Chapitre 1

Les groupes

Dans ce chapitre, nous approfondissons la théorie des groupes. Dans le cours de L_0, nous nous sommes intéressés, par des exercices, à des notions qui auront, dans cet exposé, valeur de leçon à retenir et à mieux travailler.
Dans une première partie, nous faisons rappels et exercices

1.1 Introduction

Un point de vue sur les lois de composition interne peut être celui ci :
On appelle loi de composition interne toute application.

$$\begin{array}{rcl} f : E \times E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = x \star y \end{array}$$

C'est tout à fait correct, mais la notation d'opération $\star$ rend les choses plus simple ; c'est celle que nous utiliserons

1.1.1 Définition de groupe fini

Soit $(G, \star)$ un groupe, on dit que le groupe est fini si l'ensemble G l'est.
L'ordre du groupe G est le cardinal $\operatorname{Card} G$ de G , on le note aussi $\#(G)$ ou $|G|$.

Remarque 1 :

Du fait de la présence de l'élément neutre dans G, alors $G \neq \emptyset$ et on observera que $\#(G) \geqslant 1$ pour tout groupe $(G, \star)$

1.1.2 Définition de sous-groupe engendré

Soit $(G, \star)$ un groupe et $S \subset G$ une partie, non vide, de G
On appelle sous-groupe engendré par S le plus petit sous-groupe $\langle S \rangle$ contenant S
Autrement dit, si $\mathcal{H}_S$ est l'ensemble des sous-groupes de G contenant S, nous avons :

$$\langle S \rangle = \bigcap_{H \in \mathcal{H}_S} H$$

Exercice 1 :

Soit G un groupe dont l'opération est notée multiplicativement et $S \subset G$ une partie non vide de G. Démontrer que :

$$\langle S \rangle = \left\{ y \in G \text{ où } y = \prod_{i=0}^{n} x_i \text{ avec } (\forall n \in \mathbb{N}) \left((x_n \in S) \text{ ou } \left(x_n^{-1} \in S \right) \right) \right\}$$

Exercice 2 :

Dans un groupe G, on considère un sous-groupe $H \subset G$ engendré par deux éléments a et b. Montrer que si $ab = ba$, alors H est abélien.

1.1.3 Définition

Soit G un groupe dont l'opération interne est notée multiplicativement et $S \subset G$ une partie de G, non vide.

1. Si $\langle S \rangle = G$, S est dite partie génératrice de G. S est un ensemble de générateurs de G et engendre G.
2. Si $S = \{x\}$, alors on dit que $\langle x \rangle$ est dit monogène
   Nous avons alors $\langle x \rangle = \{x^n \text{ où } n \in \mathbb{Z}\}$
3. S'il existe une partie $S \subset G$, non vide et de cardinal fini telle que S engendre G, on dira que G est un groupe de type fini.

Remarque 2 :

Attention!! **Un groupe G peut être de type fini sans être fini!** Exemple : $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$ et $\mathbb{Z}$ n'est pas fini.

1.1.4 Définition de groupe cyclique

On appelle groupe cyclique tout groupe monogène et fini.

Exemple 1 :

Exemple de groupe cyclique : le groupe des racines n-ièmes de 1 :

$$\mathcal{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

1.1.5 Ordre d'un éléments d'un groupe

Soit G un groupe noté multiplicativement et $x \in G$

1. Si $\langle x \rangle$ est un groupe d'ordre infini, on dit que l'ordre de x est dit infini
2. Si, au contraire, $\langle x \rangle$ est un groupe d'ordre fini, on dit que l'ordre de x est fini et l'ordre de x est l'ordre du groupe $\langle x \rangle$, c'est à dire $\# (\langle x \rangle)$

Exercice 3 :

Dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{C}^*, \times)$, déterminer l'ordre de $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ et de $\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$

Exercice 4 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = km$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Quel est l'ordre du groupe $\langle x^k \rangle$?

1.1.6 Exercices

Exercice 5 :

Montrer que si $(G, \star)$ est un groupe et E un ensemble quelconque non vide, alors l'ensemble G^E des applications de E dans G muni de la loi $\perp$ définie par :

$$\left(\forall f \in G^E\right) \left(\forall g \in G^E\right) \left((f \perp g)(x) = f(x) \star g(x)\right)$$

est un groupe et que ce groupe est commutatif si $(G, \star)$ l'est.

MATHINFOVANNES©

Exercice 6 :

On considère l'ensemble $G =]-1, +1[$ muni de la loi $\star$ définie par :

$$x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$$

Démontrer que $(G, \star)$ est un groupe commutatif.

Exercice 7 :

Soit G un groupe dont l'opération est notée multiplicativement d'élément neutre 1.

1. Montrer que G est commutatif si, et seulement si, pour tout $a \in G$ et tout $b \in G$, nous avons $(ab)^2 = a^2 b^2$ *(Ce qui revient à dire que l'application $a \mapsto a^2$ est un morphisme de groupes).*
2. Montrer que G est commutatif si, et seulement si, pour tout $a \in G$ et tout $b \in G$, nous avons $(ab)^{-1} = a^{-1} b^{-1}$ *(Ce qui revient à dire que l'application $a \mapsto a^{-1}$ est un morphisme de groupes).*

   Attention :

   Dans $\mathrm{GL}_n(R)$ muni de la multiplication des matrices, nous n'avons pas, en général, pour $n \geqslant 2$ $(AB)^n = A^n B^n$.

   Par exemple, pour $n = 2$, prenons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Alors $(AB)^2 = \begin{pmatrix} 10 & 24 \\ 24 & 58 \end{pmatrix}$ et $A^2B^2 = \begin{pmatrix} 7 & 24 \\ 15 & 52 \end{pmatrix}$

Exercice 8 :

Montrer que l'ensemble $\mathrm{SL}_n(R)$ des matrices carrées réelles d'ordre n de déterminant égal à 1 est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(R)$.

Exercice 9 :

Montrer que l'ensemble G des matrices réelles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la forme $M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 \neq b^2$ est un groupe multiplicatif. Est-il commutatif ?

Exercice 10 :

Soit H une partie finie non vide d'un groupe $(G, \star)$.
Montrer que H est un sous-groupe de $(G, \star)$ si, et seulement si, il est stable pour la loi $\star$

Exercice 11 :

Soit G un groupe dont l'opération est notée multiplicativement. Soient H et K deux sous-groupes de G. On définit les sous-ensembles HK et KH de G par :

$$HK = \{hk \text{ où } h \in H \text{ et } k \in K\} \text{ et } KH = \{kh \text{ où } h \in H \text{ et } k \in K\}$$

Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$

Exercice 12 :

1. Soit G un groupe dont l'opération est notée multiplicativement. Montrer que, pour tout $a \in G$ et tout $b \in G$
   (a) a et a^{-1} ont même ordre
   (b) a et bab^{-1} ont même ordre
   (c) ab et ba ont même ordre
2. Dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, groupe des matrices carrées inversibles. Donner l'ordre des éléments suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad AB$$

MATHINFOVANNES©

Exercice 13 :

Soit G un groupe, $a \in G$ et $b \in G$ deux éléments d'ordres finis dans G tels que $ab = ba$.

1. Montrer que le produit ab est d'ordre fini et que l'ordre de ab divise le ppcm des ordres de a et b.
2. Montrer que si G est abélien, l'ensemble des éléments d'ordre fini de G forme un sous-groupe.
3. Montrer que si les ordres de a et b sont premiers entre eux, l'ordre de ab est égal au ppcm des ordres de a et de b

Exercice 14 :

Générateurs d'un groupe cyclique

1. Dans un groupe G engendré par un élément a, montrer que tout sous-groupe est engendré par un éléement a^m où m est un entier positif.
2. Soit G un groupe cyclique d'ordre n : $G = \left\{e, a, a^2 \dots a^{n-1}\right\}$. Montrer que a^k engendre G si, et seulement si, k est premier avec n.

Exercice 15 :

Soient G et G' 2 groupes notés multiplicativement, $\varphi : G \longrightarrow G'$ un homomorphisme de groupe. Soit $x \in G$ un élément d'ordre n

1. Démontrer que $\varphi(x)$ est d'ordre fini et que son ordre divise n.
2. Démontrer que si φ est injective, l'ordre de $\varphi(x)$ est exactement égal à n

MATHINFOVANNES©