3.10 Formes linéaires en dimension finie

3.10.1 Définition analytique d'une forme linéaire dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E
Soit $\varphi \in E^*$ une forme linéaire. Pour tout vecteur $x \in E$, de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$, $\varphi(x)$ s'écrit :

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \text{ où } (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$$

Démonstration

1. Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ un vecteur de E ; alors

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$$

   où nous avons posé $a_i = \varphi(e_i)$

2. Réciproquement, si φ est définie par :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \varphi : E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i & \longmapsto & \varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \text{ où } (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n \end{array}\right.$$

   φ est bien entendu une forme linéaire

Remarque 34 :

1. Les scalaires $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ sont caractéristiques de la forme linéaire φ et toutes les formes linéaires $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}$ s'expriment donc de cette manière
2. L'identité $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$ peut aussi s'écrire $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*(x)$, c'est à dire que $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*$ et les scalaires $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ sont donc les coordonnées de φ dans la base duale de E^* $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$
3. Si H est un hyperplan de E , et si $H = \ker \varphi$ où φ est une forme linéaire non nulle sur E, H est l'ensemble des vecteurs $x \in E$ de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i a_i = 0$ *(où les a_i sont des scalaires non tous nuls, ce sont les images des vecteurs de la base B par φ).*

   L'équation $\sum_{i=1}^{n} x_i a_i = 0$ s'appelle alors une équation de H dans la base B.

3.10.2 Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E
On considère H et H', 2 hyperplans d'équations respectives :

$$H : \sum_{i=1}^{n} x_i a_i = 0 \quad \text{et} \quad H' : \sum_{i=1}^{n} x_i b_i = 0$$

Alors, $H = H'$ si et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $b_i = \lambda a_i$

Démonstration

Supposons $H = \ker \varphi$ et $H' = \ker \psi$ où $\varphi \in E^*$ et $\psi \in E^*$ sont des formes linéaires non nulles.
Alors, $H = H' \Longleftrightarrow \ker \varphi = \ker \psi$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\psi = \lambda\varphi$, ce qui veut dire que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, nous avons : $\psi(e_i) = \lambda\varphi(e_i)$ et donc $b_i = \lambda a_i$
Ce que nous voulions.

Exemple 15 :

En dimension 2 et en dimension 3

1. Dans $\mathbb{R}^2$ rapporté à sa base canonique $\{e_1, e_2\}$, l'ensemble des couples (x, y) qui vérifient une équation de la forme $ax + by = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ est une droite : c'est le noyau de la forme linéaire non nulle φ telle que $\varphi((x, y)) = ax + by$ vérifiant $\varphi(e_1) = a$ et $\varphi(e_2) = b$
   Un vecteur de base de cette droite, est le vecteur $v = (-b, a)$
   Si $a_1x + b_1y = 0$ est une autre équation de cette droite, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $a_1 = \lambda a$ et $b_1 = \lambda b$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$, l'ensemble des triplets (x, y, z) qui vérifient une équation de la forme $ax + by + cz = 0$ avec $(a, b,) \neq (0, 0, 0)$ est un plan : c'est le noyau de la forme linéaire $\varphi((x, y, z)) = ax + by + cz$ telle que $\varphi(e_1) = a$, $\varphi(e_2) = b$ et $\varphi(e_3) = c$
   Si $a_1x + b_1y + c_1z = 0$ est une autre équation de ce plan, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $a_1 = \lambda a$, $b_1 = \lambda b$ et $c_1 = \lambda c$

3.10.3 Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n
L'intersection de m hyperplans de E est un sous-espace vectoriel de dimension p où $p \geqslant n - m$.

Démonstration

Soient $H_1, H_2, \cdots, H_m$ m hyperplans de E et $u_1^*, u_2^*, \cdots, u_m^*$, m formes linéaires de E^* telles que, pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant m$, nous ayions $H_i = \ker u_i^*$
On considère l'application $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{K}^m$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Phi : E & \longrightarrow & \mathbb{K}^m \\ x & \longmapsto & \Phi(x) = (u_1^*(x), u_2^*(x), \ldots, u_m^*(x)) \end{array} \right.$$

1. **Φ est linéaire**
   La démonstration n'est pas difficile.
   Soient $x \in E$, $y \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$; alors :
   $$\begin{aligned} \Phi(\lambda x + \mu y) &= (u_1^*(\lambda x + \mu y), u_2^*(\lambda x + \mu y), \ldots, u_m^*(\lambda x + \mu y)) \\ &= (\lambda u_1^*(x) + \mu u_1^*(y), \lambda u_2^*(x) + \mu u_2^*(y), \ldots, \lambda u_m^*(x) + \mu u_m^*(y)) \text{ par linéarité des } u_i^* \\ &= \lambda(u_1^*(x), u_2^*(x), \ldots, u_m^*(x)) + \mu(u_1^*(y), u_2^*(y), \ldots, u_m^*(y)) \\ &= \lambda\Phi(x) + \mu\Phi(y) \end{aligned}$$
   Φ est donc linéaire
2. **Recherche de $\ker \Phi$**
   Soit $x \in \ker \Phi$. Alors, nous pouvons écrire :
   $$\begin{aligned} x \in \ker \Phi &\Longleftrightarrow \Phi(x) = 0 \\ &\Longleftrightarrow (u_1^*(x), u_2^*(x), \ldots, u_m^*(x)) = (0, 0, \ldots, 0) \\ &\Longleftrightarrow u_i^*(x) = 0 \text{ pour tout } 1 \leqslant i \leqslant m \\ &\Longleftrightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{m} \ker u_i^* \\ &\Longleftrightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{m} H_i \end{aligned}$$
   Ainsi $\ker \Phi = \bigcap_{i=1}^{m} H_i$

3. $\dim \bigcap\limits_{i=1}^{m} H_i = p$ **où** $p \geqslant n - m$
   D'après le théorème du rang, nous avons $\dim \ker \Phi + \dim \operatorname{Im}\phi = \dim E \iff \dim \ker \Phi + \dim \operatorname{Im}\phi = n \iff \dim \ker \Phi = n - \dim \operatorname{Im}\phi$.
   Or, comme $\operatorname{Im}\phi \subset \mathbb{K}^m$, nous avons $\dim \operatorname{Im}\phi \leqslant m$ et donc $n - \dim \operatorname{Im}\phi \geqslant n - m$.
   Donc $\dim \ker \Phi \geqslant n - m \iff \dim \bigcap\limits_{i=1}^{m} H_i \geqslant n - m$

Remarque 35 :

Nous démontrerons en 7.1.1 que, si $H_1, H_2, \cdots, H_m$ *(avec $m \leqslant n$)* sont m hyperplans de E définis par m formes linéaires $u_1^*, u_2^*, \cdots, u_m^*$ de E^* **linéairement indépendantes**, alors $\dim \bigcap\limits_{i=1}^{m} H_i = n - m$

Exercice 36 :

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Montrer que, pour tout $x \in E$ et tout $y \in E$, si $x \neq y$ alors, il existe $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$