1.5 Quelques exercices en complément

Exercice 22 :

Nous savons qu'une intersection quelconque de sous-groupes est un sous groupe ; nous n'avons pas du tout le même résultat avec la réunion.
Par exemple : $2\mathbb{Z}$ et $3\mathbb{Z}$ sont des sous-groupes de $\mathbb{Z}$, mais $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ n'est pas un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.
En effet, $2 \in 2\mathbb{Z}$ et $3 \in 3\mathbb{Z}$, mais $5 = 2 + 3 \notin 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$

Soient G un groupe et $(H_i)_{i \in I}$ une famille de sous-groupes de G. On suppose que, pour tout $i \in I$ et tout $j \in I$, il existe un élément $k \in I$ tel que $H_i \subset H_k$ et $H_j \subset H_k$.
Montrer que $\bigcup\limits_{i \in I} H_i$ est un sous-groupe de G

Exercice 23 :

Soit G un groupe non commutatif de centre $Z(G)$. On désigne par $Aut(G)$ l'ensemble des automorphismes de G et $Int(G)$ l'ensemble des automorphismes intérieurs de G.
Nous avons démontré dans le cours de L_0 que $Z(G)$ est un sous-groupe de G et que les automorphismes intérieurs étaient des automorphismes.

1. (a) Démontrer que $(Aut(G), \circ)$ est un groupe
   (b) Démontrer que $(Int(G), \circ)$ est un sous-groupe de $(Aut(G), \circ)$
2. Nous allons démontrer que G opère sur luimême par les automorphismes intérieurs.
   Soit $\Phi : G \longrightarrow Int(G)$ défini par :
   $$\left\{ \begin{array}{rcl} \Phi : G & \longrightarrow & Int(G) \\ a & \longmapsto & \Phi(a) = f_a \end{array} \right. \text{ où } \left\{ \begin{array}{rcl} f_a : G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & f_a(x) = axa^{-1} \end{array} \right.$$
   Il faut démontrer que Φ est un homomorphisme
3. Démontrer que $Int(G)$ est isomorphe à $G/Z(G)$

Exercice 24 :

1. Trouver tous les groupes d'ordre 4
2. Soit G un groupe d'ordre $2n$ et d'élément neutre e.
   On suppose qu'il existe 2 sous-groupes de G, différents, H_1 et H_2 d'ordre n et tels que $H_1 \cap H_2 = \{e\}$
   (a) Montrer que $n = 2$, c'est à dire que G est un groupe à 4 éléments
   (b) Montrer que la structure de G est entièrement déterminée et en donner la table de multiplication

Sur les groupes cycliques

Exercice 25 :

Soit G un groupe cyclique d'ordre n et de générateur a

1. Montrer que tout sous-groupe de G est cyclique
2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $a^m = e$ si et seulement si n divise m
3. Soit p un entier quelconque tel que $1 \leqslant p \leqslant n$ et $\langle a^p \rangle$ le sous-groupe de G engendré par a^p
   (a) Montrer que nous avons $\langle a^p \rangle = \langle a^q \rangle$ où q est le pgcd de n et p
   (b) Démontrer que $\langle a^p \rangle = G$ si et seulement si n et p sont premiers entre eux.

Exercice 26 :

Soient G_1 et G_2 2 groupes et nous considérons leur produit direct $G_1 \times G_2$. Nous appelons e_1 l'élément neutre de G_1 et e_2, celui de G_2.
On consdère $a_1 \in G_1$ d'ordre n_1 et $a_2 \in G_2$ d'ordre n_2

1. Montrer que l'ordre de l'élément $(a_1, a_2) \in G_1 \times G_2$ est le ppcm de n_1 et de n_2
2. On suppose G_1 cyclique d'ordre n_1 et G_2 cyclique d'ordre n_2. Démontrer que si n_1 et n_2 sont premiers entre eux, alors $G_1 \times G_2$ est cyclique d'ordre $n_1 n_2$

Exercice 27 :

Nous commençons par donner ***une*** *définition de groupe simple. La définition de groupe simple est beaucoup plus large que celle que nous donnons ici. Dans notre cas, nous la restreignons aux seuls groupes abéliens*

Soit $(G, \star)$ un groupe abélien de neutre e
$(G, \star)$ est dit simple s'il n'admet d'autre sous-groupes que $\{e\}$ et G lui même

Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. G est un groupe cyclique d'ordre premier
2. G est un groupe abélien simple

Exercices divers

Exercice 28 :

Soient G_1 et G_2 2 groupes et $G_1 \times G_2$ leur produit direct..
On appelle ϖ_1 la projection de $G_1 \times G_2$ sur G_1 et ϖ_2 la projection de $G_1 \times G_2$ sur G_2.
Soit G un groupe quelconque $u_1 : G \longrightarrow G_1$ un homomorphisme de groupe et $u_2 : G \longrightarrow G_2$ un second homomorphisme de groupe.
Démontrer qu'il existe un homomorphisme $h : G \longrightarrow G_1 \times G_2$ et un seul tel que $u_1 = \varpi_1 \circ h$ et $u_2 = \varpi_2 \circ h$