1.4 Groupe opérant dans un ensemble

1.4.1 Définition

Soit G un groupe et X un ensemble
On dit que G opère dans X s'il existe un homomorphisme $\Phi : G \longrightarrow \mathfrak{S}(X)$ où $\mathfrak{S}(X)$ est le groupe des permutations de X

Remarque 5 :

1. Nous avons donc, pour tout $g \in G$ et tout $g' \in G$:
   - ⋆ $\Phi(gg') = \Phi(g) \circ \Phi(g')$
   - ⋆ $\Phi\left(g^{-1}\right) = (\Phi(g))^{-1}$
   - ⋆ $\Phi(e) = \mathrm{Id}_X$
2. Il arrive, qu'au lieu de noter $\Phi(g)(x)$, on note gx ou $g \star x$.
   Pour ma part, je pense que c'est source de confusion ; je ne l'utiliserai que parcimonnieusement.

Exemple 4 :

1. Un groupe G peut opérer sur lui même. Si nous posons $\mathfrak{S}(G)$ le groupe des permutations de G, nous pouvons nous intéresser à divers homomorphismes de G vers $\mathfrak{S}(G)$.
   (a) Le premier est Δ :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} \Delta : G & \longrightarrow & \mathfrak{S}(G) \\ a & \longmapsto & \Delta(a) = \delta_a \end{array}\right. \text{ où } \left\{\begin{array}{rcl} \delta_a : G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & \delta_a(x) = a \star x \end{array}\right.$$
   Clairement Δ est un homomorphisme de G dans $\mathfrak{S}(G)$
   (b) Le second est Γ :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} \Gamma : G & \longrightarrow & \mathfrak{S}(G) \\ a & \longmapsto & \Gamma(a) = \gamma_a \end{array}\right. \text{ où } \left\{\begin{array}{rcl} \gamma_a : G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & \gamma_a(x) = x \star a \end{array}\right.$$
   (c) Et pour terminer Aut où
   $$\left\{\begin{array}{rcl} Aut : G & \longrightarrow & \mathfrak{S}(G) \\ a & \longmapsto & Aut(a) = h_a \end{array}\right. \text{ où } \left\{\begin{array}{rcl} h_a : G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & h_a(x) = a^{-1} \star x \star a \end{array}\right.$$
2. On appelle, comme d'habitude, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est le groupe des matrices inversibles d'ordre n à coefficients réels. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ opère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par transitivité. En effet, si nous posons $\mathfrak{S}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ le groupe des permutations de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nous avons :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} C : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{S}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \\ P & \longmapsto & C(P) = C_P \end{array}\right. \text{ où } \left\{\begin{array}{rcl} C_P : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & C_P(M) = PMP^{-1} \end{array}\right.$$

1.4.2 Définition d'orbite d'un élément $x \in X$

Soit $x \in X$. On appelle orbite de $x \in X$ l'ensemble des transformations $\Phi(g)(x)$ où $g \in G$
En d'autres termes, si $\mathcal{O}(x)$ est l'orbite de x, nous avons

$$\mathcal{O}(x) = \{\Phi(g)(x) \text{ avec } g \in G\}$$

On dit que G opère transitivement sur G si, pour tout $x \in X$, $\mathcal{O}(x) = G$

1.4.3 Proposition

Soit X un ensemble et G un groupe opérant dans X. On construit, dans X, la relation $\mathcal{R}$ définie par :

$$(\forall x \in X)(\forall x \in X)((x\mathcal{R}y) \Longleftrightarrow ((\exists g \in G)(y = \Phi(g)(x))))$$

Cette relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans X

Démonstration

1. **Elle est évidemment réflexive**
   Soit $x \in X$.
   Bien entendu, $x = \mathrm{Id}_X(x) = \Phi(e)(x)$, et donc $x\mathcal{R}x$
2. **Elle est aussi symétrique**
   Soient $x \in X$ et $y \in X$ tels que $x\mathcal{R}y$.
   Ceci veut dire qu'il existe $g \in G$ tel que $y = \Phi(g)(x)$
   $\Phi(g)$ étant une bijection de X, il existe une bijection réciproque $(\Phi(g))^{-1} = \Phi\left(g^{-1}\right)$
   Donc $y = \Phi(g)(x) \iff (\Phi(g))^{-1}(y) = x \iff \left(\Phi\left(g^{-1}\right)\right)(y) = x$
   Il existe donc un élément de G, cet élément étant g^{-1} tel que $\left(\Phi\left(g^{-1}\right)\right)(y) = x$, et donc $y\mathcal{R}x$
   La relation $\mathcal{R}$ est donc bien symétrique
3. **La relation $\mathcal{R}$ est transitive**
   Soient $x \in X$, $y \in X$ et $z \in X$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$.
   Il existe donc $g_1 \in G$ et $g_2 \in G$ tels que $y = \Phi(g_1)(x)$ et $z = \Phi(g_2)(y)$. Alors :
$$z = \Phi(g_2)(y) = z = \Phi(g_2)[\Phi(g_1)(x)] = \Phi(g_2) \circ \Phi(g_1)(x) = \Phi(g_2 g_1)(x)$$
   Il existe donc un élément de G, cet élément étant $g_2 g_1$ tel que $z = \Phi(g_2 g_1)(x)$ et donc $x\mathcal{R}z$

$\mathcal{R}$ est donc bien une relation d'équivalence

1.4.4 Proposition

Pour tout $x \in X$, la classe d'équivalence dans la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie en 1.4.3 est l'orbite $\mathcal{O}(x)$ de x

Démonstration

La démonstration est simple et laissée au lecteur

Exemple 5 :

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'opération de conjugaison $C_P(M) = PMP^{-1}$, l'orbite $\mathcal{O}(M)$ d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables à M

1.4.5 Définition du stabilisateur d'un élément $x \in X$

Soit $x \in X$. On appelle stabilisateur de $x \in X$ l'ensemble des éléments $g \in G$ tels que $\Phi(g)(x) = x$
En d'autres termes, si $\mathcal{S}(x)$ est le stabilisateur de x, nous avons
$$\mathcal{S}(x) = \{g \in G \text{ tels que } \Phi(g)(x) = x\}$$

1.4.6 Proposition

Soit X un ensemble et G un groupe opérant dans X. Pour tout $x \in X$, $\mathcal{S}(x)$, le stabilisateur de x est un sous-groupe de G

Démonstration

1. Bien entendu que $\mathcal{S}(x) \neq \emptyset$ puisque, e l'élément neutre de G est un élément de $\mathcal{S}(x)$.
   En effet :
$$\Phi(e)(x) = \mathrm{Id}_X(x) = x$$
2. D'autre part, si $g_1 \in \mathcal{S}(x)$ et $g_2 \in \mathcal{S}(x)$, alors $g_1 g_2 \in \mathcal{S}(x)$. En effet :
$$\Phi(g_1 g_2)(x) = \Phi(g_1) \circ \Phi(g_2)(x) = \Phi(g_1)[\Phi(g_2)(x)] = \Phi(g_1)(x) = x$$

3. Dernière question : si $g \in \mathcal{S}(x)$, avons nous $g^{-1} \in \mathcal{S}(x)$?
   Première remarque, c'est que $\Phi(g)$ est une bijection de X et que donc $(\Phi(g))^{-1}$ est bien définie. Or, $(\Phi(g))^{-1} = \Phi\left(g^{-1}\right)$
   Ensuite :
   $$x = \Phi(g)(x) \Longleftrightarrow (\Phi(g))^{-1}(x) = x \Longleftrightarrow \Phi\left(g^{-1}\right)(x) = x$$
   Nous venons de démontrer que si $g \in \mathcal{S}(x)$ alors $g^{-1} \in \mathcal{S}(x)$

Exemple 6 :

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'opération de conjugaison $C_P(M) = PMP^{-1}$, quel est le stabilisateur d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
C'est donc, en fait, l'ensemble des matrices $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $C_P(M) = M$. Autrement dit, c'est l'ensemble des matrices $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = PMP^{-1} \Longleftrightarrow MP = PM$, c'est à dire l'ensemble des matrices inversibles qui commutent avec M. D'après 1.4.6, cet ensemble est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

Exercice 21 :

1. Soit $\mathcal{H} = \left\{M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \text{ telles que } M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \text{ avec } a \in \mathbb{R}^* \text{ et } b \in \mathbb{R}^*\right\}$
   Démontrer que $\mathcal{H}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$
2. Trouvez toutes les matrices $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$