longrightarrow\ z'_B=1+i$

   ⋆ S'il existe une similitude inverse s telle que $s\,(A)=A'$ et $s\,(B)=B'$, l'expression complexe de s est donnée par $z'=a\overline{z}+b$ avec $a\in\mathbb{C}$ et $b\in\mathbb{C}$, et nous avons :

   $$\left\{\begin{array}{rl} z'_A= & a\overline{z_A}+b \\ z'_B= & a\overline{z_B}+b \end{array}\right.$$

   Il faut donc trouver a et b

   En soustrayant les différentes lignes, nous obtenons $z'_A-z'_B=a\overline{(z_A-z_B)}$ d'où $a=\dfrac{z'_A-z'_B}{\overline{z_A-z_B}}$ d'où nous tirons $b=\dfrac{\overline{z_A}z'_B-\overline{z'_A}z_B}{\overline{z_A-z_B}}$. D'où, la similitude s a pour expression :

   $$z'=\frac{\left(z'_A-z'_B\right)\overline{z}+\overline{z_A}z'_B-\overline{z'_A}z_B}{\overline{z_A-z_B}}$$

   Ce qui est une expression générale

   ⋆ La fin de l'exercice n'est qu'une application numérique. Nous trouvons donc :

   $\rightarrow\ a=\dfrac{1}{13}\,(14+5i) \qquad\qquad \rightarrow\ b=\dfrac{1}{13}\,(30+20i)$

   Donc s a pour expression complexe :

   $$z'=\frac{1}{13}\left((14+5i)\,\overline{z}+4\,(30+20i)\right)$$

   Nous venons aussi de montrer qu'il n'existe qu'une seule similitude inverse qui transforme un bipoint (A,B) en un autre bipoint (A',B')

22.4.4 Exercices

Dans tous les exercices qui suivent, $\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

Exercice 15 :

Déterminer la similitude inverse s transformant le bipoint (A,B) en le bipoint (A',B'), dans les cas suivants :

1. $A\,(1;0)$, $B\,(3;-1)$, $A'\,(0;1)$ et $B'\,(2;2)$
2. $A\,(0;1)$, $B\,(0;3)$, $A'\,(2;2)$ et $B'\,(-1;-1)$
3. $A\,(1;0)$, $B\,(0;1)$, $A'\,(3;0)$ et $B'\,(0;-3)$

Exercice 16 :

On considère l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, qui à tout nombre complexe z, associe $z' = f(z) = 2i\overline{z} + 2 - i$. On désigne par F la transformation du plan complexe, qui au point M d'affixe z, fait correspondre le point $M' = F(M)$, d'affixe $z' = f(z)$.

1. La transformation F admet-elle des points invariants ?
2. Déterminer la nature de F et préciser les éléments géométriques qui la caractérisent : centre, rapport, axe.

Exercice 17 :

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

1. (a) Soit T_1 la transformation du plan $\mathcal{P}$ qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' d'affixe :
$$z' = (i-1)\,\overline{z} + 3$$
Quelle est la nature de T_1 et, s'il existe, quel en est son centre Ω ?
   (b) Soit S la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$. Quelle est la nature de la transformation $T_1 \circ S$?
2. Soit T_2 la similitude directe ayant pour centre le point B d'affixe $3+i$, pour rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et pour mesure $\dfrac{\pi}{4}$. Caractériser la transformation $T_2 \circ T_1 \circ S$

Exercice 18 :

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

1. Détermine l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ dont l'affixe z vérifie la relation :
$$|2i\overline{z} - 1 - i| = \sqrt{2}$$
2. Soit T l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point $M \in \mathcal{P}$ d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = 2i\overline{z} - 1 - i$.
   (a) Montrer que T admet un point invariant Ω unique.
   (b) Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $\overrightarrow{\Omega M'} = 2\overrightarrow{\Omega M}$
   (c) Indiquer alors la nature et les éléments géométriques précis de l'application T
3. Utiliser la question 2 pour retrouver les résultats de la question 1 par une méthode géométrique.

22.5 Problèmes

Dans tous les exercices qui suivent, $\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

Exercice 19 :

Le plan $\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Soit $z \in \mathbb{C}$ l'affixe d'un point $M \in \mathcal{P}$

1. Quel est l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $|(1+i)\,z - 2i| = 2$
2. Etudier les transformations de $\mathcal{P}$ qui , à chaque point $M \in \mathcal{P}$ d'affixe $z \in \mathbb{C}$ fait correspondre le point $M' \in \mathcal{P}$ d'affixe $z' = (1+i)\,z - 2i$
3. Faire le lien entre les deux questions précédentes

22.5.1 Questions liées à la structure de l'ensemble des similitudes

Exercice 20 :

Cet exercice est en 2 parties, indépendantes, mais qui ont un thème commun

1. Soit S_0 la similitude directe définie par $S_0(z) = iz + 2$
   (a) i. Trouver toutes les similitudes directes qui commutent avec S_0
   ii. Déterminer le centre d'une telle similitude
   (b) Démontrer que l'ensemble des similitudes directes qui commutent avec S_0 est un sous-groupe de $\mathcal{S}im^+(\mathcal{P})$, groupe des similitudes directes de $\mathcal{P}$
   (c) Existe-t-il une similitude inverse qui commute avec S_0 ?
2. Soit T la translation définie par la relation $z' = z + 2$
   (a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{G}_T$ des similitudes qui commutent avec T
   (b) Démontrer que $\mathcal{G}_T$ est un sous-groupe du groupe $\mathcal{S}im(\mathcal{P})$, groupe des similitudes de $\mathcal{P}$
   (c) Généraliser aux translations $z' = z + b_0$ où $b_0 \in \mathbb{C}$

Exercice 21 :

Soit G un sous-groupe du groupe multiplicatif $(\mathbb{C}^*, \times)$

1. On appelle $\mathcal{G}^+$ l'ensemble des similitudes directes $z' = az + b$ où $a \in G$ et $b \in \mathbb{C}$. Démontrer que $\mathcal{G}^+$ est un sous-groupe du groupe $\mathcal{S}im^+$ des similitudes directes du plan
2. Dans cette partie de l'exercice, nous allons étendre la question précédente à $\mathcal{G}$ ensemble des similitude de S telles que :
$$S(z) = az + b \text{ ou } S(z) = a\overline{z} + b \text{ avec } a \in G \text{ et } b \in \mathbb{C}$$
Nous appellerons toujours $\mathcal{G}^+$ l'ensemble des similitudes directes $z' = az + b$ où $a \in G$ et $\mathcal{G}^-$ l'ensemble des similitudes inverses $z' = a\overline{z} + b$ où $a \in G$
   (a) Nous commençons, dans cette question, par un groupe simple, le groupe multiplicatif des réels non nuls, c'est à dire $G = \mathbb{R}^*$. Est-ce que $\mathcal{G}$ est un groupe pour la composition des applications ?
   (b) Nous considérons, dans cette question le sous-groupe $\mathcal{U}$ de $(\mathbb{C}^*, \times)$ défini par :
$$G = \mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| = 1\}$$
Est-ce que $\mathcal{G}$ est un groupe pour la composition des applications ?
   (c) On considère, cette fois ci le groupe $G = \{1; i; -i; -1\}$; Que dire du groupe $\mathcal{G}$?
   (d) Même étude pour le groupe $G = \{g \in \mathbb{C} \text{ tels que il existe } n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } g = (1+i)^n\}$

22.5.2 Problèmes de géométrie

Exercice 22 :

1. Soit φ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $\varphi(z) = \dfrac{i}{2}z + 1$. On considère la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$z_0 = 0 \text{ et } z_{n+1} = \varphi(z_n)$$
   (a) Rechercher un élément $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $z_{n+1} - \omega = \dfrac{i}{2}(z_n - \omega)$
   (b) En déduire une expression de z_n en fonction de n
2. $\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le point $M_n \in \mathcal{P}$ est l'image du complexe $z_n \in \mathbb{C}$.
   (a) Par quelle transformation affine passons-nous de M_n à M_{n+1} ?
   (b) Soit $A \in \mathcal{P}$ le point de coordonnées $\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$. Calculer, en fonction de $n \in \mathbb{N}$ AM_n, puis donner $\lim\limits_{n\to+\infty} AM_n$
   (c) Représenter les points A, M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

Exercice 23 :

Soit $\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

On donne des réels r et α avec $r > 0$ et $\alpha = \dfrac{5\pi}{2}$. On note u le nombre complexe de module r et d'argument α

1. On construit une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathcal{P}$ répondant aux conditions :
   - A_0 est l'origine du repère ;
   - A_1 est le point d'affixe i ;
   - Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, le point A_n est l'image de A_{n-2} par la similitude directe de centre A_{n-l} de rapport r et dont une mesure de l'angle est α

   On note z_n l'affixe du point A_n.

   (a) Écrire pour tout entier n supérieur ou égal à 2 une relation entre z_n, z_{n-1} et z_{n-2}

   (b) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, nous avons $z_n - z_{n-1} = (-u)^{n-1}\, i$

   (c) Déterminer l'expression de l'affixe z_n de A_n en fonction de n et de u.

2. (a) Montrer qu'il existe une similitude directe S et une seule telle que :

   $$A_1 = S(A_0) \text{ et } A_2 = S(A_1)$$

   Préciser les éléments caractéristiques de S.

   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $A_{n+1} = S(A_n)$

   (c) On note $S_0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$ l'application identique de $\mathcal{P}$, et pour tout entier naturel n, on pose $S^{n+1} = S \circ S^n$. Soit $p \in \mathbb{N}$; montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+p} = S^n(A_p)$

   (d) Montrer que S^4 est une homothétie.

   (e) En déduire que les points A_n sont éléments d'un ensemble formé par la réunion de quatre droites que l'on précisera.

3. On suppose maintenant $r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On appelle Ω le centre de la similitude S.

   (a) Démontrer que pour tout entier naturel n. les vecteurs $\overrightarrow{\Omega A_{n+1}}$ et $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$ sont orthogonaux.

   (b) Représenter graphiquement les points A_0, A_1, A_2,..., A_9 dans le repère orthonormé $\mathcal{R}\left(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

   (c) Calculer $\left\|\overrightarrow{\Omega A_n}\right\|$ en fonction de n et de $\left\|\overrightarrow{\Omega A_0}\right\|$. En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left\|\overrightarrow{\Omega A_n}\right\|$

   (d) Pour tout entier n, calculer $L_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \left\|\overrightarrow{A_i A_{i+1}}\right\|$ et étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n$

Exercice 24 :

Soit $\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

Sur la figure 22.6 ci-dessous dans le plan orienté, $AFED$ est un carré de côté 1 tel que l'angle $\widehat{\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}\right)}$ ait pour mesure $\dfrac{\pi}{2}$

Soit l avec $l > 1$, la longueur du segment $[AB]$ *(du rectangle $ABCD$).*

1. On suppose qu'il existe une similitude directe f telle que $f(A) = B$, $f(B) = C$, $f(C) = E$ et $f(D) = F$.

   Etablir qu'alors $l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. *(On suppose dans toute la suite que l garde cette valeur.)*
2. Quels sont l'angle et le rapport de la similitude f ?
3. Montrer que le centre de la similitude f est le point d'intersection des droites (AC) et (EB)

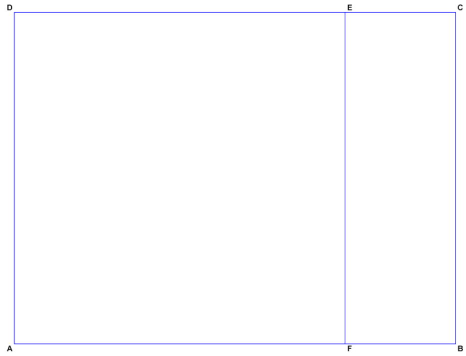


FIGURE 22.6 – La figure du problème proposé

4. A tout point M d'affixe complexe z dans le repère $\mathcal{R}\left(A; \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}\right)$ on fait correspondre le point $g(M)$ d'affixe
$$z' = \frac{\sqrt{5}-1}{2} iz + \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$
Montrer que g est une similitude dont on donnera le centre, l'angle, le rapport. Quelles sont les images par g de A, B, C, D ?

Exercice 25 :

$ABCD$ est un quadrilatère et α est un complexe de module $r > 0$ et d'argument θ. a, b, c, d représentent les affixes des points A, B, C et D dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

→ La similitude directe de centre A, de rapport r et d'angle θ transforme B en Q.
→ La similitude directe de centre B, de rapport r et d'angle θ transforme C en M.
→ La similitude directe de centre C, de rapport r et d'angle θ transforme D en N.
→ La similitude directe de centre D, de rapport r et d'angle θ transforme A en P.

On appellera q, m, n et p les affixes des points Q, M, N et P.

1. Déterminer q en fonction de α, a et b
2. (a) Montrer que : $MNPQ$ est un parallélogramme équivaut à $n + q = m + p$
   (b) En déduire que $MNPQ$ est un parallélogramme équivaut à $\alpha = \frac{1}{2}$ où $ABCD$ est un parallélogramme.
3. On suppose que $ABCD$ est un parallélogramme et que $\alpha = \frac{1+i}{2}$.En déduire que $MNPQ$ est un carré.

Exercice 26 :

Soit $\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.
On considère l'application F qui, à tout point $M \in \mathcal{P}$ d'affixe z associe le point M' d'affixe z' défini par :
.
$$z' = u^2 z + u - l$$
où u désigne un nombre complexe.

1. Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels F est une translation ; caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.

2. Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels F est une rotation d'angle de mesure $+\dfrac{\pi}{2}$ *(en radians)* ; caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.
3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels F est une homothétie de rapport -2 ; caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.
4. Caractériser F lorsque $u = 1 - i$.

Exercice 27 :

Soit $\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.
Soit θ un réel appartenant à l'intervalle $[0; \pi]$.
On considère l'application F_θ de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui, à un point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = (1 + \cos 2\theta + i \sin 2\theta)\, \overline{z} + 4 + 4i$$

1. Démontrer qu'il existe deux valeurs θ_0 et θ_1 de θ pour lesquelles F_θ est une isométrie.
2. Décomposer F_{θ_0} et F_{θ_1} en le produit d'une symétrie et d'une translation,
3. Discuter suivant les valeurs de θ de l'existence et l'unicité des points invariants par F_θ

22.6 Correction de quelques exercices

22.6.1 Applications directes du cours

Exercice 5 :

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère othonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On considère l'application $S : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ dont la définition analytique est :

$$\begin{cases} x' = & 2x + y - 1 \\ y' = & -x + 2y + 1 \end{cases}$$

1. *Démontrer que S est une similitude dont on donnera le rapport et l'unique point fixe*

   → Soit $\overrightarrow{S}$ l'endomorphisme associé à S. Alors, sa matrice dans la base orthonormée $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$ est donnée par :

   $$\mathcal{M}_{\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}}\left(\overrightarrow{S}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Cette matrice est du type $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

   S est donc une similitude directe de rapport $k = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

   → Si $\Omega \in \mathcal{P}$ est un point fixe de S, alors $S(\Omega) = \Omega$ et ses coordonnées vérifient donc :

   $$\begin{cases} x = & 2x + y - 1 \\ y = & -x + 2y + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = & 1 \\ x - y = & 1 \end{cases}$$

   D'où nous tirons $x = 1$ et $y = 0$. Ainsi, $\Omega = (1, 0)$

2. *Démontrer que S transforme une droite (D) d'équation $y = ax + b$ en une droite (D_1) dont on donnera l'équation.*

   Soit (D) une droite d'équation $y = ax + b$; ainsi, si $M \in (D)$, les coordonnées de M sont $(x, ax + b)$; en posant (x', y') les coordonnées de $M' = S(M)$, nous avons :

   $$\begin{cases} x' = & 2x + ax + b - 1 \\ y' = & -x + 2ax + 2b + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x' = & (2 + a)x + b - 1 \\ y' = & (2a - 1)x + 2b + 1 \end{cases}$$

   - Si $a = -2$, le système devient :

     $$\begin{cases} x' = & b - 1 \\ y' = & -5x + 2b + 1 \end{cases}$$

     Ce qui montre que l'image de la droite $y = -2x + b$ par la similitude S est la droite $x = b - 1$
   - Maintenant si $a = \dfrac{1}{2}$, le système devient :

     $$\begin{cases} x' = & \dfrac{5x}{2} + b - 1 \\ y' = & 2b + 1 \end{cases}$$

     Ce qui montre que l'image de la droite $y = \dfrac{x}{2} + b$ par la similitude S est la droite $y = 2b + 1$
   - Supposons maintenant $a \neq -2$ et $a \neq \dfrac{1}{2}$ alors, de

     $$\begin{cases} x' = & (2 + a)x + b - 1 \\ y' = & (2a - 1)x + 2b + 1 \end{cases} \quad \text{nous tirons :} \begin{cases} x = & \dfrac{x' + (1 - b)}{a + 2} \\ x = & \dfrac{y' - (2b + 1)}{2a - 1} \end{cases}$$

Et donc, nous avons :

$$\frac{x'+(1-b)}{a+2}=\frac{y'-(2b+1)}{2a-1}\Longleftrightarrow(2a-1)\left(x'+(1-b)\right)=(a+2)\left(y'-(2b+1)\right)$$

Ainsi la droite (D) d'équation $y=ax+b$ a pour image la doite (D_1) d'équation :

$$(2a-1)\,x-(a+2)\,y+(2a-1)\,(1-b)+(a+2)\,(2b+1)=0$$

Nous pouvons remarque que si $a=\dfrac{1}{2}$ nous retrouvons dans l'équation ci-dessus

$$-\frac{5}{2}y+\frac{5}{2}\,(2b+1)=0$$

C'est à dire $y=2b+1$
Nous aurions le même résultat si $a=-2$.

Exercice 6 :

Le plan $\mathcal{P}$ étant un plan affine euclidien rapporté à un repère othonormé $\mathcal{R}\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$. On considère l'application $f:\mathcal{P}\longrightarrow\mathcal{P}$ dont la définition analytique est :

$$\left\{\begin{array}{rl} x'= & x-3y-3\\ y'= & -3x-y+1\end{array}\right.$$

On peut remarquer que si $\overrightarrow{f}$ est l'application linéaire associée à f alors, la matrice de $\overrightarrow{f}$ dans la base orthonormée $\left\{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right\}$ est donnée par $\begin{pmatrix}1&-3\\-3&-1\end{pmatrix}$.

Nous voyons de suite que f est une similitude inverse de rapport $\sqrt{10}$

1. *Démontrer qu'il existe 2 droites (D) et (Δ) et 2 seulement invariantes par f*

   Soit (D) une droite invariante par f. Cette droite a pour équation $y=ax+b$. Ainsi, si $M\in(D)$, ses coordonnées vérifient $M\,(x,ax+b)$ et si $M'\,(x',y')$ est tele que $M'=f\,(M)$, nous avons alors $y'=ax'+b$.
   En utilisant la définition analytique, nous avons :

$$\left\{\begin{array}{rl} x'= & x-3\,(ax+b)-3\\ y'= & -3x-(ax+b)+1\end{array}\right.\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rl} x'= & (1-3a)\,x-3\,(b+1)\\ y'= & -(a+3)\,x+1-b\end{array}\right.$$

   Et donc :

$$\begin{array}{rl} y'=ax'+b\Longleftrightarrow & -(a+3)\,x+1-b=a\left[(1-3a)\,x-3\,(b+1)\right]+b\\ \Longleftrightarrow & -(a+3)\,x+1-b=a\,(1-3a)\,x-3a\,(b+1)+b\end{array}$$

   En identifiant, nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{rl} -(a+3)= & a\,(1-3a)\\ 1-b= & b-3a\,(b+1)\end{array}\right.\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{rl} 3a^2-2a-3= & 0\\ 1-b= & b-3a\,(b+1)\end{array}\right.$$

   De la première équation, nous obtenons 2 solutions pour a ; d'une part $a_1=\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}$ et $a_2=\dfrac{1-\sqrt{10}}{3}$ et de la second équation, nous tirons $b=\dfrac{3a+1}{2-3a}$. Ainsi :
   $\to$ Si $a=\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}$ alors $b=-\dfrac{4+\sqrt{10}}{3}$ et l'équation de (D) est donc $y=\left(\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}\right)x-\dfrac{4+\sqrt{10}}{3}$
   $\to$ Si $a=\dfrac{1-\sqrt{10}}{3}$ alors $b=-\dfrac{4-\sqrt{10}}{3}$ et l'équation de (Δ) est donc $y=\left(\dfrac{1-\sqrt{10}}{3}\right)x-\dfrac{4-\sqrt{10}}{3}$
2. *Démontrer que (D) et (Δ) sont perpendiculaires et donner les coordonnées du point d'intersection I.*

- En collège, vous avez dû voir que 2 droites étaient perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs était égal à -1. Or :
$$\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right)\times\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right)=\frac{1-10}{9}=-1$$
Les 2 droites sont bien perpendiculaires
- L'abscisse du point d'intersection vérifie :
$$\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right)x-\frac{4+\sqrt{10}}{3}=\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}\right)x-\frac{4-\sqrt{10}}{3}\iff\frac{2\sqrt{10}}{3}x=\frac{2\sqrt{10}}{3}\iff x=1$$
En remplaçant x par sa valeur, nous trouvons $y=-1$. Le point I est donc $I\,(1;-1)$
On peut remarquer que I est aussi le point invariant de f

Exercice 7 :

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien. Nous considérons un triangle ABC rectangle en A et de hauteur AH. On désigne par r_1, r_2 et r_3, les rayons des cercles inscrits aux triangles ABC, ABH et ACH. Il faut montrer que $r_1^2=r_2^2+r_3^2$. Pour le démontrer, répondons aux questions suivantes :

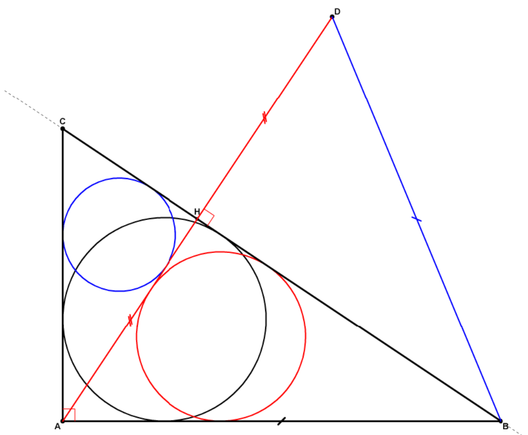


FIGURE 22.7 – Pour commencer, faisons une figure

1. *Soit D le symétrique de A par rapport à la droite (BC). Montrer que les triangles HBD et ABC sont semblables*
2. *Soit S la similitude de rapport $k>0$ qui transforme le triangle ABC en HBD. Evaluer k en fonction de BA et BC. En déduire que $r_2=\dfrac{BA}{BC}r_1$*

Nous faisons la correction de ces 2 questions en même temps

→ Comme D est le symétrique de A dans la symétrie orthogonale par rapport à la droite (BC), nous avons
$$AB=BD \text{ et } HA=HD$$
Les 2 triangles HBA et HDB sont donc isométriques

→ En termes d'angles non orientés, nous avons $\widehat{HBA}=\widehat{HBD}$
Comme les triangles HBD et ABC sont rectangles respectivement en H et en$A$, nous avons, toujours en termes d'angles non orientés $\widehat{ACB}=\widehat{HDB}$

— Ceci démontre que les 2 triangles ABC et HDB sont semblables et qu'il existe donc une similitude *(directe ou inverse)* qui transforme le triangle CAB en le triangle DHB et cette homothétie a pour rapport $\dfrac{DB}{BC}=\dfrac{AB}{BC}$

→ Le cercle inscrit au triangle ABC est transformé en le cercle inscrit au triangle HBD. Comme les triangles HBD et HAB sont isométriques, le rayon de leur cercle inscrit est le même. Ainsi, nous avons :

$$r_2 = \frac{AB}{BC} r_1$$

3. *Pourquoi avons nous $r_3 = \dfrac{AC}{BC} r_1$?*

   Considérons, maintenant, les triangles rectangles CAB et CHA

   Ils ont un angle commun, l'angle $\widehat{ACH}$ et donc, en termes d'angles non orientés, nous avons $\widehat{CAH} = \widehat{CBA}$

   Les triangles CHA et CAB sont donc semblables et le rapport de la similitude est donc $\dfrac{CA}{BC}$, et comme précédemment, $r_3 = \dfrac{AC}{BC} r_1$

4. *Montrer que $\left(\dfrac{BA}{BC}\right)^2 + \left(\dfrac{AC}{BC}\right)^2 = 1$.*

   D'après le théorème de Pythagorre, nous avons $BC^2 = AC^2 + AB^2$, et donc, en divisant par BC^2, nous obtenons :

$$\left(\frac{BA}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = 1$$

5. *En déduire l'égalité demandée*

   Ainsi $r_2^2 + r_3^2 = \left(\dfrac{BA}{BC} r_1\right)^2 + \left(\dfrac{AC}{BC} r_1\right)^2 = r_1^2 \left(\left(\dfrac{BA}{BC}\right)^2 + \left(\dfrac{AC}{BC}\right)^2\right) = r_1^2$

   Ce que nous voulions

22.6.2 Définition complexe des similitudes planes

Exercice 10 :

On considère 2 transformations du plan $\mathcal{P}$ appelées T_1 et T_2 qui associent respectivement au point $M \in \mathcal{P}$ d'affixe $z \in \mathbb{C}$ le point $M_1 = T_1(M)$ et le point $M_2 = T_2(M)$ d'affixe $z_1 = \left(-1 + i\sqrt{3}\right) z$ et $z_2 = \dfrac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right) z$

1. *Quelle est la nature de ces deux transformations ? Donner leurs éléments respectifs*

   Voilà une question qui n'est pas très difficile et totalement calculatoire

   - **Nature de T_1**

     → Le point fixe est évidemment l'origine du repère O

     → Le rapport de la similitude est $\left|-1 + i\sqrt{3}\right| = 2$ et comme $\left(-1 + i\sqrt{3}\right) = 2\left(\dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ l'angle de la similitude est donc $\dfrac{2\pi}{3}$

     → T_1 peut aussi s'écrire, dans les complexes $z_1 = 2e^{\frac{2i\pi}{3}} z$

   - **Nature de T_2**

     → Le point fixe est évidemment, une nouvelle fois, l'origine du repère O

     → Le rapport de la similitude est $\left|\dfrac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)\right| = 1$ et l'angle de la similitude est donc $\dfrac{\pi}{3}$

     → T_1 peut aussi s'écrire, dans les complexes $z_1 = e^{\frac{i\pi}{3}} z$. T_2 est une rotation de centre O et d'angle $\dfrac{i\pi}{3}$

2. *Exprimer, en fonction de z, l'affixe de l'image de M par la transformation composée $T_2 \circ T_l$ et donner les éléments de cette transformation*

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous avons, en assimilant T_1 et T_2 à leurs fonctions complexes :

$$\begin{aligned} T_2 \circ T_l(z) = T_2\left[T_l(z)\right] &= \frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right) T_l(z) \\ &= \frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(-1+i\sqrt{3}\right) z \\ &= -2z = 2e^{i\pi} z \end{aligned}$$

$T_2 \circ T_l$ est donc une similitude directe de rapport 2 et d'angle π.

Exercice 11 :

Dans le plan complexe, au point $M \in \mathcal{P}$, d'affixe z, on fait correspondre le point M' d'affixe Z, par la transformation T_k définie par :

$$Z = kiz + 1 + k^2$$

k étant un paramètre réel strictement positif et i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. *Quelle est la nature de la transformation T_k ?*

   Clairement, T_k est une similitude directe
   - Le point invariant de T_k est donné par :
   $$\omega_k = \frac{k^2}{1-ik} = \frac{(1+ik)\,k^2}{1+k^2}$$
   - Le rapport de la similitude T_k est k et l'angle est $\dfrac{\pi}{2}$

2. *Déterminer l'ensemble des points ω_k lorsque k décrit l'ensemble des réels positifs.*

   En posant $\Omega_k(x_k, y_k)$ le point d'affixe ω_k, nous avons :
   $$\left\{\begin{array}{ll} x_k = & \dfrac{k^2}{1+k^2} \\ y_k & \dfrac{k^3}{1+k^2} \end{array}\right. \quad \text{avec } k > 0$$

   Nous sommes, là, devant une vraie courbe paramétrée.
   Remarquons, tout d'abord, que si $k > 0$ alors $0 < x_k < 1$ et $0 < y_k$, y_k pouvant être infini.
   D'autre part, de $x_k = \dfrac{k^2}{1+k^2}$, nous tirons $k = \sqrt{\dfrac{x_k}{1-x_k}}$ qui est tout à fait cohérent avec la condition $0 < x_k < 1$, d'où nous tirons $y_k = x_k\sqrt{\dfrac{x_k}{1-x_k}}$.

   L'ensemble des points ω_k est donc la courbe d'équation cartésienne $y = x\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ avec $0 < x < 1$

   (cf la courbe dans la figure 22.8)

3. *k_1 et k_2 étant deux réels strictement positifs, on considère les transformations $T_{k_2} \circ T_{k_1}$ et $T_{k_1} \circ T_{k_2}$*
   Montrer que $T_{k_2} \circ T_{k_1} = T_{k_1} \circ T_{k_2}$ si et seulement si $k_1 = k_2$

   Comme tout à l'heure, nous assimilons T_{k_2} et T_{k_1} à leurs fonctions complexes.
   - Etudions d'abord $T_{k_1} \circ T_{k_2}(z)$
   $$\begin{aligned} T_{k_1} \circ T_{k_2}(z) = T_{k_1}\left[T_{k_2}(z)\right] &= k_1 i T_{k_2}(z) + k_1^2 \\ &= k_1 i\left(k_2 iz + k_2^2\right) + k_1^2 \\ &= -k_1k_2z + k_1k_2^2 i + k_1^2 \end{aligned}$$

     Nous avons donc $T_{k_1} \circ T_{k_2}(z) = -k_1k_2z + \left(k_1^2 + k_1k_2^2 i\right)$
   - De manière symétrique, nous avons $T_{k_2} \circ T_{k_1}(z) = -k_2k_1z + \left(k_2^2 + k_2k_1^2 i\right)$

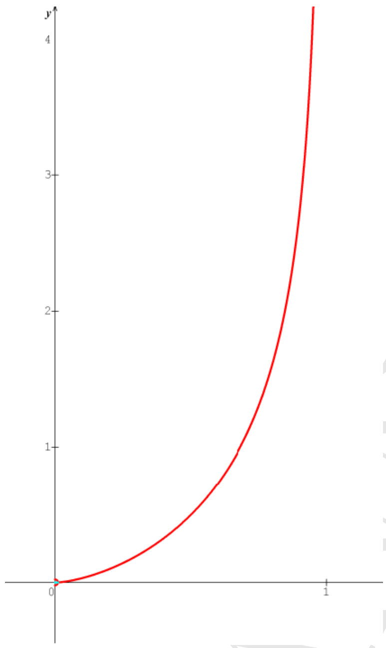


Figure 22.8 – Graphe de l'ensemble décrit par les ω_k où $k > 0$

Ces 2 transformations sont égale, si et seulement si, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$-k_1k_2z + k_1k_2^2i + k_1^2 = -k_2k_1z + \left(k_2^2 + k_2k_1^2i\right) \iff k_1k_2^2i + k_1^2 = k_2^2 + k_2k_1^2i$$

En identifiant parties réelles et imaginaires, nous avons :

$$k_1k_2^2 = k_2k_1^2 \text{ et } k_1^2 = k_2^2 \iff k_1 = k_2$$

Donc, $T_{k_2} \circ T_{k_1} = T_{k_1} \circ T_{k_2}$ si et seulement si $k_1 = k_2$

4. *Quelle est la nature de la transformation $T_k \circ T_k$?*

   D'après les calculs faits, nous avons $T_k \circ T_k\,(z) = -k^2z + \left(k^2 + k^3i\right)$

   $T_k \circ T_k$ est une similitude directe *(La composée de 2 similitudes directes est une similitude directe)*

   - Le point invariant de T_k est donné par : $\omega_k = \dfrac{k^2\,(1+ik)}{1+k^2}$, puisque

   $$T_k \circ T_k\,(\omega_k) = T_k\,[T_k\,(\omega_k)] = T_k\,(\omega_k) = \omega_k$$

   - Le rapport de la similitude T_k est k^2 et l'angle est π

Exercice 12 :

Soit $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

1. *On considère l'application f de $\mathcal{P}$ dans lui-même qui, à tout point M de coordonnées (x, y) fait correspondre le point M' de coordonnées (x', y') définies par :*

   $$\left\{\begin{array}{ll} x' = & x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y' = & x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{array}\right.$$

   Déterminer le point double de f (ou point invariant de f)

   Un point invariant de f est un point $M\,(x, y)$ tel que $M' = f\,(M) = M$. Les coordonnées vérifient donc le système d'équations :

   $$\left\{\begin{array}{ll} x = & x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y = & x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} 0 = & -y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ 0 = & x\sqrt{3} - \sqrt{3} \end{array}\right. \iff x = 1 \text{ et } y = 2$$

   Le point invariant est donc $\Omega\,(1; 2)$

2. *On désigne par $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$ les affixes des points M et M'. Montrer que z et z' sont par une relation du type :*

$$z' - z_0 = a\,(z - z_0)$$

où a et z_0 sont des nombres complexes que l'on déterminera. Caractériser alors la transformation f.

Je présente 2 méthodes de résolution qui diffèrent peu entre elles

(a) **Première méthode**

Faisons ici, une petite incise

Dans la définition analytique de f, nous avons la partie linéaire qui est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

C'est la matrice d'une similitude directe de rapport 2 et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$

La forme $z' - z_0 = a\,(z - z_0)$ est la forme réduite d'une similitude directe dans laquelle z_0 est l'affixe du point invariant ; donc, ici, $z_0 = 1 + 2i$.

De la remarque ci-dessus, $a = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. La représentation complexe de f est donc :

$$z' - (1 + 2i) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\,(z - (1 + 2i))$$

(b) **Seconde méthode**

Nous partons de la définition analytique :

$$\begin{cases} x' = & x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y' = & x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases}$$

En multipliant la seconde ligne par le nombre complexe i, nous obtenons :

$$x' + iy' = \left(x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\right) + i\left(x\sqrt{3} + y - \sqrt{3}\right)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$z' = x\left(1 + i\sqrt{3}\right) - y\left(\sqrt{3} - i\right) + \left(2\sqrt{3} - i\sqrt{3}\right)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$z' = \left(1 + i\sqrt{3}\right) z + \left(2\sqrt{3} - i\sqrt{3}\right)$$

La forme complexe de f est donc donnée par $z' = \left(1 + i\sqrt{3}\right) z + \left(2\sqrt{3} - i\sqrt{3}\right)$, d'où on retrouve facilement rapport, angle et point fixe $z_0 = \dfrac{\sqrt{3}\,(2 - i)}{-i\sqrt{3}} = 1 + 2i$

Et donc, nous avons, très facilement :

$$z' - (1 + 2i) = \left(1 + i\sqrt{3}\right)(z - (1 + 2i))$$

On peut remarquer que $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\sqrt{\pi}}{3}\right)$

Exercice 13 :

Le plan $\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

On considère les points A et B qui ont respectivement pour coordonnées $(1, 0)$ et $(-1, 0)$ et la droite D passant par A et de vecteur directeur $\vec{j}$

Soit S la similitude directe dont le centre est B, dont l'angle est $+\dfrac{\pi}{2}$ et dont le rapport est $\dfrac{1}{2}$

Nous appellerons $a = 1$ l'affixe du point $A\,(1, 0)$ et $b = -1$ l'affixe du point $B\,(-1, 0)$

1. (a) *Déterminer $A' = S(A)$.*

Nous allons rechercher la forme complexe de S, et ce n'est pas trop difficile. Nous allons utiliser la forme réduite :

$$z' - b = \frac{e^{\frac{i\pi}{2}}}{2}(z-b) \Longleftrightarrow z' + 1 = \frac{i}{2}(z+1) \Longleftrightarrow z' = \frac{i}{2}z - 1 + \frac{i}{2}$$

Et donc, si a' est l'affixe du point $A' = S(A)$, nous avons :

$$a' = \frac{i}{2}a - 1 + \frac{i}{2} = -1 + i$$

Ce qui veut dire que $A' = S(A)$ a pour coordonnées $A'(-1, 1)$

(b) *Montrer que l'ensemble des images M' des points $M \in D$ par S est une droite D' qui coupe D en un point I,*

- ⋆ Il est intéressant de donner la définition complexe de D.
Si $M \in D$, alors $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{j}$, et si $z \in \mathbb{C}$ est l'affixe de M, nous avons :

$$z - 1 = \lambda i \Longleftrightarrow z = 1 + \lambda i$$

Ainsi, tous les points $M \in D$ ont pour affixe $z = 1 + \lambda i$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$
- ⋆ Comme $A \in D$, nous avons $A' = S(A) \in D'$
- ⋆ L'image d'un point $M \in D$ est un point M' d'affixe $z' = \frac{i}{2}(1+\lambda i) - 1 + \frac{i}{2} = i - \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)$.
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{A'M'}$ est donné par $z' - a'$, c'est à dire :

$$z' - a' = i - \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) - (-1 + i) = -\frac{\lambda}{2}$$

Ce qui veut dire que la droite D' est une droite passant par A' et de vecteur directeur $\overrightarrow{i}$

(c) *Déterminer $I' = S(I)$*

Clairement, I a pour coordonnées $(1;1)$ et a donc pour affixe $z = 1 + i$ d'où l'affixe de I' est donc $z' = \frac{i}{2}(1+i) - 1 + \frac{i}{2} = -\frac{3}{2} + i$, et donc I' a pour coordonnées $\left(-\frac{3}{2}; 1\right)$

(d) *Démontrer que, pour tout $M \in D$, si $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AI}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\overrightarrow{A'M'} = \lambda\overrightarrow{A'I'}$*

Nous savons que S est une similitude ; soit $\overrightarrow{S}$ l'application linéaire associée à S.
Pour tout point $M \in D$, nous avons $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AI}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, puisque A, I, et M sont sur D. Donc :

$$\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{S(A)S(M)} = \overrightarrow{S}\left(\overrightarrow{AM}\right) = \overrightarrow{S}\left(\lambda\overrightarrow{AI}\right) = \lambda\overrightarrow{S}\left(\overrightarrow{AI}\right) = \lambda\overrightarrow{S(A)S(I)} = \lambda\overrightarrow{A'I'}$$

2. *Soit M" le barycentre des points M et M' respectivement affectés des coefficients 2 et -1.*

(a) *Démontrer que M" est l'image de M dans une similitude directe S_1 de centre B*

En reprenant la théorie du calcul barycentrique, pour tout point $X \in \mathcal{P}$, nous avons $\overrightarrow{XM"} = 2\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XM'}$, et en particulier lorsque X est l'origine O, nous avons $\overrightarrow{OM"} = 2\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM'}$, ce qui fait, qu'en passant aux affixes, nous avons :

$$\begin{aligned} z" = 2z - z' \Longleftrightarrow \quad & z" = 2z - \left(\frac{i}{2}z - 1 + \frac{i}{2}\right) \\ \Longleftrightarrow \quad & z" = \left(2 - \frac{i}{2}\right)z + 1 - \frac{i}{2} = \left(2 - \frac{i}{2}\right)z + 2 - \frac{i}{2} - 1 \\ \Longleftrightarrow \quad & z" + 1 = \left(2 - \frac{i}{2}\right)(z+1) \end{aligned}$$

L'application qui à $z \in \mathbb{C}$ fait correspondre $z"$ tel que $z" + 1 = \left(2 - \frac{i}{2}\right)(z+1)$ est une similitude directe S_1, dont le centre est le point d'affixe b, c'est à dire B

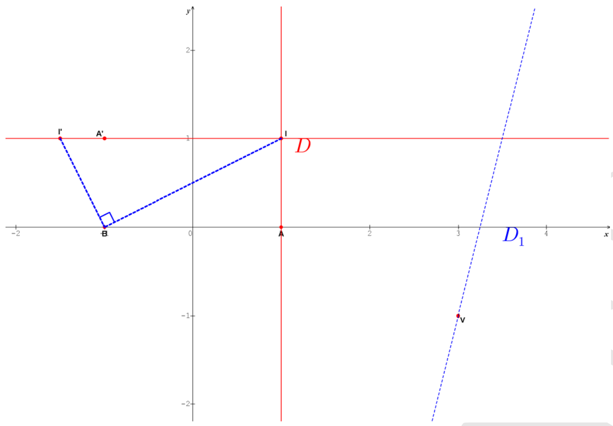


FIGURE 22.9 – La figure du problème proposé

(b) *Démontrer que l'ensemble des points $M" = S_1(M)$ images des points $M \in D$ est une droite D_1 que l'on déterminera.*

Tout point $M \in D$ a pour affixe $z = 1 + \lambda i$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, si $M" = S_1(M)$, l'affixe $z"$ de $M"$ est donnée par :

$$z" = \left(2 - \frac{i}{2}\right)(2 + \lambda i) - 1 = 2\left(2 - \frac{i}{2}\right) - 1 + \lambda i\left(2 - \frac{i}{2}\right) = (3 - i) + \lambda\left(\frac{1}{2} + 2i\right)$$

Ainsi, D_1 est la droite passant par le point $V(3; -1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$

Exercice 17 :

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

1. (a) *Soit T_1 la transformation du plan $\mathcal{P}$ qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' d'affixe : $z' = (i - 1)\overline{z} + 3$ Quelle est la nature de T_1 et, s'il existe, quel en est son centre Ω ?*

De manière évidente, T_1 est une similitude inverse.

Comme $|i - 1| = \sqrt{2}$, T_1 admet un point fixe Ω d'affixe $\omega = \dfrac{3(i-1)+3}{1-2} = -3i$. Donc, les coordonnées de Ω sont $(0; -3)$

(b) *Soit S la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$. Quelle est la nature de la transformation $T_1 \circ S$?*

S en tant que symétrie orthogonale est une similitude inverse. La composée de 2 similitudes inverses est une similitude directe ; donc $T_1 \circ S$ est une similitude directe.
La définition complexe de S est $S(z) = \overline{z}$ et nous avons :

$$T_1 \circ S(z) = T_1[S(z)] = (i - 1)\overline{S(z)} + 3 = (i - 1)z + 3$$

Le centre de la similitude est donné par $c = \dfrac{3}{1-(i-1)} = \dfrac{3}{2-i} = \dfrac{3}{5}(2+i)$, le rapport est $\sqrt{2}$ et l'angle $-\dfrac{\pi}{4}$

2. *Soit T_2 la similitude directe ayant pour centre le point B d'affixe $3 + i$, pour rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et pour mesure $\dfrac{\pi}{4}$.Caractériser la transformation $T_2 \circ T_1 \circ S$*

Tout d'abord, comme $T_1 \circ S$ est une similitude directe, que T_2 en est aussi une, $T_2 \circ T_1 \circ S$ est une similitude directe.

T_2 a pour expression complexe :

$$z' - (3+i) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} (z - (3+i))$$
$$\iff$$
$$z' - (3+i) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2} \right) (z - (3+i))$$
$$\iff$$
$$z' = \frac{1}{2} (1+i) (z - (3+i)) + (3+i)$$
$$\iff$$
$$z' = \frac{1}{2} ((1+i) z - (3+i) (1-i))$$

Il suffit, maintenant de remplacer :

$$\begin{aligned} T_2 \circ T_1 \circ S (z) &= \frac{1}{2} ((1+i) T_1 \circ S (z) - (3+i) (1-i)) \\ &= \frac{1}{2} ((1+i) ((i-1) z + 3) - (3+i) (1-i)) \\ &= z + \frac{1}{2} (-1+5i) \end{aligned}$$

Ainsi, $T_2 \circ T_1 \circ S$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{U}$, d'affixe $\frac{1}{2} (-1+5i)$

22.6.3 Problèmes

Exercice 18 :

Le plan $\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j} \right)$. Soit $z \in \mathbb{C}$ l'affixe d'un point $M \in \mathcal{P}$

1. *Quel est l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $|(1+i) z - 2i| = 2$*

   Nous avons :

$$|(1+i) z - 2i| = 2 \iff |1+i| \left| z - \frac{2i}{1+i} \right| = 2 \iff |z - (1+i)| = \sqrt{2}$$

   L'ensemble des points M est donc un cercle de centre le point Ω d'affixe $\omega = 1+i$ et de rayon $\sqrt{2}$

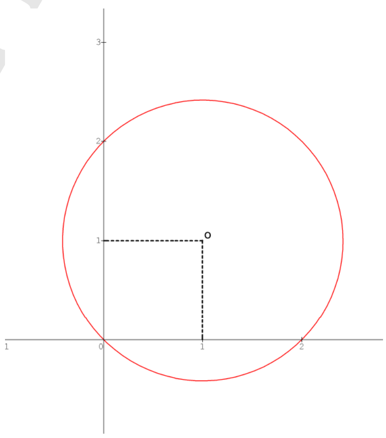


FIGURE 22.10 – L'ensemble des points M est le cercle de centre $(1;1)$ et de rayon $\sqrt{2}$

2. *Etudier les transformations de $\mathcal{P}$ qui , à chaque point $M \in \mathcal{P}$ d'affixe $z \in \mathbb{C}$ fait correspondre le point $M' \in \mathcal{P}$ d'affixe $z' = (1+i)\,z - 2i$*

   Cette transformation est une similitude directe de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de point fixe $I = \frac{-2i}{1-(1+i)} = 2$

3. *Faire le lien entre les deux questions précédentes*

   Dans la première question, il nous a été demandé de trouver les $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z'| = 2$.
   Il nous était, en fait, demandé de trouver les antécédents du crcle de centre O et de rayon 2.
   Ainsi, c'est le cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{2}$ qui est l'ensemble des antécédents du cercle de centre O et de rayon 2

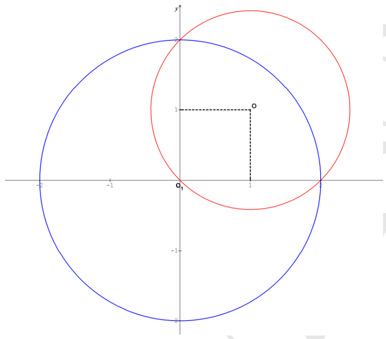


FIGURE 22.11 – Le cercle bleu est le cercle image du cercle rouge par la similitude directe

Exercice 19 :

1. *Soit S_0 la similitude directe définie par $S_0(z) = iz + 2$*

   (a) i. *Trouver toutes les similitudes directes qui commutent avec S_0*

   Soit T une similitude directe $T(z) = az + b$ qui commute avec S_0. Nous avons alors $T \circ S_0 = S_0 \circ T$. Nous avons alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

   $$T \circ S_0(z) = aS_0(z) + b = a(iz+2) + b = aiz + 2a + b$$

   Et

   $$S_0 \circ T(z) = iT(z) + 2 = i(az+b) + 2 = aiz + bi + 2$$

   Ainsi :

   $$T \circ S_0(z) = S_0 \circ T(z) \iff aiz + 2a + b = aiz + bi + 2 \iff 2a + b = bi + 2 \iff b = (1-a)(1+i)$$

   Et donc les similitudes T_a qui commutent avec S_0 sont du type $T_a(z) = az + (1-a)(1+i)$ avec $a \in \mathbb{C}^*$

   ii. *Déterminer le centre d'une telle similitude*

   Le centre d'une telle similitude est donné par $C_a = \frac{(1-a)(1+i)}{1-a} = 1+i$. Ainsi, toutes les similitudes T_a qui commutent avec S_0 ont-elles le même centre : le point d'affixe $C_a = 1+i$. Remarquons que C_a est aussi le centre de la similitude S_0 et que S_0 est une similitude T_a particulière : $S_0 = T_i$

   (b) *Démontrer que l'ensemble des similitudes directes qui commutent avec S_0 est un sous-groupe de $Sim^+(\mathcal{P})$, groupe des similitudes directes de $\mathcal{P}$*

   On appelle $\mathcal{H}$ l'ensemble des similitudes directes qui commutent avec S_0. Nous avons donc :

   $$\mathcal{H} = \{T_a \text{ avec } a \in \mathbb{C}\}$$

   Nous allons démontrer que $(\mathcal{H}, \circ)$ est **un groupe commutatif**

⇒ Premièrement, $\mathcal{H} \neq \emptyset$ puisque $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}} = T_1 \in \mathcal{H}$

⇒ La loi $\circ$ est toujours associative

⇒ La composition des applications est une loi interne

Nous allons utiliser 2 méthodes pour le démontrer.

⋆ **Une première méthode qui utilise la structure de $\mathcal{H}$.**

Soient $T_a \in \mathcal{H}$ et $T_b \in \mathcal{H}$; alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous avons :

$$\begin{aligned} T_a \circ T_b(z) = T_a(T_b(z)) &= aT_b(z) + (1-a)(1+i) \\ &= a(bz + (1-b)(1+i)) + (1-a)(1+i) \\ &= abz + a(1-b)(1+i) + (1-a)(1+i) \\ &= abz + (1+i)(a - ab + 1 - a) \\ &= abz + (1-ab)(1+i) = T_{ab}(z) \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons $T_a \circ T_b = T_{ab}$

⋆ **Une seconde méthode, beaucoup plus générale**

Soient $f \in \mathcal{H}$ et $g \in \mathcal{H}$; il faut montrer que $f \circ g \in \mathcal{H}$

Par hypothèses, nous avons $f \circ S_0 = S_0 \circ f$ et $g \circ S_0 = S_0 \circ g$, donc :

$$(f \circ g) \circ S_0 = f \circ (g \circ S_0) = f \circ (S_0 \circ g) = (f \circ S_0) \circ g = (S_0 \circ f) \circ g = S_0 \circ (f \circ g)$$

Donc, $f \circ g$ commute avec S_0 et donc $f \circ g \in \mathcal{H}$

⇒ Chaque élément admet un inverse dans $\mathcal{H}$

Toujours 2 méthodes :

⋆ La première consiste à utiliser le résultat vu dans la question précédente : $T_a \circ T_b = T_{ab}$

Comme $a \neq 0$, $T_{\frac{1}{a}}$ existe et $T_a \circ T_{\frac{1}{a}} = T_1 = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$

Donc $(T_a)^{-1} = T_{\frac{1}{a}}$

⋆ La seconde méthode consiste à dire que si $f \in \mathcal{H}$, alors f est bijective, mais avons nous $f^{-1} \in \mathcal{H}$?

De l'hypothèse $f \circ S_0 = S_0 \circ f$, nous déduisons :

$$\begin{gathered} f \circ S_0 \circ f^{-1} = S_0 \circ f \circ f^{-1} \text{ (Composition à droite)} \\ \iff \\ f \circ S_0 \circ f^{-1} = S_0 \\ \iff \\ f^{-1} \circ f \circ S_0 \circ f^{-1} = f^{-1} \circ S_0 \text{ (Composition à gauche)} \\ \iff \\ S_0 \circ f^{-1} = f^{-1} \circ S_0 \end{gathered}$$

Et donc $f^{-1} \in \mathcal{H}$

On vient de montrer, ici, un résultat plus général :

Soit $(G, \star)$ un groupe et $s_0 \in G$. Alors, l'ensemble des éléments qui commutent avec s_0 est un sous grou
de $(G, \star)$

⇒ $\mathcal{H}$ est un groupe commutatif

En effet : $T_a \circ T_b = T_{ab} = T_{ba} = T_b \circ T_a$

(c) *Existe-t-il une similitude inverse qui commute avec S_0 ?*

Excellente question !!

S'il existe une similitude inverse I qui commute avec S_0, nous avons $I(z) = a\overline{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $I \circ S_0 = S_0 \circ I$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous avons :

⋆ $I \circ S_0(z) = a\overline{S_0(z)} + b = a\overline{(iz+2)} + b = -ia\overline{z} + 2a + b$

⋆ $S_0 \circ I(z) = iI(z) + 2 = i(a\overline{z} + b) + 2 = ia\overline{z} + 2 + ib$

⋆ D'où nous tirons :

$$-ia\overline{z} + 2a + b = ia\overline{z} + 2 + ib \iff 2ia\overline{z} + 2(1-a) + b(i-1) = 0$$

Ce qui nous conduit à écrire $2ia = 0 \Longrightarrow a = 0$, ce qui est impossible puisque si $a = 0$, I n'est plus une similitude.

Il n'existe donc pas de similitude inverse qui commute avec S_0

2. *Soit T la translation définie par la relation $z' = z + b_0$ où $b_0 \in \mathbb{C}$*

 (a) *Déterminer l'ensemble $\mathcal{G}_T$ des similitudes qui commutent avec T*

 → Quelles sont les similitudes directes qui commutent avec T ?
 Soit $S(z) = az + b$ une telle similitude. Alors :

$$S \circ T(z) = S[T(z)] = aT(z) + b = a(z + b_0) + b = az + ab_0 + b$$

 Et

$$T \circ S(z) = T[S(z)] = S(z) + b_0 = az + b + b_0$$

 De $S \circ T = T \circ S$, nous tirons $az + ab_0 + b = az + b + b_0 \iff ab_0 = b_0 \iff b_0(a-1) = 0$.
 Ainsi :
 - ⋆ Si $b_0 = 0$, ceci signfie que $a \in \mathbb{C}$ et que $T = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$, et nous ne devrions pas être étonnés que toutes les similitudes directes commutent avec T !!
 - ⋆ Si $b_0 \neq 0$, alors $a = 1$ et $S(z) = z + b$ où $b \in \mathbb{C}$. S est donc une translation du plan. Donc, les seules similitudes directes qui commutent avec T sont toutes les translations.

 → Quelles sont les similitudes inverses qui commutent avec T ?
 Soit $S_i(z) = a\overline{z} + b$ une telle similitude. Alors :

$$S_i \circ T(z) = S_i[T(z)] = a\overline{T(z)} + b = a\overline{(z + b_0)} + b = a\overline{z} + a\overline{b_0} + b$$

 Et

$$T \circ S_i(z) = T[S_i(z)] = S_i(z) + b_0 = a\overline{z} + b + b_0$$

 De $S_i \circ T = T \circ S_i$, nous tirons $a\overline{z} + a\overline{b_0} + b = a\overline{z} + b + b_0 \iff a\overline{b_0} = b_0 \iff b_0(a-1) = 0$.
 Ainsi :
 - ⋆ Si $b_0 = 0$, ceci signfie que $a \in \mathbb{C}$ et que $T = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$, et nous ne devrions pas être étonnés que toutes les similitudes inverses commutent avec T !!
 - ⋆ Si $b_0 \neq 0$, alors $a = \dfrac{b_0}{\overline{b_0}}$ et $S_i(z) = \dfrac{b_0}{\overline{b_0}}\overline{z} + b$ où $b \in \mathbb{C}$. Comme $\left|\dfrac{b_0}{\overline{b_0}}\right| = 1$, S_i est donc une isométrie négative du plan, c'est à dire une symétrie glissée.
 Donc, les seules similitudes inverses qui commutent avec T forment une famille de symétries orthogonales, famille indexée par $b \in \mathbb{C}$

 (b) *Démontrer que $\mathcal{G}_T$ est un sous-groupe du groupe $\mathcal{S}im(\mathcal{P})$, groupe des similitudes de $\mathcal{P}$*

 Nous appelons donc $\mathcal{G}_T$ l'ensemble des similitudes qui commutent avec T. Cet ensemble est donc formé de toutes les translations du plan et des symétries du type $S(z) = \dfrac{b_0}{\overline{b_0}}\overline{z} + b$

 ⇒ Pour commencer, $\mathcal{G}_T \neq \emptyset$ puisque $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}} \in \mathcal{G}_T$; $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$ est une translation particulière et surtout est le neutre pour la composition des applications.

 ⇒ Ensuite, la composition de 2 éléments de $\mathcal{G}_T$ est-elle encore un élément de $\mathcal{G}_T$?
 - ⋆ C'est évident lorsque nous composons 2 translations
 - ⋆ Soient $S_i^1 \in \mathcal{G}_T$ et $S_i^2 \in \mathcal{G}_T$ et étudions $S_i^1 \circ S_i^2$.
 Pour commencer, nous avons $S_i^1(z) = \dfrac{b_0}{\overline{b_0}}\overline{z} + b_1$ et $S_i^2(z) = \dfrac{b_0}{\overline{b_0}}\overline{z} + b_2$. Alors :

$$S_i^1 \circ S_i^2(z) = S_i^1\left[S_i^2(z)\right] = \frac{b_0}{\overline{b_0}}\overline{S_i^2(z)} + b_1 = \frac{b_0}{\overline{b_0}}\overline{\left(\frac{b_0}{\overline{b_0}}\overline{z} + b_2\right)} + b_1 = \frac{b_0}{\overline{b_0}} \times \frac{\overline{b_0}}{b_0}z + \overline{b_2} + b_1 = z + \overline{b_2} + b_1$$

 $S_i^1 \circ S_i^2$ est donc une translation de vecteur d'affixe $\overline{b_2} + b_1$ et $S_i^1 \circ S_i^2 \in \mathcal{G}_T$
 - ⋆ Soient $S_i \in \mathcal{G}_T$ et $\tau \in \mathcal{G}_T$ une translation ; étudions $S_i \circ \tau$
 Nous avons $S_i(z) = \dfrac{b_0}{\overline{b_0}}\overline{z} + b$ et $\tau(z) = z + \mu$. Alors :

$$S_i \circ \tau(z) = S_i[\tau(z)] = \frac{b_0}{\overline{b_0}}\overline{\tau(z)} + b = \frac{b_0}{\overline{b_0}}\overline{z + \mu} + b = \frac{b_0}{\overline{b_0}}\overline{z} + \overline{\mu} + b$$

Nous avons bien $S_i \circ \tau \in \mathcal{G}_T$ puisque $S_i \circ \tau$ est de la forme d'une similitude inverse commutant avec T

Nous démontrerions de même que $\tau \circ S_i(z) = \dfrac{b_0}{\overline{b_0}}\overline{z} + b + \mu$ et donc $\tau \circ S_i \in \mathcal{G}_T$

⇒ Recherchons les inverses des éléments de $\mathcal{G}_T$ et ces inverses sont-ils encore des éléments de $\mathcal{G}_T$

⋆ Ceci ne pose aucune difficulté pour les translations

⋆ Soit $S_i \in \mathcal{G}_T$; alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $S_i(z) = \dfrac{b_0}{\overline{b_0}}\overline{z} + b$; alors :

$$(S_i)^{-1}(z) = \frac{1}{\frac{b_0}{\overline{b_0}}}\left(\overline{z} - \overline{b}\right) = \frac{b_0}{\overline{b_0}}\overline{z} - \frac{b_0}{\overline{b_0}} \times \overline{b}$$

Et donc, nous avons $(S_i)^{-1} \in \mathcal{G}_T$

Les inverses des éléments de $\mathcal{G}_T$ sont donc encore des éléments de $\mathcal{G}_T$

⇒ Un calcul simple montre que ce groupe n'est pas commutatif.

En effet, soient $S_i^1(z) = \dfrac{b_0}{\overline{b_0}}\overline{z} + 1$ et $S_i^2(z) = \dfrac{b_0}{\overline{b_0}}\overline{z} + 2i$ alors :

$$S_i^1 \circ S_i^2(z) = z + 1 - 2i \text{ et } S_i^2 \circ S_i^1(z) = z + 1 + 2i$$

Et donc $S_i^1 \circ S_i^2 \neq S_i^2 \circ S_i^1$; le groupe $\mathcal{G}_T$ n'est donc pas commutatif.

Exercice 20 :

Soit G un sous-groupe du groupe multiplicatif $(\mathbb{C}^*, \times)$

1. *On appelle $\mathcal{G}^+$ l'ensemble des similitudes directes $z' = az + b$ où $a \in G$ et $b \in \mathbb{C}$. Démontrer que $\mathcal{G}^+$ est un sous-groupe du groupe Sim^+ des similitudes directes du plan*

   ⇒ Tout d'abord, $\mathcal{G}^+ \neq \emptyset$ puisque $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$ est un élément de $\mathcal{G}^+$; en effet, $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}(z) = z$; nous avons $a = 1$ et $b = 0$. 1 étant le neutre pour la multiplication est un élément de G

   ⇒ Soient $f \in \mathcal{G}^+$ et $g \in \mathcal{G}^+$. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous avons $f(z) = a_f z + b_f$ et $g(z) = a_g z + b_g$ où $a_f \in G$, $a_g \in G$, $b_f \in \mathbb{C}$ et $b_g \in \mathbb{C}$.

   Nous avons $(g)^{-1}(z) = \dfrac{1}{a_g}z - \dfrac{b_g}{a_g}$. Remarquons que $a_g \neq 0$, et comme G est un groupe, $\dfrac{1}{a_g} \in G$.

   Alors :

   $$f \circ (g)^{-1}(z) = f\left[(g)^{-1}(z)\right] = a_f (g)^{-1}(z) + b_f = a_f\left(\frac{1}{a_g}z - \frac{b_g}{a_g}\right) + b_f = \frac{a_f}{a_g}z + \frac{b_f a_g - a_f b_g}{a_g}$$

   Comme G est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$, alors, comme $a_f \in G$ et $a_g \in G$, alors $\dfrac{a_f}{a_g} \in G$.

   Donc, $f \circ (g)^{-1} \in \mathcal{G}^+$ et $\mathcal{G}^+$ est un sous-groupe du groupe $\mathcal{S}im^+$

2. *Dans cette partie de l'exercice, nous allons étendre la question précédente à $\mathcal{G}$ ensemble des similitude de S telles que :*

   $$S(z) = az + b \text{ ou } S(z) = a\overline{z} + b \text{ avec } a \in G \text{ et } b \in \mathbb{C}$$

   Nous appellerons toujours $\mathcal{G}^+$ l'ensemble des similitudes directes $z' = az+b$ où $a \in G$ et $\mathcal{G}^-$ l'ensemble des similitudes inverses $z' = a\overline{z} + b$ où $a \in G$

   Commençons par revenir sur les différentes similitudes :

   → Si S est une similitude directe, alors $S(z) = az + b$ et $S^{-1}(z) = \dfrac{1}{a}z - \dfrac{b}{a} = \dfrac{z-b}{a}$. Il est clair que si $a \in G$, alors, comme G est un groupe, $\dfrac{1}{a} \in G$

   → Maintenant, si S est une similitude inverse, alors $S(z) = a\overline{z}+b$ et $S^{-1}(z) = \dfrac{1}{\overline{a}}\overline{z} - \dfrac{\overline{b}}{\overline{a}} = \overline{\left(\dfrac{z-b}{a}\right)}$.

   Par contre, si $a \in G$, même si G est un groupe, il n'est pas du tout sûr que $\dfrac{1}{a} \in G$

(a) *Nous commençons, dans cette question, par un groupe simple, le groupe multiplicatif des réels non nuls, c'est à dire $G = \mathbb{R}^*$. Est-ce que $\mathcal{G}$ est un groupe pour la composition des applications ?*

⇒ Les similitudes directes de $\mathcal{G}$ sont du type $S(z) = \lambda z + b$ ou $S(z) = \lambda \overline{z} + b$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$

▷ Si $S(z) = \lambda z + b$, alors S est une homothétie de rapport λ. On sait déjà que $\mathcal{G}^+$ et un groupe.

▷ Si $S(z) = \lambda \overline{z} + b$, alors S est une similitude inverse de rapport $|\lambda|$

▷ Si $S(z) = \lambda \overline{z} + b$ alors son inverse est $(S)^{-1}(z) = \dfrac{1}{\lambda}\left(\overline{z} - \overline{b}\right)$.

Donc, si $S \in \mathcal{G}^-$, alors $(S)^{-1} \in \mathcal{G}^-$

⇒ La composition de 2 similitudes inverses de $\mathcal{G}^-$ est une similitude directe. Cette composition est-elle un élément de $\mathcal{G}^+$?

Soient $S_1 \in \mathcal{G}^-$ et $S_2 \in \mathcal{G}^-$ où $S_1(z) = \lambda_1 \overline{z} + b_1$ et $S_2(z) = \lambda_2 \overline{z} + b_2$

Alors $S_1 \circ S_2(z) = \lambda_1 \lambda_2 z + \lambda_1 \overline{b_2} + b_1$ et donc, comme $\lambda_1 \lambda_2 \in \mathbb{R}^*$, nous avons $S_1 \circ S_2 \in \mathcal{G}^+$, c'est à dire $S_1 \circ S_2 \in \mathcal{G}$

⇒ La composition d'une similitudes inverses de $\mathcal{G}^-$ et d'une similitude directe de $\mathcal{G}^+$ est une similitude inverse. Cette composition est-elle un élément de $\mathcal{G}$?

▷ Soient $S_1(z) = \lambda z + b_1$ et $S_2(z) = \mu \overline{z} + b_2$ 2 éléments de $\mathcal{G}$. Avons nous $S_1 \circ S_2 \in \mathcal{G}$?

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous avons :

$$S_1 \circ S_2(z) = S_1[S_2(z)] = \lambda S_2(z) + b_1 = \lambda(\mu \overline{z} + b_2) + b_1 = \lambda \mu \overline{z} + \lambda b_2 + b_1$$

Comme $\lambda \mu \in \mathbb{R}^*$, alors $S_1 \circ S_2 \in \mathcal{G}$

▷ Regardons, de la même manière $S_2 \circ S_1$. Donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} S_2 \circ S_1(z) = S_2[S_1(z)] &= \mu \overline{S_1(z)} + b_2 \\ &= \mu \overline{(\lambda z + b_1)} + b_2 \\ &= \mu\left(\lambda \overline{z} + \overline{b_1}\right) + b_2 \\ &= \mu \lambda \overline{z} + \mu \overline{b_1} + b_2 \end{aligned}$$

On peut remarquer que la composition des applications n'est pas commutative.

La composition des applications est donc interne.

Ainsi, $\mathcal{G}$ est un groupe pour la composition des applications.

(b) *Nous considérons, dans cette question le sous-groupe $\mathcal{U}$ de $(\mathbb{C}^*, \times)$ défini par :*

$$G = \mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| = 1\}$$

Est-ce que $\mathcal{G}$ est un groupe pour la composition des applications ?

⇒ Les similitudes directes de $\mathcal{G}$ sont du type $S(z) = e^{i\theta} z + b$ ou $S(z) = e^{i\theta} \overline{z} + b$

▷ Si $S(z) = e^{i\theta} z + b$, alors S est une rotation d'angle θ. On sait déjà que $\mathcal{G}^+$ et un groupe.

▷ Si $S(z) = e^{i\theta} \overline{z} + b$, alors S est une similitude inverse et cette similitude inverse est une isométrie affine négative

▷ Si $S(z) = e^{i\theta} \overline{z} + b$ alors son inverse est $(S)^{-1}(z) = e^{i\theta}\left(\overline{z} - \overline{b}\right)$.

Donc, si $S \in \mathcal{G}^-$, alors $(S_i)^{-1} \in \mathcal{G}^-$

⇒ La composition de 2 similitudes inverses de $\mathcal{G}^-$ est une similitude directe. Cette composition est-elle un élément de $\mathcal{G}^+$?

Soient $S_1 \in \mathcal{G}^-$ et $S_2 \in \mathcal{G}^-$ où $S_1(z) = e^{i\theta_1} \overline{z} + b_1$ et $S_2(z) = e^{i\theta_2} \overline{z} + b_2$

Alors $S_1 \circ S_2(z) = e^{i(\theta_1 - \theta_2)} z + e^{i\theta_1} \overline{b_2} + b_1$ et donc, comme $e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \in \mathcal{U}$, nous avons $S_1 \circ S_2 \in \mathcal{G}^+$, c'est à dire $S_1 \circ S_2 \in \mathcal{G}$

⇒ La composition d'une similitudes inverses de $\mathcal{G}^-$ et d'une similitude directe de $\mathcal{G}^+$ est une similitude inverse. Cette composition est-elle un élément de $\mathcal{G}$?

▷ Soient $S_1(z) = e^{i\theta_1} z + b_1$ et $S_2(z) = e^{i\theta_2} \overline{z} + b_2$ 2 éléments de $\mathcal{G}$. Avons nous $S_1 \circ S_2 \in \mathcal{G}$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, nous avons :

$$S_1 \circ S_2(z) = S_1[S_2(z)] = e^{i\theta_1} S_2(z) + b_1 = e^{i\theta_1}\left(e^{i\theta_2} \overline{z} + b_2\right) + b_1 = e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \overline{z} + e^{i\theta_1} b_2 + b_1$$

Comme $e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \in \mathcal{U}$, alors $S_1 \circ S_2 \in \mathcal{G}$

▷ Regardons, de la même manière $S_2 \circ S_1$. Donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} S_2 \circ S_1(z) = S_2[S_1(z)] &= e^{i\theta_2}\overline{S_1(z)} + b_2 \\ &= e^{i\theta_2}\overline{(e^{i\theta_1}z + b_1)} + b_2 \\ &= e^{i\theta_2}\left(e^{-i\theta_1}\overline{z} + \overline{b_1}\right) + b_2 \\ &= e^{i(\theta_2-\theta_1)}\overline{z} + e^{i\theta_2}\overline{b_1} + b_2 \end{aligned}$$

On peut remarquer que la composition des applications n'est pas commutative.

La composition des applications est donc interne.

Ainsi, $\mathcal{G}$ est un groupe pour la composition des applications.

(c) *On considère, cette fois ci le groupe $G = \{1; i; -i; -1\}$; Que dire du groupe $\mathcal{G}$?*

Ce groupe est un sous-groupe fini du groupe $\mathcal{U}$; c'est même un groupe cyclique engendré par $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$. C'est à dire $G = \{i^n \text{ où } n \in \mathbb{Z}\}$. Si $n \equiv k\,[4]$, alors $i^n = i^k$.

Par des calculs simples, si $f(z) = i^n z + b_1$ et $g(z) = i^m \overline{z} + b_2$, on démontre que $g^{-1} \in \mathcal{G}$, que $f \circ g \in \mathcal{G}$ et $g \circ f \in \mathcal{G}$ Et donc $\mathcal{G}$ est un groupe pour la composition des applications.

(d) *Même étude avec $G = \{g \in \mathbb{C}$ tels que il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $g = (1+i)^n\}$*

Ce groupe est un groupe cyclique engendré par le nombre comple $1 + i$; En fait, comme $1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$, $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}e^{\frac{in\pi}{4}}$

La question se pose donc pour les éléments de $\mathcal{G}^-$.

Si $f(z) = (1+i)^n\,\overline{z} + b = 2^{\frac{n}{2}}e^{\frac{in\pi}{4}}\,\overline{z} + b$, nous avons, par des calculs élémentaires, $f^{-1}(z) = 2^{\frac{-n}{2}}e^{\frac{in\pi}{4}}\overline{z} - \dfrac{\overline{b}}{2^{\frac{n}{2}}e^{\frac{-in\pi}{4}}}$

Clairement, $f^{-1} \notin \mathcal{G}$ et donc, dans notre cas, $\mathcal{G}$ n'est pas un groupe pour la composition des applications.

22.6.4 Problèmes de géométrie

Chapitre 23

Les courbes paramétrées

VOICI UN COURS TRÈS MINIMAL SUR LES COURBES PARAMÉTRÉES. C'EST UN CHAPITRE TRÈS UTILISÉ EN PHYSIQUE

23.1 Introduction aux courbes paramétrées

23.1.1 Définition

On appelle courbe paramétrée Γ du plan, toute application d'une partie $I \subset \mathbb{R}$ dans le $\mathbb{R}^2$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Gamma : I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x(t), y(t)) \end{array} \right.$$

Si $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est un repère orthonormé du plan, nous avons $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$
L'ensemble des points $M(t)$ lorsque t décrit I est le support de la courbe paramétrée Γ

Exemple 1 :

Quelques exemples :

1. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $R > 0$, la fonction Γ, définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Gamma : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (a + R\cos t, b + R\sin t) \end{array} \right.$$

   est une représentation paramétrique d'un cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon R

2. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$; la fonction Γ, définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Gamma : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (a + \cos t, b + \cos t) \end{array} \right.$$

   est une représentation paramétrique d'un intervalle situé sur une droite.
   Cette droite a une équation simple : si $x = a + \cos t \Longleftrightarrow \cos t = x - a$, en remplaçant $\cos t$ par sa valeur dans y, nous obtenons $y = b + x - a \Longleftrightarrow y = x + b - a$.
   Le support de la courbe paramétré est donc la droite d'équation $y = x + b - a$, mais la courbe paramétrée n'est qu'un segment de cette courbe. *(cf figure 23.1)*

3. Soit Γ, définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Gamma : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (2 - 3t^2, -1 + t^2) \end{array} \right.$$

   Le support de cette courbe paramétrée est une demie droite. *(cf figure 23.2)*

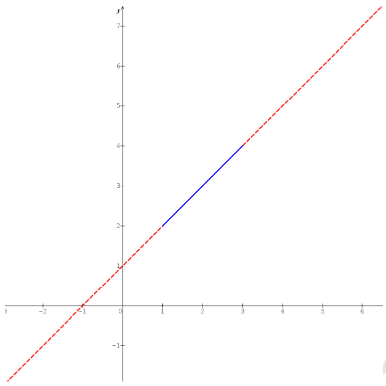


FIGURE 23.1 – La courbe paramétrée $x(t) = 2 + \cos t$ et $y(t) = 3 + \cos t$ en bleu et son support, la droite $y = x + 1$ en pointillés rouges

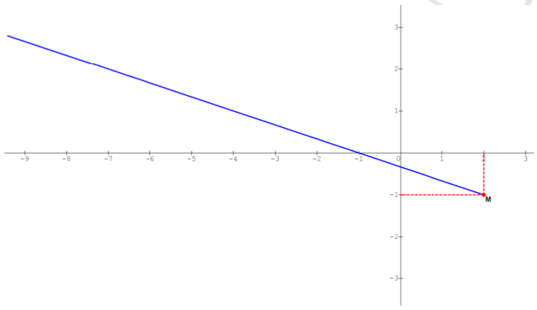


FIGURE 23.2 – La courbe paramétrée $x(t) = 2 - 3t^2$ et $y(t) = -1 + t^2$

Remarque 1 :

1. Si l'intervalle $I = [a; b]$, on dit que la courbe paramétrée est un arc d'origine $M(a) = (x(a); y(a))$ et d'extrémité $M(b) = (x(b); y(b))$. Si $M(a) = M(b)$, on dit que l'arc est fermé

   Exemple d'arc fermé

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Gamma : [0; 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos t, \sin t) \end{array}\right.$$

   Nous avons $M(0) = M(2\pi)$

2. Une même courbe peut avoir plusieurs représentations paramétriques

   Exemple

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Gamma_1 : [0; 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos t, \sin t) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Gamma_2 : [0; 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\sin t, \cos t) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Gamma_3 : [0; 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos 2t, \sin 2t) \end{array}\right.$$

   Γ_1, Γ_2 et Γ_3 sont 3 représentations paramétriques d'un même cercle $\mathcal{C}(0; 1)$

3. Notion de point simple et de point double

   Un point d'une courbe est dit simple s'il n'existe qu'un seul paramètre à lui correspondre ; il est multiple sinon

   Exemples

⇒ Dans :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\Gamma_1 : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos t, \sin t)\end{array}\right.$$

Tous les points sont multiples.

⇒ Dans :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\Gamma_2 : [0; 2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos t, \sin t)\end{array}\right.$$

Tous les points sont simples.

⇒ Dans :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\Gamma_3 : [0; 2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos 2t, \sin 2t)\end{array}\right.$$

Tous les points sont doubles.

⇒ Dans :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\Gamma_4 : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \left(2 - 3t^2, -1 + t^2\right)\end{array}\right.$$

Tous les points sont doubles sauf $M(0) = (2, -1)$

23.1.2 Quelques exercices d'application

Exercice 1 :

Déterminer l'ensemble des points $M(x, y)$ dont une représentation paramétrique est :

1. $\left\{\begin{array}{l} x(t) = \dfrac{2t}{1-t} \\ y(t) = \dfrac{2-3t}{1-t}\end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{l} x(t) = -2\sqrt{1-t^2} \\ y(t) = 2 + \sqrt{1-t^2}\end{array}\right.$

Exercice 2 :

À tout réel $t \in \mathbb{R}$, on associe le point $M(t) \in \mathbb{R}^2$ de coordonnées :

$$x(t) = 2 + 2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \qquad y(t) = -3 + \frac{4t}{1+t^2}$$

Démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point $M(t)$ appartient à un cercle dont on donnera le centre et le rayon.
Tout point du cercle est-il un point $M(t)$?

Exercice 3 :

Dans le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ rapporté au repère cartésien $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, nous considérons le point A de coordonnées $(2a, 0)$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[O, A]$

1. Donner une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$
2. Pour tout $M \in \mathcal{C}$, où $M \neq O$, on pose $\theta \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}\right)}\ [2\pi]$ où $\theta \in \,]-\pi; +\pi[$
   Exprimer les coordonnées de $M \in \mathcal{C}$ en fonction de θ ; on obtient ainsi une représentation paramétrique de $\mathcal{C}$
3. Donner le module et l'argument du nombre complexe $z = a\left(1 + e^{i\theta'}\right)$ où $\theta' \in [-\pi; \pi[$ et $a > 0$

23.2 Dérivées et tangentes

23.2.1 Définition

Soit Γ une courbe paramétrée du plan $\mathbb{R}^2$ de représentation graphique $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\overrightarrow{i} + y(t)\,\overrightarrow{j}$
Si les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont dérivables en $t_0 \in I$, on appelle vecteur-dérivé en t_0, le vecteur noté $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0)$ défini par :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0) = x'(t_0)\,\overrightarrow{i} + y'(t_0)\,\overrightarrow{j}$$

Remarque 2 :

1. En référence à la cinématique du point, le vecteur dérivé $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0)$ est souvent appelé vecteur vitesse
2. Si $P(t)$ et $Q(t)$ sont les projections orthogonales de $M(t)$ sur les différents axes, $x'(t)$ désigne la vitesse de $P(t)$ et $y'(t)$ celle de $Q(t)$
3. Le nombre $v(t) = \left\| \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t) \right\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)}$ désigne la vitesse numérique
4. Si la vitesse numérique $v(t)$ est constante, le mouvement d'un mobile est dit uniforme

Exemple 2 :

Comme exemple de mouvement uniforme, nous prenons le mouvement circulaire uniforme
On considère un mobile dont la trajectoire en fonction du temps est donnée par :

$$x(t) = R\cos\omega t \qquad y(t) = R\sin\omega t$$

Il est facile de démontrer que ma trajectoire de $M(t) = (x(t)\,;y(t))$ est un cercle de centre O et de rayon R
A quelle vitesse $M(t)$ parcourt-il sa trajectoire ? Il suffit de calculer $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t)$. Nous avons :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t) = -R\omega\sin\omega t\,\overrightarrow{i} + R\omega\cos\omega t\,\overrightarrow{j}$$

Et donc, $v(t) = \left\| \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t) \right\| = \sqrt{R^2\omega^2\sin^2\omega t + R^2\omega^2\cos^2\omega t} = R\omega$

La vitesse numérique est donc constante et donnée par $v = \omega R$. L'expression $\omega = \dfrac{v}{R}$ est la vitesse angulaire, laquelle est aussi constante.
Autre chose, ce n'est pas parce que la vitesse numérique est constante que le vecteur vitesse est constant ! !
Il se modifie en fonction de t ; c'est sa norme (ou son module) qui est constante.

23.2.2 Théorème

Si la fonction Γ est dérivable en t_0, et si $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$, alors Γ admet une droite tangente en $M(t_0)$ de vecteur directeur $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0)$

Remarque 3 :

1. L'équation cartésienne de la tangente est donnée par $\det\left(\overrightarrow{MM}(t_0), \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0)\right) = 0$, c'est à dire :

$$\det\left(\overrightarrow{MM}(t_0), \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0)\right) = \begin{vmatrix} x - x(t_0) & x'(t_0) \\ y - y(t_0) & y'(t_0) \end{vmatrix} = [(x - x(t_0))\, y'(t_0)] - [x'(t_0)\,(y - y(t_0))]$$
$$= xy'(t_0) - yx'(t_0) - x(t_0)\, y'(t_0) + x'(t_0)\, y(t_0) = 0$$

Le coefficient directeur de la tangente, est, si $x'(t_0) \neq 0$, $\alpha = \dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$

2. Le vecteur $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0)$ définit une orientation de la tangente en $M(t_0)$

3. Un point $M(t_0)$ admettant une tangente ou une dérivée non nulle, c'est à dire $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$ est un point régulier, sinon, c'est un point stationnaire

Exemple 3 :

1. Soit Γ la fonction vectorielle qui représente le mouvement circulaire uniforme, définie par :

$$\begin{cases} \Gamma : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \quad t & \longmapsto & \Gamma(t) = (\cos t, \sin t) \end{cases}$$

Alors $x'(t) = -\sin t$ et $y'(t) = \cos t$, c'est à dire $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

On peut remarquer que $\left\langle \overrightarrow{OM}(t) \mid \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t) \right\rangle = 0$

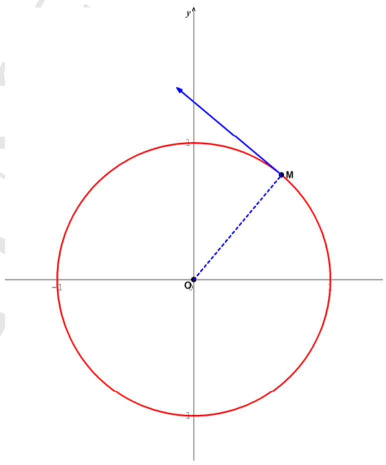


FIGURE 23.3 – La visualisation du mouvement circulaire uniforme

2. Paramétrisation d'une ellipse
Soit Γ la fonction vectorielle qui représente l'équation paramétrique d'une ellipse, définie par :

$$\begin{cases} \Gamma : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \quad t & \longmapsto & \Gamma(t) = (a\cos t, b\sin t) \end{cases}$$

Bien entendu, si $a = b$, nous nous retrouvons devant un cercle.

Alors $x'(t) = -a\sin t$ et $y'(t) = b\cos t$, c'est à dire $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix}$

On peut remarquer que $\left\langle \overrightarrow{OM}(t) \mid \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t) \right\rangle = b^2 - a^2$ *(Si $b = \pm a$, c'est à dire, si c'est un cercle, nous retrouvons la nullité du produit scalaire)*
L'équation de la tangente en $M(t_0) = (x(t_0) ; y(t_0))$ est donc donnée par :

$$\begin{vmatrix} x - a\cos t_0 & -a\sin t_0 \\ y - b\sin t_0 & b\cos t_0 \end{vmatrix} = 0 \iff \frac{x\cos t_0}{a} + \frac{y\sin t_0}{b} = 1 \iff \frac{xx(t_0)}{a^2} + \frac{yy(t_0)}{b^2} = 1$$

Voir figure 23.4

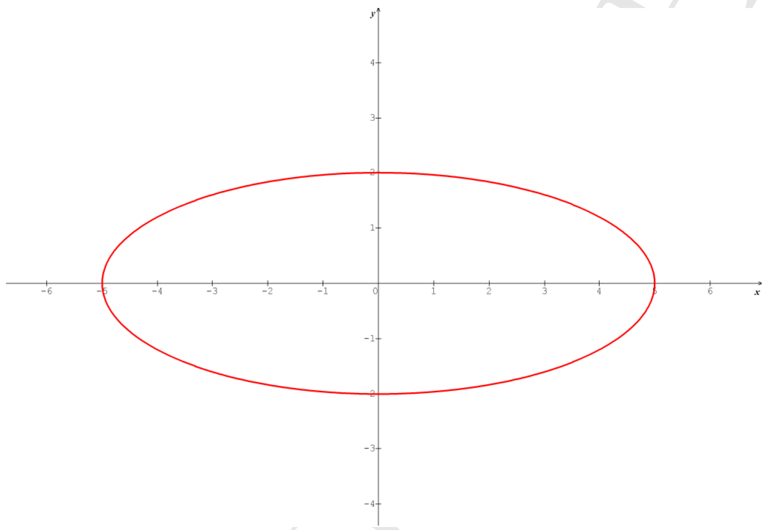


Figure 23.4 – La visualisation d'une ellipse

Exercice 4 :

$\mathcal{P}$ est le plan rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On considère les points $M_1(t)$ et $M_2(t)$ dont les coordonnées sont données en fonction de $t \in \mathbb{R}$, avec $a > 0$, par :

$$M_1(t) \begin{cases} x_1(t) = & a\cos t \\ y_1(t) = & a\sin t \end{cases} \qquad M_2(t) \begin{cases} x_2(t) = & a\cos 2t \\ y_2(t) = & -a\sin 2t \end{cases}$$

1. Quelles sont les trajectoires des points $M_1(t)$ et $M_2(t)$?
2. On appelle $G(t)$ le barycentre du système pondéré $\{(M_1(t), 2) ; (M_2(t), 1)\}$. A quelles dates les points $G(t)$, $M_1(t)$ et $M_2(t)$ sont-ils confondus ?
3. $\overrightarrow{V(t)}$ est le vecteur vitesse de $G(t)$; démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, les vecteurs $\overrightarrow{V(t)}$ et $\overrightarrow{M_1(t)M_2(t)}$ sont orthogonaux.

Exercice 5 :

Rechercher les points stationnaire de l'arc paramétré $M(t)$ défini par :

$$M(t) \begin{cases} x(t) = & 2\cos t + \cos 2t \\ y(t) = & 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$$

23.3 Quelques exercices

Exercice 6 :

Dans l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$, rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, soit le point M de coordonnées à tout instant $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = & 1 + 2\cos\omega t \\ y = & 3 + 2\sin\omega t \\ z = & 2 \end{cases}$$

Quelle est la nature du mouvement de M ?

Exercice 7 :

Le plan $\mathcal{P}$ étant rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on donne les coordonnées d'un point mobile M en fonction du temps t :

$$\begin{cases} x = & \sin t \\ y = & -2 - \cos 2t. \end{cases}$$

1. Déterminer la relation indépendante de t liant x et y.
2. Caractériser la trajectoire du mobile M et tracer son graphe dans le repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, lorsque $t \in [0, 2\pi]$.
3. Calculer, à la date $t = \dfrac{3\pi}{4}$, les coordonnées :
   (a) Du vecteur espace $\overrightarrow{OM\,(t)}$
   (b) Du vecteur vitesse $\overrightarrow{V\,(t)}$
   (c) Du vecteur accélération $\overrightarrow{\gamma\,(t)}$
4. Tracer les vecteurs $\overrightarrow{OM\,(t)}$, $\overrightarrow{V\,(t)}$ et $\overrightarrow{\gamma\,(t)}$

Exercice 8 :

1. Dans un repère orthonormé du plan $\mathcal{P}$ $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, les coordonnées d'un mobile M sont exprimées, en fonction du temps t, par :

   $$\begin{cases} x = & \cos t \\ y = & \cos 3t - l \end{cases}$$

   Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire du mobile. Construire cette trajectoire.
2. Le mouvement débute à l'instant $t = 0$. A quelles dates le mobile passe-t-il pour la première fois aux points M_1, et M_2, de la trajectoire d'abscisses respectives $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{-1}{2}$. calculer les composantes du vecteur-vitesse et du vecteur-accélération correspondant à chacun de ces deux points.

Exercice 9 :

La lettre t désignant le temps, soit la fonction vectorielle $\overrightarrow{F}$ définie dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ par :

$$\begin{cases} \overrightarrow{F} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \quad t & \longmapsto & \overrightarrow{F}\,(t) = \overrightarrow{OM\,(t)} = x\,(t)\,\overrightarrow{i} + y\,(t)\,\overrightarrow{j} \end{cases}$$

où $x\,(t) = 2 + 2\cos^2 t$ et $y\,(t) = 4\sin t\cos t$

1. Trouver une équation cartésienne de la trajectoire de $M\,(t)$ et les caractéristiques simples qui permettent de construire cette trajectoire.
2. Calculer les composantes du vecteur-vitesse $\overrightarrow{V\,(t)}$ de $M\,(t)$
3. Calculer les composantes du vecteur-accélération $\overrightarrow{\Gamma}$ de $M\,(t)$
4. Pour quelles valeurs de t les vecteurs $\overrightarrow{V\,(t)}$ et $\overrightarrow{\Gamma}$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice 10 :

Tracer la représentation graphique de la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) = & -1+\ln t \\ y(t) = & -2t+t\ln t \end{cases}$$

Avec $t>0$

23.4 Correction de quelques exercices

Exercice 1 :

Déterminer l'ensemble des points $M(x,y)$ dont une représentation paramétrique est :

1. $x(t)=\dfrac{2t}{1-t}$ $\qquad y(t)=\dfrac{2-3t}{1-t}$

   $\Rightarrow$ Tout d'abord, les fonctions x et y ne sont définies que sur $\mathbb{R}\setminus\{+1\}$

   $\Rightarrow$ Ensuite, nous avons $\lim\limits_{\substack{t\to1\\t>1}} x(t)=\lim\limits_{\substack{t\to1\\t>1}}\dfrac{2t}{1-t}=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{t\to1\\t>1}} y(t)=\lim\limits_{\substack{t\to1\\t>1}}\dfrac{2-3t}{1-t}=+\infty$.

   De même, $\lim\limits_{\substack{t\to1\\t<1}} x(t)=\lim\limits_{\substack{t\to1\\t<1}}\dfrac{2t}{1-t}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{t\to1\\t<1}} y(t)=\lim\limits_{\substack{t\to1\\t<1}}\dfrac{2-3t}{1-t}=-\infty$.

   De plus, $\lim\limits_{t\to\pm\infty}=x(t)=2$ et $\lim\limits_{t\to\pm\infty}=y(t)=3$

   $\Rightarrow$ De $x(t)=\dfrac{2t}{1-t}$, nous tirons $t=\dfrac{x}{x+2}$, et, en remplaçant t par sa valeur dans y nous trouvons $y=-\dfrac{x}{2}+2$

   L'ensemble des points $M(x,y)$ est donc la droite $y=-\dfrac{x}{2}+2$ sauf le point $\Omega(2,3)$

2. $x(t)=-2\sqrt{1-t^2}$ $\qquad y(t)=2+\sqrt{1-t^2}$

   $\Rightarrow$ Comme tout à l'heure, cette courbe n'existe que si $t\in[-1;+1]$, et du fait de la parité de $\sqrt{1-t^2}$, tous les points sont doubles, sauf le point $M(0)=(x(0);y(0))=(-2,2)$ qui, lui, est simple

   $\Rightarrow$ En remarquant que $\sqrt{1-t^2}=-\dfrac{x}{2}$, le support de la courbe paramétrée est la droite $y=-\dfrac{x}{2}+2$, la même que dans la question précédente, mais, la courbe en est bien différente ! ! *(cf figure 23.5)*

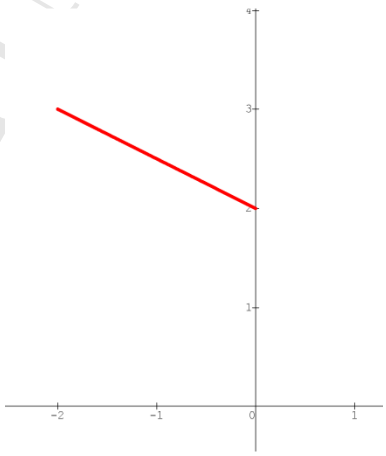


FIGURE 23.5 – Représentation graphique de la courbe $x(t)=-2\sqrt{1-t^2}$ $\quad y(t)=2+\sqrt{1-t^2}$

Exercice 2 :

À tout réel $t \in \mathbb{R}$, on associe le point $M(t) \in \mathbb{R}^2$ de coordonnées :

$$x(t) = 2 + 2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \qquad y(t) = -3 + \frac{4t}{1+t^2}$$

Démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point $M(t)$ appartient à un cercle dont on donnera le centre et le rayon. Tout point du cercle est-il un point $M(t)$?

- ⇒ Dans un premier temps, les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$ en entier.
- ⇒ D'autre part, nous avons $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x(t) = 0$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y(t) = -3$, ce qui fait que le point $\Omega(0, -3)$ n'est pas atteint par la courbe paramétrée ; c'est un point limite
- ⇒ Ensuite, remarquons que :

$$x(t) - 2 = 2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \text{ et } y(t) + 3 = \frac{4t}{1+t^2}$$

En élevant au carré et en additionnant, nous obtenons :

$$\begin{aligned}(x(t)-2)^2 + (y(t)+3)^2 &= \left(2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\right)^2 + \left(\frac{4t}{1+t^2}\right)^2 \\ &= \frac{4(1-t^2)^2 + 16t^2}{(1+t^2)^2} \\ &= \frac{4(1+t^4-2t^2) + 16t^2}{(1+t^2)^2} \\ &= \frac{4 + 4t^4 + 8t^2}{(1+t^2)^2} \\ &= 4\end{aligned}$$

Nous avons donc $(x(t)-2)^2 + (y(t)+3)^2 = 4$
Ainsi, les points $M(t)$ appartiennent au cercle de centre $O(2;3)$ et de rayon $R = 2$. Le seul point $\Omega(0, -3)$ du cercle n'est pas atteint par la courbe paramétrée.

Exercice 3 :

Dans le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ rapporté au repère cartésien $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, nous considérons le point A de coordonnées $(2a, 0)$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[O, A]$

1. *Donner une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$*

   Elle est évidente : $(x-a)^2 + y^2 = a^2$

2. *Pour tout $M \in \mathcal{C}$, où $M \neq O$, on pose $\theta \equiv \widehat{\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right)}\ [2\pi]$ où $\theta \in \left]-\pi; +\pi\right[$*
   Exprimer les coordonnées de $M \in \mathcal{C}$ en fonction de θ ; on obtient ainsi une représentation paramétrique de $\mathcal{C}$

   Pour visualiser la question posée, il faut se reporter à la figure 23.7
   Nous allons appeler $I(a, 0)$ le centre du cercle $\mathcal{C}$.
   En considérant le triangle rectangle isocèle OMA et le triangle isocèle IMA, nous avons, en posant $\theta' \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IM}\right)}\ [2\pi]$, nous avons $2\theta = \theta'$
   Nous avons

   $$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM} &= a\vec{i} + a\cos\theta'\vec{i} + a\sin\theta'\vec{j} \\ &= a(1+\cos\theta')\vec{i} + a\sin\theta'\vec{j} \\ &= a(1+\cos 2\theta)\vec{i} + a\sin 2\theta\vec{j}\end{aligned}$$

   Une représentation paramétrique de $\mathcal{C}$ est donc :

   $$\left\{\begin{aligned} x(\theta) &= a(1+\cos 2\theta) \\ y(\theta) &= a\sin 2\theta \end{aligned}\right. \quad \text{avec } \theta \in \left]-\pi; +\pi\right[$$

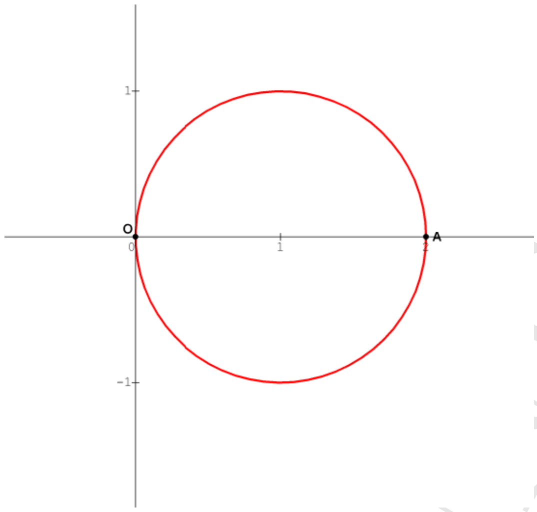


FIGURE 23.6 – Le cercle de diamètre $[O, A]$

3. *Donner le module et l'argument du nombre complexe $z = a\left(1 + e^{i\theta'}\right)$ où $\theta' \in [-\pi; \pi[$ et $a > 0$*

   C'est une question intéressante ; elle est en lien avec la courbe paramétrée que nous venons d'étudier. Tous les points d'affixe $z = a\left(1 + e^{i\theta'}\right)$ avec $\theta' \in [-\pi; \pi[$ et $a > 0$ sont situés sur le cercle $\mathcal{C}$

   Nous avons donc :
$$z = a\left(1 + e^{i\theta'}\right) \Longleftrightarrow z = a\left(1 + \cos\theta'\right) + ia\sin\theta'$$

   Cherchons le module de z

   Donc $|z| = a\sqrt{(1 + \cos\theta')^2 + \sin^2\theta'} = a\sqrt{2 + 2\cos\theta'} = a\sqrt{2}\sqrt{1 + \cos\theta'}$

   Nous utilisons, maintenant, les formules sur les arcs moitiés *(ou doubles)*
$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Longleftrightarrow 1 + \cos 2x = 2cos^2 x$$

   Et donc $1 + \cos\theta' = 2\cos^2\left(\dfrac{\theta'}{2}\right)$, et
$$\sqrt{1 + \cos\theta'} = \sqrt{2\cos^2\left(\frac{\theta'}{2}\right)} = \sqrt{2}\left|\cos\left(\frac{\theta'}{2}\right)\right|$$

   Comme $\theta' \in [-\pi; \pi[$, nous avons $\dfrac{\theta'}{2} \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ et alors $\cos\left(\dfrac{\theta'}{2}\right) \geqslant 0$ et d'où :
$$|z| = a\sqrt{2}\sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta'}{2}\right) = 2a\cos\left(\frac{\theta'}{2}\right)$$

   L'argument est presque aussi simple à trouver :
$$\begin{aligned}
z = a\left(1 + e^{i\theta'}\right) &= a\left(1 + \cos\theta'\right) + ia\sin\theta' \\
&= 2a\cos\left(\frac{\theta'}{2}\right)\left(\frac{(1 + \cos\theta')}{2\cos\left(\frac{\theta'}{2}\right)} + i\frac{\sin\theta'}{2\cos\left(\frac{\theta'}{2}\right)}\right) \\
&= 2a\cos\left(\frac{\theta'}{2}\right)\left(\frac{2\cos^2\left(\frac{\theta'}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta'}{2}\right)} + i\frac{2\sin\frac{\theta'}{2}\cos\frac{\theta'}{2}}{2\cos\left(\frac{\theta'}{2}\right)}\right) \\
&= 2a\cos\left(\frac{\theta'}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta'}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta'}{2}\right)\right) \\
&= 2a\cos\left(\frac{\theta'}{2}\right)e^{i\frac{\theta'}{2}}
\end{aligned}$$

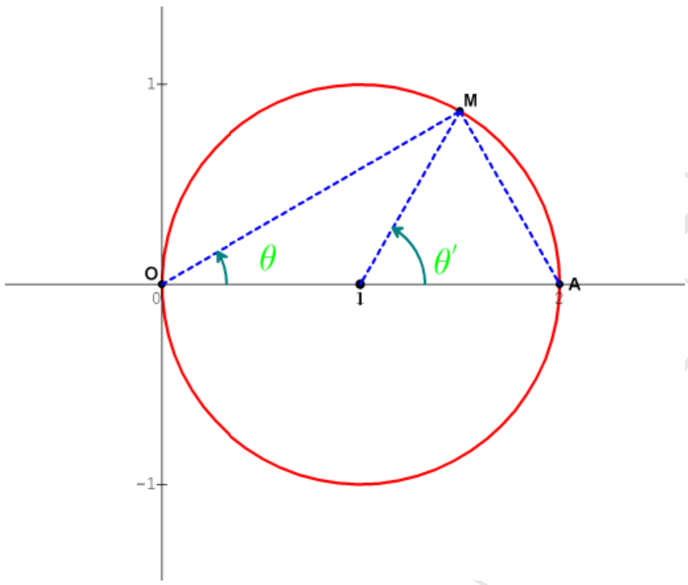


FIGURE 23.7 – La visualisation de la question posée

Exercice 4 :

$\mathcal{P}$ est le plan rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On considère les points $M_1(t)$ et $M_2(t)$ dont les coordonnées sont données en fonction de $t \in \mathbb{R}$, avec $a > 0$, par :

$$M_1(t)\left\{\begin{array}{rl} x_1(t) = & a\cos t \\ y_1(t) = & a\sin t \end{array}\right. \qquad M_2(t)\left\{\begin{array}{rl} x_2(t) = & a\cos 2t \\ y_2(t) = & -a\sin 2t \end{array}\right.$$

1. *Quelles sont les trajectoires des points $M_1(t)$ et $M_2(t)$?*

   La trajectoire des 2 mobiles est le même cercle de centre O et de rayon a
   Par contre, la trajectoire n'est pas parcourue à la même vitesse, ni dans le même sens. $M_2(t)$ a une vitesse angulaire 2 fois plus importante que $M_1(t)$ et s'il parte du même point $A(1,0)$, les 2 points parcourrent le cercle dans 2 sens différents.

2. *On appelle $G(t)$ le barycentre du système pondéré $\{(M_1(t), 2); (M_2(t), 1)\}$. A quelles dates les points $G(t)$, $M_1(t)$ et $M_2(t)$ sont-ils confondus ?*

   Pour reprendre la calcul barycentrique, nous pouvons écrire, pour tout $X \in \mathcal{P}$:

$$3\overrightarrow{XG(t)} = 2\overrightarrow{XM_1(t)} + \overrightarrow{XM_2(t)}$$

   En particulier si X est l'origine O, nous avons :

$$\overrightarrow{OG(t)} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OM_1(t)} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OM_2(t)}$$

   Les points $G(t)$, $M_1(t)$ et $M_2(t)$ sont confondus si et seulement si $M_1(t) = M_2(t)$, c'est à dire, en nous référant aux coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{rl} \cos t = & \cos 2t \\ \sin t = & -\sin 2t \end{array}\right.][. \iff \left\{\begin{array}{rl} \cos t = & 2\cos^2 t - 1 \\ \sin t = & -2\sin t\cos t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2\cos^2 t - \cos t - 1 = 0 \\ \sin t\,(1 + 2\cos t) = 0 \end{array}\right.$$

   $\Rightarrow$ <u>Résolvons $2\cos^2 t - \cos t - 1 = 0$</u>
   En posant $X = \cos t$, nous nous réduisons à l'équation du second degré $2X^2 - X - 1 = 0$ dont les solutions sont $X = 1$ et $X = -\dfrac{1}{2}$
   D'où nous tirons $\cos t = 1 \iff t = 2k\pi$ et $\cos t = -\dfrac{1}{2} \iff t = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $t = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi$

⇒ Résolvons $\sin t\,(1+2\cos t)=0$

D'une part, nous avons $\sin t=0 \iff t=k\pi$ et $1+2\cos t=0$, c'est à dire $\cos t=-\dfrac{1}{2} \iff t=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$ ou $t=\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi$

Pour que $M_1(t)=M_2(t)$, nous devons avoir, en même temps $2\cos^2 t-\cos t-1=0$ et $\sin t\,(1+2\cos t)=0$

C'est à dire que $G(t)$, $M_1(t)$ et $M_2(t)$ sont confondus si et seulement si

$$\boxed{t=2k\pi \text{ ou } t=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \text{ ou } t=\frac{4\pi}{3}+2k\pi}$$

3. *$\overrightarrow{V(t)}$ est le vecteur vitesse de $G(t)$; démontrer que, pour tout $t\in\mathbb{R}$, les vecteurs $\overrightarrow{V(t)}$ et $\overrightarrow{M_1(t)\,M_2(t)}$ sont orthogonaux.*

▷ Tout d'abord, $\overrightarrow{V(t)}=\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG(t)}}{\mathrm{d}t}$. Or :

$$\overrightarrow{OG(t)}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OM_1(t)}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OM_2(t)}$$

Et donc ;

$$\overrightarrow{V(t)}=\frac{2}{3}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_1(t)}}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_2(t)}}{\mathrm{d}t}$$

▷ Pour commencer, nous avons $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_1(t)}}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}-a\sin t\\ a\cos t\end{pmatrix}$, puis $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_2(t)}}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}-2a\sin 2t\\ -2a\cos 2t\end{pmatrix}$

▷ De telle sorte que $\overrightarrow{V(t)}=\begin{pmatrix}\dfrac{-2a\sin t-2a\sin 2t}{3}\\ \dfrac{2a\cos t-2a\cos 2t}{3}\end{pmatrix}=\dfrac{2a}{3}\begin{pmatrix}-\sin t-\sin 2t\\ \cos t-\cos 2t\end{pmatrix}$

▷ Maintenant, $\overrightarrow{M_1(t)\,M_2(t)}=\begin{pmatrix}a\cos 2t-a\cos t\\ -a\sin 2t-a\sin t\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}\cos 2t-\cos t\\ -\sin 2t-\sin t\end{pmatrix}$

▷ De telle sorte que :

$$\left\langle \overrightarrow{M_1(t)\,M_2(t)}\mid\overrightarrow{V(t)}\right\rangle=\frac{2a^2}{3}\left[(-\sin t-\sin 2t)(\cos 2t-\cos t)+(-\sin t-\sin 2t)(\cos t-\cos 2t)\right]=0$$

Les 2 vecteurs $\overrightarrow{V(t)}$ et $\overrightarrow{M_1(t)\,M_2(t)}$ sont donc orthogonaux.

Pour visualiser l'étude précédente, reportez vous à la figure 23.8

Exercice 5 :

Rechercher les points stationnaire de l'arc paramétré $M(t)$ défini par :

$$M(t)\begin{cases}x(t)= & 2\cos t+\cos 2t\\ y(t)= & 2\sin t-\sin 2t\end{cases}$$

Nous n'allons pas étudier ce qui se passe autour des points stationnaires. Nous n'allons que préciser ces points stationnaires.

Un point stationnaire est un point tel que $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM(t)}}{\mathrm{d}t}=\overrightarrow{0}$

Nous avons

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM(t)}}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}-2\sin t-2\sin 2t\\ 2\cos t-2\cos 2t\end{pmatrix}$$

Donc, $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM(t)}}{\mathrm{d}t}=\overrightarrow{0}\iff \sin t+\sin 2t=0$ et $\cos t-\cos 2t=0$

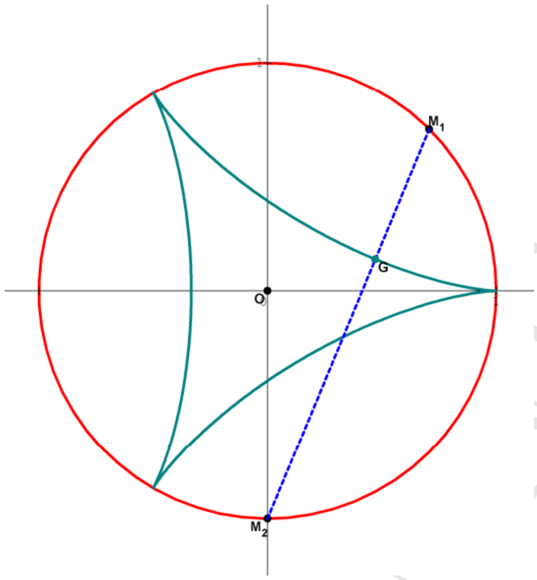


FIGURE 23.8 – Une représentation des mouvements de M_1 et M_2. Ici, M_1 et M_2 sont représentés à $t = \dfrac{\pi}{4}$; G est le barycentre de M_1 et M_2. En vert, est représentée la trajectoire de G

- Nous avons :
$$\sin t + \sin 2t = 0 \iff \sin t = \sin -2t$$
C'est à dire que nous avons $t = -2t + 2k\pi$ ou $t = \pi - (-2t) + 2k\pi$
D'où $t = \dfrac{2k\pi}{3}$ ou $t = (2k+1)\,\pi$
- De la même manière :
$$\cos t - \cos 2t = 0 \iff \cos t = \cos 2t$$
D'où nous tirons $t = 2t + 2k\pi \iff t = 2k\pi$ ou $t = -2t + 2k\pi \iff t = \dfrac{2k\pi}{3}$

Nous en concluons que les seules valeurs qui annulent la dérivée première sont en $t = \dfrac{2k\pi}{3}$.
Les points stationnaires sont donc en $t = \dfrac{2k\pi}{3}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 6 :

Dans l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$, rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, soit le point M de coordonnées à tout instant $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = & 1 + 2\cos \omega t \\ y = & 3 + 2\sin \omega t \\ z = & 2 \end{cases}$$

Quelle est la nature du mouvement de M ?

Point très difficile !!
- Tout d'abord, ce mobile se ballade dans le plan d'équation $z = 2$
- Ensuite, dans ce plan, nous avons $x - 1 = 2\cos \omega t$ et $y - 3 = 2\sin \omega t$
- Le mobile se ballade donc, dans le plan $z = 2$, et trace un cercle de centre $\Omega = (2, 3, 2)$ et de rayon $R = 2$

Exercice 7 :

Le plan $\mathcal{P}$ étant rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on donne les coordonnées d'un point mobile M en fonction du temps t :

$$\begin{cases} x = & \sin t \\ y = & -2 - \cos 2t. \end{cases}$$

1. *Déterminer la relation indépendante de t liant x et y.*

   Pas de grandes difficultés ! !
   Tout d'abord, $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$ et donc $y = -2 - \left(1 - 2\sin^2 t\right) = 2\sin^2 t - 3$, c'est à dire $y = 2x^2 - 3$

2. *Caractériser la trajectoire du mobile M et tracer son graphe dans le repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, lorsque $t \in [0, 2\pi]$.*

   Il est clair que la parabole d'équation $y = 2x^2 - 3$ est le support de la courbe paramétrée, mais, est-ce que c'est toute cette parabole ?...Evidemment, non, puisque $-1 \leqslant x \leqslant +1$

3. *Calculer, à la date $t = \dfrac{3\pi}{4}$, les coordonnées :*

   (a) *Du vecteur espace $\overrightarrow{OM(t)}$*

   En $t = \dfrac{3\pi}{4}$, nous avons $x = \sin\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $y = -2 - \cos\dfrac{3\pi}{2} = -2$, et donc $\overrightarrow{OM(t)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$

   (b) *Du vecteur vitesse $\overrightarrow{V(t)}$*

   Tour d'abord, $\overrightarrow{V(t)} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM(t)}}{\mathrm{d}t}$ et donc $\overrightarrow{V(t)} = \begin{pmatrix} \cos t \\ 2\sin 2t \end{pmatrix}$ Ainsi, en $t = \dfrac{3\pi}{4}$, nous avons $\overrightarrow{V(t)} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$

   (c) *Du vecteur accélération $\overrightarrow{\gamma(t)}$*

   D'après le cours de physique, nous avons :

$$\overrightarrow{\gamma(t)} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V(t)}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM(t)}}{\mathrm{d}t^2}$$

   Et donc $\overrightarrow{\gamma(t)} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 4\cos 2t \end{pmatrix}$ et donc en $t = \dfrac{3\pi}{4}$, nous avons : $\overrightarrow{\gamma(t)} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

4. *Tracer les vecteurs $\overrightarrow{OM(t)}$, $\overrightarrow{V(t)}$ et $\overrightarrow{\gamma(t)}$*

   Voir la figure 23.9

Exercice 10 :

Tracer la représentation graphique de la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) = & -1 + \ln t \\ y(t) = & -2t + t\ln t \end{cases}$$

Avec $t > 0$
De l'équation $x = -1 + \ln t$, nous avons $\ln t = 1 + x$ et donc $t = e^{x+1}$ d'où $y = e^{x+1}(x+1)$.
Comme $t > 0$, nous avons $\ln t \in \mathbb{R}$ et donc $x \in \mathbb{R}$. La représentation paramétrique a donc pour équation cartésienne $y = e^{x+1}(x+1)$
Voir la figure 23.10

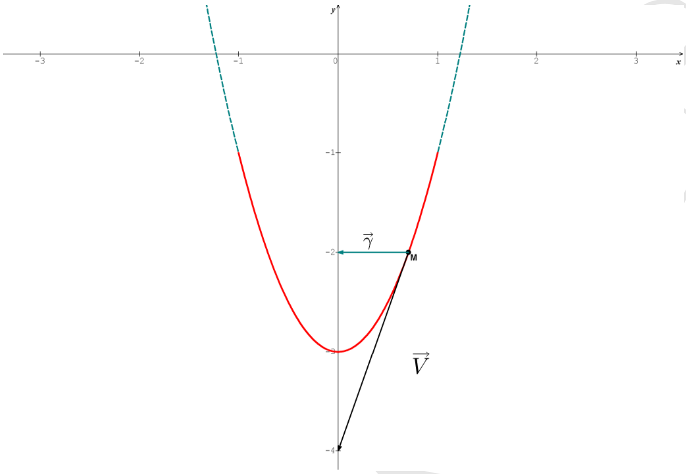


FIGURE 23.9 – Le support de la courbe paramétrée en pointillés verts, la courbe paramétrée en rouge et les vecteurs demandés

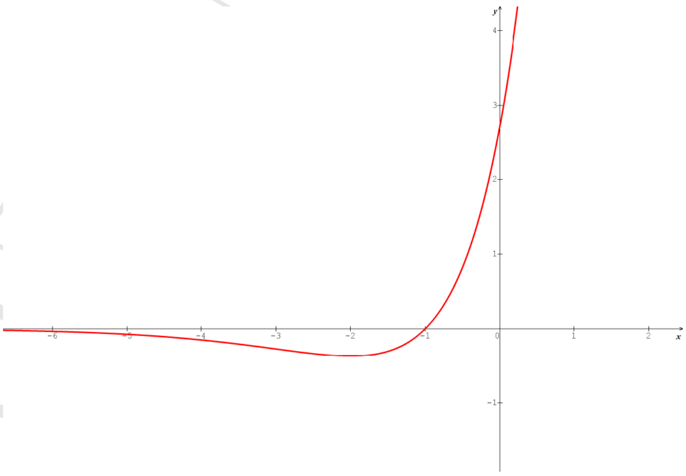


FIGURE 23.10 – La représentation graphique

Chapitre 24

Les coniques

Je n'ai jamais aimé enseigné les coniques. C'est un reste des cours d'astronomie que l'on trouvait dans les cours de mathématiques des années 1950
Cependant, il n'est pas inintéressant d'en prendre connaissance pour mieux comprendre les phénomènes géométriques
Une nouvelle fois, c'est un cours minimal

24.1 Introduction aux coniques

24.1.1 Définition cartésienne d'une conique

Le plan $\mathcal{P}$ étant rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, nous appelons conique d'équation (E)

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 \text{ avec } a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0$$

un ensemble $\Gamma \subset \mathcal{P}$ de points $M \in \mathcal{P}$ dont les coordonnées x et y dans le repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ vérifient l'équation (E)

Remarque 1 :

1. Nous connaissons déjà des coniques :
   (a) La parabole $y = x^2 \iff x^2 - y = 0$ est une conique bien connue
   (b) De manière plus générale, les paraboles d'équation $y = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ sont des coniques
   (c) La courbe d'équation $x = y^2 \iff y^2 - x = 0$ est aussi une conique ; c'est la réunion de la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ et $y = -\sqrt{x}$ avec $x \geqslant 0$
2. Une même conique Γ peut avoir plusieurs équations ; par exemple :

$$2x^2 + 3y^2 - 2 = 0 \text{ et } 4x^2 + 6y^2 - 4 = 0$$

   définissent la même conique
3. Il est aussi possible d'avoir $\Gamma = \emptyset$: les coniques d'équation $x^2 + y^2 + 1 = 0$ et $x^2 + 2 = 0$ sont des ensembles vides

Exemple 1 :

Quelques exemples d'étude

1. Etude de $2x^2 + y^2 - 2x = 0$

Nous avons :

$2x^2+y^2-2x=0 \Longleftrightarrow 2\left(x^2-x\right)+y^2=0 \Longleftrightarrow 2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]+y^2=0 \Longleftrightarrow 2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{2}$

En faisant le changement de repère $\mathcal{R}\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right) \dashrightarrow \mathcal{R}_1\left(\Omega,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ où $\Omega=\left(\frac{1}{2},0\right)$, alors, dans $\mathcal{R}_1$, l'équation de la conique devient :

$$2X^2+Y^2=\frac{1}{2} \Longleftrightarrow \frac{X^2}{\frac{1}{4}}+Y^2=1$$

Et l'étude se simplifie

2. $-x^2+y^2-2x=0$

Nous reprenons la démarche ci-dessus :

$-x^2+y^2-2x=0 \Longleftrightarrow -\left(x^2+2x\right)+y^2=0 \Longleftrightarrow -\left[(x+1)^2-1\right]+y^2=0 \Longleftrightarrow -(x+1)^2+y^2=-1$

En faisant un nouveau changement de repère $\mathcal{R}\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right) \dashrightarrow \mathcal{R}_1\left(\Omega,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ où $\Omega=(-1,0)$, alors, dans $\mathcal{R}_1$, l'équation de la conique devient :

$$-X^2+Y^2=-1$$

Et l'étude se simplifie

3. Nous étudions cette fois-ci la conique d'équation $5x^2+5y^2-2xy-4=0$

En faisant le changement de repère $\mathcal{R}\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right) \dashrightarrow \mathcal{R}_1\left(O,\overrightarrow{I},\overrightarrow{J}\right)$ en modifiant, cette fois-ci, les vecteurs de base :

$$\overrightarrow{I}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}\right) \qquad \overrightarrow{J}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}\right)$$

Si un point $M\in\mathcal{P}$ a pour coordonnées x et y dans le repère $\mathcal{R}\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ et X et Y dans le repère $\mathcal{R}_1\left(O,\overrightarrow{I},\overrightarrow{J}\right)$, nous avons, tous calculs faits :

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y) \qquad y=\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)$$

Et l'équation de la conique dans le repère $\mathcal{R}_1\left(O,\overrightarrow{I},\overrightarrow{J}\right)$, devient :

$$5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)\right)^2+5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)\right)^2-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)\right)-4=0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$4X^2+6Y^2=4$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$X^2+\frac{Y^2}{\frac{2}{3}}=1$$

Et le calcul en devient plus simple !

24.1.2 Définition de l'ellipse

Le plan $\mathcal{P}$ étant rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$; soit $(\mathcal{C})$ la conique d'équation

$$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0 \text{ avec } a\neq 0 \text{ ou } b\neq 0$$

S'il existe un repère orthonormé $\mathcal{R}_1\left(\Omega,\overrightarrow{I},\overrightarrow{J}\right)$ dans lequel $(\mathcal{C})$ a pour équation

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$$

Alors $(\mathcal{C})$ est une ellipse

Remarque 2 :

Attention !
Les nombres réels a et b de $\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}=1$ ne sont pas forcément les mêmes que ceux de l'équation de départ $ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$

24.1.3 Etude et graphe de $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Pour plus de simplicité, nous partons d'un plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ et nous étudions l'ensemble $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.
D'autre part, comme il y a parité, nous supposons $a>0$ et $b>0$

1. Tout d'abord, les points $A(a,0)$, $A'(-a,0)$, $B(0,b)$ et $B'(0,-b)$ sont des éléments de la conique.
2. Nous avons $y^2=b^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)$

   Un simple calcul nous permet de l'affirmer. Nous avons, dès lors, quelques résultats
   - ▷ Tout d'abord, nous avons $x\in[-a;+a]$
   - ▷ Ensuite $y=b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$ ou $y=-b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$, l'une des courbes étant la symétrique de l'autre par rapport à $x'Ox$
3. Etude de la fonction f définie par :

   $$\left\{\begin{array}{rcl} f:[-a;+a] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)=b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}\end{array}\right.$$

   - ▷ Le domaine de définition de f est donc $[-a;+a]$
   - ▷ f est dérivable sur $]-a;+a[$ et, sur cet ensemble, la dérivée est donnée par $f'(x)=\dfrac{-bx}{a^2\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}}$
   - ▷ Tableau de variations de f

x	$-a$		0		a
f'	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$
f	0	$\nearrow$	b	$\searrow$	0

   - ▷ Equation des tangentes
   L'équation d'une tangente en un point $M(x_0,y_0)$ est donnée par $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.
   Dans notre cas, nous avons $f'(x_0)=\dfrac{-bx_0}{a^2\sqrt{1-\dfrac{x_0^2}{a^2}}}=\dfrac{-bx_0}{a^2\frac{y_0}{b}}=\dfrac{-b^2x_0}{a^2y_0}$, d'où l'équation de la tangente en $M(x_0,y_0)$ est donnée par :

   $$y-y_0=\frac{-b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)$$
   $$\Longleftrightarrow$$
   $$y-y_0-\frac{-b^2x_0x}{a^2y_0}+\frac{-b^2x_0^2}{a^2y_0}=0$$
   $$\Longleftrightarrow$$
   $$yy_0-y_0^2+\frac{b^2x_0x}{a^2}-\frac{b^2x_0^2}{a^2}=0$$
   $$\Longleftrightarrow$$
   $$\frac{yy_0}{b^2}-\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{x_0x}{a^2}-\frac{x_0^2}{a^2}=0$$
   $$\Longleftrightarrow$$
   $$\frac{yy_0}{b^2}+\frac{x_0x}{a^2}-1=0$$

Ainsi, l'équation de la tangente en $M\,(x_0, y_0)$ est donnée par $\dfrac{yy_0}{b^2} + \dfrac{x_0 x}{a^2} = 1$
D'où la représentation graphique dans la figure 24.1 :

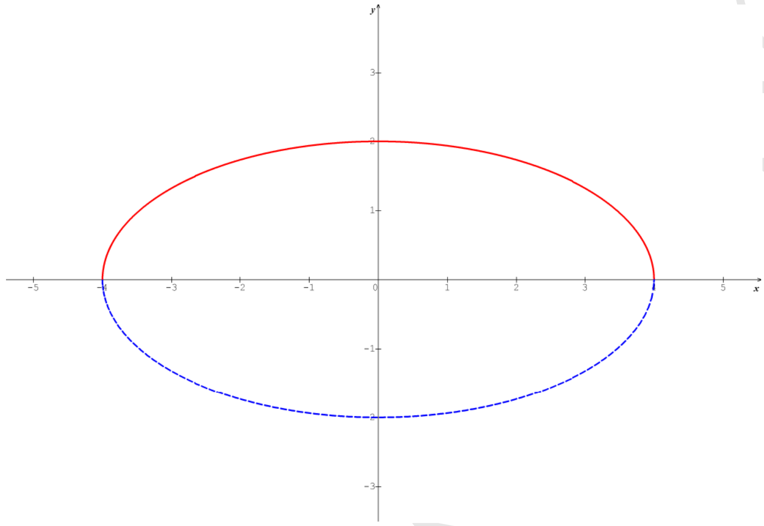


Figure 24.1 – Représentation graphique de l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

Remarque 3 :

Un peu de vocabulaire :

1. O est le centre de la conique
2. Si $a = b$, alors l'équation de l'ellipse devient $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1 \iff x^2 + y^2 = a^2$; l'ellipse est un cercle ! !
3. Les points $A\,(a, 0)$, $A'\,(-a, 0)$, $B\,(0, b)$ et $B'\,(0, -b)$ sont les sommets de la conique.
   Si $AA' > BB'$, le segment $[A; A']$ est le grand axe, alors que $[B; B']$ est le petit axe

Exercice 1 :

Etudier, suivant les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ la conique Γ d'équation dans le repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

$$4x^2 + y^2 + 16x - 2y + 25 - 4m = 0$$

24.1.4 Définition de l'hyperbole

Le plan $\mathcal{P}$ étant rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$; soit $(\mathcal{C})$ la conique d'équation

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 \text{ avec } a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0$$

S'il existe un repère orthonormé $\mathcal{R}_1\left(\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right)$ dans lequel $(\mathcal{C})$ a pour équation

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = \pm 1$$

Alors $(\mathcal{C})$ est une hyperbole

24.1.5 Etude et graphe de l'hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Comme pour l'étude des ellipses et toujours pour plus de simplicité, nous partons d'un plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et nous étudions l'ensemble $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.
Nous supposons toujours $a > 0$ et $b > 0$

1. Tout d'abord, les points $A(a, 0)$ et $A'(-a, 0)$, sont des éléments de la conique.
2. Nous avons $y^2 = b^2\left(\dfrac{x^2}{a^2} - 1\right)$

   Un simple calcul nous permet de l'affirmer. Nous avons, dès lors, quelques résultats
   - ▷ Tout d'abord, pour que y^2 soit défini, nous avons $|x| \geqslant a$, c'est à dire $x \in]-\infty; -a] \cup [a; +\infty[$
   - ▷ Ensuite $y = b\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} - 1}$ ou $y = -b\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} - 1}$, l'une des courbes étant la symétrique de l'autre par rapport à $x'Ox$
3. Etude de la fonction f définie par :

   $$\begin{cases} f :]-\infty; -a] \cup [a; +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f(x) = b\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} - 1} \end{cases}$$

   - ▷ Le domaine de définition de f est donc $]-\infty; -a] \cup [a; +\infty[$
   - ▷ D'autre part, f est paire et l'étude peut se réduire à l'intervalle $[a; +\infty[$
   - ▷ Nous avons $f(a) = b$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
   - ▷ f est dérivable sur $]a; +\infty[$ et, sur cet ensemble, la dérivée est donnée par $f'(x) = \dfrac{bx}{a^2\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} - 1}}$.

     La dérivée est donc toujours positive sur $]a; +\infty[$, et f y est donc croissante.
   - ▷ Recherche du comportement en $+\infty$

     En fait, nous allons rechercher les asymptotes.
     - ⋆ Tout d'abord,

       $$\frac{f(x)}{x} = \frac{b\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} - 1}}{x} = \frac{b\sqrt{x^2\left(\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{x^2}\right)}}{x} = \frac{bx\sqrt{\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{x^2}}}{x} = b\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x^2}}$$

       Et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} b\sqrt{\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{b}{a}$

       f admet donc une direction asymptotique
     - ⋆ Nous avons :

       $$f(x) - \frac{b}{a}x = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} - \frac{b}{a}x = \frac{-b^2}{b\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} - 1} + \dfrac{b}{a}x}$$

       Or $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(f(x) - \dfrac{b}{a}x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-b^2}{b\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} - 1} + \dfrac{b}{a}x} = 0$
     - ⋆ La droite $y = \dfrac{b}{a}x$ est asymptote à la courbe
   - ▷ Equation des tangentes

     Dans un calcul semblable au calcul de la tangente d'une ellipse, l'équation de la tangente en $M(x_0, y_0)$ est donnée par $\dfrac{x_0 x}{a^2} - \dfrac{y y_0}{b^2} = 1$

   D'où la représentation graphique dans la figure 24.2 :

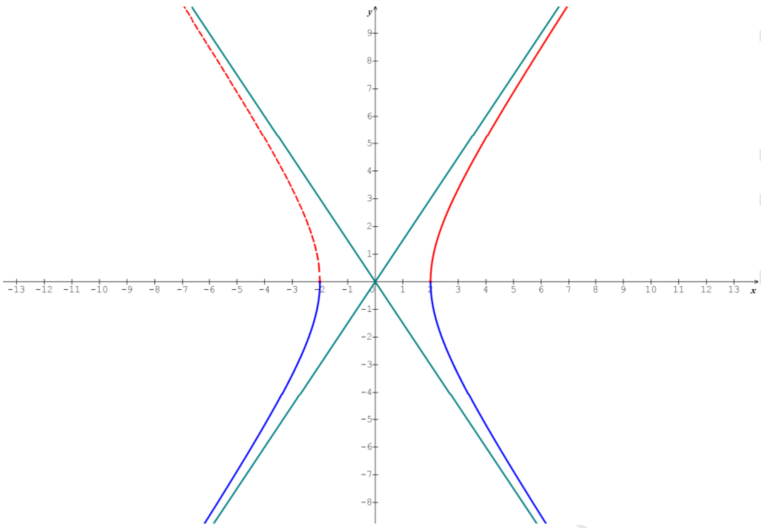


FIGURE 24.2 – Représentation graphique de l'hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

24.1.6 Etude et graphe de l'hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$

Nous partons donc d'un plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et nous étudions l'ensemble $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$.
Nous supposons toujours $a > 0$ et $b > 0$

1. Tout d'abord, les points $B\,(0, b)$ et $B'\,(0, -b)$ sont encore des éléments de la conique.
2. Nous avons $y^2 = b^2\left(\dfrac{x^2}{a^2} + 1\right)$

   Un simple calcul nous permet de l'affirmer. Nous avons, dès lors, quelques résultats
   - ▷ Tout d'abord, y^2 est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$
   - ▷ Ensuite $y = b\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} + 1}$ ou $y = -b\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} + 1}$, l'une des courbes étant la symétrique de l'autre par rapport à $x'Ox$
3. Etude de la fonction f définie par :

   $$\begin{cases} f : \mathbb{R} & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto \quad f\,(x) = b\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} + 1} \end{cases}$$

   - ▷ Le domaine de définition de f est donc $\mathbb{R}$
   - ▷ D'autre part, f est paire et l'étude peut se réduire à l'intervalle $[0; +\infty[$
   - ▷ Nous avons $f\,(0) = b$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f\,(x) = +\infty$
   - ▷ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, sur $\mathbb{R}$, la dérivée est donnée par $f'\,(x) = \dfrac{bx}{a^2\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} + 1}}$.
   - ▷ Tableau de variations de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'	$-$	$-$	0	$+$	$+$
f	$+\infty$	$\searrow$	b	$\nearrow$	$+\infty$

   - ▷ Recherche du comportement en $+\infty$

     En fait, nous allons rechercher les asymptotes.

⋆ Tout d'abord,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}}{x} = \frac{b\sqrt{x^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \frac{bx\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{x^2}}}{x} = b\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{x^2}}$$

Et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} b\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{b}{a}$

f admet donc une direction asymptotique

⋆ Nous avons :

$$f(x) - \frac{b}{a}x = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1} - \frac{b}{a}x = \frac{b^2}{b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}+\frac{b}{a}x}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - \dfrac{b}{a}x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{b^2}{b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}+\frac{b}{a}x} = 0$

⋆ La droite $y = \dfrac{b}{a}x$ est asymptote à la courbe

▷ Equation des tangentes

Dans un calcul semblable au calcul de la tangente d'une ellipse, l'équation de la tangente en $M(x_0, y_0)$ est donnée par $\dfrac{x_0x}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} = -1$

D'où la représentation graphique dans la figure 24.3 :

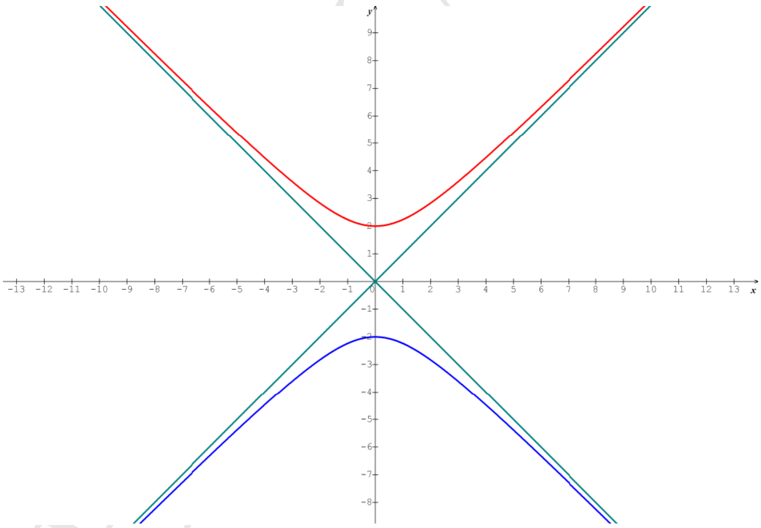


FIGURE 24.3 – Représentation graphique de l'hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{x} = -1$

Remarque 4 :

Nous venons aussi de montrer que, dans le cas de l'hyperbole, les asymptotes ont toujours pour équation $y = \dfrac{b}{a}x$ ou $y = -\dfrac{b}{a}x$

Exercice 2 :

Construire, dans un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, la conique Γ d'équation

$$-x^2 + 2y^2 + 2x + 8y + 5 = 0$$

24.1.7 Définition de la parabole

Le plan $\mathcal{P}$ étant rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$; soit $(\mathcal{C})$ la conique d'équation

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 \text{ avec } a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0$$

S'il existe un repère orthonormé $\mathcal{R}_1\left(\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right)$ dans lequel $(\mathcal{C})$ a pour équation

$$Y^2 = 2pX \text{ ou } Y = 2pX^2$$

Alors $(\mathcal{C})$ est une parabole

Exercice 3 :

Etudier, suivant les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ la forme de la conique d'équation

$$y^2 - (m+2)\,x + 4y + (m+1) = 0$$

Remarque 5 :

Il peut exister des coniques qui sont réunion de 2 droites ; par exemple :

$$y^2 + 2x^2 - 3yx + x - 1 = 0 \Longleftrightarrow (y - x - 1)\,(y - 2x + 1) = 0$$

C'est donc la réunion de 2 droites : $y = x + 1$ et $y = 2x - 1$

24.1.8 Exercices

Exercice 4 :

Equation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes

$\mathcal{H}$ est une hyperbole et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont les vecteurs directeurs des asymptotes de $\mathcal{H}$. O est le point de rencontre des asymptotes.

Montrer que l'équation de $\mathcal{H}$ dans le repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ est de la forme $XY = k$

Exercice 5 :

Soit $\mathcal{C}$ la conique qui a pour équation dans un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

$$4x^2 - 9y^2 + 16x + 18y - 29 = 0$$

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est une hyperbole. Trouver son centre Ω, ses axes, ses sommets et ses asymptotes. Représenter graphiquement $\mathcal{C}$.
2. On considère les vecteurs $\overrightarrow{U} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{V} = 3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$. Donner l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}\left(\Omega, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}\right)$

Exercice 6 :

Construire dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ la courbe d'équation :

$$16\,(x+6)\,|x+6| + 36y\,|y| = 576$$

Exercice 7 :

On donne l'application Φ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \Phi\,(z) = z^2 + z + 1 \end{array}\right.$$

Dans le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, construire l'ensemble E des points M d'affixe $z \in \mathbb{C}$ tels que $+\dfrac{\pi}{2}$ soit un représentant de l'argument de $\Phi\,(z)$

24.2 Coniques définies par foyers et directrices

24.2.1 Présentation

Dans un plan euclidien $\mathcal{P}$, soient $F \in \mathcal{P}$ et une droite $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ telle que $F \notin \mathcal{D}$
L'objet du problème est de connaître l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que la distance de M à F et la distance de M à $\mathcal{D}$ soient dans un rapport constant.

Autrement dit, tels que $\dfrac{d(M,F)}{d(M,\mathcal{D})} = e$ où e est un nombre donné au préalable.

Le plus souvent, le problème est donné sous cette forme :

$$\frac{d(M,F)}{d(M,m)} = \frac{MF}{Mm} = e$$

Où m est la projection orthogonale de M sur $\mathcal{D}$

24.2.2 Définition *(provisoire)*

On appelle $\Gamma(F,\mathcal{D},e)$, l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $\dfrac{d(M,F)}{d(M,m)} = \dfrac{MF}{Mm} = e$ où m est la projection orthogonale de M sur $\mathcal{D}$

- $\Rightarrow$ F est appelé foyer de la courbe $\Gamma(F,\mathcal{D},e)$
- $\Rightarrow$ $\mathcal{D}$ est appelé directrice de la courbe $\Gamma(F,\mathcal{D},e)$
- $\Rightarrow$ e est appelé excentricité de la courbe $\Gamma(F,\mathcal{D},e)$
- $\Rightarrow$ Si K est la projection orthogonale de F sur la droite $\mathcal{D}$, la droite (FK) est appelée axe focal.

Exercice 8 :

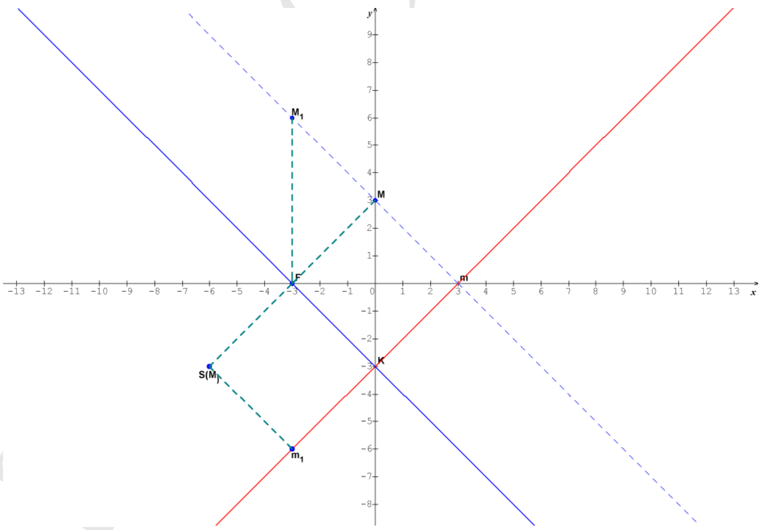


FIGURE 24.4 – Foyer, directrice

La représentation graphique 24.4 amène quelques questions :

1. Les 2 points M et M_1 ont même projection orthogonale m sur $\mathcal{D}$; ppartiennent-ils à la même courbe $\Gamma(F,\mathcal{D},e)$?
2. K est la projection orthogonale de F sur la droite $\mathcal{D}$, et $S(M)$ est le symétrique (orthogonal) du point M par rapport à la droite (FK). Montrer que M et $S(M)$ appartiennent à la même courbe $\Gamma(F,\mathcal{D},e)$.

On montre là que l'axe focal est un axe de symétrie de $\Gamma(F,\mathcal{D},e)$

24.2.3 Lemme

Soit $\mathcal{P}$ un plan euclidien ; alors : On appelle M' la projection orthogonale de M sur l'axe focal (FK) ; M' est aussi le milieu de $[MS(M)]$ où $S(M)$ est le symétrique (orthogonal) du point M par rapport à l'axe focal (FK). Alors :

$$M \in \Gamma(F, \mathcal{D}, e) \Longleftrightarrow MM'^2 + M'F - e^2 MK^2 = 0 \Longleftrightarrow MM'^2 + \left\langle \overrightarrow{M'F} - e\overrightarrow{M'K} \mid \overrightarrow{M'F} + e\overrightarrow{M'K} \right\rangle = 0$$

Démonstration

Nous avons $M \in \Gamma(F, \mathcal{D}, e) \Longleftrightarrow \dfrac{MF}{Mm} = e \Longleftrightarrow \dfrac{MF^2}{Mm^2} = e \Longleftrightarrow MF^2 - e^2 Mm^2 = 0$
Ainsi, si M' la projection orthogonale de M sur l'axe focal (FK), des propriétés des triangles rectangles, nous avons $MF^2 = MM'^2 + M'F^2$ et $M'K^2 = Mm^2$
Donc $MF^2 - e^2 Mm^2 = MM'^2 + M'F^2 - e^2 M'K^2$. Comme $MM'^2 + M'F^2 - e^2 M'K^2 = \left\langle \overrightarrow{M'F} - e\overrightarrow{M'K} \mid \overrightarrow{M'F} + e\overrightarrow{M'K} \right\rangle$, nous avons le résultat.

Remarque 6 :

Nous serons donc amenés à nous intéresser aus barycentres des systèmes pondérés $\{(F,1);(K,-e)\}$ et $\{(F,1);(K,e)\}$ qui sont, en fait, des données du problème

24.2.4 Théorème : cas où $e = 1$

Si $e = 1$, alors $\Gamma(F, \mathcal{D}, 1)$ est une parabole

Démonstration

Pour la démonstration, reportez vous sur la figure 24.5

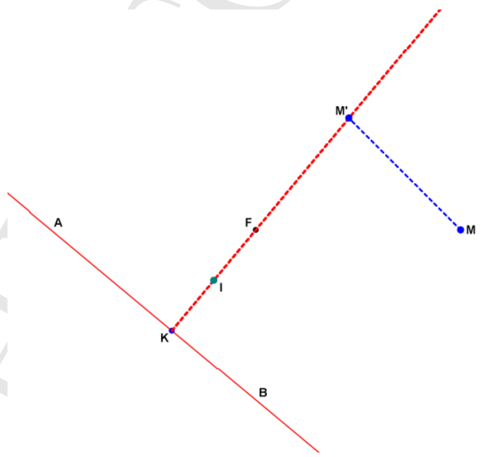


FIGURE 24.5 – La figure pour démontrer que si $e = 1$, alors $\Gamma(F, \mathcal{D}, e)$ est une parabole

- ▷ Si $e = 1$, le barycentre du système pondéré $\{(F,1);(K,-1)\}$ n'existe pas et, pour tout point $X \in \mathcal{P}$, $\overrightarrow{XF} - \overrightarrow{XK} = \overrightarrow{KF}$ et donc :

$$M \in \Gamma(F, \mathcal{D}, 1) \Longleftrightarrow MM'^2 + \left\langle \overrightarrow{KF} \mid \overrightarrow{M'F} + \overrightarrow{M'K} \right\rangle = 0$$

- ▷ Par contre, le barycentre du système pondéré $\{(F,1);(K,1)\}$ existe, et c'est le milieu I du segment $[FK]$. Nous pouvons écrire que $I \in \Gamma(F, \mathcal{D}, 1)$

- ▷ On construit alors un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(I, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ où $\overrightarrow{i} = \dfrac{\overrightarrow{IF}}{IF}$, et en posant $FK = p$, nous avons $IF = \dfrac{p}{2}$
- ▷ Dans ce repère $\mathcal{R}\left(I, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, si M apour coordonnées (x, y), M', la projection orthogonale de M sur l'axe focal a pour coordonnées $(x, 0)$, F a pour coordonnées $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ et $K\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$; la directrice a pour équation $x = -\dfrac{p}{2}$
- ▷ De plus $\overrightarrow{KF} = \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{M'F} + \overrightarrow{M'K} = 2\overrightarrow{M'I}$; or $\overrightarrow{IM'} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$
  Donc
  $$M \in \Gamma(F, \mathcal{D}, 1) \iff MM'^2 + \left\langle \overrightarrow{KF} \mid 2\overrightarrow{M'I} \right\rangle = 0 \iff y^2 - 2px = 0$$
- ▷ Nous avons donc trouvé un repère, le repère $\mathcal{R}\left(I, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, dans lequel la courbe $\Gamma(F, \mathcal{D}, 1)$ a pour équation $y^2 = 2px$.
  C'est donc une parabole.

Remarque 7 :

Vocabulaire

1. $p = FK$ est le paramètre de la parabole
2. Le sommet de la parabole est I, milieu du segment $[FK]$

Exercice 9 :

Soit $M_0(x_0; y_0)$ un point de la parabole $\Gamma(F, \mathcal{D}, 1)$; T est le point d'intersection de la directrice avec la tangente à la parabole en M_0. Il faut montrer que l'angle $\widehat{M_0FT}$ est droit

24.2.5 Etude d'une réciproque

Soit (P) un sous-ensemble de points du plan euclidien $\mathcal{P}$ dont les coordonnées dans un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ vérifient $y^2 = 2px$.
Alors, il existe un point F et une droite $\mathcal{D}$ tels que $(P) = \Gamma(F, \mathcal{D}, 1)$

Démonstration

Il nous suffit de mettre dans des cases adaptées. Reportez vous à la figure 24.6

- ▷ Soit F, le point de coordonnées dans le repère $\mathcal{R}\left(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ et la droite d'équation $x = -\dfrac{p}{2}$
- ▷ Pour $M \in (P)$ où M a pour coordonnées $M(x, y)$ où $y^2 = 2px$. Alors :
  - ⋆ $MF^2 = \left(x - \dfrac{p}{2}\right)^2 + y^2 = x^2 + \dfrac{p^2}{4} - px + 2px = x^2 + \dfrac{p^2}{4} + px$
  - ⋆ $Mm^2 = \left(x + \dfrac{p}{2}\right)^2 = x^2 + \dfrac{p^2}{4} + px$
- ▷ Nous avons $MF^2 = Mm^2$, c'est à dire $\dfrac{MF}{Mm} = 1$ et donc $M \in \Gamma(F, \mathcal{D}, 1)$, c'est à dire $(P) \subset \Gamma(F, \mathcal{D}, 1)$

Par le résultat de 24.2.4, nous avons donc $(P) = \Gamma(F, \mathcal{D}, 1)$

Exemple 2 :

Quelques applications à des paraboles classiques

1. **La parabole** $y = x^2$
   - ▷ Tout d'abord l'origine $O(0, 0)$ est le sommet de la parabole

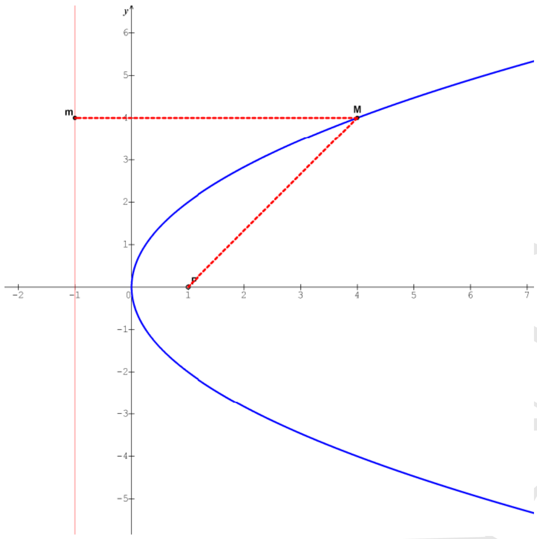


Figure 24.6 – Un schéma pour étudier la parabole

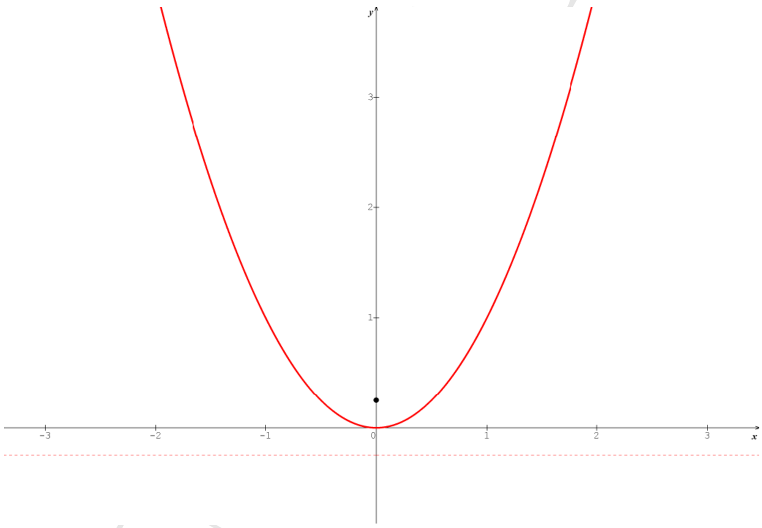


Figure 24.7 – La parabole $y = x^2$ avec son foyer et sa directrice

- ▷ Ensuite, pour des raisons de symétrie, nous pouvons écrire $x^2 = 2py$ et alors le foyer de cette parabole est $F\left(0, \dfrac{p}{2}\right)$ et la directrice a pour équation $y = -\dfrac{p}{2}$
- ▷ Ici, nous avons donc $p = \dfrac{1}{2}$, d'où le foyer est donc $F\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$ et la directrice a pour équation $y = -\dfrac{1}{4}$

Voir donc la figure 24.7

2. **La parabole** $y = -\dfrac{x^2}{2} + x + 1$
   - ▷ Le sommet de la parabole est donné par $\Omega\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$
   - ▷ Dans le repère $\mathcal{R}\left(\Omega, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Si X et Y sont les coordonnées d'un point M dans le repère $\mathcal{R}\left(\Omega, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et x et y dans le repère $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, les formule de changement de repère sont :

$$x = X + 1 \quad \text{et} \quad y = Y + \frac{3}{2}$$

D'où l'équation de la parabole dans le repère $\mathcal{R}\left(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est donnée par :

$$Y + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}(X+1)^2 + (X+1) + 1 \Longleftrightarrow Y + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{2} \Longleftrightarrow X^2 = -2Y$$

- En reprenant et en adaptant ce que nous avons fait dans l'exemple précédent, nous avons, dans le repère $\mathcal{R}\left(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, $X^2 = 2pY$ avec $p = -1$
- Donc, dans le repère $\mathcal{R}\left(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, le foyer F a pour coordonnées $F\left(0, \frac{-1}{2}\right)$ et la directrice $y = \frac{1}{2}$.

  Dans le repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, le foyer F a pour coordonnées $F(1,1)$ et la directrice $y = 2$.

Voir la figure 24.8

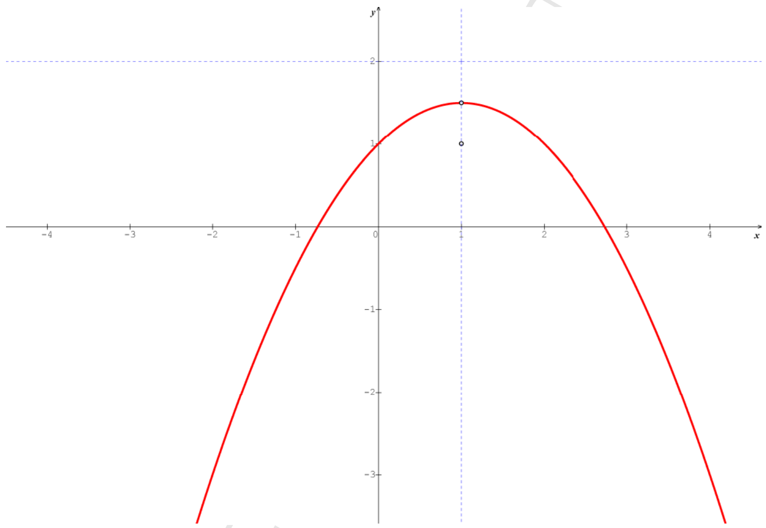


FIGURE 24.8 – La parabole $y = -\frac{x^2}{2} + x + 1$ avec son foyer, sa directrice et son axe

24.2.6 Théorème : cas où $0 < e < 1$

Si $e < 1$, alors $\Gamma(F, \mathcal{D}, e)$ est une ellipse

Démonstration

Nous appelons k l'abscisse du point K, projeté orthogonal de F sur $\mathcal{D}$. Nous considérons un repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ où $\overrightarrow{i} = \frac{\overrightarrow{KF}}{\left\|\overrightarrow{KF}\right\|}$. Nous notons $\overrightarrow{OF} = c\overrightarrow{i}$ où $c > 0$. Nous appelons k l'abscisse du point K, c'est à dire $K(k, 0)$.

Soit M un point de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et M' la projection orthogonale de M sur $\mathcal{D}$.*(Voir la figure 24.9)*

Alors $\overrightarrow{MF} = \begin{pmatrix} x-c \\ -y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MM'} = \begin{pmatrix} x-k \\ 0 \end{pmatrix}$

Et nous avons :

$$M \in \Gamma(F, \mathcal{D}, e) \Longleftrightarrow MF^2 = e^2 MM'^2 \Longleftrightarrow (x-c)^2 + y^2 = e^2 (x-k)^2$$

Tous calculs faits, nous avons :

$$(x-c)^2 + y^2 = e^2(x-k)^2 \Longleftrightarrow \left(1-e^2\right)x^2 + y^2 + 2\left(ke^2 - c\right)x = e^2k^2 - c^2$$

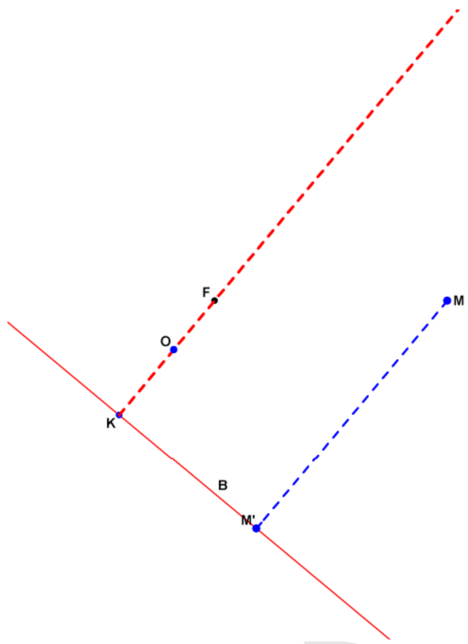


FIGURE 24.9 – Position du problème

Nous choisissons comme origine, le point O, barycentre du système pondéré $\{(F,1)\,;\,(K,-e^2)\}$. Dans ce cas, nous avons alors $\overrightarrow{OF} - e^2\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{0}$
Or :

$$\overrightarrow{OF} - e^2\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{0} \iff c\,\overrightarrow{i} - e^2k\,\overrightarrow{i} = \overrightarrow{0} \iff c - e^2k = 0$$

Ainsi :

$$M \in \Gamma(F,\mathcal{D},e) \iff \left(1-e^2\right)x^2 + y^2 = \frac{c^2}{e^2} - c^2 = \frac{c^2\left(1-e^2\right)}{e^2} \iff x^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{c^2}{e^2}$$

Comme $e < 1$, nous avons $1 - e^2 > 0$

$\Rightarrow$ Si $c = 0$, nous avons

$$M \in \Gamma(F,\mathcal{D},e) \iff x^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = 0$$

C'est à dire que le point M est confondu avec l'origine O qui est, dans notre cas F

$\Rightarrow$ Si, maintenant $c \neq 0$, alors

$$M \in \Gamma(F,\mathcal{D},e) \iff x^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{c^2}{e^2} \iff \frac{x^2}{\frac{c^2}{e^2}} + \frac{y^2}{\frac{c^2}{e^2}\left(1-e^2\right)} = 1$$

C'est donc une ellipse pour laquelle $a = \dfrac{c}{e}$ et $b = a\sqrt{1-e^2}$; on peut donc dire $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2\left(1-e^2\right)} = 1$

Remarque 8 :

1. Nous posons, le plus souvent, pour les coordonnées de F, $F(c,0)$; puisque nous avons $c = e^2k$, les coordonnées de K sont alors $K\left(\dfrac{c}{e^2},0\right)$; mais comme $a = \dfrac{c}{e}$, les coordonnées de K sont donc $K\left(\dfrac{a}{e},0\right)$
2. La droite perpendiculaire en O, le centre de l'ellipse à l'axe focal est <u>l'axe non focal</u>
3. Il y a donc plusieurs symétries dans cette conique :
   - ▷ L'axe focal
   - ▷ L'axe non focal

- ▷ Et O qui est le centre de l'ellipse

4. De la symétrie par rapport à l'axe non focal, on peut déduire que $\Gamma(F, \mathcal{D}, e)$ admet un autre foyer F' et une autre directrice $\mathcal{D}'$ où F' et $\mathcal{D}'$ sont les symétriques respectifs de F et $\mathcal{D}$ par rapport à l'axe focal.
   Et donc $\Gamma(F, \mathcal{D}, e) = \Gamma(F', \mathcal{D}', e)$
5. Une ellipse admet donc 2 foyers et 2 directrices. Nous admettons que ce sont les seuls

24.2.7 Réciproquement

Soit $\mathcal{P}$ un plan euclidien et $\mathcal{E}$ un ensemble de points dont les coordonnées dans un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ vérifient :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Alors, il existe $F \in \mathcal{P}$, $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ et $e \in \mathbb{R}$ où $0 < e < 1$ tels que

$$\mathcal{E} = \Gamma(F, \mathcal{D}, e)$$

Nous avons alors $OF = \sqrt{a^2 - b^2} = c$, $e = \dfrac{c}{a}$ et la directrice $\mathcal{D}$ qui a pour équation $x = \dfrac{a}{e}$

Démonstration

A faire en exercice

Remarque 9 :

1. Nous avons $b^2 = a^2\left(1 - e^2\right)$ et $K\left(\dfrac{a}{e}, 0\right)$
2. De la symétrie par rapport à l'axe non focal, nous avons $OF = OF' = c$ et donc $F'(-c, 0)$, et $\mathcal{D}'$ a pour équation $x = -\dfrac{a}{e}$
3. Si $b > a$, alors $OF = c = \sqrt{b^2 - a^2}$, $e = \dfrac{c}{b}$ et la directrice $\mathcal{D}$ a pour équation $y = \dfrac{b}{e}$

Exercice 10 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Déterminer le centre, les sommets, les foyers, les directrices et l'excentricité e des coniques d'équations :

1. $5x^2 + y^2 - 10x + 4y + 4 = 0$
2. $4x^2 + 9y^2 + 8x + 18y - 23 = 0$

24.2.8 Théorème : cas où $e > 1$

Si $e > 1$, alors $\Gamma(F, \mathcal{D}, e)$ est une hyperbole

Démonstration

La démonstration est très semblable à 24.2.6, et le schéma de référence peut toujours être 24.9
Nous choisissons une nouvelle fois comme origine, le point O, barycentre du système pondéré $\left\{(F, 1)\,;\left(K, -e^2\right)\right\}$ et encore :

$$M \in \Gamma(F, \mathcal{D}, e) \Longleftrightarrow \left(1 - e^2\right)x^2 + y^2 = \frac{c^2}{e^2} - c^2 = \frac{c^2\left(1 - e^2\right)}{e^2} \Longleftrightarrow x^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{c^2}{e^2}$$

Mais, cette fois ci $e > 1$ et $1 - e^2 < 0$
$\Rightarrow$ Si $c = 0$, $\Gamma(F, \mathcal{D}, e)$ est réduite au point F

$\Rightarrow$ Supposons $c \neq 0$, alors :

$$M \in \Gamma(F, \mathcal{D}, e) \iff x^2 - \frac{y^2}{e^2-1} = \frac{c^2}{e^2} \iff \frac{x^2}{\frac{c^2}{e^2}} - \frac{y^2}{\frac{c^2}{e^2}(e^2-1)} = 1$$

L'équation $\dfrac{x^2}{\frac{c^2}{e^2}} - \dfrac{y^2}{\frac{c^2}{e^2}(e^2-1)} = 1$ est du type $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ où $a = \dfrac{c}{e}$ et $b = a\sqrt{e^2-1}$

Remarque 10 :

1. Nous posons toujours $OF = c$ et donc F a pour coordonnées $F(c, 0)$ et $OK = \dfrac{a}{e}$
2. Nous avons toujours 2 sommets. A et A' sont les sommets de la parabole.
3. On définit, comme pour l'ellipse, axe focal, axe non focal, centre de l'hyperbole ; et il y a toujours les mêmes symétries
4. Une hyperbole admet aussi 2 foyers et 2 directrices.

24.2.9 Question réciproque

Soit $\mathcal{P}$ un plan euclidien et $\mathcal{H}$ un ensemble de points dont les coordonnées dans un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ vérifient :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Alors, il existe $F \in \mathcal{P}$, $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ et $e \in \mathbb{R}$ où $e > 1$ tels que

$$\mathcal{H} = \Gamma(F, \mathcal{D}, e)$$

Nous avons alors $OF = \sqrt{a^2+b^2} = c$, $e = \dfrac{c}{a}$ et la directrice $\mathcal{D}$ qui a pour équation $x = \dfrac{a}{e}$

<u>**Démonstration**</u>

A faire en exercice

Remarque 11 :

1. C'est de $b^2 = a^2\left(e^2-1\right)$ que nous tirons c
2. <u>Attention !!</u> Si $\mathcal{H}$ a pour équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$, nous avons toujours $OF = \sqrt{a^2+b^2} = c$, mais $e = \dfrac{c}{b}$ et la directrice $\mathcal{D}$ qui a pour équation $y = \dfrac{b}{e}$

Exercice 11 :

1. Donner foyer, directrice, excentricité pour l'hyperpbole $y = \dfrac{1}{x}$
2. Une hyperbole est dite <u>**équilatère**</u> si et seulement si ses asymptotes sont perpendiculaires.
   Montrer qu'une hyperbole est équilatère si et seulement si $e = \sqrt{2}$

Exercice 12 :

Dans un plan $(\mathcal{P})$ rapporté à un repère orthonormé $(\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $x = 1$ et le point $F(3, 0)$
Soit H la projection orthogonale sur $(\mathcal{D})$ d'un point $M(x, y)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble $(\mathcal{H})$ des points M vérifiant : $MF = \sqrt{3}MH$

2. Reconnaître cet ensemble $(\mathcal{H})$; indiquer la position de ses sommets et l'éguation de ses asymptotes
3. Déterminer par le calcul le nombre de points d'intersection de $(\mathcal{H})$ et de la droite d'équation $y = mx$; on discutera selon les valeurs du paramètre réel m.

24.3 Quelques exercices complémentaires

24.3.1 Définition bifocale de l'ellipse ou de l'hyperbole

Exercice 13 :

1. **Soit $\mathcal{E}$ une ellipse** de foyers F et F', de directrice $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ et d'excentricité e.
   Montrer que, pour tout point $M \in \mathcal{E}$ nous avons $MF + MF' = 2a$ où $2a$ est la distance entre les deux sommets
2. Réciproquement, soient F et F', 2 points distincts du plan, c'est à dire tels que $FF' > 0$. Quel est l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ vérifiant $MF + MF' = \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un nombre fixé au départ.

Exercice 14 :

1. **Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole** de foyers F et F', de directrice $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ et d'excentricité e.
   Montrer que, pour tout point $M \in \mathcal{H}$ nous avons $|MF - MF'| = 2a$ où $2a$ est la distance entre les deux sommets
2. Réciproquement, soient F et F', 2 points distincts du plan, c'est à dire tels que $FF' > 0$. Quel est l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ vérifiant $|MF - MF'| = \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un nombre fixé au départ.

24.3.2 Définition paramétrique des coniques

Exercice 15 :

Montrer que :

$$\left\{\begin{array}{ll} x = & \dfrac{t^2}{2p} \\ y = & t \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

est une représentation paramétrique d'une parabole

Exercice 16 :

Montrer que :

$$\left\{\begin{array}{ll} x = & a\cos\varphi \\ y = & b\sin\varphi \end{array}\right. \quad \text{où } \varphi \in \left]-\pi ; +\pi\right]$$

est une représentation paramétrique d'une ellipse

Exercice 17 :

Quelle est la courbe $\mathcal{C}$ de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{ll} x = & a\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = & \dfrac{2bt}{1+t^2} \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

Exercice 18 :

Quelle est la courbe $\mathcal{C}$ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = & a\dfrac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y = & b\dfrac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

Note : on appelle $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ et $\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$

Exercice 19 :

Quelle est la courbe $\mathcal{C}$ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = & \dfrac{a}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right) \\ y = & \dfrac{b}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right) \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}^*$$

24.3.3 Many and different

Exercice 20 :

Soit $\mathcal{P}$ le plan affine rapporté au repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

1. Déterminer l'ensemble E des points M de $\mathcal{P}$ dont l'affixe $z \in \mathbb{C}$ vérifie :

$$10\,|z|^2 + 3\left(z^2 + \overline{z}^2\right) = 4$$

   où $\overline{z}$ est le complexe conjugré de z. Indiquer ses foyers F et F' ainsi que ses directrices.
2. Soit f la composée de l'homothétie de centre O et de rapport 2 et de la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$. Déterminer l'équation de E' image de E par f
3. Montrer que E' est une ellipse de foyer $f(F)$ et $f(F')$. Comparer les excentricités de E et E'.
4. Construire E et E', sur un même dessin

Exercice 21 :

Dans.un plan affine rapporté au repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on considère la famille de courbes C_m d'équation :

$$2mx^2 -^8 mx - (m-1)\,y^2 + 12m - 2 = 0$$

m étant un paramètre réel.

1. Discuter selon les valeurs de m de la nature de C_m
2. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles C_m est :
   (a) Un cercle
   (b) Une hyperbole équilatère
   Construire ces deux courbes.

Exercice 22 :

Dans le plan $\mathcal{P}$, soit $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé, f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M d'affixe $z \in \mathbb{C}$ associe le point M' d'affixe $z' = z^2 + iz + l$

1. Déterminer l'ensemble des points M dont l'image par f est le point A d'affixe $3i$.
2. Soient $M \in \mathcal{P}$ un point de de coordonnées x et y, et $M' = f(M)$ de coordonnées x' et y' son image par f. Déterminer x' et y' en fonction de x et y

3. Soit Γ l'ensemble des points M du plan dont l'image est sur la droite d'équation $x = -1$. Déterminer une équation cartésienne de Γ.
4. Soit $\mathcal{C}$ l'image par f de la droite $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.
5. Montrer que Γ et $\mathcal{C}$ sont des coniques dont on déterminera les éléments remarquables *(notamment le centre, les axes, les asymptotes et les sommets lorsqu'ils existent)* et que l'on construira.

Exercice 23 :

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on appelle disque unité l'ensemble :

$$D = \{M \in \mathcal{P} \text{ tels que } OM \leqslant 1\}$$

On appelle distance d'un point M à une droite (D),et on la note $d\left(M, (D)\right)$, la plus petite des distances de M aux points de (D).

1. Démontrer que si M est extérieur au disque, alors $d\left(M, (D)\right) = MM_0$ où M_0 est l'intersection du cercle unité avec le segment $[O; M]$
2. En déduire que si x et y sont les coordonnées de M, on a alors $d\left(M, (D)\right) = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$
3. Soit Δ la droite d'équation $y = -2$. Chercher I'ensemble des points M du plan tels que $d\left(M, (D)\right) = 2d\left(M, \Delta\right)$ Représenter (D), Δ et l'ensemble obtenu sur une même figure.

Exercice 24 :

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on définit les trois points :

$$A\left(1, 0\right) \qquad B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \qquad B\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

et la droite D dont une équation est :$x = 1$

1. Déterminer les coordonnées du point G tel que$\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB}$ Quelle est la nature du quadrilatèrc (A, B, G, C) ?
2. On note (Γ) I'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$, coordonnées (x, y), qui vérifient la relation : $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2\left(x - l\right)^2$.
   (a) Montrer que les points B et C appartiennent à (Γ)
   (b) Montrer que (Γ) est I'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que :
   $$MG = \sqrt{2}d\left(M, D\right)$$
   où $d\left(M, D\right)$ désigne la distance de M à la droite D.
   (c) En déduire la nature de (Γ) et en préciser les éléments remarquables. Représenter (Γ) dans le repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

Exercice 25 :

1. Le plan $\mathcal{P}$ étant rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, les coordonnées x et y d'un point mobile M sont données, à chaque instant $t \in \mathbb{R}$, par
   $$\begin{aligned} x &= \quad 1 + 2\cos^2 t \\ y &= \quad 2\sin t \cos t. \end{aligned}$$
   Montrer que la trajectoire de M est un cercle $\mathcal{C}$ et décrit un mouvement uniforme. Écrire, en fonction de t, l'équation de la tangente en M à $\mathcal{C}$.
2. On appelle « transformé » du point $M\left(x, y\right)$ appartenant à $\mathcal{C}$ le point $M'\left(X, Y\right)$ défini par les deux conditions suivantes :
   $\Rightarrow$ $\overrightarrow{OM'}$ est perpendiculaire à la tangente en M à $\mathcal{C}$.

$\Rightarrow$ Le produit scalaire $\left\langle \overrightarrow{OM} \mid \overrightarrow{OM'} \right\rangle$ est égal à 3.

Soit Γ l'ensemble des points M'. Établir que les coordonnées X et Y de M' vérifient le système suivant :

$$X\,(2+\cos 2t) + Y\sin 2t = 3 \text{ et } X\sin 2t - Y\cos 2t = 0$$

Former l'équation cartésienne de Γ. Montrer que Γ est une hyperbole

3. Exprimer les coordonnées X, Y de M' en fonction de t. Déterminer un système de paramètres directeurs de la tangente en M' à Γ. Montrer que cette tangente est perpendiculaire à la droite (OM) en un point m ; vérifier que ce point m appartient au cercle $\mathcal{C}$.
4. On donne à t deux valeurs t_1 et t_2, qui diffèrent de $\dfrac{\pi}{2}$. Montrer que les points correspondants M_1 et M_2 sont diamétralement opposés sur $\mathcal{C}$ et que leurs transformés M_1' et M_2' sont alignés avec O

Exercice 26 :

A l'instant t, réel positif ou nul, on considère un point M de coordonnées (x,y) dans le repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ telles que :

$$x = \cos t \quad \text{ et } \quad y = 2\sin t$$

Quelle est la trajectoire de M lorsque $t \in \mathbb{R}$? Quel est le vecteur vitesse de M à l'instant t ?

Exercice 27 :

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère, orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

1. On considère la courbe (H) d'équation $x^2 - 2y^2 = 1$
   Quelle est la nature de cette courbe ? Déterminer ses sommets, ses asymptotes et la dessiner.
2. On considère dans le plan $\mathcal{P}$ le mouvement du point $M\,(x,y)$ tel que :

$$\begin{cases} x = & \dfrac{1}{\cos 2t} \\ y = & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\tan 2t \end{cases}$$

   (a) Montrer que la trajectoire (T) est une partie de (H) que l'on précisera.
   (b) Déterminer les composantes du vecteur vitesse $\overrightarrow{V}$ dans la base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$. Vérifier que la fonction $N\,(t) = \left\|\overrightarrow{V}\right\|$ est croissante.

Exercice 28 :

Image d'une ellipse par une symétrie

1. (a) Dans le plan affine $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère, orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on donne la courbe (C) d'équation :

$$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$$

   Construire cette courbe et en préciser les éléments.
   (b) Soit M un point mobile de coordonnées :

$$\begin{cases} x = & 2\displaystyle\int_0^t \sin 2u \,\mathrm{d}u \\ y = & 2 + 2\sqrt{2}\displaystyle\int_0^t \cos 2u \,\mathrm{d}u \end{cases} \quad \text{avec } t \in [0;\pi]$$

   Calculer les composantes du vecteur-vitesse et du vecteuraccélération. Déterminer les intervalles de temps pendant lesquels le mouvement est accéléré.
   (c) Montrer que la trajectoire de M est la courbe (C).

2. (a) Soit (D_k) la droite d'équation $2x + y + k = 0$ où k désigne un paramètre réel. Montrer que l'intersection de (C) et de (D_k) est, pour certaines valeurs de k *(que l'on précisera)*, constituée de 2 points M_k et N_k, éventuellement confondus.
   Soit alors I_k, le milieu du segment M_kN_k Calculer ses coordonnées. Quel est, lorsque k varie, l'ensemble des points I_k ?
   (b) On considère l'application affine f, qui au point M de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') définies par :
   $$\begin{cases} x' = & \dfrac{1}{3}(x + 2y - 2) \\ y' = & \dfrac{1}{3}(4x - y + 4) \end{cases}$$
   i. Montrer que f est une involution.
   ii. Trouver l'ensemble des points invariants par f
   iii. Quelle est la nature de l'application f ?
   (c) Déterminer les images directe et réciproque de (C) par f

Exercice 29 :

Le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Soit (D) la droite d'équation $x = 6$ et F le point de coordonnées $(8, 0)$.
Soit θ un nombre réel tel que $0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2}$
On désigne par Γ_θ I'ensemble des points M du plan tels que :
$$\frac{MF}{MH} = \frac{1}{\cos\theta}$$
où H est le projeté orthogonal de M sur (D).

1. Préciser la nature de Γ_θ suivant les valeurs de θ
2. Construire la courbe Γ_0 correspondant à $\theta = 0$.
3. (a) Écrire une équation cartésienne de Ia courbe $\Gamma_{\frac{\pi}{6}}$ correspondant à $\theta = \dfrac{\pi}{6}$
   (b) Préciser les élénents caractéristiques de cette courbe *(foyers, sommets, éléments de symétrie, asymptotes)*
   (c) Construire la courbe $\Gamma_{\frac{\pi}{6}}$
4. Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 10.
   (a) Écrire une équation cartésienne de la courbe (E) transformée de (C) par l'affinité orthogonale d'axe la droite d'équation $y = 0$ et de rapport $\dfrac{3}{5}$
   (b) Préciser les foyers de (E)
   (c) En déduire que les tangentes à $\Gamma_{\frac{\pi}{6}}$ et à (E) aux points d'intersection de ces courbes sont perpendiculaires.

Exercice 30 :

α et β étant deux nombres réels donnés, on considère l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$
$$z^2 + \alpha z + \beta = 0 \tag{24.1}$$

1. Le plan étant muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, soit M le point de coordonnées (α, β). Quel est l'ensemble des points M tels que l'équation 24.1 possède :
   (a) Une solution double ?
   (b) Deux solutions réelles distinctes ?

(c) Deux solutions distinctes, non réelles ? *(On représentera ces différents ensembles dans le plan.)*

2. y étant un réel quelconque, exprimer les solutions de l'équation 24.1 dans le cas où $\alpha = -2y$ et $\beta = -1$
   Vérifier que ces solutions sont réelles, de signes contraires, puis résoudre l'équation d'inconnue x réelle :
$$e^{2x} - 2ye^{x} - 1 = 0$$
3. Résoudre l'équation 24.1 dans le cas où $\alpha = 13$ et $\beta = 49$
4. En déduire les solutions de l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:
$$\left(z^2 - 1\right)\left(z^4 + 13z^2 + 49\right) = 0$$
   Vérifier que ses solutions sontles nombres complexes :
$$z_k = 2e^{ik\frac{\pi}{3}} - e^{-ik\frac{\pi}{3}} \ (k \text{ décrivant } \{0, 1, 2, 3, 4, 5\})$$
5. Dans le plan muni du repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ on note M_k Ie point d'affixe z_k avec $k \in \{0, 1, 2, 3; 4, 5\}$ Démontrer que les points M_k sont sur une même ellipse (E).
6. Démontrer qu'une affinité orthogonale d'axe $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$ transformant (E) en le cercle de diamètre $[M_0; M_3]$ transforme l'hexagone $M_0M_1M_2M_3M_4M_5$ en un hexagone régulier.
7. En déduire que les droites (M_0M_1),(M_1M_2), (M_2M_3),(M_3M_4), $((M_4M_5)$ et (M_5M_0) sont tangentes à une même ellipse (E_1) Tracer les ellipses (E) et (E_1) et placer les points M_k

24.4 Correction de quelques exercices

Exercice 1 :

Etudier, suivant les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ la conique Γ d'équation dans le repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

$$4x^2 + y^2 + 16x - 2y + 25 - 4m = 0$$

Nous avons :

$$4x^2+y^2+16x-2y = 4\left(x^2+4x\right)+\left(y^2-2y\right) = 4\left(x+2\right)^2-16+\left(y-1\right)^2-1 = 4\left(x+2\right)^2+\left(y-1\right)^2-17$$

De telle sorte que :

$$4x^2+y^2+16x-2y+25-4m = 0 \iff 4\left(x+2\right)^2+\left(y-1\right)^2-17+25-4m = 0 \iff 4\left(x+2\right)^2+\left(y-1\right)^2 = 4m-8 = 4\left(m-2\right)$$

Ainsi :

→ Si $m < 2$, alors $\Gamma = \emptyset$
→ Si $m = 2$, Γ est réduit au seul point de coordonnées $(-2, 1)$
→ Si $m > 2$, nous avons alors :

$$4\left(x+2\right)^2 + \left(y-1\right)^2 = 4\left(m-2\right) \iff \frac{\left(x+2\right)^2}{m-2} + \frac{\left(y-1\right)^2}{4\left(m-2\right)} = 1$$

Et Γ est alors une ellipse de centre $C = (-2, 1)$
Représentation graphique dans la figure 24.10 pour $m = 3$:

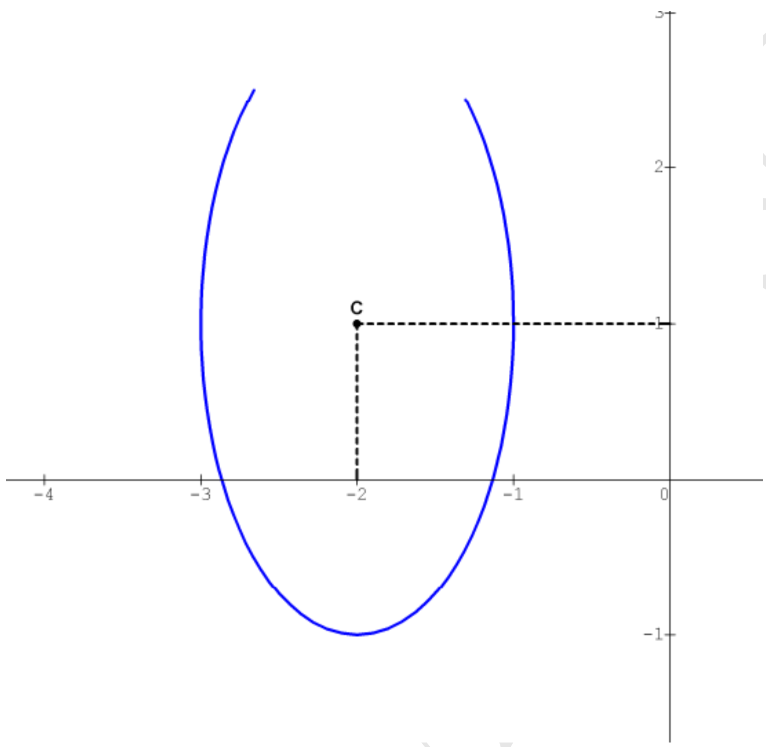


FIGURE 24.10 – Représentation graphique de Γ pour $m = 3$

Exercice 3 :

Etudier, suivant les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ la forme de la conique d'équation

$$y^2 - (m+2)\,x + 4y + (m+1) = 0$$

1. On suppose $m = -2$

   Alors, nous avons $y^2 - (m+2)\,x + 4y + (m+1) = 0 \Longleftrightarrow y^2 + 4y - 1 = 0 \Longleftrightarrow (y+2)^2 - 4 - 1 = 0 \Longleftrightarrow \left(y + 2 + \sqrt{5}\right)\left(y + 2 - \sqrt{5}\right) = 0$

   La conique est alors la réunion de 2 droites, la première d'équation $y = -2 - \sqrt{5}$ et la seconde $y = -2 + \sqrt{5}$

2. On suppose, maintenant $m \neq -2$

   Alors :

$$y^2 - (m+2)\,x + 4y + (m+1) = 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$y^2 + 4y = (m+2)\,x - (m+1)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$y^2 + 4y + 4 - 4 = (m+2)\,x - (m+1)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(y+2)^2 = (m+2)\,x - (m+1) + 4$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(y+2)^2 = (m+2)\,x - m - 1 + 4 = (m+2)\,x - m + 3$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(y+2)^2 = (m+2)\,x - m - 1 + 4 = (m+2)\left(x - \frac{m-3}{m+2}\right)$$

   On appelle Ω_m le point du plan de coordonnées $\Omega_m = \left(\frac{m-3}{m+2}; -2\right)$. Considérons le repère

$\mathcal{R}\left(\Omega_m, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Si X et Y sont les coordonnées d'un point M dans le repère $\mathcal{R}\left(\Omega_m, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, nous avons $X = y + 2$ et $X = x - \dfrac{m-3}{m+2}$.
Dans le repère $\mathcal{R}\left(\Omega_m, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, l'équation de la courbe est donnée par $Y^2 = (m+2)\,X$; c'est donc une parabole.

Exercice 4 :

$\mathcal{H}$ est une hyperbole et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont les vecteurs directeurs des asymptotes de $\mathcal{H}$. O est le point de rencontre des asymptotes.
Montrer que l'équation de $\mathcal{H}$ dans le repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ est de la forme $XY = k$

Supposons que l'hyperbole ait dans un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ pour équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \pm 1$.
L'hyperbole a alors pour asymptotes les droites d'équation $y = \dfrac{b}{a}x$ et $y = -\dfrac{b}{a}x$.

- Un vecteur directeur de la droite $y = \dfrac{b}{a}x$ est doné par $\overrightarrow{X} = a\,\overrightarrow{i} + b\,\overrightarrow{j}$, et un vecteur normé *(ou de norme 1)* est donné par :

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{\left\|\overrightarrow{X}\right\|}\overrightarrow{X} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(a\,\overrightarrow{i} + b\,\overrightarrow{j}\right)$$

  En posant $\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\beta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, nous avons $\overrightarrow{u} = \alpha\,\overrightarrow{i} + \beta\,\overrightarrow{j}$ et $\|\overrightarrow{u}\| = 1$

- De la même manière, en étudiant la droite $y = -\dfrac{b}{a}x$, un vecteur directeur normé de l'asymptote est donné par $\overrightarrow{v} = -\alpha\,\overrightarrow{i} + \beta\,\overrightarrow{j}$ et $\|\overrightarrow{u}\| = 1$

Le changement de repère *(passage du repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ au repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$)* donne, comme changement de coordonnées, si x et y sont les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et X et Y celles du même point M dans le repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, nous obtenons :

$$x = \alpha\,(X - Y) \text{ et } y = \beta\,(X + Y)$$

Ainsi, en remplaçant x et y par leur valeur, nous avons :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{\alpha^2\,(X-Y)^2}{a^2} - \frac{\beta^2\,(X+Y)^2}{b^2} = \pm 1$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{\alpha^2}{a^2}\left(X^2 + Y^2 - 2XY\right) - \frac{\beta^2}{b^2}\left(X^2 + Y^2 + 2XY\right) = \pm +$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2}\right)\left(X^2 + Y^2\right) - 2XY\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2}\right) = \pm 1$$

Or, nous avons

$$\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} = \frac{a^2}{a^2\,(a^2+b^2)} - \frac{b^2}{b^2\,(a^2+b^2)} = 0$$

et

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = \frac{a^2}{a^2\,(a^2+b^2)} + \frac{b^2}{b^2\,(a^2+b^2)} = \frac{2}{(a^2+b^2)}$$

Donc :

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{\beta^2}{b^2}\right)\left(X^2+Y^2\right)-2XY\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}\right)=\pm 1$$
$$\iff$$
$$\frac{4XY}{a^2+b^2}=\pm 1$$
$$\iff$$
$$XY=\pm\frac{a^2+b^2}{4}$$

$XY=\pm\dfrac{a^2+b^2}{4}$ est bien du type $XY=k$

Ce que nous voulions

Exercice 5 :

Cet exercice est une application de l'exercice précédent

Soit $\mathcal{C}$ la conique qui a pour équation dans un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$

$$4x^2-9y^2+16x+18y-29=0$$

1. *Montrer que $\mathcal{C}$ est une hyperbole. Trouver son centre Ω, ses axes, ses sommets et ses asymptotes. Représenter graphiquement $\mathcal{C}$.*

   Nous allons commencer par « triturer » l'équation :

$$4x^2-9y^2+16x+18y-29=0$$
$$\iff$$
$$4\left(x^2+4x\right)-9\left(y^2-2y\right)=29$$
$$\iff$$
$$4\left[(x+2)^2-4\right]-9\left[(y-1)^2-1\right]=29$$
$$\iff 4(x+2)^2-9(y-1)^2=36$$
$$\iff$$
$$\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

   ▷ Le centre de cette conique est le point Ω de coordonnées $\Omega(-2,1)$

   ▷ Dans le repère orthonormé $\mathcal{R}\left(\Omega,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$, l'équation de la conique devient :

$$\frac{X^2}{9}-\frac{Y^2}{4}=1$$

   Dans le repère $\mathcal{R}\left(\Omega,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$, les sommets sont donnés par :

$$A=(3,0)\ \text{ et }\ A'=(-3,0)$$

   C'est à dire, dans le repère $\mathcal{R}\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$

$$A=(1,0)\ \text{ et }\ A'=(-5,0)$$

   ▷ Dans le repère $\mathcal{R}\left(\Omega,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$, les asymptotes ont pour équation :

$$Y=\frac{2}{3}X \text{ et } Y=-\frac{2}{3}X$$

   Et donc, dans le repère $\mathcal{R}\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$

$$y-1=\frac{2}{3}(x+2)\ \text{ et }\ y-1=-\frac{2}{3}(x+2)\iff y=\frac{2}{3}\left(x+\frac{7}{2}\right)\ \text{ et }\ y=-\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

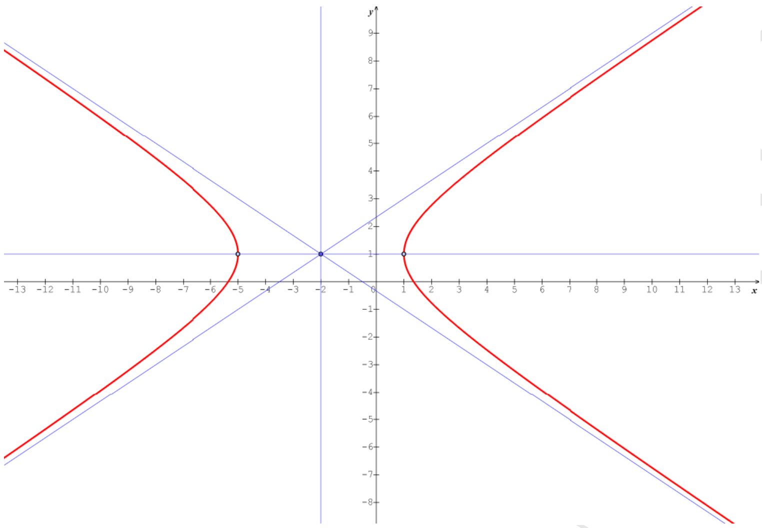


FIGURE 24.11 – Représentation graphique de $\mathcal{C}$ avec le centre, les sommets, les axes et les asymptotes de l'hyperbole

La représentation graphique est la figure 24.11

2. *On considère les vecteurs $\overrightarrow{U} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{V} = 3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$. Donner l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}\left(\Omega, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}\right)$*

Nous pouvons d'ores et déjà remarquer que $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ sont les vecteurs directeurs des asymptotes. L'objet de cette question est de donner une équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes.

- Il faut d'abord donner les formules de changement de repère.
  Soit M un point du plan. Nous appelons X et Y les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}\left(\Omega, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}\right)$ et x et y, les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
  Nous avons donc $\overrightarrow{\Omega M} = X\overrightarrow{U} + Y\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$
  Or :
  $$\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{\Omega 0} + \overrightarrow{OM}$$
  C'est à dire $X\overrightarrow{U} + Y\overrightarrow{V} = -\left(-2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right) + x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} = (x+2)\overrightarrow{i} + (y-1)\overrightarrow{i}$
- D'autre part, comme $\overrightarrow{U} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{V} = 3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$, nous avons :
  $$X\overrightarrow{U} + Y\overrightarrow{V} = X\left(3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}\right) + Y\left(3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}\right) = (3X+3Y)\overrightarrow{i} + (2X-2Y)\overrightarrow{j}$$
- D'où nous obtenons :
  $$\begin{cases} x+2 = & 3X+3Y \\ y-1 = & 2X-2Y \end{cases}$$

Il est donc possible, maintenant de remplacer x et y dans l'équation $\dfrac{(x+2)^2}{9} - \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$, et nous obtenons :

$$\frac{(3X+3Y)^2}{9} - \frac{(2X-2Y)^2}{4} = 1$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(X+Y)^2 - (X-Y)^2 = 1$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$4XY = 1$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$XY = \frac{1}{4}$$

L'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}\left(\Omega, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}\right)$ est donc $XY = \dfrac{1}{4}$

Quatrième partie

Annexes

Annexe A

Structure des nombres en machine

Il n'est pas question de faire un exposé détaillé sur le codage des nombres réels dans un ordinateur. Les conventions de codage sont multiples et diffèrent suivant les langages ou les constructeurs

A.1 Introduction

Dans une machine, il n'est pas question de coder tous les réels : $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels a une structure continue, alors que la machine a pour essence, une taille finie. Nous n'en codons donc qu'une partie. Les réels, en informatique, quels que soient le langage et la machine utilisée, ne sont jamais les réels usuels. Ce n'est qu'un sous-ensemble fini de l'ensemble des dyadiques.
Nous allons donc étudier les réels représentés en mémoire.

A.1.1 La virgule flottante

1. Un opérateur arithmétique ne peut traiter que des nombres qui lui sont présentés dans un certain format ou un nombre restreint de formats bien définis.
   (a) La première composante d'un format est sa taille
   (b) La seconde composante d'un format est la convention dans laquelle le nombre est représenté ou codé.
   (c) Nous allons étudier la représentation en virgule flottante qui consiste à représenter les nombres sous la forme $S\,M \times \alpha^E$ où :
$$\begin{cases} S \text{ est le signe du nombre} \\ M \text{ est la mantisse du nombre} \\ E \text{ est l'exposant du nombre} \\ \alpha \text{ est la base du système de numération} \end{cases}$$
   En informatique, $\alpha = 2$
2. Commençons par la base 10 ; nous connaissons déjà cette notation : comment faisons nous pour représenter 125 000 000 ?
   (a) On peut écrire 125×10^6
   (b) Ou bien $12,5 \times 10^7$
   (c) Ou bien 1250×10^5
   Cette écriture n'est donc pas unique.
3. Parmi ces représentations, nous en retenons une qui sera dite **normalisée** et qui permet de conserver le plus de chiffres significatifs possible. Pour normaliser un nombre, on décale sa mantisse vers la gauche. Rerenons notre exemple :

0	0	0	1	2	5
0	0	1	2	5	0
0	1	2	5	0	0
1	2	5	0	0	0

0	6
0	5
0	4
0	3

La convention normalisée sera donc : | 1 | 2 | 5 | 0 | 0 | 0 | | 0 | 3 |

4. Il y a plusieurs conventions de représentation des nombres flottants en binaire. De façon générale, on place les informations les plus significatives en tête : d'abord le signe, puis l'exposant et pour terminer la mantisse.

signe	exposant	mantisse

Le signe Le signe + est généralement représenté par un 0, alors que le signe - est représenté par un 1

L'exposant Il exprime, généralement, une puissance de 2 [1]. S'il occupe $x+1$ bits, la valeur des exposants s'étend de 0 à $2^{x+1}-1$; les exposants négatifs sont représentés par les valeurs binaires llant de 0 à 2^x, tandis que les exposants positifs de 0 à 2^x-1 sont représentés par les valeurs binaires allant de 2^x à $2^{x+1}-1$. En fait, si e est le nombre représenté par les $x+1$ bits, l'exposant codé est $a = e-(2^x-1)$

La mantisse La mantisse peut être considérée comme entière, la virgule étant alors considérée située complètement à droite ou comme fractionnaire,la virgule étant alors considérée située complètement à gauche.
Ainsi, 125×10^6 peut s'écrire 125000×10^3 est est codée

| 0 | 3 | | 1 | 2 | 5 | 0 | 0 | 0 |

Ou bien 125×10^6 peut s'écrire $0,125\times10^9$ est codée

| 0 | 9 | | 1 | 2 | 5 | 0 | 0 | 0 |

A.1.2 Modélisation

1. Nous appellerons RI l'ensemble des réels représentés en mémoire.
2. Chaque $X \in RI$ s'écrit de la forme $X = \pm m\, b^p$, dans laquelle b est la base de numération (en général $b=2$), m est la mantisse, et p l'exposant, même si les résultats affichés sont en général en base 10.
3. De manière générale, chaque $X \in RI$ est codé sur $(x+1)+y+1 = x+y+2 = 2^3c$ bits ; c représente donc le nombre d'octets sur lesquels est codé X ; ce nombre d'octets dépend du langage et/ou du constructeur.

   En turbo pascal classique, $x=7$, $y=39$ et les nombres sont codés sur 6 octets

A.1.3 Que représentent x et y ?

Ce que représente x Le nombre x définit l'étendue de la représentation de $\mathbb{R}$ par RI ; l'ensemble des $x+1$ bits associés détermine des entiers e compris entre 0 et $2^{x+1}-1$

$$\underbrace{|\ 1\ |\ 0\ |\ \cdots\ |\ \cdots\ |\ 0\ |\ 0\ |}_{x+1\ bits}$$

Chaque bit n'a que deux positions possibles 0 ou 1.
Le nombre maximum E est donc donné par le nombre e, écrit en base 2 qui ne contient que des 1, soit :

$$E = 1+1\times2+1\times2^2+\ldots+2^x = \frac{2^{x+1}-1}{2-1} = 2^{x+1}-1$$

e est appelé le code-exposant du nombre $X \in RI$.

Ce que représente y Le nombre y définit la « finesse » de la représentation de $\mathbb{R}$ par RI ; l'ensemble des y bits associés définit un entier m compris entre 0 et 2^y-1
m est appelé code-mantisse.

1. Dans certaines séries IBM, c'est une puissance de 16

Le dernier bit

1. Le dernier bit est le bit de signe ; si sa valeur σ est 0, alors le nombre est strictement positif ; si sa valeur σ est 1, alors le nombre est strictement négatif.
2. Ainsi, $X \in RI$ est du signe de $1 - 2\sigma$

A.1.4 Représentation habituelle

Habituellement, la représentation d'un nombre est donnée par :

signe	exposant	mantisse

A.1.5 Valeur de X

Dans le standard IEEE, $X = (1 - 2\sigma)\,(1 + 2^{-y}m)\,2^{e-2^{x}+1}$

Exemple

À supposer que dans un langage particulier $A\delta A$[2], pour un constructeur Λ, nous ayons $x = 4$, $y = 2$, alors $x+y+2 = 8$, ce qui montre que les nombres sont codés sur un octet. Quel est le nombre représenté par :

1	1	1	0	0	0	1	1

1. Le premier nombre étant un 1, c'est un nombre négatif
2. Ensuite, $e = 1 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^4 = 3$
3. Le calcul de m donne : $m = 3$

Ce qui fait, que X, dans cette "configuration" est donné par :

$$X = -\left(1 + 2^{-2}3\right) 2^{3-16+1} = -\frac{7}{4}2^{-12} = \frac{-7}{2^{16}}$$

A.2 Etendue de la représentation de RI

La question que nous allons nous poser est, à partir du langage $A\delta A$ (codage des nombres sur un octet), l'étendue de la représentation des réels. Nous ne nous cantonnerons qu'aux réels positifs.
Une autre question que nous nous poserons est la source d'erreurs que nous commettons en utilisant cette représentation.

A.2.1 Encadrements préliminaires

En ne nous intéressant qu'aux $X \in RI$ positifs, nous nous intéressons aux nombres X codés :

0	d	d	d	d	d	d	d	où $d \in \{0, 1\}$

Nous ne nous intéressons donc qu'aux nombres de la forme

$$X = \left(1 + 2^{-2}m\right) 2^{e-2^4+1}$$

1. **Encadrement de l'exposant** e
   Les exposants sont codés sur 5 bits, et nous avons $0 \leqslant e \leqslant 2^5 - 1$, c'est à dire $-2^4+1 \leqslant e-2^4+1 \leqslant 2^5 - 1 - 2^4 + 1$, c'est à dire que l'exposant est compris entre $-2^4 + 1$ et 2^4
2. **En cadrement de la mantisse** m
   La mantisse m est codée sur 3 bits et est telle que $0 \leqslant m \leqslant 2^3 - 1$, et donc $1 \leqslant 1+2^{-2}m \leqslant 3 - 2^{-2}$
3. Le plus grand nombre X_{max} de RI est donné par :
   $$X_{max} = \left(3 - 2^{-2}\right) 2^{2^4} = \frac{11}{4} \times 2^{16} \simeq 180224$$
4. Le plus petit nombre X_{min} de RI est donné par :
   $$X_{max} = 2^{-2^4+1} = 2^{-15} \simeq 3 \times 10^{-5}$$

2. Le langage $A\delta A$ est une pure invention de l'auteur de ce cours

A.3 Représentation matricielle des positifs de RI

Dans ce paragraphe, nous allons donner une représentation non courante de ces nombres RI : il est possible d'envisager une représentation matricielle des réels de RI. Rappelons que les $X \in RI$ positifs sont de la forme $X = \left(1 + 2^{-2}m\right) 2^{e-2^4+1}$ avec m et e variables ($0 \leqslant m \leqslant 2^3 - 1$ et $0 \leqslant e \leqslant 2^5 - 1$). On appelle alors X la matrice

$$X = \left((x_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 2^5 \\ 1 \leqslant j \leqslant 2^3}} \right)$$

où $x_{i,j} = \left(1 + 2^{-2}(j-1)\right) 2^{i-2^4}$.
On vérifie bien que les $x_{i,j}$ décrivent tous les $X \in RI$ positifs. Nous avons donc affaire à une matrice de dimension $2^5 \times 2^3$, chaque ligne de la matrice ayant une puissance de 2 constante.
Une représentation sur un octet permet donc de coder $2^8 = 256$ réels informatiques positifs, soit 512 réels.

A.3.1 Quelques propriétés de la matrice X

La matrice X est de rang 1, c'est à dire que chaque ligne est obtenue en multipliant celle qui la précède par 2.

Démonstration

En effet, soit i_0 une ligne fixée ; les nombres de la ligne i_0 s'écrivent $x_{i_0,j} = \left(1 + 2^{-2}(j-1)\right) 2^{i_0-2^4}$, donc :

$$\begin{aligned} x_{i_0+1,j} &= \left(1 + 2^{-2}(j-1)\right) 2^{i_0+1-2^4} \\ &= \left(1 + 2^{-2}(j-1)\right) 2^{i_0-2^2} \times 2 \\ &= 2x_{i_0,j} \end{aligned}$$

Sachant que $x_{i_0+1,j} = 2x_{i_0,j}$, nous avons, en fait, $x_{i,j} = 2^{i-1}x_{1,j}$; c'est ainsi la simple ré-écriture de $x_{i,j}$
La matrice est donc bien de rang 1

A.3.2 Proposition

L'écart entre deux nombres consécutifs d'une même ligne est constant.

Démonstration

Fixons la ligne au numéro i et faisons la différence $x_{i,j} - x_{i,j+1}$

$$\begin{aligned} x_{i,j} - x_{i,j+1} &= \left(1 + 2^{-2}(j-1)\right) 2^{i-2^4} - \left(1 + 2^{-2}j\right) 2^{i-2^4} \\ &= 2^{i-2^4} \left(\left(1 + 2^{-2}(j-1)\right) - \left(1 + 2^{-2}j\right)\right) \\ &= 2^{i-2^4} \left(-\left(1 + 2^{-2}\right)\right) \\ &= -2^{i-2^4} \left(1 + 2^{-2}\right) \end{aligned}$$

C'est à dire que si nous posons $\Delta_i = x_{i,j} - x_{i,j+1}$, nous avons $\Delta_i = x_{i,j} - x_{i,j+1} = \dfrac{-5}{4} 2^{i-16}$
Pour une ligne donnée i, la différence est donc constante (dépend bien sûr aussi de i)

A.3.3 Proposition

L'écart entre deux nombres consécutifs grandit avec les lignes.

Démonstration

En effet, nous avons $\Delta_{i+1} = \dfrac{-5}{4} \times 2^{i-15} = 2 \times \dfrac{-5}{4} \times 2^{i-16} = 2\Delta_i$

Remarque 1 :

On commet donc moins d'erreurs d'arrondis en utilisant les petits nombres plutôt que les grands nombres.

Annexe B

La fonction logarithme

Il y a plusieurs façons de définir la fonction logarithme, tout comme il y a plusieurs façons de définir la fonction exponentielle
On présente souvent la fonction logarithme comme solution de l'équation fonctionnelle :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}\right)\left(\forall y \in \mathbb{R}^{*+}\right)\left(f\left(xy\right) = f\left(x\right) + f\left(y\right)\right)$$

Dans cet exposé, nous faisons le choix de définir la fonction logarithme à partir des intégrales

B.1 Premières définitions, premières propriétés

B.1.1 Définition

On appelle fonction logarithme népérien la primitive de la fonction $f\left(x\right) = \dfrac{1}{x}$ définie sur $]0;+\infty[$ et qui s'annule en $x = 1$.
Nous notons donc : $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$

Remarque 1 :

De la définition B.1.1, il résulte immédiatement :

1. La fonction ln est définie sur $]0;+\infty[$
2. $\ln 1 = 0$
3. Sur l'intervalle $]0;+\infty[$, nous avons la dérivée de $\ln x$ $(\ln x) = \dfrac{1}{x}$
4. Sur l'intervalle $]0;+\infty[$, sa dfonction dérivée étant positive, la fonction ln est continue et croissante. Ainsi, pour tout $a > 0$ et tout $b > 0$:
   (a) Si $a > b$, alors $\ln a > \ln b$
   (b) Si $a > 1$, alors $\ln a > 0$
   (c) Si $a < 1$, alors $\ln a < 0$

Exercice 1 :

Donner le domaine de définition des fonctions suivantes !

1. $f_1\left(x\right) = \ln\left(x^2+1\right)$
2. $f_2\left(x\right) = \ln\left(2x-1\right)$
3. $f_3\left(x\right) = \ln\left(3-2x\right)$
4. $f_4\left(x\right) = \ln\left|x-1\right|$
5. $f_5\left(x\right) = \ln\left(x^2-5x+6\right)$
6. $f_6\left(x\right) = \ln\left(\ln x\right)$

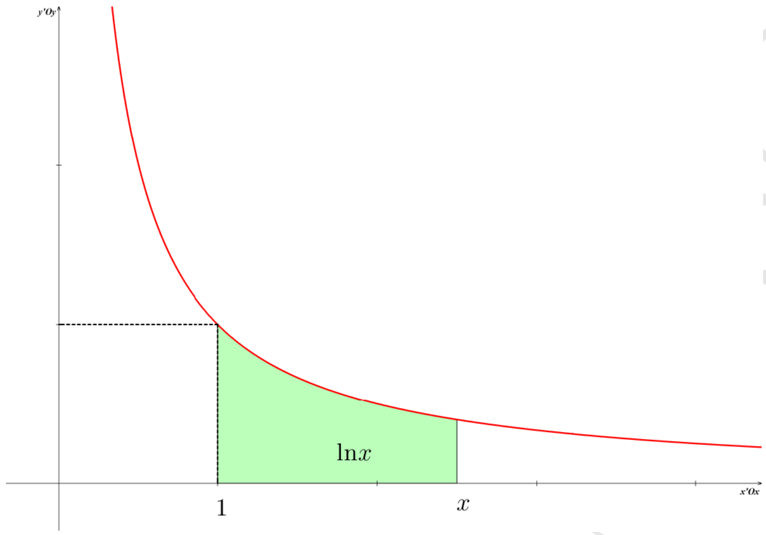


FIGURE B.1 – Visualisation de la définition du logarithme népérien

Exercice 2 :

Démontrer que pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$, nous avons $(x + y)\ln(x + y) \geqslant x \ln x + y \ln y$

B.1.2 Propriété fondamentale

1. Pour tout réels $a > 0$ et $b > 0$, nous avons : $\ln ab = \ln a + \ln b$
2. La fonction logarithme $\ln$ est un homomorphisme du groupe abélien multiplicatif $(\mathbb{R}^{*+}, \times)$ vers le groupe abélien additif $(\mathbb{R}, +)$

Démonstration

- ▷ Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ et $u : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^{*+}$ une fonction dérivable. Comme pour tout $x \in \mathcal{D}$, nous avons $u(x) > 0$, nous pouvons définir une fonction $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ par $g(x) = \ln u(x)$
  g est dérivable comme composée de fonctions dérivables et $g'(x) = \ln' u(x) \times u'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$
- ▷ Soient $y > 0$ et $x > 0$ et considérons la fonction $u(x) = xy$; c'est une application linéaire telle que $u'(x) = y$
  Alors la fonction $g(x) = \ln u(x) = \ln xy$ a pour dérivée $g'(x) = \ln' u(x) \times u'(x) = \dfrac{y}{xy} = \dfrac{1}{x}$
- ▷ Ainsi, g apparaît comme une primitive de la fonction $\dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ et donc $g(x) = \ln x + k$ où $k \in \mathbb{R}$
  Il est possible de connaître k.
  En effet, pour $x = 1$, nous avons $g(1) = \ln 1 + k = k$, c'est à dire, comme $g(1) = \ln y$, nous avons $k = \ln y$ et donc, comme annoncé $\ln xy = \ln x + \ln y$; c'est la propriété fondamentale du logarithme

Exercice 3 :

Pour quels $x \in \mathbb{R}$ avons nous l'égalité $\ln[(2 - x)(x + 3)] = \ln(2 - x) + \ln(x + 3)$?

B.1.3 Conséquences 1

1. Pour tout $a > 0$ et tout $b > 0$, nous avons :

   (a) $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$

   (b) $\ln\left(\dfrac{b}{a}\right) = \ln b - \ln a$

2. Pour tout $a > 0$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $\ln a^n = n \ln a$

Démonstration

Ce résultat est la conséquence directe des homomorphismes de groupes ; donc, rien de nouveau sous le soleil ! Nous allons pourtant le redémontrer.

1. Soit $a > 0$; alors, $\ln 1 = \ln\left(a \times \dfrac{1}{a}\right) \overset{\text{Propriété Fondamentale}}{=} \ln a + \ln\left(\dfrac{1}{a}\right)$ et donc $0 = \ln a + \ln\left(\dfrac{1}{a}\right)$, c'est à dire $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$
2. Soient $a > 0$ et $b > 0$; alors $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \dfrac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = \ln a - \ln b$
3. Soit $a > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$
   - ▷ Nous allons montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln a^n = n \ln a$

     C'est vrai pour $n = 0$ En effet, $\ln a^0 = \ln 1 = 0 = 0 \ln a$

     Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$**, nous avons** $\ln a^n = n \ln a$

     Démontrons la propriété à l'ordre $n+1$ $\ln a^{n+1} = \ln(a^n \times a) = \ln a^n + \ln a = n \ln a + \ln a = (n+1)\ln a$
   - ▷ Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $n \leqslant -1$

     Alors, $a^n = a^{-n_1}$ où $n_1 = -n$ et $n_1 \in \mathbb{N}$.

     Nous avons aussi $a^n = a^{-n_1} = \dfrac{1}{a^{n_1}} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^{n_1}$ de telle sorte que :

     $$\ln a^n = \ln\left(\frac{1}{a}\right)^{n_1} = n_1 \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -n_1 \ln a = n \ln a$$

   Ainsi, pour tout $a > 0$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $\ln a^n = n \ln a$

Remarque 2 :

Nous avons, bien entendu, pour $a_1 > 0, a_2 > 0, \cdots, a_n > 0$:

$$\ln(a_1 a_2 \cdots, a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n \iff \ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln a_k$$

B.1.4 Conséquences 2

Pour tout $a > 0$ et tout $r \in \mathbb{Q}$, nous avons : $\ln a^r = r \ln a$

Démonstration

Soit $a > 0$

Nous allons faire cette démonstration en 2 temps

1. Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Alors $a = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q$ et donc $\ln a = \ln\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q = q \ln\left(a^{\frac{1}{q}}\right)$

   Nous avons donc $\ln a = q \ln\left(a^{\frac{1}{q}}\right) \iff \dfrac{1}{q} \ln a = \ln\left(a^{\frac{1}{q}}\right)$

2. Soit $r \in \mathbb{Q}$; alors, $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$

   Alors $a^r = a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$ et donc

$$\ln a^r = \ln a^{\frac{p}{q}} = \ln \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = p \ln \left(a^{\frac{1}{q}}\right) = p \times \frac{1}{q} \ln a = \frac{p}{q} \ln a = r \ln a$$

Exemple 1 :

Pour $x > 0$, nous avons $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$

B.2 Etude de la fonction logarithme

B.2.1 Limites aux bornes

Nous avons :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
2. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$

Démonstration

1. Démontrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

   Soit $A > 0$. Il nous faut trouver $N \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, si $x > N$, alors $\ln x > A$

   Nous appelons $n = \left[\frac{A}{\ln 2}\right] + 1$ où $[\bullet]$ désigne la partie entière.

   Nous avons donc $n > \frac{A}{\ln 2}$; alors, pour tout $x > 2^n$, nous avons :

$$\ln x > \ln 2^n = n \ln 2 > \frac{A}{\ln 2} \times \ln 2 = A$$

   Ainsi, pour tout $A > 0$, il existe $N \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, si $x > N$, alors $\ln x > A$

   Nous avons donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

2. Démontrons que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$

   Posons $X = \frac{1}{x}$; alors $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = \lim\limits_{X \to +\infty} \ln \frac{1}{X} = \lim\limits_{X \to +\infty} (-\ln X) = -\lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = -\infty$

   Ce que nous voulions

B.2.2 Théorème

1. La fonction logarithme népérien est une bijection de $\mathbb{R}^{*+}$ dans $\mathbb{R}$
2. La fonction logarithme $\ln$ est un isomorphisme du groupe abélien multiplicatif $(\mathbb{R}^{*+}, \times)$ vers le groupe abélien additif $(\mathbb{R}, +)$

Démonstration

1. La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante de $]0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$; c'est donc une bijection de $]0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$
2. C'est un isomorphisme puisque c'est un homomorphisme bijectif

Remarque 3 :

1. Nous avons donc, pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$ l'équivalence :
$$x = y \Longleftrightarrow \ln x = \ln y$$
2. Pour toute fonction $u : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^{*+}$, et tout $x_0 \in \mathcal{D}$, nous avons :
$$\lim_{x \to x_0} u(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \ln(u(x)) = \ln L$$

B.2.3 Direction asymptotique

Nous avons $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

Démonstration

1. ▷ Pour tout $x \in]0; +1]$, nous avons $\ln x \leqslant 0$ et donc, en particulier $\ln x < x$

   ▷ Pour tout $t > 1$, nous avons $\dfrac{1}{t} < 1$, et donc, pour tout $x > 1$:
$$\int_1^x \frac{dt}{t} < \int_1^x dt \Longleftrightarrow \ln x < x - 1 < x$$
   Et donc, pour tout $x > 1$, nous avons $\ln x < x$

   Et, en conclusuion, pour tout $x > 0$, nous avons $\ln x < x$
2. Soit $x > 0$ et donc $\sqrt{x} > 0$ et en appliquant l'inégalité $\ln x < x$ vraie pour $x > 0$ à $\sqrt{x}$, nous avons :
$$\ln \sqrt{x} < \sqrt{x} \Longleftrightarrow \frac{1}{2} \ln x < \sqrt{x} \Longleftrightarrow \ln x < 2\sqrt{x}$$
3. Pour $x > 1$, nous avons $0 < \ln x < 2\sqrt{x}$ et donc $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{2\sqrt{x}}{x} \Longleftrightarrow 0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

   Comme, $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$, nous en concluons que $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

Remarque 4 :

1. Le fait que $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ permet de conclure que l'axe des ordonnées $x = 0$ est une asymptote verticale.
2. La courbe représentative de $\ln x$ n'admet pas d'asymptote, mais une direction asymptotique

B.2.4 Limites remarquables

De l'étude de la direction asymptotique, nous tirons les résultats suivants :

1. Nous avons $\lim_{x \to +1} \dfrac{\ln x}{x - 1} = 1$ et $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$
2. $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$
3. Pour tout $r \in \mathbb{Q}^{*+}$ et tout $s \in \mathbb{Q}^{*+}$, nous avons $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^r}{x^s} = 0$

Démonstration

1. Le rapport $\dfrac{\ln x}{x-1}$ est le rapport de dérivation $\dfrac{\ln x - \ln 1}{x-1}$ et donc $\lim\limits_{x\to+1} \dfrac{\ln x}{x-1}$ est le nombre dérivé de $\ln x$ en $x=1$, c'est à dire $\lim\limits_{x\to+1} \dfrac{\ln x}{x-1} = \dfrac{1}{1} = 1$
2. En faisant le changement de variable $x = 1+h$, nous avons :
$$\lim_{x\to+1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$
3. Soit $x \in]0;1]$ et faisons le changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$ alors,
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X}\ln\frac{1}{X} = \lim_{X\to+\infty} -\frac{\ln X}{X} = 0$$
4. Nous avons $\dfrac{(\ln x)^r}{x^s} = \left(\dfrac{\ln x}{x^{\frac{s}{r}}}\right)^r$

   D'autre part, $x = \left(x^{\frac{s}{r}}\right)^{\frac{r}{s}}$, et donc :
$$\left(\frac{\ln x}{x^{\frac{s}{r}}}\right)^r = \left(\frac{\ln\left(x^{\frac{s}{r}}\right)^{\frac{r}{s}}}{x^{\frac{s}{r}}}\right)^r = \left(\frac{r}{s}\times\frac{\ln\left(x^{\frac{s}{r}}\right)}{x^{\frac{s}{r}}}\right)^r = \left(\frac{r}{s}\right)^r \times \left(\frac{\ln\left(x^{\frac{s}{r}}\right)}{x^{\frac{s}{r}}}\right)^r$$
   En faisant le changement de variable $X = x^{\frac{s}{r}}$, nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(x^{\frac{s}{r}}\right)}{x^{\frac{s}{r}}} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$

   En conclusion, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{r}{s}\right)^r \times \left(\dfrac{\ln\left(x^{\frac{s}{r}}\right)}{x^{\frac{s}{r}}}\right)^r = 0$, c'est à dire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^r}{x^s} = 0$

Remarque 5 :

On dit que la puissance l'emporte sur le logarithme

B.2.5 Représentation graphique de la fonction $\ln x$

1. Tableau de variations

x	0			1		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$\|\|$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\ln x$	$\|\|$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. Graphe de $\ln x$

   Voir la figure B.2

B.2.6 Définition de base du logarithme népérien

Le nombre noté e, unique solution dans $\mathbb{R}^{*+}$ de l'équation $\ln x = 1$ est appelé base du logarithme népérien

Remarque 6 :

Nous admettons que e est un nombre irrationnel, c'est à dire que $e \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et qu'une approximation de e à 10^{-10} près est donnée par : $e \approx 2,7182818285$

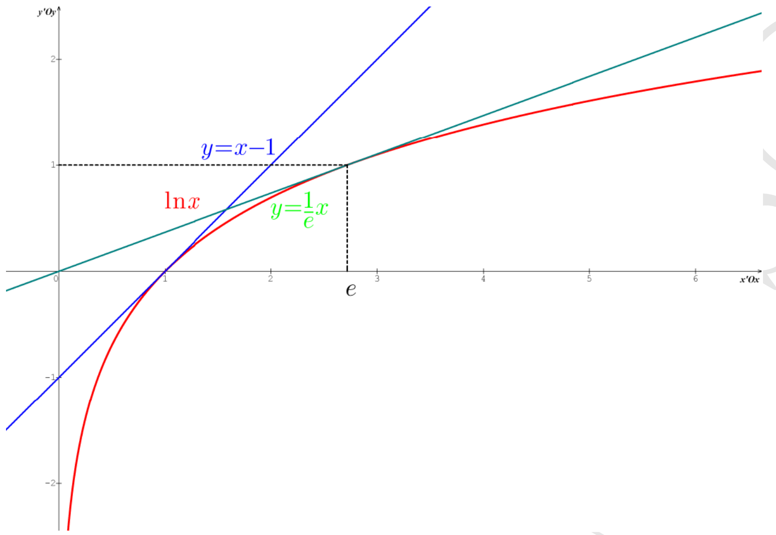


FIGURE B.2 – Visualisation du graphe de la fonction logarithme népérien

B.2.7 Quelques exercices résolus

Exercice 4 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\ln(x^2+x+1) = 0$.

   Premièrement, il faut vérifier que $x^2+x+1>0$, ce qui est simplement du second degré.
   En second lieu, nous avons $\ln(x^2+x+1)=0$ si et seulement si $x^2+x+1=1$, c'est à dire si et seulement si $x=0$ ou $x=-1$. Les seules solutions à l'équation $\ln(x^2+x+1)=0$ sont $x=0$ ou $x=-1$

2. $\ln(x+1)+\ln(x+3)=\ln(x+7)$.

   Pour que cette équation ait un sens, il faut que $x>-1$, et $x>-3$ et $x>-7$, c'est à dire $x>-1$.
   Supposons donc, maintenant, que $x>-1$. En utilisant la propriété fondamentale du logarithme, nous avons :

   $$\ln(x+1)+\ln(x+3)=\ln(x+7) \iff \ln(x+1)(x+3)=\ln(x+7) \iff (x+1)(x+3)=(x+7) \iff x^2+3x-4=0$$

   Les racines de ce polynôme du second degré sont $x=-4$ et $x=1$. On ne conserve, pour des problèmes de domaine de définition que $x=1$

3. $\ln(x+1)-\ln(x+3)=\ln(x+7)$.

   Cette équation est cousine germaine de la précédente et n'est définie que si $x>-1$ nous avons, bien entendu :

   $$\ln(x+1)-\ln(x+3)=\ln(x+7) \iff \ln(x+1)=\ln(x+3)+\ln(x+7) \iff (x+1)=(x+3)(x+7) \iff x^2+9x+20=0$$

   Les solutions de $x^2+9x+20=0$ sont $x_1=-4$ et $x_2=-5$ qui sont en dehors du domaine de définition.
   Il n'y a donc pas de solution à l'équation $\ln(x+1)-\ln(x+3)=\ln(x+7)$

4. $\ln\left(x^2\right)=\ln 4$.

   Cette équation est définie pour tout $x\neq 0$.
   Donc $\ln\left(x^2\right)=\ln 4 \iff x^2=4$, c'est à dire si $x=2$ ou $x=-2$

B.3 Exercices sur la fonction logarithme

Exercice 5 :

Simplifier les écritures suivantes :

1. $A = \dfrac{\ln\left(\sqrt{5}+1\right)+\ln\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}$.
2. $B = 4\ln\left(\sqrt{3}+1\right)+4\ln\left(\sqrt{3}-1\right)-\ln 8$.

Exercice 6 :

Résoudre, dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\ln(x+3)+\ln(x+5)=\ln 15$
2. $\ln(x-2)+\ln(x+2)=\ln 45$
3. $\ln(x-3)+\ln(x+1)=\ln\left(x^2+5\right)$
4. $2\ln(x-2)=\ln x-2\ln 2$
5. $\dfrac{1}{2}\ln(3x-1)+\dfrac{1}{2}\ln(8x-2)=\ln(4x-1)$
6. $\ln(x+3)+\ln(x+2)=\ln(x+11)$
7. $\ln\left(x^2+5x+6\right)=\ln(x+11)$
8. $\ln(-x-2)=\ln\left(\dfrac{-x-11}{x+3}\right)$
9. $\ln(x+2)=\ln(-x-11)-\ln(x+3)$

Exercice 7 :

Résoudre les systèmes définis sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ par les relations suivantes :

1. $\begin{cases} x+y = & 65 \\ \ln x+\ln y = & \ln 1000 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x^2+y^2 = & 169 \\ \ln x+\ln y = & \ln 60 \end{cases}$

Exercice 8 :

1. Calculer $y\in\mathbb{R}$ tel que :
$$\ln y=\ln\left(7+5\sqrt{2}\right)+8\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+7\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$$
2. Démontrer l'égalité :
$$\frac{7}{16}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)-4\ln\left(\sqrt{2}+1\right)=\frac{25}{8}\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Exercice 9 :

Le but de cet exercice est démontrer que $\forall\alpha>0$ on a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0$.

1. On pose
$$\begin{cases} g:[1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & g(t)=t-\ln t \end{cases}$$
Etablir le tableau de variations de f.
2. Montrer que pour tout $t\in[1;+\infty[$, nous avons $0\leqslant\ln t\geqslant t$
3. Poser $t=\sqrt{x}$ et déduire que $\forall x\in[1;+\infty[$ on a : $0\leqslant\dfrac{1}{2}\ln x\leq\sqrt{x}$.
4. En déduire un encadrement de $\dfrac{\ln x}{x}$ pour $x\in[1;+\infty[$.
5. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$.
6. En déduire alors que $\forall\alpha\in]0;+\infty[$ on a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0$
7. En déduire que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}x\ln x=0$.
8. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$.

Exercice 10 :

Le but de cet exercice est le calcul de : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x}$ par des méthodes d'encadrement

1. On pose
$$\begin{cases} f :]-1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x - \ln(x+1) \end{cases}$$
Etablir le tableau de variations de f.
2. En déduire que $\forall x \in]-1;+\infty[$ on a : $x - \ln(1+x) \geqslant 0$.
3. On pose
$$\begin{cases} g :]-1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = \ln(x+1) - \dfrac{x}{x+1} \end{cases}$$
Etablir le tableau de variations de g.
4. En déduire que $\forall x \in]-1;+\infty[$ on a : $\ln(x+1) - \dfrac{x}{x+1} \geqslant 0$.
5. En déduire que $\forall x \in]0;+\infty[$ on a : $\dfrac{1}{x+1} \leqslant \dfrac{\ln(1+x)}{x} \leqslant 1$.
6. En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.
7. De même montrer que $\forall x \in]-1;0[$ on a : $1 \leqslant \dfrac{\ln(x+1)}{x} \leq \dfrac{1}{x+1}$.
8. En déduire $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.
9. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.
10. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.
11. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.

Exercice 11 :

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x - x)$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left((\ln x)^2 - \sqrt{x}\right)$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x + 1}{\ln x}$

Exercice 12 :

Donner les limites en 0 des fonctions suivantes :

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} (\ln x)^3$
2. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \sqrt[5]{x} (\ln x)^8$

Exercice 13 :

1. Faire une étude rigoureuse des fonctions $u(x) = \ln x - \dfrac{x-1}{x}$ et $v(x) = x - 1 - \ln x$
2. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $x > 0$, alors $\dfrac{x-1}{x} < \ln x < x - 1$
3. Appliquer l'inégalité précédente au nombre $\sqrt[n]{e}$
4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < e < \dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n}$

Exercice 14 :

A l'aide d'une intégration par parties, calculer les primitives des fonctions suivantes :

1. $\displaystyle\int \ln t \, dt$
2. $\displaystyle\int (\ln t)^2 \, dt$
3. $\displaystyle\int (\ln t)^3 \, dt$

Exercice 15 :

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln \left|\tan \dfrac{x}{2}\right|$
2. $g(x) = \ln |\cos(ax+b)|$
3. $h(x) = \ln |\ln x|$
4. $k(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

Exercice 16 :

Le logarithme n'est pas une fraction rationnelle

1. Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n noté $A(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $a_n \neq 0$. Démontrer que $x^{-n}A(x)$ admet une limite finie en $+\infty$
2. On suppose qu'il existe deux polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que, pour tout $x > 0$, $\ln x = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$. On note $p = \deg P$ et $q = \deg Q$. Démontrer que $x^{q-p}\ln(x)$ admet une limite non nulle en $+\infty$
3. En déduire que l'hypothèse faite à la question précédente est fausse.

Exercice 17 :

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

1. $\displaystyle\int \frac{4}{2t+1}\, dt$
2. $\displaystyle\int \tan t \, dt$
3. $\displaystyle\int \frac{t}{1+t^2}\, dt$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{t\ln|t|}\, dt$
5. $\displaystyle\int \frac{\sin t}{\cos^3 x}\, dt$
6. $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln t)}{t}\, dt$

Exercice 18 :

Soit α un nombre réel strictement positif $(\alpha > 0)$ et nous considérons $I(\alpha) = \displaystyle\int_1^{\alpha} \cos(\ln x)\, dx$
Calculer $I(\alpha)$ à l'aide de 2 intégrations par parties successives

Exercice 19 :

Une autre définition de la fonction logarithme
A l'aide de l'équation fonctionnelle $f(xy) = f(x) + f(y)$
Soit f une fonction numérique de domaine $\mathcal{D}_f$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$(\forall x \in \mathcal{D}_f)\,(\forall \in \mathcal{D}_f)\,(f(xy) = f(x) + f(y))$$

On suppose, de plus, f dérivable sur $\mathcal{D}_f$

1. Démontrer que, si f n'est pas constante, alors f n'est pas définie en 0. Quelle est, nécessairement, la valeur de $f(1)$?
2. On suppose que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{*+}$ *(Nous aurions tout aussi bien pu choisir $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{*-}$)*
   Pour tout réel $a > 0$, nous considérons la fonction, définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{*+}$ par : $g(x) = f(ax)$
   (a) Calculer la fonction dérivée g' de g en fonction de a et de f'
   (b) En utilisant la propriété fondamentale de f, écrire g sous une autre forme et en déduire une autre expression de g'
   (c) En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x > 0$, nous ayions $f'(x) = \dfrac{k}{x}$

B.4 La fonction exponentielle

La fonction logarithme népérien $\ln x$ étudiée en B.2 est une application continue et strictement croissante de $\mathbb{R}^{*+}$ dans $\mathbb{R}$. c'est donc une bijection qui admet une bijection réciproque

B.4.1 Définition de la fonction exponentielle

On appelle fonction exponentielle, la bijection réciproque de la fonction logarithme
Nous avons donc :

$$\begin{cases} \operatorname{Exp} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{*+} \\ x & \longmapsto & \operatorname{Exp}(x) \end{cases}$$

Remarque 7 :

1. Nous adoptons, pour le moment, la notation Exp pour désigner la fonction exponentielle
2. Il résulte immédiatement, après la définition :
   (a) La fonction Exp est définie sur $\mathbb{R}$
   (b) $y = \operatorname{Exp}(x) \iff y > 0\ x \in \mathbb{R}$ et $x = \ln y$
   (c) $\operatorname{Exp}(0) = 1$ et $\operatorname{Exp}(1) = e$
   (d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Exp}(x) > 0$
   (e) La fonction exponentielle est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc :
      ▷ Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$, $a < b \Longrightarrow \operatorname{Exp}(a) < \operatorname{Exp}(b)$
      ▷ Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a < 0 \Longrightarrow \operatorname{Exp}(a) < 1$
      ▷ Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a > 0 \Longrightarrow \operatorname{Exp}(a) > 1$

B.4.2 Propriété fondamentale

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Exp}(x+y) = \operatorname{Exp}(x) \times \operatorname{Exp}(y)$

Démonstration

▷ C'est la propriété d'isomorphisme de groupe qui nous permet d'affirmer ceci
▷ Redémontrons la, en utilisant les fonctions ln et Exp

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Posons $x_1 = \operatorname{Exp}(x)$ et $y_1 = \operatorname{Exp}(y)$. Nous avons alors :
- $x_1 = \operatorname{Exp}(x) \iff x = \ln x_1$
- $y_1 = \operatorname{Exp}(y) \iff y = \ln y_1$

Donc :

$$x + y = \ln x_1 + \ln y_1 = \ln x_1 y_1 \iff \operatorname{Exp}(x+y) = x_1 y_1 = \operatorname{Exp}(x) \times \operatorname{Exp}(y)$$

Ce que nous voulions

Remarque 8 :

1. Comme la fonction Exp est une bijection sur $\mathbb{R}$, nous avons, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{Exp}(x) = \operatorname{Exp}(y) \iff x = y$$

2. D'autre part : $\lim_{x \to x_0} u(x) = L \iff \lim_{x \to x_0} \operatorname{Exp}(u(x)) = \operatorname{Exp}(L)$

B.4.3 Conséquences

1. Pour tout réels $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, nous avons $\operatorname{Exp}(x-y) = \dfrac{\operatorname{Exp}(x)}{\operatorname{Exp}(y)}$
2. Pour tout rationnel $r \in \mathbb{Q}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\operatorname{Exp}(rx) = (\operatorname{Exp}(x))^r$
3. Pour tout rationnel $r \in \mathbb{Q}$, nous avons $\operatorname{Exp}(r) = e^r$

Démonstration

1. La démonstration du premier point est une illustration des propriétés d'homomorphisme de groupe. On peut, une nouvelle fois, le démontrer directement :

   Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$; alors :

$$\text{Exp}\,(x) = \text{Exp}\,(x - y + y) = \text{Exp}\,(x - y) \times \text{Exp}\,(y)$$

   C'est à dire $\text{Exp}\,(x) = \text{Exp}\,(x - y) \times \text{Exp}\,(y) \Longleftrightarrow \text{Exp}\,(x - y) = \dfrac{\text{Exp}\,(x)}{\text{Exp}\,(y)}$

2. Soient $r \in \mathbb{Q}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ et posons $y = \text{Exp}\,(x)$. Alors, $y^r = (\text{Exp}\,(x))^r$ et $\ln y^r = r \ln y$, c'est à dire

$$\ln\left[(\text{Exp}\,(x))^r\right] = r \ln\left[(\text{Exp}\,(x))\right] \Longleftrightarrow \ln\left[(\text{Exp}\,(x))^r\right] = rx \Longleftrightarrow (\text{Exp}\,(x))^r = \text{Exp}\,(rx)$$

3. Pour tout rationnel $r \in \mathbb{Q}$, nous avons $r = r \times 1$ et donc, d'après ce que nous avons vu précédemment :

$$\text{Exp}\,(r) = \text{Exp}\,(1 \times r) = (\text{Exp}\,(1))^r$$

   Or, $\text{Exp}\,(1) = e$ et donc $\text{Exp}\,(r) = e^r$

B.4.4 Définition axiomatique

Nous posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\text{Exp}\,(x) = e^x$ et nous avons donc :

$$y = e^x \Longleftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ et } y > 0 \text{ et } x = \ln y$$

Remarque 9 :

1. Désormais, nous adopterons toujours la notation $e^x = \text{Exp}\,(x)$
2. Les valeurs données à l'exponentielle *(à e^π, par exemple)* peuvent se calculer par des méthodes numériques. Il est évidemment beaucoup plus facile de se référer à une table numérique *(véritable objet de musée)* ou la calculatrice. ($e^\pi = 23,1407$)
3. La fonction exponentielle est aussi appelée fonction exponentielle de base e

B.4.5 Dérivée de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle est égale à sa dérivée, autrement dit : $(e^x)' = e^x$

Démonstration

La démonstration est simple et utilise la dérivée des fonctions composées :
$\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$, c'est à dire, ici : $(\text{Exp}\,(x))' = \dfrac{1}{\ln' \circ \text{Exp}\,(x)}$
Or, $\ln' x = \dfrac{1}{x}$, et donc $(\text{Exp}\,(x))' = \dfrac{1}{\ln' \circ \text{Exp}\,(x)} = \dfrac{1}{\frac{1}{\text{Exp}(x)}} = \text{Exp}\,(x)$
Ce que nous voulions

B.4.6 Limites aux bornes

Nous avons :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Démonstration

1. Démontrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

   Dans un premier temps, comme nous étudions la limite en $+\infty$, on peut supposer $x > 0$.
   Etudions la fonction $\Phi(x) = e^x - (x+1)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
   Nous avons $\Phi'(x) = e^x - 1$, et comme $x \geqslant 0$, la fonction exponentielle étant croissante, nous avons $e^x \geqslant 1$ et donc $\Phi'(x) = e^x - 1 \geqslant 0$, ce qui induit que la fonction Φ est croissante sur $]0; +\infty[$ et, qu'en particulier, pour tout $x \in]0; +\infty[$, nous avons $\Phi(x) \geqslant \Phi(0)$; or, $\Phi(0) = 0$ et donc, pour tout $x \in]0; +\infty[$, nous avons :

   $$e^x - (x+1) \geqslant 0 \Longleftrightarrow e^x \geqslant (x+1)$$

   Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 1 = +\infty$, nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
2. Démontrons que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

   Faisons le changement de variables $X = \dfrac{1}{x}$; alors :

   $$\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{X \to +\infty} e^{-X} = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{e^X}$$

   Comme $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$, nous avons $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{e^X} = 0$, et donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x$

Remarque 10 :

1. Un résultat de la proposition ci-dessus montre que la droite $y = 0$ est asymptote à la courbe
2. Toujours dans la proposition ci-dessus, pour montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, nous avons minoré e^x par un polynôme du premier degré ; en fait il est très possible, au voisinage de $+\infty$ de minorer e^x par un polynôme de degré n

B.4.7 Branches infinies

Nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

Démonstration

Nous avons :

$$\ln\left(\frac{e^x}{x}\right) = \ln e^x - \ln x = x - \ln x = x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$$

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{\ln x}{x} = 1$, ce qui fait que $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

En conclusion, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{e^x}{x}\right) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

Remarque 11 :

1. En fait, nous avons, pour tout $r \in \mathbb{Q}^{*+}$ et tout $s \in \mathbb{Q}^{*+}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{rx}}{x^s} = +\infty$

   Comme tout à l'heure, nous écrivons $y = \dfrac{e^{rx}}{x^s}$ et

   $$\ln y = \ln\left(\frac{e^{rx}}{x^s}\right) = rx - s\ln x = x\left(r - \frac{s\ln x}{x}\right)$$

   Et la fin de la démonstration est la même
2. On dit, dans ce cas, que **l'exponentielle l'emporte sur la puissance**

B.4.8 Graphe de la fonction exponentielle

Voici le graphe de la fonction exponentielle (figure B.3), graphe que nous aurions très bien pu faire, par symétrie de la la fonction $\ln x$ par rapport à la première bissectrice $y = x$

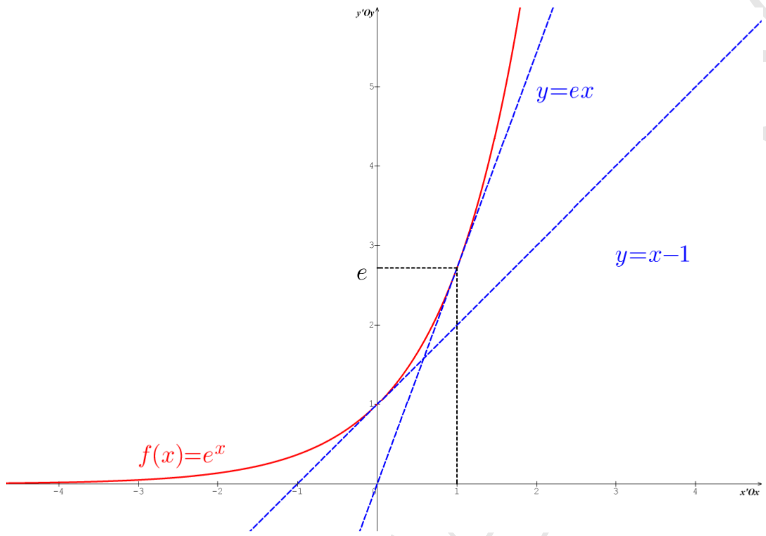


FIGURE B.3 – Le graphe de la fonction exponentielle avec les tangentes remarquables $y = x - 1$ et $y = ex$

Exemple 2 :

On considère la fonction $f(x) = xe^{\frac{1}{2}\left|\ln x^2\right|}$ que nous allons étudier

1. Premièrement, f n'est pas définie pour $x = 0$; ainsi, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$
2. En second lieu, f est impaire ; en effet :
$$f(-x) = -xe^{\frac{1}{2}\left|\ln(-x)^2\right|} = -xe^{\frac{1}{2}\left|\ln x^2\right|} = -f(x)$$
3. Nous réduisons donc le domaine d'étude à $x > 0$; on peut donc dire que, si $x > 0$, alors $\ln x^2 = 2\ln x$
   (a) Si $x \geqslant 1$, alors $\left|\ln x^2\right| = 2\left|\ln x\right| = 2\ln x$ de telle sorte que :
   $$f(x) = xe^{\frac{1}{2}\times 2\ln x} = x^2$$
   (b) Maintenant, si $0 < x \leqslant x$ alors $\left|\ln x^2\right| = 2\left|\ln x\right| = -2\ln x = 2\ln\dfrac{1}{x}$ et donc :
   $$f(x) = xe^{\frac{1}{2}\times 2\ln\dfrac{1}{x}} = 1$$
4. D'où le graphe (figure B.4) :

B.5 Exercices sur la fonction exponentielle

Exercice 20 :

Commençons par un exercice simple !
Simplifier les expressions suivantes :

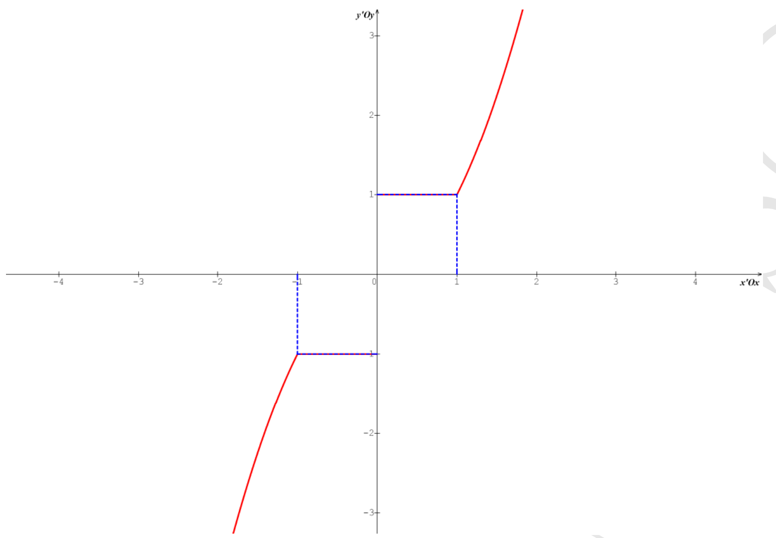


FIGURE B.4 – Le graphe de la fonction $f(x) = xe^{\frac{1}{2}\left|\ln x^2\right|}$

1. $a = e^{3\ln 2}$
2. $b = \ln\sqrt{e}$
3. $c = \ln e^{\frac{1}{3}}$
4. $d = e^{-2\ln 3}$
5. $k = \ln\left(e^{\frac{-1}{2}}\right)$
6. $l = \sqrt[5]{e}$

Exercice 21 :

Résoudre les équations ci-dessous *(Effectuer le changement de variables $y = e^x$)*

1. $e^x - e^{-x} = \dfrac{8}{3}$
2. $e^{2x} - 36e^x + 2 = 0$

Exercice 22 :

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions définies ci-dessous :

1. $f_1(x) = e^{3x}$
2. $f_2(x) = xe^{x^2}$
3. $f_3(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$
4. $f_4(x) = \cos xe^{\sin x}$
5. $f_5(x) = xe^{\sqrt{x}}$
6. $f_6(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)e^{2x}$

Exercice 23 :

Etudier les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{1}$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(\ln x)^m}{e^{px}}$ avec $m \in \mathbb{Q}^+$ et $p \in \mathbb{Q}^+$
3. $\lim\limits_{x\to 0} x^n (\ln|x|)^m$ avec $m \in \mathbb{Q}^+$ et $n \in \mathbb{Q}^+$
4. $\lim\limits_{x\to -\infty} x^n e^{px}$ avec $n \in \mathbb{Q}^+$ et $p \in \mathbb{Q}^+$

Exercice 24 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \ln u_n$

1. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Quelle en est sa limite ?
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Donner sa limite.

Exercice 25 :

Résoudre, dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x :

1. $4e^{-5x} + 3e^{-3x} - e^{-x} = 0$
2. $e^{4x+2} - \dfrac{e^2}{e^{4x+2}} = e^2 - 1$

Exercice 26 :

1. Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel a, l'existence des solutions pour le système :

$$\begin{cases} e^x \times e^{2y} = & a \\ 2xy = & 1 \end{cases}$$

   Avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$
2. Résoudre complètement dans le cas $a = \sqrt{e^5}$

Exercice 27 :

1. On considère les deux intégrales :

$$A = \int_0^x e^t \cos 2t \, dt \qquad B = \int_0^x e^t \sin 2t \, dt$$

   A l'aide d'une intégration par parties appliquée à A et B, établir une relation entre A et B. En déduire les expressions de A et B
2. On pose :

$$I = \int_0^x e^t \cos^2 t \, dt \qquad J = \int_0^x e^t \sin^2 t \, dt$$

   Calculer $I + J$, $I - J$ et en déduire I et J

Exercice 28 :

Etudier les 2 fonctions réelles f et g de la riable réelle x définies par :

$$f(x) = \ln|e^x - 1| \qquad g(x) = \ln(e^x + 1)$$

Tracer les courbes représentatives F de f et G de g dans un repère orthonormé. Chercher des symétries entre F et G

Exercice 29 :

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{|x+1|}$

1. Etudier f et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé
2. Calculer l'aire du domaine $\mathcal{A}$ défini par :

$$\mathcal{A} = \{M(x, y) \text{ où } -1 \leqslant x \leqslant 0 \text{ et } f(x) \leqslant y \leqslant 0\}$$

B.6 Autres fonctions exponentielles, autres fonctions logarithmes

B.6.1 Etude de la fonction $f_\alpha(x) = e^{\alpha x}$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$

On peut commencer à remarquer que nous pouvons prendre $\alpha \neq 0$, car si $\alpha = 0$, alors $f_0(x) = e^{0 \times x} = 1$ est une fonction constante et l'étude ne présente pas d'intérêts.

1. **Continuité** : f_α est définie et continue sur $\mathbb{R}$

2. **f_α est un homomorphisme du groupe $(\mathbb{R},+)$ dans le groupe $(\mathbb{R}^{+*},\times)$** puisque
$$f_\alpha(x+y)=e^{\alpha(x+y)}=e^{\alpha x}e^{\alpha y}=f_\alpha(x)\,f_\alpha(y)$$
3. **La dérivée** de $f_\alpha(x)$ est donnée par $f'_\alpha(x)=\alpha e^{\alpha x}=\alpha f_\alpha(x)$
La dérivée est donc du signe de α ; ainsi :
   - ▷ Si $\alpha>0$, alors f_α est croissante
   - ▷ Si $\alpha<0$, alors f_α est décroissante
4. **Les limites**
   (a) Pour $\alpha>0$
      - ▷ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\alpha x}=+\infty$
      - ▷ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\alpha x}=0$

   (b) Pour $\alpha<0$
      - ▷ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\alpha x}=0$
      - ▷ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\alpha x}=+\infty$
5. **f_α est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$** puisque f_α est monotone et continue.
6. **Graphe de f_α** Figure B.5

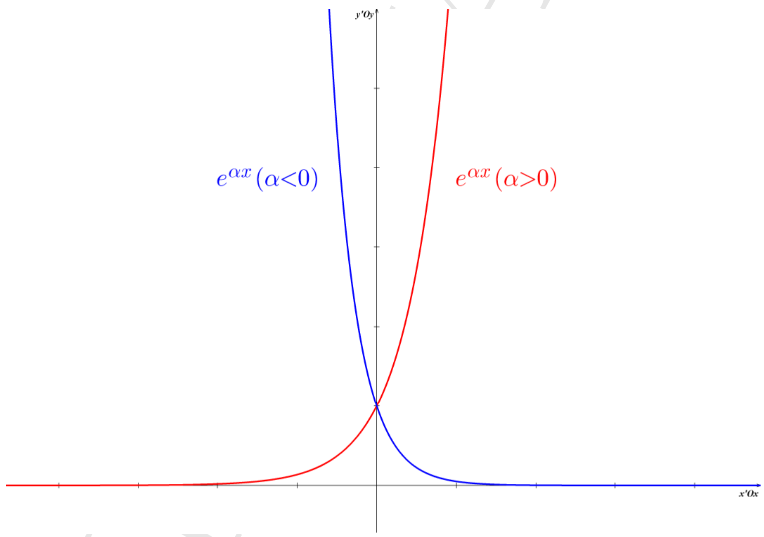


FIGURE B.5 – Allures du graphe de la fonction $f_\alpha(x)=e^{\alpha x}$ pour $\alpha>0$ et $\alpha<0$

7. On pose $\alpha=\ln a$ où $a>0$ et $a\neq 1$; alors, $f_\alpha(x)=e^{\alpha x}=e^{x\ln a}$

B.6.2 Définition de l'exponentielle de base a

On appelle exponentielle de base a l'isomorphisme de groupe de $(\mathbb{R},+)$ dans le groupe $(\mathbb{R}^{+*},\times)$ défini par :
$$f_\alpha(x)=e^{x\ln a}\text{ pour } a>0 \text{ et } a\neq 1$$
Nous notons : $a^x=e^{x\ln a}=\mathrm{Exp}_a(x)$

B.6.3 Conséquences évidentes

1. Pour tout $a > 0$ avec $a \neq 1$, nous avons $\text{Exp}_a(1) = a^1 = a$ et $\text{Exp}_a(0) = a^0 = 1$
2. Pour tout $y > 0$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $u = a^x = e^{x \ln a}$
3. Pour tout $a > 0$ avec $a \neq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, nous avons :
   (a) $a^{x+y} = a^x \times a^y$ et $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$
   (b) $a^{xy} = (a^x)^y$
   (c) $\ln a^x = x \ln a$
   (d) $a^x = a^y \Longleftrightarrow x = y$
   (e) $(a^x)' = (\ln a)\, a^x$

Démonstration

Les démonstrations sont simples ; les faire en exercice
Graphe de a^x en figure B.6

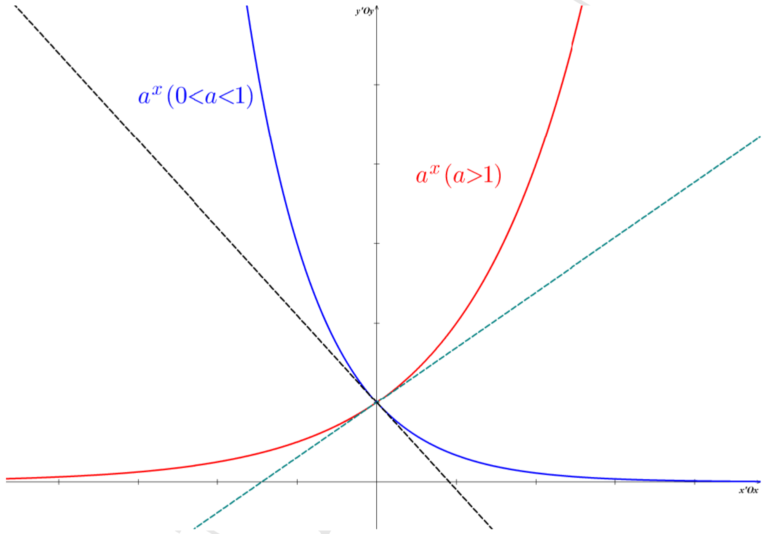


FIGURE B.6 – Allures du graphe des fonction a^x pour $0 < a < 1$ et $a > 1$

B.6.4 La fonction logarithme de base a

On appelle fonction logarithme de base a avec $a > 0$ et $a \neq 1$, la bijection réciproque de la fonction a^x et nous la notons $\log_a(x)$
Nous avons donc :

$$\begin{cases} \log_a : \mathbb{R}^{*+} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad x & \longmapsto \log_a(x) \end{cases}$$

Et $y = \log_a(x) \Longleftrightarrow x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$ et $x = a^y = e^{y \ln a}$

B.6.5 Proposition

Pour tout $a > 0$ tel que $a \neq 1$, pour tout $x > 0$, nous avons $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

Démonstration

Soient donc $a > 0$ tel que $a \neq 1$ et $x > 0$. Alors,

$$y = \log_a(x) \Longleftrightarrow y \in \mathbb{R} \text{ et } x = a^y \Longleftrightarrow \ln x = y \ln a \Longleftrightarrow y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Ce que nous voulions

B.6.6 Propriétés du logarithme de base a

1. Pour tout $a > 0$ avec $a \neq 1$, nous avons $\log_a(1) = 0$ et $\log_a(a) = 1$
2. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe $x > 0$ tel que $y = \log_a(x)$
3. Pour tout $a > 0$ avec $a \neq 1$ et tout $x > 0$ et tout $y > 0$, nous avons :
   (a) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
   (b) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
   (c) $\log_a x^y = y \log_a$
   (d) $\log_a x = \log_a y \iff x = y$
   (e) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

Démonstration

Les démonstrations sont simples ; les faire en exercice

B.6.7 Limites de la fonction logarithme de base a

Soit $a > 0$ avec $a \neq 1$; alors :

1. Si $a > 1$, alors :
   (a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a(x) = +\infty$
   (b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \log_a(x) = -\infty$
2. Si $a < 1$, alors :
   (a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a(x) = -\infty$
   (b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \log_a(x) = +\infty$

Graphe de $\log_a(x)$ en figure B.7

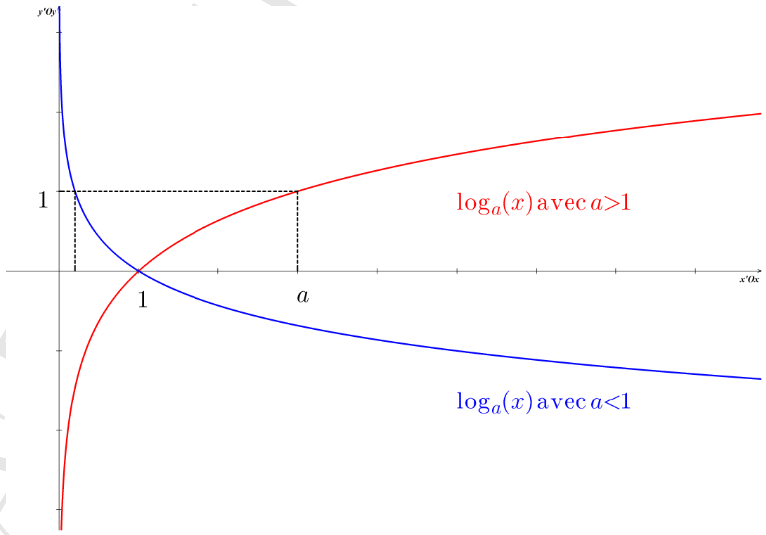


FIGURE B.7 – Allures du graphe des fonction $\log_a(x)$ pour $0 < a < 1$ et $a > 1$

Exemple 3 :

Un grand exemple de logarithme de base quelconque est le logarithme de base 10 que l'on retrouve surtout en physique et en chimie

Exercice 30 :

Montrer que, pour tout $x > 0$, tout $a > 0$ avec $a \neq 1$ et tout $b > 0$ avec $b \neq 1$, $\log_a x = \log_b x \times \log_a b$

Exercice 31 :

1. Démontrer que, pour tout $a > 0$ avec $a \neq 1$, nous avons :
$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}\right) \left(\log_a x \times \log_{a^2} x = \frac{1}{2} \left(\log_a x\right)^2\right)$$
2. Résoudre, dans $\mathbb{R}^{*+}$ l'équation définie par $\log_3 x \times \log_9 x = 2$

Exercice 32 :

Démontrez que, pour tout nombre réels positifs a,b et c avec $a \neq 1$, $b \neq 1$ et $c \neq 1$:
$$\log_a b \times \log_b c \times \log_c a = 1$$
Généralisation ?

Exercice 33 :

Résoudre les systèmes suivants où les inconnues sont $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$:

1. $\left\{ \begin{array}{rl} 4\left(\log_x y + \log_y x\right) = & 17 \\ xy = & 243 \end{array} \right.$
2. $\left\{ \begin{array}{rl} 7\left(\log_x y + \log_y x\right) = & 50 \\ xy = & 256 \end{array} \right.$
3. $\left\{ \begin{array}{rl} 2\log_x y + 2\log_y x = & -5 \\ xy = & e \end{array} \right.$

Exercice 34 :

Résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\log_a x > \log_{a^3}(3x-2)$

Exercice 35 :

Résoudre les équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

1. $e^{\ln\left(1-x^2\right)} = -2x+1$
2. $\left(x^2-1\right)e^{\ln(x-2)} = \ln e^{x+1}$
3. $7^{x+\frac{4}{3}} - 5^{3x} = 2\left(7^{x+\frac{1}{3}} + 5^{3x+1}\right)$
4. $2^x + \dfrac{6}{2^x} = 5$
5. $5^{3x} = 7$
6. $3^{x+2} + 9^{x-1} = 1458$

B.7 Fonctions avec exponentielles et Logarithmes

L'objet de cette section est d'étudier les fonctions du type $u(x)^{v(x)}$
Le plus souvent, nous allons procéder par des exemples.

B.7.1 La dérivée de $\Phi(x) = \ln|u(x)|$

Soit $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique d'une variable réelle, à valeurs réelles de domaine $\mathcal{D}_u$, dérivable sur $\mathcal{D}_u$. Alors, la dérivée de $\Phi(x) = \ln|u(x)|$ est donnée par :
$$\Phi'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Démonstration

1. Tout d'abord, le domaine de définition de Φ est :
$$\mathcal{D}_\Phi = \{x \in \mathcal{D}_u \text{ tels que } u(x) \neq 0\}$$
2. Soit $\mathcal{D}_1 = \{x \in \mathcal{D}_u \text{ tels que } u(x) > 0\}$. Alors, $\Phi(x) = \ln|u(x)| = \ln u(x)$ et en utilisant les théorèmes de composition des fonctions dérivables, nous avons : $\Phi'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$
3. Soit $\mathcal{D}_2 = \{x \in \mathcal{D}_u \text{ tels que } u(x) < 0\}$. Alors, $\Phi(x) = \ln|u(x)| = \ln(-u(x))$ et en utilisant les théorèmes de composition des fonctions dérivables, nous avons : $\Phi'(x) = \dfrac{-u'(x)}{-u(x)} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

En remarquant que $\mathcal{D}_\Phi = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, nous avons le résultat.

Remarque 12 :

Cette dérivée nous fait entrevoir de nouvelles primitives ; en effet :
$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln|u(x)| + K$$

B.7.2 Etude de $f(x) = e^{u(x)}$

1. En supposant u définie, continue et dérivable sur son domaine $\mathcal{D}_u$, nous avons f définie aussi sur $\mathcal{D}_u$
2. La dérivée de f est donnée par : $f'(x) = u'(x)\,e^{u(x)}$

B.7.3 Etude de $g(x) = (u(x))^{v(x)}$

Retenez que dans le cas de fonctions du type $g(x) = (u(x))^{v(x)}$, **il faut toujours passer par l'exponentielle et le logarithme** Et donc : $g(x) = (u(x))^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}$. Ce qui confirme que g n'est définie que si $u(x) > 0$

B.7.4 Quelques exemples

1. **Donner $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$**

   C'est une question très classique et qui est souvent piégeuse !!
   Comme dit dans B.7.3, il faut passer l'exponentielle et le logarithme :
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$
   Il suffit, maintenant, d'étudier $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

   Nous avons : $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$

   Et, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{N\to0}\dfrac{\ln(1+N)}{N} = 1$

   Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$
2. **Etude de la fonction $f(x) = x^x$**

(a) Nous commençons donc, comme conseillé en B.7.3 par écrire différemment f :

$$f(x) = x^x = e^{x \ln x}$$

Nous en déduisons que le domaine de définition de f est $]0; +\infty[$.
f est donc continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ comme composée de fonctions continues et dérivables sur $]0; +\infty[$

(b) <u>Limites aux bornes</u>

- ▷ Nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln x = +\infty$ et donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x \ln x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^x = +\infty$
- ▷ Nous avons $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$, et donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} e^{x \ln x} = 1$

  Nous pouvons donc **prolonger f par continuité à droite de** 0 en posant $f(0) = 1$

(c) <u>Calcul de la dérivée</u>

Le calcul de la dérivée nous donne : $f'(x) = (\ln x + 1) e^{x \ln x}$. Le signe de la dérivée ne dépend donc que de celui de $\ln x + 1$ Donc :

- ▷ Si $0 < x < \dfrac{1}{e}$, alors $f'(x) \leqslant 0$ et f est décroissante
- ▷ Si $x > \dfrac{1}{e}$, alors $f'(x) \geqslant 0$ et f est croissante

D'où le tableau de variations :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f'	$\|\|$	-	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$(e)^{\frac{-1}{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$

(d) <u>Et le graphe ! *(Figure B.8)*</u>

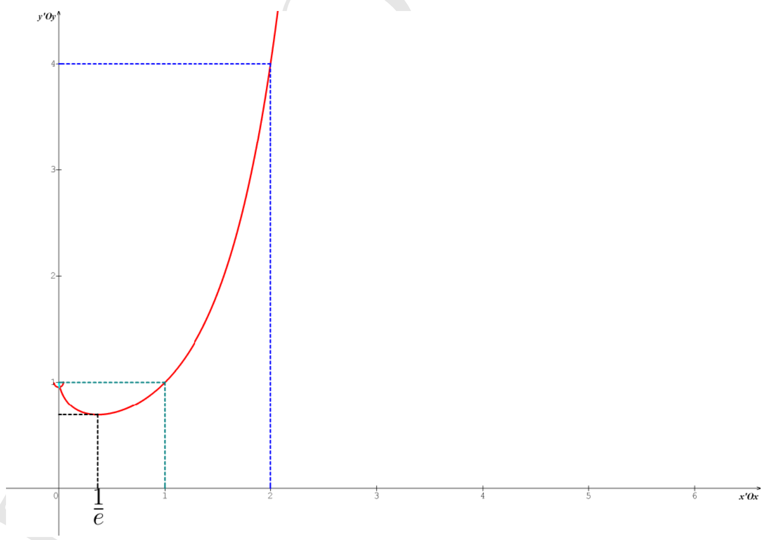


Figure B.8 – Le graphe de la fonction $f(x) = x^x$

B.8 Correction de quelques exercices

Exercice 2 :

Démontrer que pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$, nous avons $(x+y)\ln(x+y) \geqslant x\ln x + y\ln y$

Voici un exercice qui est très percutant, mais finalement très simple.
En fait, l'objer de cet exercice est de démontrer que si $\varphi(x) = x\ln x$, alors, pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$, nous avons $\varphi(x+y) \geqslant \varphi(x) + \varphi(y)$, ce qui n'est pas une mince affaire !!

⇒ Soient donc $x > 0$ et $y > 0$. Alors :

$$\ln(x+y) = \int_1^{x+y} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_x^{x+y} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Comme $x > 0$ et $y >$, alors $x < x+y$ et donc $\displaystyle\int_x^{x+y} \frac{\mathrm{d}t}{t} \geqslant 0$ d'où nous déduisons

$$\int_1^{x+y} \frac{\mathrm{d}t}{t} \geqslant \int_1^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t} \Longleftrightarrow \ln(x+y) \geqslant \ln x$$

Comme $x > 0$, nous avons aussi $x\ln(x+y) \geqslant x\ln x$

⇒ Par symétrie, et par le même raisonnement, nous avons : $y\ln(x+y) \geqslant y\ln y$

⇒ Et en additionnant, nous obtenons :

$$x\ln(x+y) + y\ln(x+y) \geqslant x\ln x + y\ln y \Longleftrightarrow (x+y)\ln(x+y) \geqslant x\ln x + y\ln y$$

Exercice 3 :

Pour quels $x \in \mathbb{R}$ avons nous l'égalité $\ln[(2-x)(x+3)] = \ln(2-x) + \ln(x+3)$?

Voilà une question piège !!
Pour que cette égalité soit valide, **il faut qu'à la fois** :

- $(2-x)(x+3) > 0$
- $2-x > 0$
- $x+3 > 0$

C'est à dire que l'ensemble de validation de l'égalité est :

$$]-3;+2[\,\cap\,]-\infty;+2[\,\cap\,]-3;-\infty[\; = \;]-3;+2[$$

Exercice 7 :

Résoudre les systèmes définis sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ par les relations suivantes :

1. $\begin{cases} x+y = & 65 \\ \ln x + \ln y = & \ln 1000 \end{cases}$

   Tout d'abord, nous devons avoir $x > 0$ et $y > 0$ et le système devient :

$$\begin{cases} x+y = & 65 \\ \ln xy = & \ln 1000 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y = & 65 \\ xy = & 1000 \end{cases}$$

   x et y sont donc solutions de l'équation du second degré $T^2 - 65T + 1000 = 0$ dont les racines sont $T_1 = 40$ et $T_2 = 50$.
   Nous avons donc 2 couples (x,y) solutions $(40,50)$ et $(50,40)$

2. $\begin{cases} x^2+y^2 = & 169 \\ \ln x + \ln y = & \ln 60 \end{cases}$

   ▷ Tout d'abord $x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy$ et comme $xy = 60$, nous avons $(x+y)^2 = 169 + 120 = 289 = 17^2$ et donc $x+y = 17$ ou $x+y = -17$

- ▷ Si $x+y=17 \iff y=17-x$ alors de $y=17-x$ et de $xy=60$, nous tirons $x(17-x)=60 \iff x^2-17x+60$ d'où nous tirons 2 solutions $x_1=5$ et $x_2=12$.
  Nous trouvons d'ores et déjà 2 couples (x,y) solutions $(5,12)$ et $(12,5)$
- ▷ Si $x+y=-17 \iff y=-17-x$ alors $y=-17-x$ et de $xy=60$, nous tirons $x(-17-x)=60 \iff x^2+17x+60$ d'où nous tirons 2 solutions $x_1=-5$ et $x_2=-12$.
  Ces solutions sont impossibles puisque négatives

Il n'y a donc que 2 couples solutions : $(5,12)$ et $(12,5)$

Exercice 9 :

1. *On pose*

$$\begin{cases} g : [1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & g(t)=t-\ln t \end{cases}$$

Etablir le tableau de variations de f.

S'il suffit de n'étudier que les variations, il suffit de calculer g', la dérivée de g.

Clairement, $g'(t)=1-\dfrac{1}{t}=\dfrac{t-1}{t}$.

Comme $t \geqslant 1$, $g'(t) \geqslant 0$ et g est croissante sur $[1;+\infty[$

Ainsi, pour tout $t \geqslant 1$, nous avons $g(t) \geqslant g(t)=0$, ou, ce qui est équivalent, $t-\ln t \geqslant 0 \iff t \geqslant \ln t$

Et donc, pour tout $t \in [1;+\infty[$, nous avons $0 \leqslant \ln t \leqslant t$

En particulier, si nous posons $t=\sqrt{x}$; si $x \in [1;+\infty[$, alors $\sqrt{x} \in [1;+\infty[$ et donc, navons :

$$0 \leqslant \ln\sqrt{x} \leqslant \sqrt{x} \iff 0 \leqslant \frac{1}{2}\ln x \leq \sqrt{x}$$

Ainsi, $\forall x \in [1;+\infty[$ nous avons $0 \leqslant \dfrac{1}{2}\ln x \leq \sqrt{x}$.

2. *En déduire un encadrement de $\dfrac{\ln x}{x}$ pour $x \in [1;+\infty[$ et calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$.*

De l'inégalité $0 \leqslant \dfrac{1}{2}\ln x \leqslant \sqrt{x}$ vraie pour tout $x \geqslant 1$, en divisant par x, nous avons $0 \leqslant \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\ln x}{x} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et donc $0 \leqslant \dfrac{\ln x}{x} \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$, nous déduisons que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

3. *En déduire alors que $\forall\alpha \in]0;+\infty[$ on a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0$*

Ici, cela commence à se corser (quoique !) !

Soit $\alpha>0$

Pour commencer, nous pouvons écrire $\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}\times\dfrac{\ln x^\alpha}{x^\alpha}$.

En faisant le changement de variables $X=x^\alpha$, nous avons $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x^\alpha}{x^\alpha}=\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X}=0$.

De l'égalité $\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}\times\dfrac{\ln x^\alpha}{x^\alpha}$, nous déduisons que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0$

4. *En déduire que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln x=0$.*

Ecrivons $X=\dfrac{1}{x} \iff x=\dfrac{1}{X}$.

Nous avons alors $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln x=\lim_{X\to+\infty}\frac{1}{X}\times\ln\frac{1}{X}=\lim_{X\to+\infty}\frac{-\ln X}{X}=0$

Et donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln x=0$

5. *En déduire que* $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

   Comme tout à l'heure, nous faisons le changement de variables $Y = e^x \iff x = \ln Y$ et donc $\frac{e^x}{x} = \frac{Y}{\ln Y}$.

   D'où nous pouvons écrire : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{Y\to+\infty} \frac{Y}{\ln Y} = +\infty$ puisque $\lim_{Y\to+\infty} \frac{\ln Y}{Y} = 0$.

   En conclusion $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Exercice 10 :

1. *On pose*

$$\begin{cases} f :]-1;+\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto f(x) = x - \ln(x+1) \end{cases}$$

   Etablir le tableau de variations de f.

   Allons donc pour un calcul de dérivée !

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$$

   Ainsi :
   → Si $-1 < x \leqslant 0$, alors $f'(x) \leqslant 0$ et f est décroissante sur $]-1;0[$
   → Si $x \geqslant 0$, alors $f'(x) \geqslant 0$ et f est croissante sur $]0;+\infty[$
   En conclusion, pour tout $x \in]-1;+\infty[$, nous avons $f(x) \geqslant f(0)$, c'est à dire $x - \ln(x+1) \geqslant 0$ et nous en déduisons que pour tout $x \in]-1;+\infty[$ nous avons : $x \geqslant \ln(1+x)$.

2. *On pose*

$$\begin{cases} g :]-1;+\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto g(x) = \ln(x+1) - \dfrac{x}{x+1} \end{cases}$$

   Etablir le tableau de variations de g.

   Nous étudions donc la dérivée de g.

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)-1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}$$

   Ainsi :
   → Si $-1 < x \leqslant 0$, alors $g'(x) \leqslant 0$ et g est décroissante sur $]-1;0[$
   → Si $x \geqslant 0$, alors $g'(x) \geqslant 0$ et g est croissante sur $]0;+\infty[$
   En conclusion, pour tout $x \in]-1;+\infty[$, nous avons $g(x) \geqslant g(0)$, c'est à dire $\ln(x+1) - \frac{x}{x+1} \geqslant 0$ et nous en déduisons que pour tout $x \in]-1;+\infty[$ nous avons : $\ln(x+1) \geqslant \frac{x}{x+1}$.
   En synthèse, pour tout $x \in]-1;+\infty[$, nous avons :

$$x \geqslant \ln(1+x) \geqslant \frac{x}{x+1} \iff \frac{x}{x+1} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$$

3. *En déduire que* $\forall x \in]0;+\infty[$ *on a :* $\frac{1}{x+1} \leqslant \frac{\ln(1+x)}{x} \leqslant 1$.

   Bien entendu, si $x > 0$, de la double inégalité $\frac{x}{x+1} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$, nous obtenons, en divisant par x :

$$\frac{1}{x+1} \leqslant \frac{\ln(1+x)}{x} \leqslant 1$$

   Ce qui nous autorise à écrire, puisque $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x+1} = 1$, en utilisant les limites par encadrement que $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

4. *De même montrer que* $\forall x \in]-1;0[$ *on a :* $1 \leqslant \dfrac{\ln(x+1)}{x} \leq \dfrac{1}{x+1}$.

   Cette fois ci, si $x<0$, de la double inégalité $\dfrac{x}{x+1} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$, nous obtenons, en divisant par x et en inversant le sens des inégalités, puisque $x<0$
   $$1 \leqslant \frac{\ln(1+x)}{x} \leqslant \frac{1}{x+1}$$
   Ce qui nous autorise à écrire, puisque $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x+1} = 1$, en utilisant les limites par encadrement que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

   Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$, nous avons $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

5. *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

   Nous allons, une nouvelle fois, poser $X = \dfrac{1}{x}$; alors $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{X}\ln(1+X)$ et donc
   $$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{X\to 0}\frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$
   Et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 1$

6. *En déduire* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

   Nous pouvons écrire $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 1$, nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

Exercice 13 :

1. *Montrer que, pour tout* $x\in\mathbb{R}$, *si* $x>0$, *alors* $\dfrac{x-1}{x} < \ln x < x-1$

   Dans un exercice précédent, nous avons montré que, pour $x>-1$, $\dfrac{x}{x+1} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
   En posant $X = x+1$, si $x>-1$, alors $X>0$ et donc, pour $X>0$, en utilisant la double inégalité $\dfrac{x}{x+1} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$, nous avons :
   $$\frac{X-1}{X} \leqslant \ln X \leqslant X-1$$
   C'est l'inégalité demandée

2. *En Appliquant l'inégalité précédente au nombre* $\sqrt[n]{e}$, *en déduire que, pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$, *nous avons* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e < \dfrac{1}{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n}$

   $\Rightarrow$ l'inégalité $\dfrac{X-1}{X} \leqslant \ln X \leqslant X-1$ vraie pour $X>0$, peut aussi s'écrire $1-\dfrac{1}{X} \leqslant \ln X \leqslant X-1$ et en appliquant cette inégalité à $X = \sqrt[n]{e} = e^{\frac{1}{n}}$, nous obtenons :
   $$1-\frac{1}{e^{\frac{1}{n}}} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant e^{\frac{1}{n}}-1 \Longleftrightarrow 1-e^{-\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant e^{\frac{1}{n}}-1$$

$\Rightarrow$ Regardons l'inégalité $\dfrac{1}{n} \leqslant e^{\frac{1}{n}} - 1$. Nous avons :

$$\frac{1}{n} \leqslant e^{\frac{1}{n}} - 1 \Longleftrightarrow 1 + \frac{1}{n} \leqslant e^{\frac{1}{n}}$$

En élevant à la puissance n, nous obtenons $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant e$

$\Rightarrow$ Regardons la second inégalité $1 - e^{-\frac{1}{n}} \leqslant \dfrac{1}{n}$. Nous avons donc :

$$1 - e^{-\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n} \Longleftrightarrow 1 - \frac{1}{n} \leqslant e^{-\frac{1}{n}}$$

En élevant à la puissance n, nous obtenons $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant e^{-1} \Longleftrightarrow e \leqslant \dfrac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}$

Et donc, en synthèse, $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < e < \dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n}$

Remarque 1 :

L'inégalité $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < e < \dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n}$ est très intéressante :

- $\star$ Nous venons de montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$
- $\star$ Nous démontrerions de la même manière *(ou un peu plus subtilement)* que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$$

Et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n} = e$

- $\star$ Nous avons, ici, un encadrement de e qui pourrait être intéressant

Remarque 2 : Pour démontrer l'inégalité $1 - e^{-\frac{1}{n}} \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant e^{\frac{1}{n}} - 1$, on peut utiliser l'inégalité établie pour les fonctions exponentielles, vraie pour tout $x \geqslant 0$: $1 - e^{-x} \leqslant x \leqslant e^x - 1$

Exercice 16 :

1. *Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n noté $A(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $a_n \neq 0$. Démontrer que $x^{-n} A(x)$ admet une limite finie en $+\infty$*

Pour être relativement explicite, nous écrivons :

$$A(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

Et donc :

$$x^{-n} A(x) = a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}$$

Nous en déduisons que

$$\lim_{x \to +\infty} x^{-n} A(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right) = a_n$$

Ainsi, $x^{-n} A(x)$ admet bien une limite finie en $+\infty$

2. *On suppose qu'il existe deux polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que, pour tout $x > 0$,*

$$\ln x = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

On note $p = \deg P$ et $q = \deg Q$.
Démontrer que $x^{q-p}\ln(x)$ admet une limite non nulle en $+\infty$

Nous avons $\dfrac{x^{-p}P(x)}{x^{-q}Q(x)} = x^{q-p}\dfrac{P(x)}{Q(x)} = x^{q-p}\ln(x)$

D'après la question précédente, si $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \lambda_k x^k$ avec $\lambda_n \neq 0$ et $Q(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \mu_k x^k$ avec $\mu_q \neq 0$, alors :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{-p}P(x)}{x^{-q}Q(x)} = \frac{\lambda_p}{\mu_q}$$

Ainsi, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^{q-p}\ln(x) = \frac{\lambda_p}{\mu_q}$ et $\dfrac{\lambda_p}{\mu_q} \neq 0$

3. *En déduire que l'hypothèse faite à la question précédente est fausse.*

Le résultat de la question précédente contredit les limites comparées de fonctions puissance et logarithme au voisinage de ∞.
En effet :
$\Rightarrow$ Si $q - p \geqslant 0$, alors $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^{q-p}\ln(x) = +\infty$

$\Rightarrow$ Maintenant, $q - p \leqslant -1 \iff p - q \geqslant +1$, alors $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^{q-p}\ln(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^{p-q}} = 0$
Dans aucun cas, il n'est possible que $x^{q-p}\ln(x)$ converge vers une limite finie non nulle *(la limite est infinie ou nulle)*.
L'hypothèse faite que le logarithme est un rapport de 2 polynômes est donc fausse, et le logarithme n'est pas une fraction rationnelle.

Annexe C

Nombres complexes et géométrie

Cet exposé vient en complément du chapitre 9 sur les nombres complexes et du chapitre 22 sur les similitudes planes

C.1 Introduction

Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est supposé construit *(voir le chapitre 9)*.
On rappelle que $\mathbb{C}$ est un corps commutatif et un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, de base canonique $\{1, i\}$ où i est une solution complexe de l'équation $x^2 + 1 = 0$, c'est à dire que i est une racine carrée de -1.
On suppose connu le plan affine euclidien que l'on note $\mathcal{P}$ et que l'on munit d'un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, en désignant par P le plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$.
Nous rappelons rapidement quelques notions utiles pour la suite.

C.1.1 Rappels élémentaires

- $\longrightarrow$ Un point $M \in \mathcal{P}$ est repéré par ses coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ce qui signifie qu'on a l'égalité $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ dans P.
- $\longrightarrow$ L'affixe du point $M \in \mathcal{P}$ est donc $z = x + iy$
- $\longrightarrow$ Un vecteur $\overrightarrow{u} \in P$ est repéré par ses coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ce qui signifie qu'on a l'égalité $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ dans P.
- $\longrightarrow$ L'affixe du vecteur $\overrightarrow{u}$ est le nombre complexe $z = x + iy$
- $\longrightarrow$ L'axe $Ox = \mathbb{R}\overrightarrow{i}$, appelé axe des réels, est identifié à l'ensemble des nombres réels.
- $\longrightarrow$ L'axe $Oy = \mathbb{R}\overrightarrow{j}$, appelé axe des imaginaires purs, est identifié à l'ensemble des nombres imaginaires purs
- $\longrightarrow$ Si $a \in \mathbb{C}$ est l'affixe du point A et $b \in \mathbb{C}$, celui du point B, l'affixe du point $C \in \mathcal{P}$ défini par $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ est $a + b$, et l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = b - a$
- $\longrightarrow$ Si $a \in \mathbb{C}$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{u}$ et $b \in \mathbb{C}$, celui du vecteur $\overrightarrow{v}$, alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ est $a + b$

C.1.2 Déterminant, produit scalaire

Soient $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ 2 vecteurs de P d'affixes respectives $z = x + iy$ et $z_1 = x_1 + iy_1$; alors :

1. $\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle = \operatorname{Re}(z\overline{z_1}) = \operatorname{Re}(\overline{z}z_1)$
2. $\det(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} x & x_1 \\ y & y_1 \end{vmatrix} = xy_1 - x_1y = \operatorname{Im}(\overline{z}z_1)$

Démonstration

La démonstration est simple, calculatoire, et laissée au lecteur

Remarque 1 :

Nous avons, bien entendu : $\overline{z}z_1 = \operatorname{Re}(\overline{z}z_1) + i \operatorname{Im}(\overline{z}z_1) = \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle + i \det(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$, mais, cela n'apporte pas grand chose !!

C.1.3 Colinéarité, alignement

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine que l'on munit d'un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, et P le plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$ de base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$

1. Soient $\overrightarrow{u} \in P$ et $\overrightarrow{v} \in P$ d'affixes respectives u et v.
   Alors, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si
   $$\frac{u}{v} \in \mathbb{R} \iff u\overline{v} \in \mathbb{R}$$
2. Soient A, B et C 3 points du plan affine $\mathcal{P}$ d'affixes respectives a, b et c.
   Alors les points A, B et C sont alignés si et seulement si :
   $$\frac{b-a}{c-a} \in \mathbb{R} \iff (b-a)\,\overline{(c-a)} \in \mathbb{R}$$

Démonstration

1. Nous allons utiliser 2 méthodes *(toutes deux élémentaires)* pour démontrer le résultat
   (a) Si $\overrightarrow{u} \in P$ et $\overrightarrow{v} \in P$ sont colinéaires alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$, ce qui, en se référant aux affixes donne $u = \lambda v$, et donc $\dfrac{u}{v} = \lambda$, et donc $\dfrac{u}{v} \in \mathbb{R}$
   La réciproque est évidente.
   (b) La seconde méthode consiste à dire que si $\overrightarrow{u} \in P$ et $\overrightarrow{v} \in P$ sont colinéaires alors $\det(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = 0$, c'est à dire $\operatorname{Im}(\overline{z}z_1) = 0$, c'est à dire $(\overline{z}z_1) \in \mathbb{R}$, et
   $$(\overline{z}z_1) \in \mathbb{R} \iff (\overline{z}z_1) = \overline{(\overline{z}z_1)} = (z\overline{z_1})$$
2. Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Il suffit d'appliquer le résultat précédent aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

Remarque 2 :

Soient A, B, C et D 4 points du plan. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. Ainsi, si a,b,c et d sont les affixes des points A, B, C et D les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si

$$\frac{b-a}{d-c} \in \mathbb{R} \iff (b-a)\,\overline{(d-c)} \in \mathbb{R}$$

C.1.4 Orthogonalité

Dans cet énoncé, nous notons $i\mathbb{R}$ les nombres complexes du type λi où $\lambda \in \mathbb{R}$, c'est à dire les imaginaires purs.

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine que l'on munit d'un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, et P le plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$ de base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$

1. Soient $\overrightarrow{u} \in P$ et $\overrightarrow{v} \in P$ d'affixes respectives u et v.
   Alors, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si
   $$\frac{u}{v} \in i\mathbb{R} \iff u\overline{v} \in i\mathbb{R}$$
2. Soient A, B, C et D 4 points du plan affine $\mathcal{P}$ d'affixes respectives a, b, c et d.
   Alors les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si :
   $$\frac{b-a}{d-c} \in i\mathbb{R} \iff (b-a)\,\overline{(d-c)} \in \mathbb{R}$$

Démonstration

1. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle = 0$.
   Comme $\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v} \rangle = \mathrm{Re}\,(u\overline{v})$, si $\mathrm{Re}\,(u\overline{v}) = 0$, ceci signifie que $u\overline{v}$ est imaginaire pur.
   D'autre part, $u\overline{v} = \dfrac{u}{v} v\overline{v} = \dfrac{u}{v}\,|v|^2$
   Comme $|v|^2 \in \mathbb{R}$, $u\overline{v}$ est imaginaire pur si et seulement si $\dfrac{u}{v}$ est imaginaire pur.
2. Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux. Il suffit donc maintenant d'appliquer le point précédent.

C.1.5 Equation d'une droite

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine que l'on munit d'un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, et P le plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$ de base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$

1. Soit (D) une droite de $\mathcal{P}$ passant par $A \in \mathcal{P}$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} \in P$. a est l'affixe de A et u est l'affixe de $\overrightarrow{u}$. Alors l'affixe $z \in \mathbb{C}$ des points $M \in (D)$ est donné par $z = a + \lambda u$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$
   $z = a + \lambda u$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ est l'équation complexe de la droite (D)
2. Soient A et B 2 points du plan affine $\mathcal{P}$ d'affixes respectives a et b. Alors l'équation complexe de la droite (AB) est donnée par $z = a + \lambda\,(b-a) = (1-\lambda)\,a + \lambda b$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

Démonstration

1. Pour $M \in (D)$, nous avons $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, et en revenant aux affixes, nous avons $z - a = \lambda u$, c'est à dire $z = a + \lambda u$
2. Pour la droite (AB), il suffit, une nouvelle fois, le point précédent.

Remarque 3 :

1. La notation $z = a + \lambda u$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ est à rapprocher de la notation de Grassmann, que, volontairement, je n'ai pas voulu utiliser. On retrouve très souvent cette notation dans les livres de géométrie de L_3
2. L'équation de la droite (AB) $z = (1-\lambda)\,a + \lambda b$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ est à rapprocher du calcul barycentrique : le droite (AB) est l'ensemble des barycentres du système pondéré $\{(A; (1-\lambda)); (B; \lambda)\}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\lambda \in [0; 1]$ alors $z = (1-\lambda)\,a + \lambda b$ décrit le segment $[A; B]$

C.2 Géométrie et module d'un nombre complexe

C.2.1 Résultat

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction P rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

1. Si $\overrightarrow{u} \in P$ a pour affixe $u = x + iy$ alors $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = |u|$
2. Si $M \in \mathcal{P}$ d'affixe $z = x + iy$, alors $OM = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$
3. Si a est l'affixe de $A \in \mathcal{P}$ et b celle de $B \in \mathcal{P}$, alors $AB = |a - b|$

Démonstration

Il n'y a pas de démonstration....C'est juste une vérification calculatoire

C.2.2 Proposition

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction P rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
L'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ dont l'affixe z vérifie $|z - \omega| = R$ où $R > 0$ est un cercle de centre Ω, d'affixe ω et de rayon R

Démonstration

La démonstration est évidente, puisque si ω est l'affixe de Ω, alors, nous avons $M\Omega = R$, ce qui est la définition du cercle.

Remarque 4 :

Si nous nous intéressons à l'ensemble $C \subset \mathbb{C}$ défini par $C = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z - \omega| = R\}$, alors :
- $\rightarrow$ Si $R < 0$, alors $C = \emptyset$
- $\rightarrow$ Si $R = 0$, alors $C = \{\omega\}$
- $\rightarrow$ Si $R > 0$, alors C est le cercle de centre ω et de rayon R

C.2.3 Proposition

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction P rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
Pour $A \in \mathcal{P}$ d'affixe a et $B \in \mathcal{P}$ d'affixe b, avec $A \neq B$, l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ dont l'affixe z vérifie $|z - a| = |z - b|$ est la médiatrice du segment $[A; B]$

Démonstration

C'est très facile, puisque ceci traduit $MA = MB$ qui est la définition même de la médiatrice

Remarque 5 :

L'équation complexe de la médiatrice est donnée par $z = \dfrac{a+b}{2} + \lambda i\,(b - a)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

Il est très facile de comprendre pourquoi.
Le vecteur directeur de cette médiatrice est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}$ d'affixe $b - a$, et un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ aura pour affixe $i\,(b - a)$, et cette médiatrice passe par le milieu du segment $[A; B]$, lequel a pour affixe $\dfrac{a+b}{2}$

C.2.4 Egalité du parallélogramme

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $z' \in \mathbb{C}$, nous avons :

1. $|z+z'|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2$
2. $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$

Démonstration

Soient $\overrightarrow{u} \in P$ et $\overrightarrow{v} \in P$ d'affixes respectives z et z'.
D'après l'identité du parallélogramme vue en 16.1.8, nous avons :

$$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 = \langle \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\rangle = \langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{u}\rangle + 2\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v}\rangle + \langle \overrightarrow{v} \mid \overrightarrow{v}\rangle$$

Et

$$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2 = 2\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$$

Il suffit ensuite de reprendre ces égalités en y mettant les affixes. Nous avons donc

$$|z+z'|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2 \text{ et } |z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$$

Remarque 6 :

L'objet de cet exposé est de faire le lien entre géométrie et nombres complexes ; d'où la démonstration ci-dessus en utilisant le produit scalaire et les normes.
Ceci dit, en remarquant que $|z+z'|^2 = (z+z')\,\overline{(z+z')}$, il était tout à fait possible de le faire de manière calculatoire *(Le faire...c'est très facile ! !)*

C.2.5 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $z' \in \mathbb{C}$, nous avons :

$$\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) \leqslant |z| \times |z'|$$

Démonstration

Nous allons réutiliser les résultats sur le produit scalaire :
Soient $\overrightarrow{u} \in P$ et $\overrightarrow{v} \in P$ d'affixes respectives z et z'.
D'après le lemme de Schwarz en 16.1.3, nous avons :

$$|\langle \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v}\rangle| \leqslant \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|$$

Il suffit ensuite de reprendre cette inégalités en y mettant les affixes. Nous avons donc

$$\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) \leqslant |z| \times |z'|$$

Remarque 7 :

1. De cette inégalité de Schwarz, nous retrouvons l'inégalité triangulaire vraie pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $z' \in \mathbb{C}$: $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$, l'égalité n'ayant lieu que si $z' = \lambda z$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$
2. Une conséquence de l'inégalité triangulaire, est cette autre inégalité, vraie pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $z' \in \mathbb{C}$: $||z| - |z'|| \leqslant |z| + |z'|$

C.3 Lieux géométriques et fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$

C.3.1 Intentions

Nous nous intéressons, dans ce paragraphe, à toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ et, en particulier aux lignes de niveaux

$$E_\lambda = f^{-1}(\{\lambda\}) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } f(z) = \lambda\}$$

C.3.2 Exemples de lignes de niveaux associées aux modules

1. Soit $\omega \in \mathbb{C}$ et
$$\left\{ \begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & f(z) = |z-\omega| \end{array} \right.$$
Alors :
   (a) Si $\lambda < 0$, alors $E_\lambda = f^{-1}(\{\lambda\}) = \emptyset$
   (b) Si $\lambda = 0$, alors $E_\lambda = f^{-1}(\{0\}) = \{\omega\}$
   (c) Si $\lambda > 0$, alors $E_\lambda = f^{-1}(\{\lambda\})$ est un cercle de centre ω et de rayon Λ
2. Soient $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq b$. Nous considérons
$$\left\{ \begin{array}{rcl} g : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & g(z) = |z-a| + |z-b| \end{array} \right.$$
Avant de rechercher les lignes de niveau, remarquons que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:
$$|a-b| = |a-z+z-b| \leqslant |z-a| + |z-b|$$
Ainsi si
   (a) Si $\lambda < |a-b|$, alors, comme $|a-b| \leqslant |z-a|+|z-b|$, jamais nous n'aurons $\lambda = |z-a|+|z-b|$, d'où :
$$E_\lambda = g^{-1}(\{\lambda\}) = \emptyset$$
   (b) Si $\lambda = |a-b|$, alors z appartient à l'intervalle $[A, B]$ et donc $E_\lambda = g^{-1}(\{\lambda\}) = [A, B]$ où A a pour affixe a et B a pour affixe b
   (c) Si $\lambda > |a-b|$ alors $E_\lambda = g^{-1}(\{\lambda\})$ est l'ellipse de foyers A et B et de grand axe λ
3. Soient $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq b$. Nous considérons
$$\left\{ \begin{array}{rcl} h : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & h(z) = ||z-a| - |z-b|| \end{array} \right.$$
A nouveau, remarquons que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:
$$||z-a| - |z-b|| \leqslant |a-b|$$
Ainsi si
   (a) Si $\lambda > |a-b|$, alors, comme $|a-b| \geqslant ||z-a| - |z-b||$, jamais nous n'aurons $\lambda = ||z-a| - |z-b||$, d'où :
$$E_\lambda = h^{-1}(\{\lambda\}) = \emptyset$$
   (b) Si $\lambda = |a-b|$, alors z appartient à la droite (AB) privée du segment $]A, B[$ et donc $E_\lambda = h^{-1}(\{\lambda\}) = (AB) \setminus]A, B[$ où A a pour affixe a et B a pour affixe b
   (c) Si $\lambda < |a-b|$ alors $E_\lambda = h^{-1}(\{\lambda\})$ est l'hyperbole de foyers A et B et de grand axe λ

C.3.3 Lemme de géométrie

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$
L'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $MA^2 = \lambda^2 MB^2$ avec $\lambda > 0$ et $\lambda \neq 1$ est un cercle

Démonstration

L'affirmation du lemme ci-dessus ne donne ni le centre ni le rayon ni le diamètre du cercle ; c'est ce que nous tenterons de faire.
Ce lemme est à rapprocher (et sérieusement !!) des fonctions scalaires de Leibniz vues dans le paragraphe 17.6

1. Premières remarques

   Nous aurions pu étudier $MA^2 = \lambda MB^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$
   - → Or, si $\lambda < 0$, l'égalité $MA^2 = \lambda MB^2$ est impossible et on peut conclure que l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ est vide
   - → Si $\lambda = 0$, alors $MA^2 = 0$ et l'ensemble est réduit au point A
   - → D'où la nécessité de $\lambda > 0$; l'énoncé qui donne λ^2 nous simplifie la vie dans la démonstration et l'énoncé du résultat ; nous aurions pu garder $\lambda > 0$ sans l'élever au carré.
   - → Si $\lambda = 1$, alors nous avons $MA^2 = MB^2 \iff MA = MB$ et l'ensemble des points M tels que $MA = MB$ est la médiatrice du segment $[A; B]$

2. Etudions maintenant l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $MA^2 = \lambda^2 MB^2$ avec $\lambda > 0$ et $\lambda \neq 1$

   Nous avons $MA^2 = \lambda^2 MB^2 \iff MA^2 - \lambda^2 MB^2 = 0$. D'après les leçons sur le produit scalaire, nous avons :
   $$MA^2 - \lambda^2 MB^2 = \left\langle \overrightarrow{MA} + \lambda\overrightarrow{MB} \mid \overrightarrow{MA} - \lambda\overrightarrow{MB} \right\rangle$$
   Nous devons donc rechercher les points tels que $\left\langle \overrightarrow{MA} + \lambda\overrightarrow{MB} \mid \overrightarrow{MA} - \lambda\overrightarrow{MB} \right\rangle = 0$

   (a) Considérons le système pondéré $\{(A,1)\,;(B,\lambda)\}$.
   Comme $\lambda+1 \neq 0$, il existe un barycentre G du système pondéré $\{(A,1)\,;(B,\lambda)\}$; ce barycentre est défini, pour tout $M \in \mathcal{P}$ par :
   $$(\lambda+1)\,\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \lambda\overrightarrow{MB}$$

   (b) De la même manière, le système pondéré $\{(A,1)\,;(B,-\lambda)\}$, comme $1-\lambda \neq 0$, admet un barycentre H défini, pour tout $M \in \mathcal{P}$ par :
   $$(1-\lambda)\,\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MA} - \lambda\overrightarrow{MB}$$

   (c) De telle sorte que :
   $$\begin{aligned} MA^2 - \lambda^2 MB^2 = 0 \iff & \left\langle \overrightarrow{MA} + \lambda\overrightarrow{MB} \mid \overrightarrow{MA} - \lambda\overrightarrow{MB} \right\rangle = 0 \\ \iff & \left\langle (\lambda+1)\,\overrightarrow{MG} \mid (1-\lambda)\,\overrightarrow{MH} \right\rangle = 0 \\ \iff & (1-\lambda^2)\left\langle \overrightarrow{MG} \mid \overrightarrow{MH} \right\rangle = 0 \\ \iff & \left\langle \overrightarrow{MG} \mid \overrightarrow{MH} \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

   (d) L'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $MA^2 = \lambda^2 MB^2$ est l'ensemble des points tels que $\left\langle \overrightarrow{MG} \mid \overrightarrow{MH} \right\rangle = 0$, c'est à dir el'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MH}$ soient orthogonaux ; c'est donc le cercle de diamètre $[GH]$

   (e) En fait, en faisant $M = A$, nous avons :
   - ⋆ $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AB}$; G est sur le segment $[AB]$
   - ⋆ $\overrightarrow{AH} = \dfrac{\lambda}{\lambda-1}\overrightarrow{AB}$; H est toujours en dehors du segment $[AB]$

C.3.4 Théorème

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$. Soient $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$ 2 nombres complexes tels que $a \neq b$; a est l'affixe d'un point $A \in \mathcal{P}$ et b est l'affixe de $B \in \mathcal{P}$.
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $\lambda > 0$
Alors, l'ensemble $E_\lambda = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z-a| = \lambda\,|z-b|\}$ est :

1. La médiatrice du segment $[AB]$ si $\lambda = 1$
2. Un cercle de centre $\Omega \in \mathcal{P}$ d'affixe $\omega = \dfrac{a-\lambda^2 b}{1-\lambda^2}$ et de rayon $R = \dfrac{\lambda\,|a-b|}{|1-\lambda^2|}$ si $\lambda \neq 1$

Démonstration

1. Premières remarques
   (a) Evidemment, si $\lambda < 0$, alors $E_\lambda = \emptyset$ et si $\lambda = 0$, alors $z = a$
   (b) Supposons $\lambda = 1$
   Alors $E_1 = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z-a| = |z-b|\}$; cet ensemble a déjà été étudié en C.2.3 ; c'est bien la médiatrice du segment $[AB]$
   (c) Si $\lambda > 0$ et $\lambda \neq 1$, alors $a \notin E_\lambda$ et $b \notin E_\lambda$
   En effet, si $a \in E_\lambda$, alors $|a-a| = \lambda\,|a-b| \iff \lambda\,|a-b| = 0$, ce qui est impossible.
   De même, $b \in E_\lambda$, alors $|b-a| = \lambda\,|b-b| \iff \lambda\,|b-a| = 0$, ce qui est impossible puisque $a \neq b$
   Donc $a \notin E_\lambda$ et $b \notin E_\lambda$
2. Supposons $\lambda > 0$ et $\lambda \neq 1$
   Alors $|z-a| = \lambda\,|z-b| \iff |z-a|^2 = \lambda^2\,|z-b|^2$. Si z est l'affixe d'un point $M \in \mathcal{P}$, nous avons alors $MA^2 = \lambda^2 MB^2$. Nous avons déjà résolu la question dans le lemme C.3.3.
   E_λ est donc un cercle de diamètre $[GH]$ où $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH} = \dfrac{\lambda}{\lambda-1}\overrightarrow{AB}$
   → Si $g \in \mathbb{C}$ est l'affixe de G, nous avons $g - a = \dfrac{\lambda}{\lambda+1}(b-a) \iff g = \dfrac{a+\lambda b}{\lambda+1}$
   → De même si $h \in \mathbb{C}$ est l'affixe de H, nous avons $h - a = \dfrac{\lambda}{\lambda-1}(b-a) \iff h = \dfrac{a-\lambda b}{1-\lambda}$
   → Le centre est donc donné par Ω d'affixe
   $$\omega = \frac{g+h}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a+\lambda b}{\lambda+1} + \frac{a-\lambda b}{1-\lambda}\right) = \frac{a-\lambda^2 b}{1-\lambda^2}$$
   → Le rayon R est donné par $R = \dfrac{1}{2}|g-h|$ et donc :
   $$R = \frac{1}{2}|g-h| = \frac{1}{2}\left|\frac{a+\lambda b}{\lambda+1} - \frac{a-\lambda b}{1-\lambda}\right| = \frac{\lambda\,|b-a|}{|1-\lambda^2|}$$

Ce que nous voulions

Remarque 8 :

Nous sommes toujours dans les hypothèses et les notations de C.3.4
La médiatrice du segment $[AB]$ définie par $|z-a| = |z-b|$ coupe le plan affine $\mathcal{P}$ en 2 demi-plans ouverts.
⇒ Un premier demi plan $\mathcal{P}_1$ défini par $|z-a| < |z-b|$ qui contient le point A d'affixe a
⇒ Un second demi plan $\mathcal{P}_2$ défini par $|z-a| > |z-b|$ qui contient le point B d'affixe b
Se reporter à la figure C.1

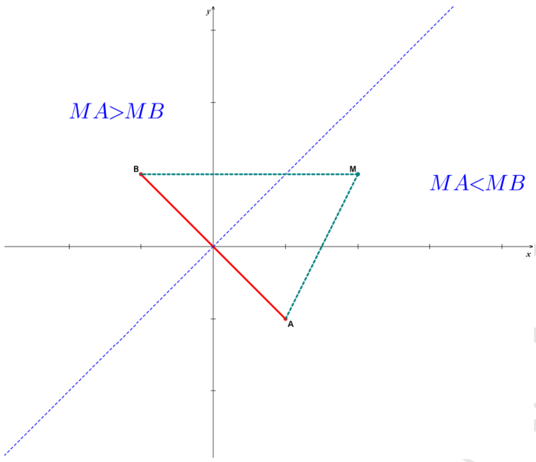


FIGURE C.1 – Régionnement du plan : $MA > MB \iff |z-a| > |z-b|$ ou $MA < MB \iff |z-a| < |z-b|$

Exemple 1 :

Exercice résolu *Quel est l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z+3| = 2|z|$?*
Voilà un exercice d'application directede C.3.4
Dans notre cas, nous avons $a = -3$, $b = 0$ et $\lambda = 2$. L'ensemble recherché est donc un cercle de centre $\Omega \in \mathcal{P}$ d'affixe $\omega = \dfrac{-3}{1-4} = 1$ et de rayon $R = \dfrac{2|-3|}{|1-4|} = 2$

Exercice 1 :

Quel est l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z-i| = |z-iz| = |z-1|$?

Exercice 2 :

1. Montrer que pour tout nombre complexe $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$, nous avons :
$$|z-a|^2 + |z-b|^2 = 2\left|z - \frac{a+b}{2}\right|^2 + \frac{|b-a|^2}{2}$$
2. $\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.
Trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $MA^2 + MB^2 = \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

C.3.5 Lignes de niveau associées à l'argument d'un nombre complexe

Le $\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
Soit $\omega \in \mathbb{C}$ fixé et on s'intéresse à la fonction f définie par :
$$\left\{\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} \setminus \{\omega\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & f(z) = \arg(z-\omega) \end{array}\right.$$
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $E_\theta = f^{-1}(\{\theta\}) = \{z \in: \mathbb{C} \setminus \{\omega\} \text{ tel que } \arg(z-\omega) \equiv \theta\,[2\pi]\}$
$\mathcal{E}_\theta$ est le sous ensemble du plan $\mathcal{P}$ correspondant
Alors l'ensemble E_θ est identifié à la demie droite passant par le point Ω d'affixe ω et d'angle polaire θ, privée du point Ω

Démonstration

Si $\arg(z-\omega) = \theta\,[2\pi]$, alors $z - \omega = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et donc $z = \omega + \rho e^{i\theta}$.

Remarque 9 :

Nous vérifions, sans plus de difficulté que $F_\theta = \{z \in: \mathbb{C} \setminus \{\omega\} \text{ tel que } \arg(z-\omega) \equiv \theta\,[\pi]\}$ est identifié à une droite passant par Ω et d'angle polaire θ

C.3.6 Lemme

Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors : $(\arg z \equiv \theta\,[\pi]) \iff \left(z = \overline{z}e^{2i\theta}\right)$

Démonstration

1. Supposons $\arg z \equiv \theta\,[\pi]$
   Alors $z = \rho e^{i\theta}$ ou $z = \rho e^{i(\theta+\pi)}$
   → Si $z = \rho e^{i\theta}$, alors $z = \rho e^{i(-\theta+2\theta)} = \rho e^{-i\theta}e^{2i\theta} = \overline{z}e^{2i\theta}$
   → Si $z = \rho e^{i(\theta+\pi)}$, alors $z = \rho e^{-i\theta-i\pi+2i\theta+2i\pi} = \rho e^{-i(\theta+\pi)}e^{2i\theta+2i\pi} = \rho e^{-i(\theta+\pi)}e^{2i\theta} = \overline{z}e^{2i\theta}$
   Ainsi, si $\arg z \equiv \theta\,[\pi]$, alors $z = \overline{z}e^{2i\theta}$
2. Réciproquement, supposons $z = \overline{z}e^{2i\theta}$
   Alors, si $z = \rho e^{i\alpha}$, nous avons $z = \rho e^{-i\alpha}e^{2i\theta} = \rho e^{-i\alpha+2i\theta} = \rho e^{i(-\alpha+2\theta)}$
   Donc, nous avons $\alpha = -\alpha + 2\theta + 2k\pi \iff 2\alpha = 2\theta + 2k\pi \iff \alpha = \theta + k\pi \iff \alpha \equiv \theta\,[\pi]$.
   Autrement dit, $\arg z \equiv \theta\,[\pi]$

C.3.7 Théorème

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
Soient $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$, 2 nombres complexes tels que $a \neq b$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Nous appelons :

$$E_\theta = \left\{z \in \mathbb{C} \setminus \{a; b\} \text{ tels que } \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) \equiv \theta\,[\pi]\right\}$$

Alors :

1. Si $\theta \equiv 0\,[\pi]$, alors E_θ est la droite (AB) privée des points A et B
2. Si θ n'est pas congru à 0 modulo π, alors E_θ est un cercle de centre le point $\Omega \in \mathcal{P}$ d'affixe $\omega = \left(\frac{a+b}{2}\right) + i\left(\frac{a-b}{2}\right)\cot\theta$ et de rayon $R = \frac{|a-b|}{2\,|\sin\theta|}$

Démonstration

1. Les points M, A et$B$ sont alignés si et seulement si, au niveau des affixes, $z - a = \lambda(z-b)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, c'est à dire, si et seulement si $\frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R}$, c'est à dire $\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) \equiv 0\,[\pi]$.
   Donc, si $\theta \equiv 0\,[\pi]$, alors E_θ est la droite (AB) privée des points A et B
2. Supposons que θ n'est pas congru à 0 modulo π
   D'après le lemme C.3.6, nous avons :

$$\left(\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) \equiv \theta\,[\pi]\right) \iff \left(\frac{z-a}{z-b} = \overline{\left(\frac{z-a}{z-b}\right)}e^{2i\theta}\right)$$

   Nous allons maintenant démontrer le résultat proposé par une méthode très calculatoire [1]

1. Et un peu longuette!!

$\Rightarrow$ Tout d'abord :

$$\frac{z-a}{z-b} = \overline{\left(\frac{z-a}{z-b}\right)} e^{2i\theta} \Longleftrightarrow (z-a)\left(\overline{z}-\overline{b}\right) = e^{2i\theta}(z-b)(\overline{z}-\overline{a})$$

Ce qui, tous calculs faits, nous donne :

$$\begin{gathered}(z-a)\left(\overline{z}-\overline{b}\right) = e^{2i\theta}(z-b)(\overline{z}-\overline{a}) \\ \Longleftrightarrow \\ \left(1-e^{2i\theta}\right) z\overline{z} + \left(e^{2i\theta}\overline{a}-\overline{b}\right) z + \left(be^{2i\theta}-a\right)\overline{z} + a\overline{b} - e^{2i\theta}\overline{a}b = 0 \\ \Longleftrightarrow \\ z\overline{z} + \frac{\left(e^{2i\theta}\overline{a}-\overline{b}\right)}{\left(1-e^{2i\theta}\right)} z + \frac{\left(be^{2i\theta}-a\right)}{\left(1-e^{2i\theta}\right)}\overline{z} + \frac{a\overline{b}-e^{2i\theta}\overline{a}b}{\left(1-e^{2i\theta}\right)} = 0\end{gathered}$$

$\Rightarrow$ **Nous allons, maintenant, simplifier** $1-e^{2i\theta}$
Tout d'abord, $1-e^{2i\theta} = (1-\cos 2\theta) - i\sin 2\theta$
$\rightarrow$ Nous avons $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$, de telle sorte que $(1-\cos 2\theta) = 2\sin^2\theta$
$\rightarrow$ De plus, $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$
Donc $1-e^{2i\theta} = 2\sin^2\theta - 2i\sin\theta\cos\theta = 2\sin\theta(\sin\theta - i\cos\theta)$
Or, en regardant les lignes trigonométriques, nous avons :

$$\sin\theta = \cos\left(-\frac{\pi}{2}+\theta\right) \text{ et } -\cos\theta = \sin\left(-\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$

Donc : $\sin\theta - i\cos\theta = \cos\left(-\frac{\pi}{2}+\theta\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\theta\right) = e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+\theta\right)} = -ie^{i\theta}$
Donc :

$$1-e^{2i\theta} = -2i\sin\theta e^{i\theta}$$

$\Rightarrow$ D'où nous avons :

$$\begin{gathered}z\overline{z} + \frac{\left(e^{2i\theta}\overline{a}-\overline{b}\right)}{\left(1-e^{2i\theta}\right)} z + \frac{\left(be^{2i\theta}-a\right)}{\left(1-e^{2i\theta}\right)}\overline{z} + \frac{a\overline{b}-e^{2i\theta}\overline{a}b}{\left(1-e^{2i\theta}\right)} = 0 \\ \Longleftrightarrow \\ z\overline{z} + \frac{\left(e^{2i\theta}\overline{a}-\overline{b}\right)}{-2i\sin\theta e^{i\theta}} z + \frac{\left(be^{2i\theta}-a\right)}{-2i\sin\theta e^{i\theta}}\overline{z} + \frac{a\overline{b}-e^{2i\theta}\overline{a}b}{-2i\sin\theta e^{i\theta}} = 0 \\ \Longleftrightarrow \\ z\overline{z} - \frac{\left(e^{2i\theta}\overline{a}-\overline{b}\right)}{2i\sin\theta e^{i\theta}} z - \frac{\left(be^{2i\theta}-a\right)}{2i\sin\theta e^{i\theta}}\overline{z} - \frac{a\overline{b}-e^{2i\theta}\overline{a}b}{2i\sin\theta e^{i\theta}} = 0\end{gathered}$$

$\Rightarrow$ Notons $\omega = \frac{\left(be^{2i\theta}-a\right)}{2i\sin\theta e^{i\theta}}$. Alors,

$$\omega = \frac{\left(be^{2i\theta}-a\right)}{2i\sin\theta e^{i\theta}} = \frac{\left(be^{i\theta}-ae^{-i\theta}\right)}{2i\sin\theta}$$

De la même manière :

$$\frac{\left(e^{2i\theta}\overline{a}-\overline{b}\right)}{2i\sin\theta e^{i\theta}} = \frac{\left(e^{i\theta}\overline{a}-\overline{b}e^{-i\theta}\right)}{2i\sin\theta} = \overline{\omega}$$

De telle sorte que

$$\begin{gathered}z\overline{z} + \frac{\left(e^{2i\theta}\overline{a}-\overline{b}\right)}{-2i\sin\theta e^{i\theta}} z + \frac{\left(be^{2i\theta}-a\right)}{-2i\sin\theta e^{i\theta}}\overline{z} - \frac{a\overline{b}-e^{2i\theta}\overline{a}b}{2i\sin\theta e^{i\theta}} = 0 \\ \Longleftrightarrow \\ z\overline{z} - \overline{\omega}z - \omega\overline{z} - \frac{a\overline{b}-e^{2i\theta}\overline{a}b}{2i\sin\theta e^{i\theta}} = 0 \\ \Longleftrightarrow \\ (z-\omega)(\overline{z}-\overline{\omega}) - |\omega|^2 - \frac{a\overline{b}-e^{2i\theta}\overline{a}b}{2i\sin\theta e^{i\theta}} = 0 \\ \Longleftrightarrow \\ |z-\omega|^2 = |\omega|^2 + \frac{a\overline{b}-e^{2i\theta}\overline{a}b}{2i\sin\theta e^{i\theta}}\end{gathered}$$

⇒ Simplifions l'écriture de ω

$$\begin{aligned}\omega = \frac{\left(be^{i\theta}-ae^{-i\theta}\right)}{2i\sin\theta} &= \frac{b\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)+a\left(\cos\theta-i\sin\theta\right)}{2i\sin\theta}\\ &= \frac{\cos\theta\left(b-a\right)+i\sin\theta\left(a+b\right)}{2i\sin\theta}\\ &= \left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{i\left(a-b\right)\sin\theta}{2\sin\theta}\\ &= \left(\frac{a+b}{2}\right)+i\left(\frac{a-b}{2}\right)\cot\theta\end{aligned}$$

⇒ Simplifions maintenant, l'écriture de $|\omega|^2+\dfrac{a\overline{b}-e^{2i\theta}\overline{a}b}{2i\sin\theta e^{i\theta}}$

Nous allons le faire en plusieurs temps

→ Tout d'abord, par un calcul simple, de $|\omega|^2=\omega\times\overline{\omega}$, nous avons :

$$|\omega|^2=\omega\times\overline{\omega}=\frac{\left(be^{i\theta}-ae^{-i\theta}\right)}{2i\sin\theta}\times\frac{\left(e^{i\theta}\overline{a}-\overline{b}e^{-i\theta}\right)}{2i\sin\theta}=\frac{|b|^2-b\overline{a}e^{2i\theta}-a\overline{b}e^{2i\theta}+|a|^2}{4\sin^2\theta}$$

→ D'autre part, $2i\sin\theta=2i\times\left(\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)=e^{i\theta}-e^{-i\theta}$, de telle sorte que :

$$\begin{aligned}\frac{a\overline{b}-e^{2i\theta}\overline{a}b}{2i\sin\theta e^{i\theta}} &= \frac{a\overline{b}e^{-i\theta}-e^{i\theta}\overline{a}b}{2i\sin\theta}\\ &= \frac{-2i\sin\theta\left(a\overline{b}e^{-i\theta}-e^{i\theta}\overline{a}b\right)}{4\sin^2\theta}\\ &= \frac{\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\left(a\overline{b}e^{-i\theta}-e^{i\theta}\overline{a}b\right)}{4\sin^2\theta}\\ &= \frac{a\overline{b}e^{-2i\theta}-\overline{a}b-a\overline{b}+e^{2i\theta}\overline{a}b}{4\sin^2\theta}\end{aligned}$$

→ En additionnant, nous obtenons :

$$\begin{aligned}|\omega|^2+\frac{a\overline{b}-e^{2i\theta}\overline{a}b}{2i\sin\theta e^{2i\theta}} &= \frac{|b|^2-b\overline{a}e^{2i\theta}-a\overline{b}e^{2i\theta}+|a|^2}{4\sin^2\theta}+\frac{a\overline{b}e^{-2i\theta}-\overline{a}b-a\overline{b}+e^{2i\theta}\overline{a}b}{4\sin^2\theta}\\ &= \frac{|b|^2-b\overline{a}-a\overline{b}+|a|^2}{4\sin^2\theta}\\ &= \frac{(a-b)\left(\overline{a}-\overline{b}\right)}{4\sin^2\theta}\\ &= \frac{|a-b|^2}{4\sin^2\theta}\end{aligned}$$

Ainsi, l'affixe des points $M\in\mathcal{P}$, vérifiant $\arg\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)\equiv\theta\,[\pi]$ où θ n'est pas un réel congru à 0 modulo π vérifie : $|z-\omega|^2=\dfrac{|a-b|^2}{4\sin^2\theta}$

C'est donc un cercle de centre le point $\Omega\in\mathcal{P}$ d'affixe $\omega=\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+i\left(\dfrac{a-b}{2}\right)\cot\theta$ et de rayon $R=\dfrac{|a-b|}{2\left|\sin\theta\right|}$

Remarque 10 :

1. Lorsque θ n'est pas un réel congru à 0 modulo π, alors $A\in E_\theta$ et $B\in E_\theta$

   En effet, nous avons :

$$|a-\omega|=\left|a-\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)+i\left(\frac{a-b}{2}\right)\cot\theta\right)\right|=\left|\left(\left(\frac{a-b}{2}\right)+i\left(\frac{a-b}{2}\right)\cot\theta\right)\right|=\left|\frac{a-b}{2}\right|\times|1+i\cot\theta|$$

Or, $|1+i\cot\theta|^2 = 1+\cot^2\theta = \dfrac{1}{\sin^2\theta}$ et donc $|1+i\cot\theta| = 1+\cot^2\theta = \dfrac{1}{|\sin\theta|}$.

Donc $|a-\omega| = \left|\dfrac{a-b}{2}\right| \times \dfrac{1}{|\sin\theta|} = R$ et donc A est bien sur le cercle de centre Ω et de rayon R

Le calcul serait identique pour mour montrer que B est sur le cercle de centre Ω et de rayon R

2. Si $\theta \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$, alors $\omega = \dfrac{a+b}{2}$ et E_θ est donc le cercle de diamètre $[A;B]$ sauf A et B
3. Si θ n'est pas un réel congru à 0 modulo π, le centre du cercle E_θ $\omega_\theta = \left(\dfrac{a+b}{2}\right) + i\left(\dfrac{a-b}{2}\right)\cot\theta$ peut s'écrire, puisque $\cot\theta \in \mathbb{R}$, $\omega = \left(\dfrac{a+b}{2}\right) + i\lambda\,(a-b)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

   Ainsi, l'ensemble des centres Ω est une droite Δ dont l'équation complexe est
$$z = \left(\frac{a+b}{2}\right) + i\lambda\,(a-b) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$
   Cette droite Δ passe par le milieu I du segment $[A;B]$.

   En fait, Δ est la médiatrice du segment $[A;B]$.

   Pour le démontrer, il suffit de montrer que les droites Δ et (AB) sont perpendiculaires.

   Soit $M \in \Delta$; alors :
$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{IM} \mid \overrightarrow{IA} \right\rangle &= \operatorname{Re}\left[\left(z - \frac{a+b}{2}\right)\overline{\left(a - \frac{a+b}{2}\right)}\right] \\
&= \operatorname{Re}\left[\left(\left(\frac{a+b}{2}\right) + i\lambda\,(a-b) - \frac{a+b}{2}\right)\overline{\left(a - \frac{a+b}{2}\right)}\right] \\
&= \operatorname{Re}\left[(i\lambda\,(a-b))\overline{\left(\frac{a-b}{2}\right)}\right] \\
&= \operatorname{Re}\left[i\lambda\frac{|a-b|^2}{2}\right] = 0
\end{aligned}$$

C.3.8 Corollaire

Le $\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

Soient A, B, C et D 4 points du plan d'affixe respective $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$ et $d \in \mathbb{C}$

Ces points sont alignés ou cocycliques si et seulement si $\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right) \times \left(\dfrac{d-a}{d-b}\right) \in \mathbb{R}$

Démonstration

Nous avons $\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right) \times \left(\dfrac{d-a}{d-b}\right) \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \arg\left[\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right) \times \left(\dfrac{d-a}{d-b}\right)\right] \equiv 0\,[\pi]$

Des propriétés de l'argument, nous avons : $\arg\left[\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right) \times \left(\dfrac{d-a}{d-b}\right)\right] = \arg\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right) + \arg\left(\dfrac{d-a}{d-b}\right)$.

De là, nous tirons :
$$\begin{aligned}
\arg\left[\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \times \left(\frac{d-a}{d-b}\right)\right] \equiv 0\,[\pi] &\Longleftrightarrow \arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) + \arg\left(\frac{d-a}{d-b}\right) \equiv 0\,[\pi] \\
&\Longleftrightarrow \arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv -\arg\left(\frac{d-a}{d-b}\right)\,[\pi] \\
&\Longleftrightarrow \arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv \arg\left(\frac{d-b}{d-a}\right)\,[\pi]
\end{aligned}$$

Donc, $\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right) \times \left(\dfrac{d-a}{d-b}\right) \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \arg\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{d-b}{d-a}\right)\,[\pi]$

1. Supposons A, B et C alignés ; alors, d'après C.3.7, $\arg\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right) \equiv 0\,[\pi]$
   Comme $\arg\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{d-b}{d-a}\right)\,[\pi]$, nous avons $\arg\left(\dfrac{d-b}{d-a}\right) \equiv 0\,[\pi]$, et donc les points A, D et B sont alignés, et donc A, B, C et D sont alignés.
2. Supposons A, B et C non alignés ; alors, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, tel que θ soit non congru à 0 modulo π telle que $\arg\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right) \equiv \theta\,[\pi]$.
   D'après C.3.7, C est situé sur un cercle $\mathcal{C}_1$.
   Comme $\arg\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{d-b}{d-a}\right)\,[\pi]$, nous avons $\arg\left(\dfrac{d-b}{d-a}\right) \equiv \theta\,[\pi]$, et donc, comme A, B et C, D se trouve aussi sur le cercle $\mathcal{C}_1$
   Les points A, B, C et D sont donc cocycliques.

C.3.9 Corollaire

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
Soient $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$, 2 nombres complexes tels que $a \neq b$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Nous appelons :

$$F_\theta = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{a;b\} \text{ tels que } \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) \equiv \theta\,[2\pi] \right\}$$

Alors :

1. Si $\theta \equiv 0\,[2\pi]$, alors F_θ est la droite (AB) privée du segment $[A;B]$
2. Si $\theta \equiv \pi\,[2\pi]$, alors F_θ est le segment $[A;B]$ privé des points A et B, c'est à dire le segment ouvert $]A;B[$
3. Si θ n'est pas congru à 0 modulo 2π, alors F_θ est un arc de cercle privé des points A et B

C.3.10 Inégalité et théorème de Ptolémée

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
Soient A, B, C et D, 4 points du plan $\mathcal{P}$ 2 à 2 distincts et $ABCD$ le quadrilatère correspondant.

1. Inégalité de Ptolémée
   Nous avons toujours $AC.BD \leqslant AB.CD + AD.BC$
2. Le théorème de Ptolémée
   Le quadrilatère convexe $ABCD$ est inscriptible dans un cercle si et seulement si le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés, c'est à dire

$$AC.BD = AB.CD + AD.BC$$

Démonstration

1. Inégalité de Ptolémée
   Il est très facile de vérifier par le calcul la relation :

$$(a-c)(b-d) = (a-b)(c-d) + (a-d)(b-c)$$

   D'où, en passant aux modules :

$$|(a-c)(b-d)| = |(a-b)(c-d) + (a-d)(b-c)| \leqslant |(a-b)(c-d)| + |(a-d)(b-c)|$$

   C'est à dire en passant aux points du plan :$AC.BD \leqslant AB.CD + AD.BC$
   C'est donc l'inégalité de Ptolémée

2. Le théorème de Ptolémée
   Le théorème de Ptolémée revient donc à chercher les cas d'égalité dans l'inégalité de Ptolémée. D'après 9.3.6, nous avons $|(a-c)(b-d)| = |(a-b)(c-d)| + |(a-d)(b-c)|$ si et seulement si
   $$\frac{(a-b)(c-d)}{(a-d)(b-c)} \in \mathbb{R}^+$$
   Or
   $$\frac{(a-b)(c-d)}{(a-d)(b-c)} \in \mathbb{R}^+ \iff \frac{(a-b)(d-c)}{(a-d)(b-c)} \in \mathbb{R}^-$$
   D'après C.3.8, les points A,B,C et D sont alignés ou cocycliques

C.4 Les triangles dans le plan complexe

Dans ce paragraphe, nous revisitons le programme du collège avec, comme piment supplémentaire, l'introduction des nombres complexes

C.4.1 Définition de « vrai triangle »

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction P rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
On appelle vrai triangle du plan $\mathcal{P}$, la donnée de 3 points $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ et $C \in \mathcal{P}$ non alignés

Remarque 11 :

Si $T = ABC$ est un vrai triangle, nous notons :

$$\theta_A = \widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)} \quad \theta_B = \widehat{\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)} \quad \theta_C = \widehat{\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)}$$

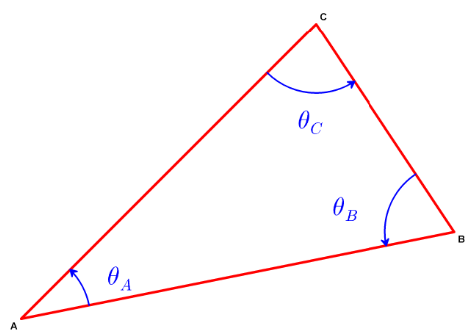


FIGURE C.2 – Un vrai triangle

C.4.2 Proposition

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction P rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
Soient 3 points $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ et $C \in \mathcal{P}$ non alignés alors :

$$\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \det\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \det\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)$$

Démonstration

En utilisant les propriétés du déterminant, nous avons :

$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\det\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AC}\right)=\det\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC}\right)+\det\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AC}\right)=-\det\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right)=\det\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$

Puis,

$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}\right)+\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=-\det\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\det\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)$

D'où le résultat $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\det\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\det\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)$

C.4.3 Définition

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction P rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
Soient 3 points $A\in\mathcal{P}$, $B\in\mathcal{P}$ et $C\in\mathcal{P}$ non alignés
On dit que le triangle $T=ABC$ est orienté positivement si $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)>0$

Remarque 12 :

1. Evidemment, le triangle $T=ABC$ est dit orienté négativement si $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)<0$
2. De la relation $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=AB\times AC\sin\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}=AB\times AC\sin\theta_A$, nous obtenons :

$$\sin\theta_A=\frac{\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}{AB\times AC}\qquad\sin\theta_B=\frac{\det\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)}{BC\times BA}\qquad\sin\theta_C=\frac{\det\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)}{CA\times CB}$$

Ce qui montre que $\sin\theta_A$, $\sin\theta_B$ et $\sin\theta_C$ sont de même signe

C.4.4 Théorème

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction P rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
Soient 3 points $A\in\mathcal{P}$, $B\in\mathcal{P}$ et $C\in\mathcal{P}$ non alignés
Alors, $\theta_A+\theta_B+\theta_C\equiv\pi\,[2\pi]$

Démonstration

Nous avons :

$$\begin{aligned}\theta_A+\theta_B+\theta_C&=\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}+\widehat{\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)}+\widehat{\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)}\\&=\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}+\widehat{\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}\right)}+\widehat{\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)}\\&=\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)}+\widehat{\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)}\\&=\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BA}\right)}\end{aligned}$$

Or, $\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BA}\right)}\equiv\pi\,[2\pi]$. Donc $\theta_A+\theta_B+\theta_C\equiv\pi\,[2\pi]$

C.4.5 Relation dans un triangle

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction P rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
Soient 3 points $A\in\mathcal{P}$, $B\in\mathcal{P}$ et $C\in\mathcal{P}$ non alignés
Dans le triangle $T=ABC$, nous avons les relations suivantes :

$$\frac{BC}{\sin\theta_A}=\frac{AC}{\sin\theta_B}=\frac{AB}{\sin\theta_C}$$

Démonstration

Des relations
- $\rightarrow$ $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = AB \times AC \sin\theta_A$
- $\rightarrow$ $\det\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = BC \times BA \sin\theta_B$
- $\rightarrow$ $\det\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = CA \times CB \sin\theta_C$

et de la proposition C.4.2, nous avons :

$$AB \times AC \sin\theta_A = BC \times BA \sin\theta_B = CA \times CB \sin\theta_C$$

$\Rightarrow$ De la première égalité $AB \times AC \sin\theta_A = BC \times BA \sin\theta_B$, nous tirons :

$$\frac{AB \times AC}{\sin\theta_B} = \frac{BC \times BA}{\sin\theta_A} \Longleftrightarrow \frac{AC}{\sin\theta_B} = \frac{BC}{\sin\theta_A}$$

$\Rightarrow$ En utilisant une seconde égalité $BC \times BA \sin\theta_B = CA \times CB \sin\theta_C$, nous avons :

$$\frac{BC \times BA}{\sin\theta_C} = \frac{CA \times CB}{\sin\theta_B} \Longleftrightarrow \frac{AB}{\sin\theta_C} = \frac{CA}{\sin\theta_B}$$

De la transitivité de l'égalité, nous avons : $\dfrac{BC}{\sin\theta_A} = \dfrac{AC}{\sin\theta_B} = \dfrac{AB}{\sin\theta_C}$

Remarque 13 :

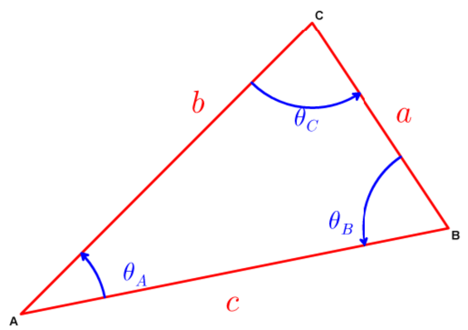


FIGURE C.3 – Relations dans un triangle triangle

Traditionnellement, il était noté $BC = a$, $AB = c$ et $AC = b$, d'où les relations dans un triangle deviennent :

$$\frac{a}{\sin\theta_A} = \frac{b}{\sin\theta_B} = \frac{c}{\sin\theta_C}$$

Exercice 3 :

Démontrer que pour tout triangle direct $T = ABC$, nous avons :

$$CB^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos\theta_A \Longleftrightarrow a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos\theta_A$$

Que se passe-t-il si $\theta_A = \dfrac{\pi}{2}$?

C.4.6 Aire d'un triangle

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction P rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

Soient 3 points $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ et $C \in \mathcal{P}$ non alignés qui forment un vrai triangle $T = ABC$

L'aire du triangle $T = ABC$, est donné par $\mu(T) = \dfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right|$

C.4.7 Proposition

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction P rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

Soient 3 points $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ et $C \in \mathcal{P}$ non alignés qui forment un vrai triangle $T = ABC$

Alors l'aire du triangle $T = ABC$, est donné par $\mu(T) = \dfrac{1}{2} AH \times BC$ où H est la projection orthogonale de A sur la droite (BC)

Démonstration

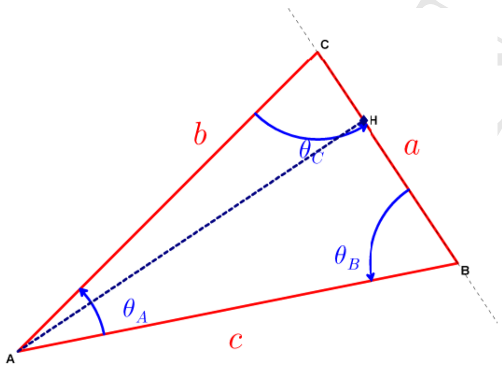


FIGURE C.4 – Aire d'un triangle

Soit donc H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) et nous considérons le repère orthonormé $\mathcal{R}\left(H, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Alors, les coordonnées des points A, B et C dans ce repère sont $A(0, y_A)$ $B(x_B, 0)$ et $C(x_C, 0)$, de telle sorte que

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B \\ -y_A \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_C \\ -y_A \end{pmatrix}$$

Donc $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \begin{vmatrix} x_B & x_C \\ -y_A & -y_A \end{vmatrix} = y_A (x_C - x_B)$

Donc $\mu(T) = \dfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right| = \dfrac{1}{2}\left|y_A (x_C - x_B)\right| = \dfrac{1}{2}|y_A|\,|(x_C - x_B)| = \dfrac{1}{2} AH \times BC$

Remarque 14 :

On retrouve cette fameuse formule sur l'aire des triangles :

Base multipliée par la hauteur et divisée par 2

Remarque 15 :

Dans cette remarque, nous montrons des résultats très simples

1. On pourrait aussi démontrer, mais cela n'apporte pas grand chose, que :

$$\frac{2\mu(T)}{AB \times AC \times BC} = \frac{|\sin\theta_A|}{BC} = \frac{|\sin\theta_B|}{AC} = \frac{|\sin\theta_C|}{AB}$$

2. Expression complexe de l'aire d'un triangle $T = ABC$

Si $a \in \mathbb{C}$ est l'affixe du point A, $b \in \mathbb{C}$ celle du point B et $c \in \mathbb{C}$ l'affixe du point C, nous avons :

$$\mu(T) = \frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\,\overline{(b-a)}\,(c-a)\right|$$

Démonstration

D'après les rappels C.1.2, nous avons, si $a \in \mathbb{C}$ est l'affixe du point A, $b \in \mathbb{C}$ celle du point A et $c \in \mathbb{C}$ l'affixe du point C, $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \operatorname{Im}\left[\overline{(b-a)}\,(c-a)\right]$.
D'où le résultat

3. Une majoration de l'aire

Si $T = ABC$ est un vrai triangle, on a alors :

$$\mu(T) \leqslant \frac{1}{2} AB \times AC$$

L'égalité est réalisée si, et seulement si, le triangle T est rectangle en A

Démonstration

Nous allons utiliser 2 méthodes pour démontrer ce résultat.

(a) Tout d'abord, rappelons que $\mu(T) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right|$.
Partant de $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = AB \times AC \times \sin\theta_A$, c'est à dire :

$$\mu(T) = \frac{1}{2}\left|AB \times AC \times \sin\theta_A\right| = \frac{1}{2} AB \times AC \left|\sin\theta_A\right|$$

Et remarquant que $\left|\sin\theta_A\right| \leqslant 1$, nous avons $\mu(T) = \frac{1}{2} AB \times AC \left|\sin\theta_A\right| \leqslant \frac{1}{2} AB \times AC$
Ainsi, si T est un triangle rectangle en A, alors, l'angle θ_A est droit et $\left|\sin\theta_A\right| = 1$; donc $\mu(T) = \frac{1}{2} AB \times AC$

(b) Une autre méthode consiste à utiliser les nombres complexes et utiliser l'inégalité $\left|\operatorname{Im}(z)\right| \leqslant |z|$
$\Rightarrow$ Comme $\mu(T) = \frac{1}{2}\left|\operatorname{Im}\overline{(b-a)}\,(c-a)\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|\overline{(b-a)}\,(c-a)\right|$ et comme

$$\frac{1}{2}\left|\overline{(b-a)}\,(c-a)\right| = \frac{1}{2}\left|\overline{(b-a)}\right| \times |c-a| = \frac{1}{2}|b-a| \times |c-a| = \frac{1}{2} AB \times AC$$

Nous avons bien $\mu(T) \leqslant \frac{1}{2} AB \times AC$
$\Rightarrow$ L'égalité $\mu(T) = \frac{1}{2} AB \times AC$ est équivalente à l'égalité :

$$\left|\operatorname{Im}\overline{(b-a)}\,(c-a)\right| = \left|\overline{(b-a)}\,(c-a)\right|$$

Et cette égalité n'est réalisée que si $\overline{(b-a)}\,(c-a)$ est imaginaire pur, c'est à dire si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires

C.4.8 Centre de gravité d'un triangle

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction P rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
Soient 3 points $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ et $C \in \mathcal{P}$ non alignés formant un vrai triangle $T = ABC$ et d'affixes respectives $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$
L'affixe du centre de gravité G de T est $z_G = \dfrac{a+b+c}{3}$

Démonstration

Si G est le centre de gravité du triangle $T = ABC$, alors $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$, et en passant aux affixes, si z_G est l'affixe de G, nous avons :

$$(z_G - a) + (z_G - b) + (z_G - c) = 0 \iff z_G = \frac{a+b+c}{3}$$

Remarque 16 :

Rappelons nous l'exposé sur le calcul barycentrique :

→ G se trouve sur la droite passant par les points d'affixe c et $\dfrac{a+b}{2}$

→ G se trouve sur la droite passant par les points d'affixe b et $\dfrac{a+c}{2}$

→ G se trouve sur la droite passant par les points d'affixe a et $\dfrac{c+b}{2}$

On retrouve le fait que les médianes d'un triangle sont concourrantes.

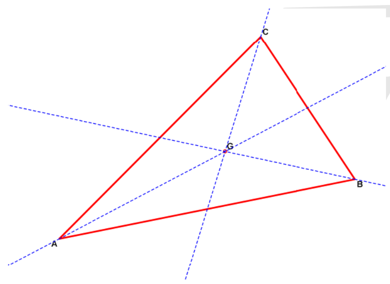


Figure C.5 – Centre de gravité d'un triangle

C.4.9 Cercle Circonscrit

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction P rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

Soient 3 points $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ et $C \in \mathcal{P}$ non alignés formant un vrai triangle $T = ABC$ et d'affixes respectives $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$

Si Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle T, alors $2\widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}\right)}\,[2\pi]$

Démonstration

1. Les points A, B et C étant non alignés, si $\theta = \arg\left(\dfrac{a-c}{b-c}\right)$, alors θ n'est pas congru à 0 modulo π.

   Appelons $\mathcal{C} = \mathcal{E}_\theta \cup \{A, B\}$ où

   $$\mathcal{E}_\theta = \left\{M \in \mathcal{P} \setminus \{A, B\} \text{ tels que } \widehat{\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)} \equiv \theta\,[\pi]\right\}$$

   $\mathcal{C}$ est un cercle contenant les points A, B et C ; c'est donc le cercle circonscrit au triangle T.

   Un point $M \in \mathcal{P}$ d'affixe $z \in \mathbb{C}$ est un point du cercle circonscrit $\mathcal{C}$ si et seulement si $\arg\left(\dfrac{a-z}{b-z}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{a-c}{b-c}\right)[\pi]$

2. En utilisant la relation de Chasles, nous avons :

$$\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega A}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega B}\right)} \equiv 0\,[2\pi]$$

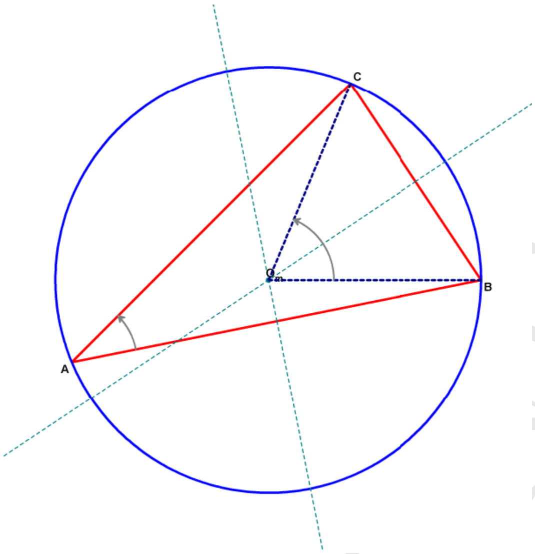


Figure C.6 – Un cercle circonscrit à un triangle

Dans le triangles ΩAB nous avons :

$$\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Omega}\right)}+\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}\right)}+\widehat{\left(\overrightarrow{B\Omega},\overrightarrow{BA}\right)}\equiv\pi\,[2\pi]$$

Dans le triangles ΩAC nous avons :

$$\widehat{\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{C\Omega}\right)}+\widehat{\left(\overrightarrow{A\Omega},\overrightarrow{AC}\right)}+\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega A}\right)}\equiv\pi\,[2\pi]$$

Les triangles ΩAB et ΩAC sont isocèles et donc $\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Omega}\right)}=\widehat{\left(\overrightarrow{B\Omega},\overrightarrow{BA}\right)}$ et $\widehat{\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{C\Omega}\right)}=\widehat{\left(\overrightarrow{A\Omega},\overrightarrow{AC}\right)}$, et donc nous avons :

$$2\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Omega}\right)}+\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}\right)}\equiv\pi\,[2\pi]$$

Et

$$2\widehat{\left(\overrightarrow{A\Omega},\overrightarrow{AC}\right)}+\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega A}\right)}\equiv\pi\,[2\pi]$$

En additionnant les 2 dernières égalités, nous obtenons :

$$2\left[\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Omega}\right)}+\widehat{\left(\overrightarrow{A\Omega},\overrightarrow{AC}\right)}\right]+\left[\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}\right)}+\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega A}\right)}\right]\equiv\pi+\pi\equiv 0\,[2\pi]$$

C'est à dire

$$2\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}-\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega C}\right)}\equiv 0\,[2\pi]$$

Ce que nous voulions

Remarque 17 :

Le centre du cercle circonscrit est le point de concours des médiatrices des côtés du triangle.

C.4.10 Lemme

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction P rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
Soient 3 points $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ et $C \in \mathcal{P}$ non alignés formant un vrai triangle $T = ABC$ et d'affixes respectives $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$
Un point $M \in \mathcal{P}$ d'affixe $z \in \mathbb{C}$ est sur la hauteur de T issue de A si et seulement si $(z-a)\,\overline{(c-b)}$ est imaginaire pur

Démonstration

Si M est sur la hauteur issue de A, alors $\left\langle \overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{BC} \right\rangle = 0$.
Or, $\left\langle \overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{BC} \right\rangle = \mathrm{Re}\left((z-a)\,\overline{(c-b)}\right) = 0$, ce qui veut dire que $(z-a)\,\overline{(c-b)}$ est imaginaire pur

Remarque 18 :

Si $(z-a)\,\overline{(c-b)}$ est imaginaire pur, ceci veut dire que $\arg(z-a) - \arg(c-b) \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$.
Comme $\arg(z-a) - \arg(c-b) \equiv \arg\left(\frac{z-a}{c-b}\right)$, il est équivalent de dire que $(z-a)\,\overline{(c-b)}$ est imaginaire pur et $\frac{z-a}{c-b}$ est imaginaire pur.

C.4.11 Egalité de Wallace

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction P rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
Soient 3 points $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ et $C \in \mathcal{P}$ quelconques. Alors, pour tout $M \in \mathcal{P}$, nous avons :

$$\left\langle \overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{BC} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{BM} \mid \overrightarrow{CA} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{CM} \mid \overrightarrow{AB} \right\rangle = 0$$

Démonstration

Soient $a \in \mathbb{C}$ l'affixe de A, $b \in \mathbb{C}$ l'affixe de B, $c \in \mathbb{C}$ l'affixe de C et $z \in \mathbb{C}$ l'affixe de M, alors, d'après l'expression du produit scalaire, nous avons :

$$\left\langle \overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{BC} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{BM} \mid \overrightarrow{CA} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{CM} \mid \overrightarrow{AB} \right\rangle = \mathrm{Re}\left((z-a)\,\overline{(c-b)} + (z-b)\,\overline{(a-c)} + (z-c)\,\overline{(b-a)}\right)$$

Nous allons démontrer que $(z-a)\,\overline{(c-b)} + (z-b)\,\overline{(a-c)} + (z-c)\,\overline{(b-a)}$ est un nombre imaginaire pur.

$$\begin{aligned}
(z-a)\,\overline{(c-b)} = (z-a)\left(\overline{c}-\overline{b}\right) &= (z-b+b-a)\left(\overline{c}-\overline{b}\right) \\
&= (z-b)\left(\overline{c}-\overline{b}\right) + (b-a)\left(\overline{c}-\overline{b}\right) \\
&= (z-b)\left(\overline{c}-\overline{a}+\overline{a}-\overline{b}\right) + (b-a)\left(\overline{c}-\overline{b}\right) \\
&= (z-b)\left(\overline{c}-\overline{a}\right) + (z-b)\left(\overline{a}-\overline{b}\right) + (b-a)\left(\overline{c}-\overline{b}\right) \\
&= (z-b)\left(\overline{c}-\overline{a}\right) + (z-c+c-b)\left(\overline{a}-\overline{b}\right) + (b-a)\left(\overline{c}-\overline{b}\right) \\
&= (z-b)\left(\overline{c}-\overline{a}\right) + (z-c)\left(\overline{a}-\overline{b}\right) + (c-b)\left(\overline{a}-\overline{b}\right) + (b-a)\left(\overline{c}-\overline{b}\right) \\
&= -(z-b)\,\overline{(a-c)} - (z-c)\,\overline{(b-a)} + (c-b)\,\overline{(a-b)} + (b-a)\,\overline{(c-b)}
\end{aligned}$$

D'où

$$(z-a)\,\overline{(c-b)} + (z-b)\,\overline{(a-c)} + (z-c)\,\overline{(b-a)} = (c-b)\,\overline{(a-b)} + (b-a)\,\overline{(c-b)}$$

En posant $U = (c-b)\,\overline{(a-b)}$, nous avons $\overline{U} = (a-b)\,\overline{(c-b)}$ et donc :

$$(z-a)\,\overline{(c-b)} + (z-b)\,\overline{(a-c)} + (z-c)\,\overline{(b-a)} = U - \overline{U} = 2i\,\mathrm{Im}\,(U) = 2i\,\mathrm{Im}\left((c-b)\,\overline{(a-b)}\right)$$

Ce qui montre donc que $(z-a)\,\overline{(c-b)} + (z-b)\,\overline{(a-c)} + (z-c)\,\overline{(b-a)}$ est un nombre imaginaire pur et que sa partie réelle est nulle. Ainsi :

$$\left\langle \overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{BC} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{BM} \mid \overrightarrow{CA} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{CM} \mid \overrightarrow{AB} \right\rangle = 0$$

Remarque 19 :

Nous venons aussi de montrer que, pour tout nombre complexe $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ $c \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$ que si 2 quantités parmi $(z-a)\,\overline{(c-b)}$, $(z-b)\,\overline{(a-c)}$ et $(z-c)\,\overline{(b-a)}$ sont des nombres imaginaires purs, alors la troisième quantité est aussi imaginaire pure.

C.4.12 Théorème

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction P rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

Soient 3 points $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ et $C \in \mathcal{P}$ non alignés formant un vrai triangle $T = ABC$. Alors, les hauteurs de ce triangle sont concourrantes. Le point de concours s'appelle orthocentre [a]

a. Qu'il ne faut pas confondre avec **hortocentre** qui a tout d'une jardinerie

Démonstration

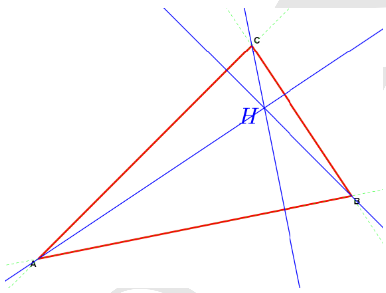


FIGURE C.7 – L'orthocentre, point de rencontre des hauteurs

Soient $a \in \mathbb{C}$ l'affixe de A, $b \in \mathbb{C}$ l'affixe de B, $c \in \mathbb{C}$ l'affixe de C. Nous appelons H_A la hauteur issue de A et H_B la hauteur issue de B.

Soit $M \in \mathcal{P}$ tel que $M \in H_A$; alors l'affixe $z \in \mathbb{C}$ de M vérifie $\operatorname{Re}\left((z-a)\,\overline{(b-c)}\right) = 0$, c'est à dire que $(z-a)\,\overline{(b-c)}$ est imaginaire pur.

De même, si $M \in \mathcal{P}$ tel que $M \in H_B$; alors l'affixe $z \in \mathbb{C}$ de M vérifie $\operatorname{Re}\left((z-b)\,\overline{(a-c)}\right) = 0$, c'est à dire que $(z-b)\,\overline{(a-c)}$ est imaginaire pur.

Si $M \in H_A \cap H_B$, alors $(z-a)\,\overline{(b-c)}$ et $(z-b)\,\overline{(a-c)}$ sont imaginaires purs.

D'après le résultat montré précédemment, nous pouvons conclure que $(z-c)\,\overline{(a-b)}$ est imaginaire pur et que donc $M \in H_C$, la hauteur issue de C

Les 3 hauteurs sont donc concourrantes

C.4.13 La droite d'Euler

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction P rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

Soient 3 points $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ et $C \in \mathcal{P}$ non alignés formant un vrai triangle $T = ABC$ et d'affixes respectives $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$

Soient G le centre de gravité de T, Ω le centre du cercle circonscrit et H l'orthocentre.

Alors $\overrightarrow{\Omega H} = 3\overrightarrow{\Omega G}$, ce qui veut dire que les 3 points G, Ω et H sont alignés, formant ainsi la droite d'Euler

Démonstration

Soit Ω le centre du cercle circonscrit au triangle $T = ABC$

Sans perdre de généralité, nous considérons le repère orthonormé $\mathcal{R}\left(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, c'est à dire que nous considérons que $\Omega = O$.

Nous avons alors, puisque Ω est le centre du cercle circonscrit :

$$|a| = \Omega A = \Omega B = |b| = |c| = \Omega C = R$$

Si G est l'isobarycentre de T, alors, l'affixe $g \in \mathbb{C}$ de G est donnée par $g = \dfrac{a+b+c}{3}$.
Soit H le point de $\mathcal{P}$ d'affixe $h = a+b+c$.
Nous allons montrer que H est l'orthocentre de T.
Tout d'abord, nous avons, en termes d'affixes $h - a = b + c$, ce qui se traduit, en termes vectoriels par : $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C}$. Nous avons, alors :

$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{AH} \mid \overrightarrow{CB} \right\rangle &= \left\langle \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C} \mid \overrightarrow{\Omega B} - \overrightarrow{\Omega C} \right\rangle \\ &= \Omega B^2 - \Omega C^2 = R^2 - R^2 = 0\end{aligned}$$

Ce qui veut dire que les droites (AH) et (BC) sont orthogonales et que H est sur la hauteur issue de A.
Nous démontrerions, de la même manière que $\left\langle \overrightarrow{BH} \mid \overrightarrow{AC} \right\rangle = 0$, et que, donc, les droites (BH) et (AC) sont orthogonales et que H est sur la hauteur issue de B.
H est donc l'orthocentre du triangle T, et comme $3g = h$, nous avons $\overrightarrow{\Omega H} = 3\overrightarrow{\Omega G}$.
Ainsi, les points Ω, H et G sont alignés.

C.4.14 Triangle équilatéral

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction P rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
Soient 3 points $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ et $C \in \mathcal{P}$ non alignés formant un vrai triangle $T = ABC$ et d'affixes respectives $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$
Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. Le triangle $T = ABC$ est équilatéral
2. $|b-a| = |b-c| = |c-a|$
3. $\dfrac{1}{a-b} + \dfrac{1}{b-c} + \dfrac{1}{c-a} = 0$
4. $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$
5. j et $\overline{j} = j^2$ étant les racines cubiques de l'unité, l'une ou l'autre est racine du polynôme du second degré $az^2 + bz + c$

Démonstration

La démonstration de ce résultat est très calculatoire, et, parfois, astucielle.

1. Il est évident que nous avons l'équivalence :

$$ABC \text{ triangle équilatéral} \iff |b-a| = |b-c| = |c-a|$$

Cette équivalence est liée à la définition de triangle équilatéral et au lien entre distance et module de nombres complexes

2. **Supposons que** $|b-a| = |b-c| = |c-a|$ et démontrons que $\dfrac{1}{a-b} + \dfrac{1}{b-c} + \dfrac{1}{c-a} = 0$
→ Nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{1}{a-b} &= \frac{1}{a-b} \times \frac{\overline{a-b}}{\overline{a-b}} = \frac{\overline{a-b}}{|a-b|^2} \\ &= \frac{\overline{a-b}}{|b-c|^2} = \frac{1}{b-c} \times \frac{\overline{a-b}}{\overline{b-c}} \\ &= \frac{1}{b-c} \times \frac{\overline{a-b-c+c}}{\overline{b-c}} \\ &= \frac{1}{b-c} \times \left(\frac{\overline{a-c}}{\overline{b-c}} - \frac{\overline{b-c}}{\overline{b-c}} \right) \\ &= \frac{1}{b-c} \times \left(\frac{\overline{a-c}}{\overline{b-c}} - 1 \right)\end{aligned}$$

→ Comme :

$$\begin{aligned}\frac{|a-c|}{|b-c|}=1 &\Longleftrightarrow \frac{|a-c|^2}{|b-c|^2}=1\\ &\Longleftrightarrow \frac{\overline{(a-c)}\,(a-c)}{\overline{(b-c)}\,(b-c)}=1\\ &\Longleftrightarrow \frac{\overline{(a-c)}}{\overline{(b-c)}}=\frac{(b-c)}{(a-c)}\end{aligned}$$

D'où $\left(\overline{\frac{a-c}{b-c}}-1\right)=\left(\frac{(b-c)}{(a-c)}-1\right)$

→ Et donc :

$$\frac{1}{a-b}=\frac{1}{b-c}\times\left(\frac{(b-c)}{(a-c)}-1\right)=\frac{1}{a-c}-\frac{1}{b-c}$$

C'est à dire $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}=0$

3. **Supposons** $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}=0$

   Alors, en multipliant cette égalité par le produit $(b-c)(a-b)(c-a)$ et nous obtenons alors :

$$(b-c)(c-a)+(a-b)(c-a)+(b-c)(a-b)=0$$

   En développant, nous avons $ab+ac+bc-a^2-b^2-c^2=0$, c'est à dire $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$

4. **Supposons maintenant que** $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$

   → Dans un premier temps, il faut remarquer que j la racine cubique complexe de 1 est telle que $j^2=\overline{j}$, que $1+j+j^2=0$, qu'en particulier $j+j^2=-1$, que $1+\overline{j}+\overline{j}^2=0$, que $j=\overline{j}^2$

   → En second lieu,

$$\begin{aligned}\left(c+bj+aj^2\right)\left(c+b\overline{j}+a\overline{j}^2\right)=&\ \left(aj^2+bj+c\right)\left(aj+bj^2+c\right)\\ =&\ a^2+abj+acj^2+abj^2+b^2+bcj+acj+bcj^2+c^2\\ =&\ a^2+b^2+c^2+ab\left(j+j^2\right)+ac\left(j+j^2\right)+bc\left(j+j^2\right)\\ =&\ a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0\end{aligned}$$

   Donc, j ou $\overline{j}$ est racine de l'équation $az^2+bz+c=0$

5. **Supposons que** j **soit racine de** $az^2+bz+c=0$

   Nous allons utiliser le fait que $1+j+j^2=0$

   Nous avons alors $aj^2+bj+c=0$.

   ⇒ Alors :

$$aj^2+bj+c=0\Longleftrightarrow aj^2+bj-c\left(j+j^2\right)=0\Longleftrightarrow (a-c)\,j^2=(c-b)\,j$$

   Comme $|j|=\left|j^2\right|=1$, nous avons $|a-c|=|c-b|$

   ⇒ D'autre part :

$$aj^2+bj+c=0\Longleftrightarrow aj^2-b\left(j+j^2\right)+c=0\Longleftrightarrow (a-b)\,j^2=(b-c)\,j$$

   Et donc $|a-b|=|b-c|$

   D'où nous avons $|a-b|=|b-c|=|a-c|$ et le triangle ABC est bien équilatéral

Nous venons de montrer $1\Longleftrightarrow 2\Longrightarrow 3\Longrightarrow 4\Longrightarrow 5\Longrightarrow 2$

Il y a donc équivalence entre les 5 propositions.

Exercice 4 :

Quelles relations doivent exister entre les nombres complexes dont les images sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés ?

Exercice 5 :

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien de direction P rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$
Soient 3 points $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{P}$ et $C \in \mathcal{P}$ distincts et d'affixes respectives $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$
A chaque triplet de points (A, B, C) nous associons les nombres :

$$u(A,B,C) = a + bj + cj^2 \quad u(A,B,C) = a + bj^2 + cj \quad w(A,B,C) = \frac{u(A,B,C)}{v(A,B,C)}$$

Où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est une racine cubique de 1

1. Soit $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ une transformation du plan.
   Nous appelons $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$.
   Exprimer $u(A', B', C')$, $v(A', B', C')$ et $w(A', B', C')$ en fonction de $u(A,B,C)$, $v(A,B,C)$ et $w(A,B,C)$
   (a) Lorsque f est une translation
   (b) Lorsque f est une rotation de centre O
   (c) Lorsque f est une homothétie de centre O
2. Montrer que deux triangles $T = ABC$ et $T' = A'B'C'$ sont semblables si et seulement si $w(A,B,C) = w(A', B', C')$
3. Trouver tous les triangles $T = ABC$ tels que $u(A,B,C) = 0$ ou $v(A,B,C) = 0$

C.5 Problèmes

L'objet de ces problèmes est de montrer que nous pouvons définir des applications de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui ne sont pas affines. Ces applications sont définies à partir des nombres complexes. C'est aussi l'occasion de résoudre des problèmes transversaux.

Exercice 6 :

Soient $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls, $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et $\mathcal{P}^*$ le plan $\mathcal{P}$ privé de O, c'est à dire $\mathcal{P}^* = \mathcal{P} \setminus \{O\}$
Nous considérons l'application $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ définie par :

$$\begin{cases} f : \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ \quad z & \longmapsto & f(z) = \dfrac{1}{z^2} \end{cases}$$

Nous considérerons aussi, l'application $F : \mathcal{P}^* \longrightarrow \mathcal{P}^*$ qui au point $M \in \mathcal{P}^*$ d'affixe $z \in \mathbb{C}^*$ associe le point $F(M) \in \mathcal{P}$ d'affixe $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$

1. **Quelques manipulations**
   (a) Soit un nombre complexe $z \in \mathbb{C}^*$, de module r non nul et d'argument θ. Montrer que $f(z)$ s'écrit $f(z) = \dfrac{1}{r^2}\left(e^{-2i\theta}\right)$
   (b) L'application f est-elle surjective ? Est-elle injective ?
   (c) Etudier l'équation $z = f(z)$
   (d) <u>Le cercle unité</u>
      i. On désigne par $M \in \mathcal{P}^*$ un point de $\mathcal{P}^*$ dont l'affixe $z \in \mathbb{C}^*$ a pour module un Construire l'image de M par F .
      ii. Représenter les points invariants par F
      iii. Etant donné un point $M \in \mathcal{P}^*$ dont l'affixe $Z \in \mathbb{C}^*$ a pour module un, quel est l'ensemble des points m tels que $F(m) = M$? Construire ces points.

(e) Soit $(d) \subset \mathcal{P}$ une demi-droite de $\mathcal{P}$, d'origine O. Construire l'image par F de $(d) \setminus \{O\}$ Quelle est l'image par F d'une droite passant par 0, mais privée de O ?

(f) Etant donné, dans $\mathcal{P}$, une droite (Δ) passant par O, quel est l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}^*$ tels que $F(M)$ appartienne à $(\Delta) \setminus \{O\}$

On considère l'ensemble γ des points de $\mathcal{P}$ dont l'affixe est

$$z = -2\cos^2\theta - 2i\sin\theta\cos\theta$$

où $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$

2. (a) Démontrer que γ est inclus dans un cercle passant par O
   (b) Donner, en fonction de θ,le module et un argument de l'affixe z d'un point $M \in \gamma$.
   (c) Exprimer, en fonction de $\tan\theta$, les coordonnées X et Y de $F(M)$.
   (d) En déduire l'équation de l'image Γ de γ par l'application F. Quelle est la nature de Γ ?
   (e) Vérifier que les points I et J de γ définis respectivement par $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ et $\theta = \dfrac{4\pi}{3}$ appartiennent aussi à Γ . En expliquer la raison.
   (f) On considère les fonctions vectorielles g et G de l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$ de $\mathbb{R}$ dans l'espace vectoriel $\overrightarrow{P}$ associé à $\mathcal{P}$ définies par

   $$g(\theta) = \overrightarrow{OM} \text{ et } G(\theta) = \overrightarrow{OF(M)}$$

   où M est le point de γ d'argument θ
   i. Déterminer, s'ils existent, les vecteurs dérivés $\overrightarrow{g'(\theta)}$ et $\overrightarrow{G'(\theta)}$
   ii. Comparer $\overrightarrow{g'\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$ et $\overrightarrow{G'\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$

3. Dans cette question, l'affixe de $M \in \mathcal{P}$ est $z = \cos t + i\sin t$ où le paramètre t désigne le temps et décrit l'intervalle $[0; 2\pi[$
   (a) Quelle est la trajectoire du point M ?
   (b) Quelle est la trajectoire du point $F(M)$?
   (c) Préciser les mouvements de M et $F(M)$. Les points$M$ et $F(M)$ peuvent-ils être confondus ? Dans l'affirmative, à quelles dates et en quels points de la trajectoire ?
   (d) Soit $P \in \mathcal{P}$ le point défini par $\overrightarrow{MP} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{MF(M)}$
   i. Calculer les coordonnées de P en fonction de t
   ii. Calculer les coordonnées du vecteur-vitesse $\overrightarrow{V(t)}$ du point P
   iii. Le vecteur $\overrightarrow{V(t)}$ peut-il être nul ? Où sont alors situés les points M, $F(M)$ et P ?
   iv. Montrer que, dans le cas où $\overrightarrow{V(t)}$ n'est pas nul, la tangente à la trajectoire de P est orthogonale à la droite $(M, F(M))$.

Exercice 7 :

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

1. On se donne un point $\Omega \in \mathcal{P}$ et un nombre réel $k > 0$. On considère l'application f définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f : \mathcal{P}\setminus\{\Omega\} & \longrightarrow & \mathcal{P}\setminus\{\Omega\} \\ M & \longmapsto & f(M) \end{array}\right. \quad \text{où } \overrightarrow{\Omega f(M)} = \frac{k}{\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|^2}\overrightarrow{\Omega M}$$

   (a) Démontrer que f est involutive

(b) Quelle est l'image, par f du cercle Γ de centre Ω et de rayon $\sqrt{k}$?

(c) Quel est l'ensemble des points invariants par f ? f est-elle une application affine ?

(d) $\mathcal{P}$ est identifié au plan complexe $\mathbb{C}$. On note z l'affixe de M, Z celle de $f(M)$ et ω l'affixe du point Ω. Etablir la relation :

$$Z = \omega + \frac{k}{\overline{\overline{z - \omega}}}$$

2. On appelle f' l'application de $\mathcal{P}$ associée à la relation dans $\mathbb{C}$ définie par $Z - 1 = \dfrac{k}{\overline{z} - 1}$ où $k > 0$, f_1 celle associée à la relation définie par $Z - 1 - b = \dfrac{|b|^2}{\overline{\overline{z - 1 - b}}}$ où $b \in \mathbb{C}$ est un nombre complexe non nul

(a) i. Sur quel ensemble E_1 la composée $\varphi_1 = f' \circ f_1 \circ f'$ est-elle définie ?

ii. Etablir la relation entre les affixes de M et de son image par $f_1 \circ f'$

iii. En déduire que la relation entre les affixes de M et de son image M_1 par φ_1 est :

$$Z_1 = \frac{b + \overline{b} + k}{\overline{b}} - \frac{b}{\overline{b}}\overline{z} \tag{C.1}$$

(b) Pour $\theta \neq k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on pose, désormais, $k = \sin^2\theta$ et $b = \dfrac{\sin\theta}{2}(-\sin\theta + i\cos\theta)$

i. En utilisant la relation (C.3), montrer que φ_1 , est alors la restriction à E_1, d'une symétrie orthogonale S_1 par rapport à une droite (Δ_1) passant par O. On appelle (D) la droite $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$, déterminer l'angle $\widehat{((D);(\Delta_1))}$

ii. On appelle f_2 l'application associée à la relation :

$$Z - 1 - \overline{b} = \frac{|b|^2}{\overline{\overline{z - 1 - \overline{b}}}}$$

et φ_2 la composée $\varphi_2 = f' \circ f_2 \circ f'$

Montrer sans nouveaux calculs que φ_2 est aussi la restriction à un ensemble E_2, d'une symétrie orthogonale S_2, par rapport à une droite (Δ_2) que l'on précisera.

iii. Prouver l'identité de $f' \circ f_2 \circ f_1 \circ f'$ et de R où R désigne la restriction de $S_2 \circ S_1$ à une partie $\mathcal{P}_1$ de $\mathcal{P}$ que l'on précisera. Préciser la nature de cette application R.

iv. Quelles valeurs donner à θ pour que la rotation R soit associée à la définition $Z = z\left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)$.

(c) Soit les applications définies dans $\mathcal{P} \setminus \{O\}$ par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_1' : \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & f_1'(z) = \dfrac{1}{\overline{z}} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} f_2' : \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & f_2'(z) = \dfrac{1-k}{\overline{z}} \end{array}\right.$$

i. Démontrer que la composée $H = f_2' \circ f_1'$ est la restriction à $\mathcal{P} \setminus \{O\}$ d'une homothétie à préciser

ii. On considère R dont la définition complexe est $Z = z\left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)$. Montrer que l'application $H \circ R$ est associée à la relation :

$$Z = (1 - k)\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)z \tag{C.2}$$

(d) On appelle Σ l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ associée à la relation (C.4). Déterminer la nature de Σ et ses éléments remarquables.

Exercice 8 :

On considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et nous considérons $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f(z) = az + b\overline{z} \end{array} \right. \quad \text{où } a \in \mathbb{R}^{*+} \text{ et } b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \text{ où } |b| = a$$

1. Démontrer que f est $\mathbb{R}$-linéaire
2. Rechercher noyau et image de f
3. Discuter, suivant les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ de la nature de f

C.6 Corrections de quelques exercices

Exercice 1 :

Quel est l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z - i| = |z - iz| = |z - 1|$?

Ce n'est pas un problème qui doit poser de grosses difficultés.
Nous appelons $S = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z - i| = |z - iz| = |z - 1|\}$; c'est l'emsemble des solutions.
Soit $A_1 = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z - i| = |z - iz|\}$ et $A_2 = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z - i| = |z - 1|\}$. Alors $S = A_1 \cap A_2$

→ Déterminons A_1.
Pour commencer, nous avons $|z - iz| = |z| \times |1 - i| = \sqrt{2}\,|z|$, et donc $|z - i| = |z - iz| \iff |z - i| = \sqrt{2}\,|z|$
Nous sommes donc, là, devant une identité de la forme $|z - a| = \lambda\,|z - b|$ avec $a = i$, $b = 0$ et $\lambda = \sqrt{2}$.
A_1 est donc un cercle de centre $\omega = \dfrac{i}{1-2} = -i$ et de rayon $R = \dfrac{\sqrt{2}\,|i|}{|1-2|} = \sqrt{2}$

→ Détermination de A_2
Clairement, A_2 est la médiatrice du segment $[AB]$ où A apour affixe i et B pour affixe 1 ; en fait, A_2 est la droite d'équation $y = x$, et l'affixe des points de A_1 est donné par $z = x\,(1 + i)$ avec $x \in \mathbb{R}$

Quels sont les éléments de S ?
Ces éléments doivent vérifier $|z - i| = \sqrt{2}\,|z| \iff |z - i|^2 = 2\,|z|^2$ et donc, nous avons :

$$|x\,(1+i) - i|^2 = 2\,|x\,(1+i)|^2 \iff |x + i\,(x-1)|^2 = 2x^2\,|1+i|^2 \iff x^2 + (x-1)^2 = 4x^2$$

Il nous suffit de résoudre l'équation du second degre $3x^2 - (x-1)^2 = 0 \iff \left(\sqrt{3}x + (x-1)\right)\left(\sqrt{3}x - (x-1)\right) = 0$.
Nous obtenons donc 2 solutions : $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1}{\sqrt{3}-1} = -\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$. Ainsi :

$$S = \left\{S_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\,(1+i)\ ,\ S_2 = -\frac{\sqrt{3}+1}{2}\,(1+i)\right\}$$

Une représentation graphique des ensembles A_1, A_2 et S est donnée dans la figure C.8

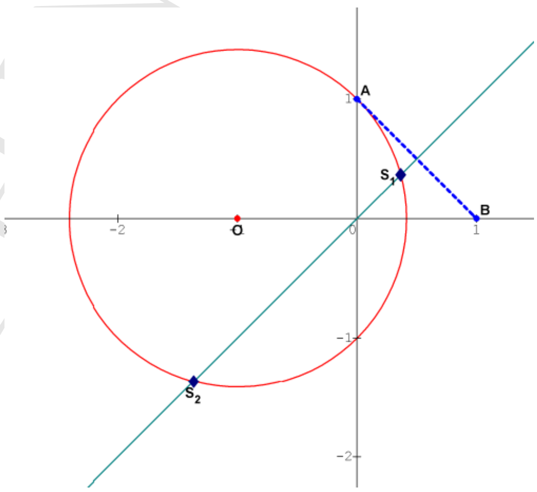


FIGURE C.8 – Représentation graphique de A_1 etA_2 et de S

Exercice 2 :

1. *Montrer que pour tout nombre complexe $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$, nous avons :*
$$|z-a|^2 + |z-b|^2 = 2\left|z - \frac{a+b}{2}\right|^2 + \frac{|b-a|^2}{2}$$

   ⋆ Il suffit d'écrire $|z-a|^2 = \left|z - \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\right|^2$ et remarquer que :
$$\begin{aligned}\left|z - \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\right|^2 &= \left(z - \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\right)\overline{\left(z - \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\right)} \\ &= \left(\left(z - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{b-a}{2}\right)\left(\overline{\left(z - \frac{a+b}{2}\right)} + \overline{\frac{b-a}{2}}\right) \\ &= \left|z - \frac{a+b}{2}\right|^2 + \left(z - \frac{a+b}{2}\right)\overline{\frac{b-a}{2}} + \frac{b-a}{2}\overline{\left(z - \frac{a+b}{2}\right)} + \left|\frac{b-a}{2}\right|^2\end{aligned}$$

   ⋆ De la même manière, nous démontrons que :
$$|z-b|^2 = \left|z - \frac{a+b}{2}\right|^2 + \left|\frac{b-a}{2}\right|^2 + \left(z - \frac{a+b}{2}\right)\overline{\frac{a-b}{2}} + \frac{a-b}{2}\overline{\left(z - \frac{a+b}{2}\right)}$$

   ⋆ En additionnant, nous avons :
$$|z-a|^2 + |z-b|^2 = 2\left|z - \frac{a+b}{2}\right|^2 + 2\frac{|b-a|^2}{4} = 2\left|z - \frac{a+b}{2}\right|^2 + \frac{|b-a|^2}{2}$$

   Ce que nous voulions

2. *$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.*
Trouver l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $MA^2 + MB^2 = \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

   Soit $z \in \mathbb{C}$, l'affixe de M, $a \in \mathbb{C}$ celui de A et $b \in \mathbb{C}$, l'affixe de B.
Alors, l'identité $MA^2+MB^2 = \lambda$ se traduit, dans l'ensemble des nombres complexes, par $|z-a|^2 + |z-b|^2 = \lambda$.

   D'après la question précédente, $|z-a|^2+|z-b|^2 = 2\left|z - \frac{a+b}{2}\right|^2 + \frac{|b-a|^2}{2}$ et nous arrivons donc à l'identité :
$$2\left|z - \frac{a+b}{2}\right|^2 + \frac{|b-a|^2}{2} = \lambda \iff \left|z - \frac{a+b}{2}\right|^2 = \frac{\lambda - \frac{|b-a|^2}{2}}{2}$$

   En remarquant que $\frac{a+b}{2}$ est l'affixe du milieu I de l'intervalle $[A;B]$

   → Si $\lambda < \frac{|b-a|^2}{2}$, l'ensemble est vide ; il n'y a pas de points M qui vérifie $MA^2 + MB^2 = \lambda$

   → Si $\lambda = \frac{|b-a|^2}{2}$, alors $\left|z - \frac{a+b}{2}\right|^2 = 0$ et la solution complexe est $z_0 = \frac{a+b}{2}$, c'est à dire que le seul point M tel que $MA^2 + MB^2 = \lambda$ est le milieu I de l'intervalle $[A;B]$

   → Si $\lambda > \frac{|b-a|^2}{2}$, alors l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $MA^2 + MB^2 = \lambda$ est le cercle de centre I et de rayon $R = \frac{\sqrt{2\lambda - |b-a|^2}}{2}$

C.6.1 Problèmes

Exercice 6 :

Soient $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls, $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et $\mathcal{P}^*$ le plan $\mathcal{P}$ privé de O, c'est à dire $\mathcal{P}^* = \mathcal{P} \setminus \{O\}$

Nous considérons l'application $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ définie par :

$$\begin{cases} f : \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & f(z) = \dfrac{1}{z^2} \end{cases}$$

Nous considérerons aussi, l'application $F : \mathcal{P}^* \longrightarrow \mathcal{P}^*$ qui au point $M \in \mathcal{P}^*$ d'affixe $z \in \mathbb{C}^*$ associe le point $F(M) \in \mathcal{P}$ d'affixe $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$

1. (a) *Soit un nombre complexe $z \in \mathbb{C}^*$, de module r non nul et d'argument θ. Montrer que $f(z)$ s'écrit $f(z) = \dfrac{1}{r^2}\left(e^{-2i\theta}\right)$*

   Pas très difficile !!

   Si $z \in \mathbb{C}^*$ est de module r non nul et d'argument θ, alors $z = re^{i\theta}$ et donc, très simplement :

$$f(z) = f\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{r^2 e^{2i\theta}} = \frac{1}{r^2}e^{-2i\theta}$$

   C'est fini !!

   (b) *L'application f est-elle surjective ? Est-elle injective ?*

   $\Rightarrow$ f est surjective.

   En effet, soit $z \in \mathbb{C}^*$, de module r non nul et d'argument θ ; nous pouvons écrire $z = re^{i\theta}$ alors $u = \dfrac{1}{\sqrt{r}}e^{-i\frac{\theta}{2}}$ est tel que $f(u) = z$; en effet :

$$f(u) = \frac{1}{u^2} = \frac{1}{\frac{1}{r}e^{-i\theta}} = re^{i\theta} = z$$

   A tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe donc un antécédent $u \in \mathbb{C}^*$ tel que $f(u) = z$

   $\Rightarrow$ Par contre, f n'est pas injective.

   En effet, $f(-1) = f(1) = 1$.

   Il existe donc $z = 1 \in \mathbb{C}^*$ et $z_1 = -1 \in \mathbb{C}^*$ avec $z \neq z_1$ et $f(z) = f(z_1) = 1$

   (c) *Etudier l'équation $z = f(z)$*

   Nous recherchons donc les points fixes de f, et ces points fixes sont donc définis par $z = f(z)$

   Nous avons $z = f(z) \Longleftrightarrow z = \dfrac{1}{z^2} \Longleftrightarrow z^3 = 1$

   Ces points fixes sont donc les racines cubiques de 1 ; il y en a donc 3 : $z_1 = 1$, $z_2 = j$ et $z_3 = j^2$ *(cf figure C.9)*

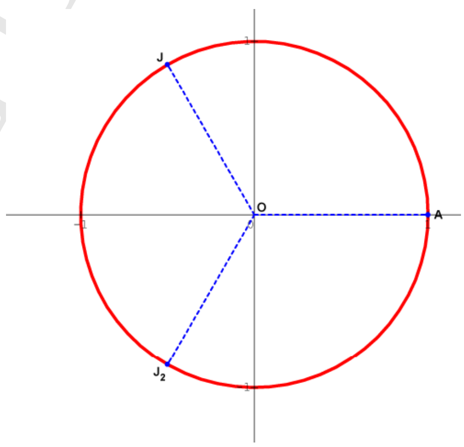


FIGURE C.9 – Représentation des points invariants par F

(d) i. *On désigne par $M \in \mathcal{P}^*$ un point de $\mathcal{P}^*$ dont l'affixe $z \in \mathbb{C}^*$ a pour module un Construire l'image de M par F*

Si $z \in \mathbb{C}^*$ est de module 1, z peut donc s'écrire $z = e^{i\theta}$ et donc $f(z) = e^{-2i\theta}$ *(cf figure C.10)*

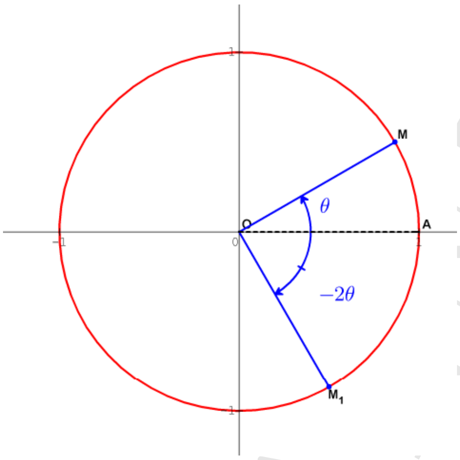


FIGURE C.10 – Représentation M et de son point image $M_1 = F(M)$

ii. *Etant donné un point $M \in \mathcal{P}^*$ dont l'affixe $Z \in \mathbb{C}^*$ a pour module un, quel est l'ensemble des points m tels que $F(m) = M$? Construire ces points.*

Si $z \in \mathbb{C}^*$ est de module 1, z peut donc s'écrire $z = e^{i\theta}$, alors un antécédent $u \in \mathbb{C}^*$ est tel que $f(u) = z$.

Si $u = re^{i\alpha}$, alors $f(u) = \dfrac{1}{r^2}\left(e^{-2i\alpha}\right)$ et donc :

$$\left\{\begin{array}{rl} \dfrac{1}{r^2} = & 1 \\ -2i\alpha = & \theta + 2k\pi \end{array}\right. \iff [\left\{\begin{array}{rl} r = & 1 \\ \alpha = & \dfrac{-\theta}{2} + k\pi \end{array}\right.$$

Ce qui signifie que si $u \in \mathbb{C}^*$ est un antécédent de z, $-u$ en est un autre et que, d'autre part, si z est sur le cercle unité *(i.e.* $|z| = 1$*)*, ses antécédents se trouvent sur le cercle unité. *(cf figure C.11)*

Le cercle unité est <u>globalement invariant</u> par f

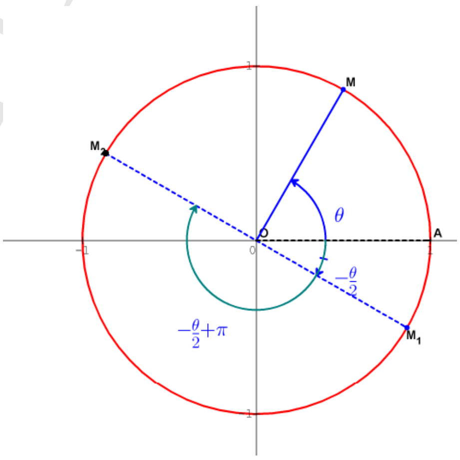


FIGURE C.11 – Représentation M et de ses antécédents M_1 et M_2

(e) *Soit $(d) \subset \mathcal{P}$ une demi-droite de $\mathcal{P}$, d'origine O. Construire l'image par F de $(d) \setminus \{O\}$ Quelle est l'image par F d'une droite passant par O, mais privée de O ?*

Les points $M \in (d) \setminus \{O\}$ ont tous pour affixe $z = \rho e^{i\theta_0}$ avec $\theta_0 \in \mathbb{R}$ fixé *(angle polaire)* et $\rho > 0$. L'image $F(M)$ a pour affixe $f(z) = \dfrac{1}{\rho^2} e^{-2i\theta_0}$; c'est donc aussi une demi-droite issue de O.

Il faut remarquer que si $|z| = \rho > 1$, alors $|f(z)| = \dfrac{1}{\rho^2} < 1$ et l'image $F(M)$ est donc à l'intérieur du cercle unité, tout comme si $|z| = \rho < 1$, alors $|f(z)| = \dfrac{1}{\rho^2} > 1$ et l'image $F(M)$ est donc à l'extérieur du cercle unité *(cf figure C.12)*

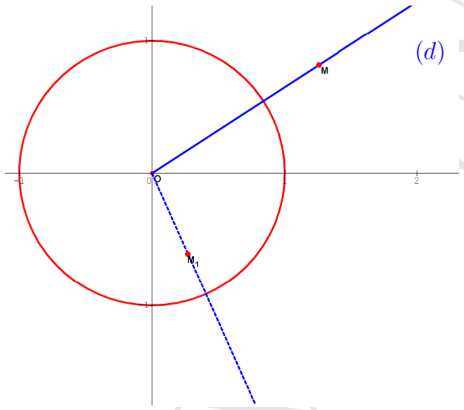


FIGURE C.12 – Une demie-droite et son image

(f) *Etant donné, dans $\mathcal{P}$, une droite (Δ) passant par O, quel est l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}^*$ tels que $F(M)$ appartienne à $(\Delta) \setminus \{O\}$*

Soit (Δ) une droite passant par O. Les points $M \in (\Delta) \setminus \{O\}$ ont pour affixe $z = \rho e^{i\theta_0}$ ou $z = \rho e^{i(\theta_0 + \pi)}$ avec $\theta_0 \in \mathbb{R}$ fixé et $\rho > 0$.

L'image des affixes z par f est donc donné par $f(z) = \dfrac{1}{\rho^2} e^{-2i\theta_0}$ ou $f(z) = \dfrac{1}{\rho^2} e^{-2i\theta_0 - 2i\pi} = \dfrac{1}{\rho^2} e^{-2i\theta_0}$.

L'image de $(\Delta) \setminus \{O\}$ par F est donc une demie-droite issue de O *(cf figure C.13)*

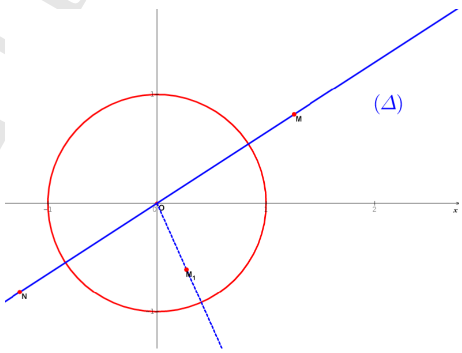


FIGURE C.13 – La droite $(\Delta) \setminus \{O\}$ et son image qui est la demie-droite issue de O

2. *On considère l'ensemble γ des points de $\mathcal{P}$ dont l'affixe est*

$$z = -2\cos^2\theta - 2i\sin\theta\cos\theta$$

où $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$

(a) *Démontrer que γ est inclus dans un cercle passant par O*

C'est ici que les formules trigonométriques *(simples)* interviennent.
→ Tout d'abord, $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$
→ Ensuite, $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ et donc $-2\cos^2\theta = -1 - \cos 2\theta$
D'où $z = -2\cos^2\theta - 2i\sin\theta\cos\theta = -1 - \cos 2\theta - i\sin 2\theta = -1 - e^{2i\theta}$, de telle sorte que $z + 1 = -e^{2i\theta}$.

Nous avons donc $|z+1| = 1$ et donc M est sur le cercle de centre le point d'affixe -1 et de rayon 1. Ce cercle passe bien évidemment par l'origine O

(b) *Donner, en fonction de θ, le module et un argument de l'affixe z d'un point $M \in \gamma$*

L'affixe z d'un point $M \in \gamma$ est donnée par $z = -2\cos^2\theta - 2i\sin\theta\cos\theta$ où $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$.

Nous avons $z = -2\cos^2\theta - 2i\sin\theta\cos\theta = -2\cos\theta\,(\cos\theta + i\sin\theta) = -2\cos\theta e^{i\theta}$

Comme $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$, alors $\cos\theta < 0$ et donc $|z| = -2\cos\theta$. La forme trigonométrique de l'affixe z d'un point $M \in \gamma$ est donc $z = -2\cos\theta e^{i\theta}$.

Le module de z est donc $-2\cos\theta$ et l'argument θ avec $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$ *(Voir la figure C.14)*

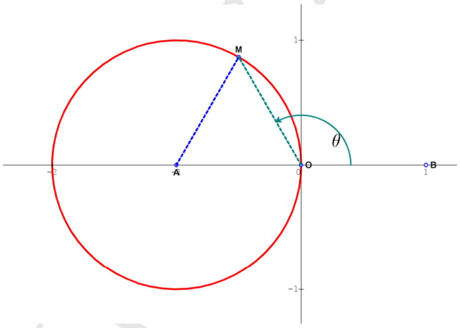


FIGURE C.14 – Le cercle γ

(c) *Exprimer, en fonction de $\tan\theta$, les coordonnées X et Y de $F(M)$.*

L'affixe de $M \in \gamma$ est donc $z = -2\cos\theta e^{i\theta}$ où $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$. Comme décrit dans la question 1, $f(z) = \frac{1}{4\cos^2\theta} e^{-2i\theta}$. Or :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\cos^2\theta} e^{-2i\theta} &= \frac{1}{4\cos^2\theta}(\cos 2\theta - i\sin 2\theta) \\ &= \frac{1}{4\cos^2\theta}\left(2\cos^2\theta - 1 - i2\sin\theta\cos\theta\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(2 - \frac{1}{\cos^2\theta} - i2\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta$ et $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$, nous avons :

$$\frac{1}{4\cos^2\theta} e^{-2i\theta} = \frac{1}{4}\left(1 - \tan^2\theta - i2\tan\theta\right) = \left(\frac{1-\tan^2\theta}{4}\right) - i\frac{\tan\theta}{2}$$

Ainsi, $X = \frac{1-\tan^2\theta}{4}$ et $Y = \frac{\tan\theta}{2}$ avec $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$.

Comme $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$, on peut remarquer que $Y \in \mathbb{R}$ et $X \geqslant \frac{1}{4}$

(d) *En déduire l'équation de l'image Γ de γ par l'application F. Quelle est la nature de Γ ?*

Il est facile de voir que X et Y vérifient l'équation $X = \dfrac{1}{4} - Y^2 \iff Y^2 + X - \dfrac{1}{4} = 0$.

Γ est une parabole qui peut s'étudier en 2 parties : la première en regardant $Y = \sqrt{\dfrac{1}{4} - X}$ et $Y = -\sqrt{\dfrac{1}{4} - X}$ avec, bien sûr $X \leqslant \dfrac{1}{4}$

(e) *Vérifier que les points I et J de γ définis respectivement par $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ et $\theta = \dfrac{4\pi}{3}$ appartiennent aussi à Γ . En expliquer la raison.*

En appelant z_I l'affixe de I, nous avons $z_I = -2\cos\dfrac{2\pi}{3}e^{\frac{2i\pi}{3}} = -2 \times \dfrac{-1}{2} \times e^{\frac{2i\pi}{3}} = e^{\frac{2i\pi}{3}} = j$. Or, j est une racine cubique de 1 et le point d'affixe j est invariant par f. D'où $F(I) = I$ et $I \in \gamma$ et $I \in \Gamma$

De même, en appelant z_J l'affixe de J, nous avons $z_J = -2\cos\dfrac{4\pi}{3}e^{\frac{4i\pi}{3}} = -2 \times \dfrac{-1}{2} \times e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{\frac{4i\pi}{3}} = j^2 = \overline{j}$. Or, j^2 est aussi une racine cubique de 1 et le point d'affixe j^2 est invariant par f. D'où $F(J) = J$ et $J \in \gamma$ et $J \in \Gamma$

QED

(f) *On considère les fonctions vectorielles g et G de l'intervalle $\left]\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right[$ de $\mathbb{R}$ dans l'espace vectoriel $\overrightarrow{P}$ associé à $\mathcal{P}$ définies par $g(\theta) = \overrightarrow{OM}$ et $G(\theta) = \overrightarrow{OF(M)}$ où M est le point de γ d'argument θ*

i. *Déterminer, s'ils existent, les vecteurs dérivés $\overrightarrow{g'(\theta)}$ et $\overrightarrow{G'(\theta)}$*

→ Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe $g(\theta)$.

Nous avons $g(\theta) = \begin{pmatrix} -2\cos^2\theta \\ -\sin 2\theta \end{pmatrix}$

Et donc $g'(\theta) = \begin{pmatrix} 4\cos\theta\sin\theta \\ -2\cos 2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sin 2\theta \\ -2\cos 2\theta \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \sin 2\theta \\ -\cos 2\theta \end{pmatrix}$

→ De même, le vecteur $\overrightarrow{OF(M)}$ a pour affixe $G(\theta)$.

Nous avons $G(\theta) = \begin{pmatrix} \dfrac{1 - \tan^2\theta}{4} \\ \dfrac{\tan\theta}{2} \end{pmatrix}$

Et donc $G'(\theta) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\tan\theta\left(1 + \tan^2\theta\right)}{2} \\ \dfrac{1 + \tan^2\theta}{2} \end{pmatrix}$

ii. *Comparer $\overrightarrow{g'\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)}$ et $\overrightarrow{G'\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)}$*

→ Nous avons $\overrightarrow{g'\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)} = 2\begin{pmatrix} \sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) \\ -\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$

→ Nous avons $\tan\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ et donc $G'\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

Nous avons donc $\overrightarrow{G'\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)} = -2\overrightarrow{g'\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)}$

3. *Dans cette question, l'affixe de $M \in \mathcal{P}$ est $z = \cos t + i\sin t$ où le paramètre t désigne le temps et décrit l'intervalle $[0; 2\pi[$*

(a) *Quelle est la trajectoire du point M ?*

C'est évident !! $z = \cos t + i \sin t$ avec $t \in [0; 2\pi[$ décrit le cercle unité. La trajectoire du point M est donc le cercle de centre O et de rayon 1.

(b) *Quelle est la trajectoire du point $F(M)$?*

Si $f(z)$ est l'affixe de $F(M)$, comme $z = \cos t + i \sin t = e^{it}$, nous avons $f(z) = e^{-2it}$ qui est sur le cercle unité et la trajectoire de $F(M)$ est le cercle de centre O et de rayon 1.

(c) *Préciser les mouvements de M et $F(M)$. Les points$M$ et $F(M)$ peuvent-ils être confondus ? Dans l'affirmative, à quelles dates et en quels points de la trajectoire ?*

Le point M parcourt le cercle unité dans le sens direct et le point $F(M)$ parcourt le cercle unité dans le sens rétrograde à une vitesse angulaire deux fois plus importante.

(d) *Soit $P \in \mathcal{P}$ le point défini par $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MF(M)}$*

i. *Calculer les coordonnées de P en fonction de t*

Appelons z l'affixe de M, $f(z)$ celui de $F(M)$ et z_P celui de P. Alors, de l'égalité $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MF(M)}$, nous déduisons celle des affixes :

$$z_P - z = \frac{1}{3}(f(z) - z) \iff z_P = \frac{1}{3}f(z) + \frac{2}{3}z$$

P apparaît donc comme le barycentre du système pondéré $\{(M, 2); (F(M), 1)\}$ [2]

Ainsi : $z_P = \frac{1}{3}e^{-2it} + \frac{2}{3}e^{it} = \left(\frac{\cos 2t + 2\cos t}{3}\right) + i\left(\frac{2\sin t - \sin 2t}{3}\right)$

Les coordonnées de P sont donc $P = \left(\frac{\cos 2t + 2\cos t}{3}; \frac{2\sin t - \sin 2t}{3}\right)$

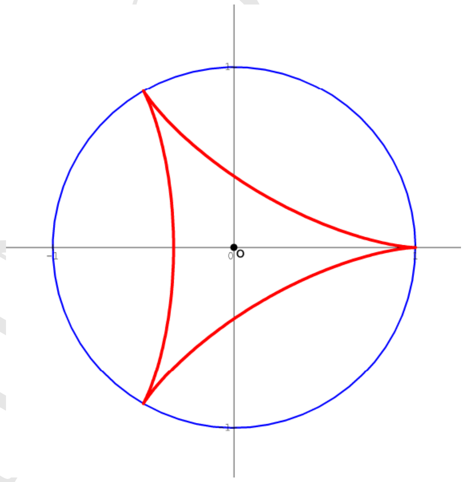


Figure C.15 – La trajectoire du point P en rouge

ii. *Calculer les coordonnées du vecteur-vitesse $\overrightarrow{V(t)}$ du point P*

Classiquement, il suffit de dériver. D'où

$$\overrightarrow{V(t)} = \begin{pmatrix} \dfrac{-2\sin 2t - 2\sin t}{3} \\ \dfrac{2\cos t - 2\cos 2t}{3} \end{pmatrix}$$

iii. *Le vecteur $\overrightarrow{V(t)}$ peut-il être nul ? Où sont alors situés les points M, $F(M)$ et P ?*

2. Il était possible, en utilisant le calcul vectoriel, de retrouver ce résultat

Le vecteur $\overrightarrow{V(t)}$ est nul si et seulement si ses coordonnées sont nulles, c'est à dire si et seulement si

$$\sin 2t + \sin t = 0 \text{ et } \cos t - \cos 2t = 0$$

- Nous avons $\sin 2t + \sin t = 0$ si et seulement si $\sin 2t = -\sin t = \sin -t$, c'est à dire :

$$2t = -t + 2k\pi \text{ ou } 2t = \pi + t + 2k\pi$$

Donc $t = \dfrac{2k\pi}{3}$ ou $t = (2k+1)\pi$. Comme nous devons avoir $0 \leqslant t < 2\pi$, nous avons comme solution :

$$t = 0 \quad t = \frac{2\pi}{3} \quad t = \frac{4\pi}{3} \quad t = \pi$$

- Nous avons $\cos t - \cos 2t = 0$ si et seulement si $\cos 2t = \cos t$, c'est à dire :

$$2t = t + 2k\pi \text{ ou } 2t = -t + 2k\pi$$

Donc $t = \dfrac{2k\pi}{3}$ ou $t = 2k\pi$. Comme nous devons avoir $0 \leqslant t < 2\pi$, nous avons comme solution :

$$t = 0 \quad t = \frac{2\pi}{3} \quad t = \frac{4\pi}{3}$$

Les seuls moments où $\overrightarrow{V(t)}$ est nul est pour $t = 0 \quad t = \dfrac{2\pi}{3} \quad t = \dfrac{4\pi}{3}$

iv. *Montrer que, dans le cas où $\overrightarrow{V(t)}$ n'est pas nul, la tangente à la trajectoire de P est orthogonale à la droite $(M, F(M))$.*

Le vecteur directeur de la droite $(M, F(M))$ est $\overrightarrow{MF(M)}$ de coordonnées $\overrightarrow{MF(M)} = \begin{pmatrix} \cos 2t - \cos t \\ -\sin 2t - \sin t \end{pmatrix}$

La tangente à la trajectoire de P admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{V(t)}$

Il nous faut donc montrer que $\left\langle \overrightarrow{V(t)} \mid \overrightarrow{MF(M)} \right\rangle = 0$. Or :

$$\left\langle \overrightarrow{V(t)} \mid \overrightarrow{MF(M)} \right\rangle = \left(\frac{-2\sin 2t - 2\sin t}{3}\right)(\cos 2t - \cos t) + (-\sin 2t - \sin t)\left(\frac{2\cos t - 2\cos 2t}{3}\right) = 0$$

La trajectoire de P est donc orthogonale à la droite $(M, F(M))$

Exercice 7 :

$\mathcal{P}$ est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et identifié à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

1. *On se donne un point $\Omega \in \mathcal{P}$ et un nombre réel $k > 0$. On considère l'application f définie par :*

$$\begin{cases} f : \mathcal{P} \setminus \{\Omega\} & \longrightarrow & \mathcal{P} \setminus \{\Omega\} \\ \quad M & \longmapsto & f(M) \end{cases} \quad \text{où } \overrightarrow{\Omega f(M)} = \frac{k}{\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|^2}\overrightarrow{\Omega M}$$

(a) *Démontrer que f est involutive*

f est involutive si et seulement si, pour tout $M \in \mathcal{P}$, nous avons $f[f(M)] = M$.
Soit $M \in \mathcal{P}$; nous avons alors :

$$\overrightarrow{\Omega f[f(M)]} = \frac{k}{\left\|\overrightarrow{\Omega f(M)}\right\|^2}\overrightarrow{\Omega f(M)} = \frac{k}{\left\|\overrightarrow{\Omega f(M)}\right\|^2} \times \frac{k}{\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|^2}\overrightarrow{\Omega M} = \frac{k^2}{\left\|\overrightarrow{\Omega f(M)}\right\|^2 \times \left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|^2}\overrightarrow{\Omega M}$$

Or, $\left\|\overrightarrow{\Omega f(M)}\right\| = \dfrac{k}{\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|^2}\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\| = \dfrac{k}{\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|} \Longleftrightarrow \left\|\overrightarrow{\Omega f(M)}\right\| \times \left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\| = k$. D'où :

$$\overrightarrow{\Omega f[f(M)]} = \frac{k^2}{k^2}\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{\Omega M}$$

Et donc $f[f(M)] = M$ et f est involutive.

(b) *Quelle est l'image, par f du cercle Γ de centre Ω et de rayon $\sqrt{k}$?*

Tout point $M \in \Gamma$ est tel que $\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\| = \sqrt{k}$, et donc, pour $M \in \Gamma$

$$\overrightarrow{\Omega f(M)} = \frac{k}{\sqrt{k}^2}\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{\Omega M}$$

C'est à dire que $f(M) = M$. Les points de Γ sont invariants et l'image, par f du cercle Γ de centre Ω et de rayon $\sqrt{k}$ est Γ lui même.

(c) *Quel est l'ensemble des points invariants par f ? f est-elle une application affine ?*

Nous savons que les points de Γ sont invariants. Sont-ce les seuls ?.
Soit alors M un point invariant par f. alors :

$$\overrightarrow{\Omega M} = \frac{k}{\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|^2}\overrightarrow{\Omega M} \Longleftrightarrow \frac{k}{\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|^2} = 1 \Longleftrightarrow \left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\| = \sqrt{k}$$

L'ensemble des points invariants par f est donc le cercle Γ de centre Ω et de rayon $\sqrt{k}$
f ne peut pas être affine puisque l'ensemble des points invariants n'est pas un sous-espace affine du plan $\mathcal{P}$

(d) *$\mathcal{P}$ est identifié au plan complexe $\mathbb{C}$. On note z l'affixe de M, Z celle de $f(M)$ et ω l'affixe du point Ω. Etablir la relation :*

$$Z = \omega + \frac{k}{\overline{z-\omega}}$$

Traduisons la relation $\overrightarrow{\Omega f(M)} = \dfrac{k}{\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|^2}\overrightarrow{\Omega M}$ en termes d'affixes. Nous avons donc :

$$Z - \omega = \frac{k}{|z-\omega|^2}(z-\omega) = \frac{k}{(z-\omega)\overline{(z-\omega)}}(z-\omega) = \frac{k}{\overline{(z-\omega)}}$$

Ce qui nous donne bien $Z = \omega + \dfrac{k}{\overline{z-\omega}}$

2. *On appelle f' l'application de $\mathcal{P}$ associée à la relation dans $\mathbb{C}$ définie par $Z - 1 = \dfrac{k}{\overline{z} - 1}$ où $k > 0$, f_1 celle associée à la relation définie par $Z - 1 - b = \dfrac{|b|^2}{\overline{z - 1 - b}}$ où $b \in \mathbb{C}$ est un nombre complexe non nul*

Pour plus de clarté, re-écrivons f_1 et f'. Nous avons, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

- ⋆ $f'(z) = 1 + \dfrac{k}{\overline{z} - 1}$
- ⋆ $f_1(z) = b + 1 + \dfrac{|b|^2}{\overline{z - 1 - b}} = b + 1 + \dfrac{|b|^2}{\overline{z - (b+1)}}$

Remarquons, de plus que 1 est un point fixe de f_1, puisque :

$$f_1(1) = b + 1 + \frac{|b|^2}{\overline{1 - (b+1)}} = b + 1 + \frac{|b|^2}{-\overline{b}} = b + 1 - \frac{b\overline{b}}{\overline{b}} = b + 1 - b = 1$$

D'autre part, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{+1\}$, $f'(z) \neq 1$. En effet, l'équation $1 + \dfrac{k}{\overline{z} - 1} = 1$ n'a aucune solution, puisque :

$$1 + \frac{k}{\overline{z}-1} = 1 \iff \frac{k}{\overline{z}-1} = 0 \iff k = 0$$

(a) i. *Sur quel ensemble E_1 la composée $\varphi_1 = f' \circ f_1 \circ f'$ est-elle définie ?*

$\Rightarrow$ Tout d'abord, l'application φ_1 est involutive

En effet :

$$\begin{aligned}
\varphi_1 \circ \varphi_1 &= (f' \circ f_1 \circ f') \circ (f' \circ f_1 \circ f') \\
&= f' \circ f_1 \circ (f' \circ f') \circ f_1 \circ f' \\
&= f' \circ (f_1 \circ f_1) \circ f' \\
&= f' \circ f' \\
&= \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Pour commencer, nous devons avoir $z \neq 1$ *(Il faut que nous puissions calculer, en premier $f'(1)$, or, c'est impossible)*

Ensuite, nous devons avoir $f'(z) \neq b + 1$, c'est à dire $z \neq f'(b+1)$.

Or, $f'(b+1) = 1 + \dfrac{k}{\overline{b+1} - 1} = 1 + \dfrac{k}{\overline{b}}$. Nous devons donc aussi avoir $z \neq 1 + \dfrac{k}{\overline{b}}$.

$\Rightarrow$ De la même manière, nous devons avoir $f_1 \circ f'(z) \neq 1$. Or :

$$f_1 \circ f'(z) = 1 \iff f'(z) = f_1(1) \iff f'(z) = 1$$

Or, l'équation $f'(z) = 1$ n'a aucune solution

Donc, le domaine de définition de φ_1 est $\mathbb{C} \setminus \left\{+1; 1 + \dfrac{k}{\overline{b}}\right\}$

ii. *Etablir la relation entre les affixes de M et de son image par $f_1 \circ f'$*

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{+1; 1 + \dfrac{k}{\overline{b}}\right\}$ qui est l'affixe de M ; il suffit de calculer $f_1 \circ f'(z)$.

Tout d'abord :

$$f_1 \circ f'(z) = f_1[f'(z)] = b + 1 + \frac{|b|^2}{\overline{f'(z) - (b+1)}}$$

Puis $f'(z) - (b+1) = 1 + \dfrac{k}{\overline{z}-1} - (b+1) = \dfrac{k}{\overline{z}-1} - b$ et donc :

$$\overline{f'(z) - (b+1)} = \frac{k}{z-1} - \overline{b} = \frac{k - \overline{b}(z-1)}{z-1} \iff \frac{1}{\overline{f'(z) - (b+1)}} = \frac{z-1}{k - \overline{b}(z-1)}$$

Ainsi :

$$f_1 \circ f'(z) = b + 1 + \frac{|b|^2}{\overline{f'(z) - (b+1)}} = b + 1 + \frac{|b|^2 (z-1)}{k - \overline{b}(z-1)}$$

iii. *En déduire que la relation entre les affixes de M et de son image M_1 par φ_1 est :*

$$Z_1 = \frac{b + \overline{b} + k}{\overline{b}} - \frac{b}{\overline{b}}\overline{z} \tag{C.3}$$

Il faut donc calculer $\varphi_1(z)$ pour $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{+1; 1 + \dfrac{k}{\overline{b}}\right\}$.

Calculer $\varphi_1(z)$, c'est calculer $f'[f_1 \circ f'(z)]$. Nous connaissons déjà $f_1 \circ f'(z)$; il suffit de l'intégrer dans la définition de f'. Ainsi :

$$\varphi_1(z) = f'[f_1 \circ f'(z)] = 1 + \frac{k}{\overline{f_1 \circ f'(z)} - 1}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
\overline{f_1 \circ f'(z)} - 1 &= \overline{b} + 1 + \frac{|b|^2(\overline{z}-1)}{k - b(\overline{z}-1)} - 1 \\
&= \overline{b} + \frac{|b|^2(\overline{z}-1)}{k - b(\overline{z}-1)} \\
&= \frac{\overline{b}(k - b(\overline{z}-1)) + |b|^2(\overline{z}-1)}{k - b(\overline{z}-1)} \\
&= \frac{\overline{b}k - |b|^2(\overline{z}-1) + |b|^2(\overline{z}-1)}{k - b(\overline{z}-1)} \\
&= \frac{\overline{b}k}{k - b(\overline{z}-1)}
\end{aligned}$$

Et donc $\dfrac{1}{\overline{f_1 \circ f'(z)} - 1} = \dfrac{k - b(\overline{z}-1)}{\overline{b}k}$, ce qui fait que $\dfrac{k}{\overline{f_1 \circ f'(z)} - 1} = \dfrac{k - b(\overline{z}-1)}{\overline{b}}$

D'où

$$\varphi_1(z) = 1 + \frac{k - b(\overline{z}-1)}{\overline{b}} = \frac{\overline{b} + k - b(\overline{z}-1)}{\overline{b}} = \frac{b + \overline{b} + k - b\overline{z}}{\overline{b}} = \frac{b + \overline{b} + k}{\overline{b}} - \frac{b}{\overline{b}}\overline{z}$$

Ce que nous voulions

φ_1 apparaît donc comme une similitude inverse du type $a\overline{z} + b$ où $a = \dfrac{b}{\overline{b}}$, et comme $|a| = \left|\dfrac{b}{\overline{b}}\right| = 1$, cette similitude inverse est une isométrie, c'est à dire une symétrie orthogonale par rapport à une droite

(b) *Pour $\theta \neq k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on pose, désormais, $k = \sin^2\theta$ et $b = \dfrac{\sin\theta}{2}(-\sin\theta + i\cos\theta)$*

i. *En utilisant la relation (C.3), montrer que φ_1 , est alors la restriction à E_1, d'une symétrie orthogonale S_1 par rapport à une droite (Δ_1) passant par O. On appelle (D) la droite $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$, déterminer l'angle $\widehat{((D)\,;(\Delta_1))}$*

Nous avons déjà vu que φ_1 était une symétrie orthogonale par rapport à une droite. Dans cette question, nous faisons juste une « application numérique ».

→ Ainsi, pour $k = \sin^2\theta$ et $b = \dfrac{\sin\theta}{2}(-\sin\theta + i\cos\theta)$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\varphi_1(z) &= -\frac{-\sin\theta + i\cos\theta}{-\sin\theta - i\cos\theta}\overline{z} \\
&= \frac{-\sin\theta + i\cos\theta}{\sin\theta + i\cos\theta}\overline{z} \\
&= \frac{\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}\overline{z} \\
&= \frac{e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}}{e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}}\overline{z} \\
&= e^{2i\theta}\overline{z}
\end{aligned}$$

Et donc $\varphi_1(z) = e^{2i\theta}\overline{z}$

→ En posant $z' = e^{2i\theta}\overline{z}$, et en utilisant la forme algébrique des nombres complexes, nous avons :

$$x' + iy' = (\cos 2\theta + i\sin 2\theta)(x - iy) = (x\cos 2\theta + y\sin 2\theta) + i(x\sin 2\theta - y\cos 2\theta)$$

Rechercher l'axe de la symétrie, c'est rechercher les points invariants par φ_1 donc les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $\varphi_1(z) = z$, et nous avons donc :

$$\left\{\begin{array}{rl} x\cos 2\theta + y\sin 2\theta = & x \\ x\sin 2\theta - y\cos 2\theta = & y \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} x(\cos 2\theta - 1) + y\sin 2\theta = & 0 \\ x\sin 2\theta - y(\cos 2\theta + 1) = & 0 \end{array}\right.$$

Nous avons :

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$

D'où, nous obtenons comme système :

$$\left\{\begin{array}{rl} x\left(-2\sin^2\theta\right) + 2y\sin\theta\cos\theta = & 0 \\ 2x\sin\theta\cos\theta + 2y\cos^2\theta = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} 2\sin\theta\left(-x\sin\theta + y\cos\theta\right) = & 0 \\ 2\cos\theta\left(x\sin\theta + y\cos\theta\right) = & 0 \end{array}\right.$$

* Si $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, le système est réduit à une seule équation

$$\pm 2 \pm y = 0 \iff y = 0$$

φ_1 est donc une symétrie orthogonale par rapport à (D) la droite $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$

* Si $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et comme $\theta \neq k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, alors $\sin\theta \neq 0$ et le système précédent est donc équivalent à la seule équation

$$-x\sin\theta + y\cos\theta = 0 \iff y = x\tan\theta$$

L'angle $\widehat{((D)\,;(\Delta_1))}$ est donc θ

Lien avec les matrices

Si Φ_1 est l'application linéaire associée à l'application affine représentée par φ_1. Alors la matrice de Φ_1 dans la base orthonormée directe $\left\{\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\right\}$ est donnée par :

$$\mathcal{M}\left(\Phi_1\right)_{\left\{\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\right\}} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

ii. *On appelle f_2 l'application associée à la relation :*

$$Z - 1 - \overline{b} = \frac{|b|^2}{\overline{z - 1 - \overline{b}}}$$

et φ_2 la composée $\varphi_2 = f' \circ f_2 \circ f'$
Montrer sans nouveaux calculs que φ_2 est aussi la restriction à un ensemble E_2, d'une symétrie orthogonale S_2, par rapport à une droite (Δ_2) que l'on précisera.

Refaisons le travail de simplification. Nous avons

$$f_2(z) = \left(\overline{b} + 1\right) + \frac{|b|^2}{\overline{z - \left(1 - \overline{b}\right)}}$$

En fait, c'est f_1 où nous avons changé b en $\overline{b}$, et alors :

$$\varphi_2(z) = -\frac{\overline{b}}{b}\overline{z} + \frac{b + \overline{b} + k}{b}$$

Et lorsque nous choisissons $k = \sin^2\theta$ et $b = \frac{\sin\theta}{2}\left(-\sin\theta + i\cos\theta\right)$, nous obtenons :

$$\varphi_2(z) = -\frac{-\sin\theta - i\cos\theta}{-\sin\theta + i\cos\theta}\overline{z} = e^{-2i\theta}\overline{z}$$

S_2 est bien une symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ_2 d'équation $y = -x\tan\theta$

iii. *Prouver l'identité de $f' \circ f_2 \circ f_1 \circ f'$ et de R où R désigne la restriction de $S_2 \circ S_1$ à une partie $\mathcal{P}_1$ de $\mathcal{P}$ que l'on précisera. Préciser la nature de cette application R.*

Nous allons utiliser le fait que f' est une application involutive, c'est à dire que $f' \circ f' = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}}$. Alors :

$$f' \circ f_2 \circ f_1 \circ f' = f' \circ f_2 \circ (f' \circ f') \circ f_1 \circ f' = (f' \circ f_2 \circ f') \circ (f' \circ f_1 \circ f') = S_2 \circ S_1 = R$$

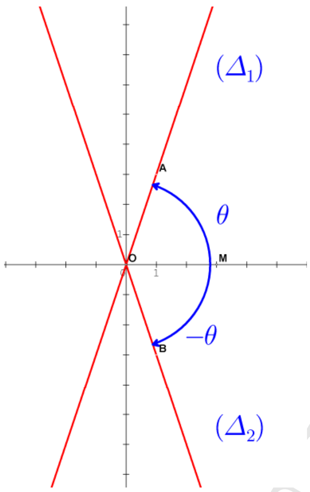


FIGURE C.16 – Représentation de Δ_1 et Δ_2

R est donc la composée de 2 symétries orthogonales ; c'est donc une rotation.
La représentation complexe de R peut être donnée par $\varphi_2 \circ \varphi_1$. Nous avons :

$$\varphi_2 \circ \varphi_1 (z) = \varphi_2 [\varphi_1 (z)] = e^{-2i\theta}\overline{\varphi_1 (z)} = e^{-2i\theta}\overline{e^{2i\theta}\overline{z}} = e^{-4i\theta}z$$

$\varphi_2 \circ \varphi_1$ apparaît donc comme une rotation de centre O et d'angle -4θ modulo 2π

iv. *Quelles valeurs donner à θ pour que la rotation R soit associée à la définition $Z = z\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$.*

La définition complexe associée à R est donc $Z = e^{-4i\theta}z$. Il faut donc trouver $\theta \in \mathbb{R}$ pour que $e^{-4i\theta} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

Des relations trigonométriques, nous devons donc avoir $\cos(-4\theta) = \frac{1}{2}$ et $\sin(-4\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

* Résolution de $\cos(-4\theta) = \frac{1}{2}$

  Nous avons $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et donc :
  $\Rightarrow -4\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \iff \theta = \frac{-\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$
  $\Rightarrow -4\theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \iff \theta = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$

* Résolution de $\sin(-4\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

  Nous avons $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et donc :
  $\Rightarrow -4\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \iff \theta = \frac{-\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$
  $\Rightarrow -4\theta = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \iff -4\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \iff \theta = \frac{-\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$

Les valeurs de θ pour que la rotation R soit associée à la définition $Z = z\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$ sont donc $\theta = \frac{-\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

(c) *Soit les applications définies dans $\mathcal{P} \setminus \{O\}$ par :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_1' : \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & f_1'(z) = \frac{1}{\overline{z}} \end{array}\right. \quad \textit{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} f_2' : \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & f_2'(z) = \frac{1-k}{\overline{z}} \end{array}\right.$$

i. *Démontrer que la composée $H = f_2' \circ f_1'$ est la restriction à $\mathcal{P} \setminus \{O\}$ d'une homothétie à préciser*

Cette question ne pose pas de difficultés.

$$f_2' \circ f_1'(z) = f_2'[f_1'(z)] = \frac{1-k}{\overline{f_1'(z)}} = \frac{1-k}{\frac{1}{\overline{\overline{z}}}} = (1-k)\,z$$

$H = f_2' \circ f_1'$ est bien la restriction à $\mathcal{P} \setminus \{O\}$ d'une homothétie de centre O et de rapport $1-k$.
Si nous choisissons $k = \sin^2\theta$, nous avons alors $1 - k = 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$

ii. *On considère R dont la définition complexe est $Z = z\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$. Montrer que l'application $H \circ R$ est associée à la relation :*

$$Z = (1-k)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z \tag{C.4}$$

Toujours aussi simple !

$$H \circ R(z) = H[R(z)] = (1-k)\,R(z) = (1-k)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z$$

(d) *On appelle Σ l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ associée à la relation (C.4). Déterminer la nature de Σ et ses éléments remarquables.*

On voit, facilement que Σ est une similitude de centre O, de rapport $1 - k = \cos^2\theta$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Annexe D

Les formules trigonométriques

Les formules trigonométriques font peur car elles ne sont pas linéaires. Comme elles sont un peu plus difficiles, la trigonométrie a disparu des programmes, ce qui est une grave ineptie.
Un moyen de bien retrouver ces formules, est de revenir aux figures, se représenter sur un schéma ce qu'est un cosinus ou un sinus ; et pouquoi ne pas utiliser l'exponentielle complexe ?
Cette annexe souhaite exposer les rudiments des formules trigonométriques
Horreur : IL FAUT SAVOIR LES RETROUVER ET LES CONNAÎTRE PAR CŒUR ! !

D.1 THE formule

Tout commence par la formule de base, vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, x désignant une mesure de l'angle :

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

Cette formule est liées aux relations dans un triangle rectangle *(Théorème de Pythagorre ; cf figure D.1)*

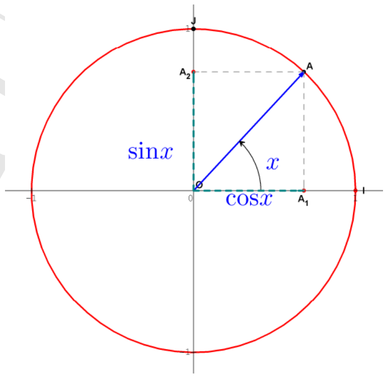


Figure D.1 – Utilisation du triangle rectangle et du cercle unité pour illustrer la formule fondamentale

De là, nous déduisons :

1. $\dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

2. $\dfrac{1}{\sin^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$

D.2 Utilisation de symétries

Dans cette section, nous allons utiliser les symétries pour pouvoir établir de nouvelles formules

D.2.1 Symétrie par rapport à l'axe des abscisses

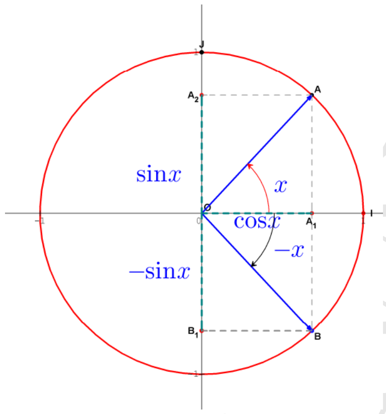


FIGURE D.2 – Symétrie par rapport à l'axe $x'Ox$

Nous avons :

1. $\cos x = \cos(-x)$
2. $\sin(-x) = -\sin x$
3. $\tan(-x) = -\tan x$

D.2.2 Symétrie par rapport à la première bissectrice $y = x$

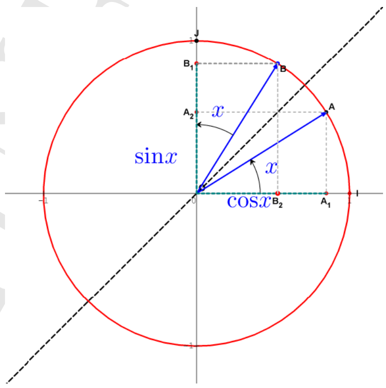


FIGURE D.3 – Symétrie par rapport à la première bissectrice $y = x$

1. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
2. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

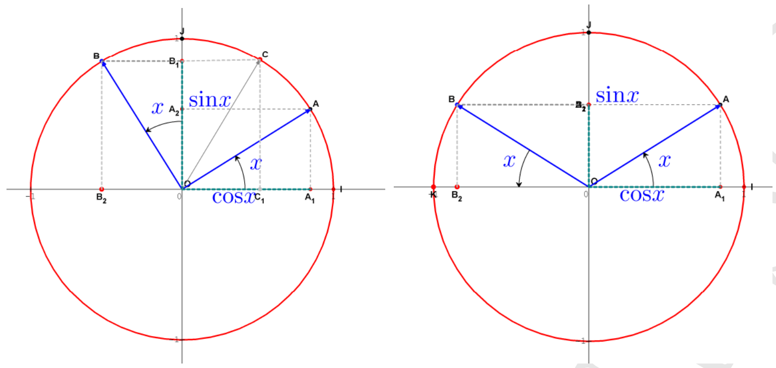


FIGURE D.4 – Symétrie par rapport à l'axe $y'Oy$

D.2.3 Symétrie par rapport à l'axe des ordonnées *(figure D.4)*

1. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=\sin x$
2. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=-\cos x$
3. $\cos(\pi-x)=-\cos x$
4. $\sin(\pi-x)=\sin x$

D.2.4 Symétrie par rapport à l'origine *(figure D.5)*

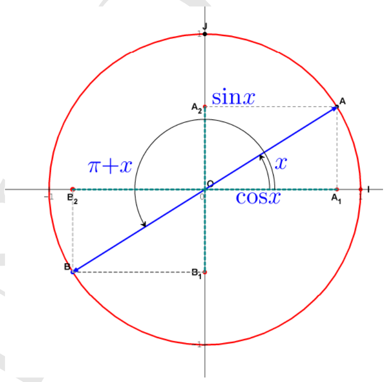


FIGURE D.5 – Angles de mesure x et $\pi+x$

1. $\cos(\pi+x)=-\cos x$
2. $\sin(\pi+x)=-\sin x$

D.3 Formules d'addition

D.3.1 Premières formules

1. $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$
2. $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$

D.3.2 Formules suivantes

En remplaçant b par $-b$ et en utilisant la parité

1. $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$
2. $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$

D.3.3 Formule d'addition pour la tangente

1. $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$
2. $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}$

D.3.4 Arc double

En faisant $a = b$ dans les formules d'addition :

1. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$
2. $\sin 2x = 2\sin x\cos x$
3. $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

D.3.5 Utilisation des complexes et de la formule de De Moivre

Il est tout à fait possible de retrouver ces formules en utilisant le fait que $e^{ia} = \cos a + i\sin a$ et que $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$ puis on identifie.

D.4 Conséquences des formules d'addition

Ces formules se retrouvent en adaptant les formules d'additions

1. $\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2}$
2. $\cos p - \cos q = -2\sin\dfrac{p-q}{2}\sin\dfrac{p+q}{2}$
3. $\sin p + \sin q = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$
4. $\sin p - \sin q = 2\sin\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2}$
5. $\cos\alpha \times \cos\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$
6. $\sin\alpha \times \sin\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$
7. $\sin\alpha \times \cos\beta = \dfrac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$

Démonstration

Nous allons nous intéresser aux 2 premiers points en donnant juste une indication de démonstration.
Il faut voir que $p = \dfrac{p+q}{2} + \dfrac{p-q}{2}$ et $q = \dfrac{p+q}{2} + \dfrac{q-p}{2}$ et donc que $\cos p = \cos\left(\dfrac{p+q}{2} + \dfrac{p-q}{2}\right)$ et $\cos q = \cos\left(\dfrac{p+q}{2} + \dfrac{q-p}{2}\right)$ et nous utilisons les formules d'addition...et on conclue.
C'est la même chose avec le sinus

Index