# Chapitre 3

# Les espaces vectoriels

VOILÀ UN CHAPITRE IMPORTANT. VOUS LE SAVEZ DÉJÀ SI VOUS AVEZ LU LE COURS DE $L_0$. DANS CE COURS, NOUS NE NOUS LIMITERONS PAS AU CORPS $\mathbb{R}$ DES NOMBRES RÉELS, MAIS NOUS ALLONS NOUS ÉTENDRE À $\mathbb{C}$ ET SANS DOUTE D'AUTRES CORPS
LA NOTION D'ESPACES VECTORIELS VA PERMETTRE **d'unifier tous les problèmes d'algèbre linéaire** COMME PAR EXEMPLE LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES.

Dans ce chapitre, les corps $\mathbb{K}$ sont toujours commutatifs, en précisant quand cela sera nécessaire s'il s'agit de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'élément neutre du corps $\mathbb{K}$ pour la multiplication sera toujours noté 1

## 3.1 Premières définitions, premiers exemples

### 3.1.1 Définition de loi externe

Soit $E$ un ensemble et $\mathbb{K}$ un corps.
Une loi de composition externe sur $E$ de domaine $\mathbb{K}$ est une application $\Phi$ de $\mathbb{K} \times E$ dans $E$ :

$$\begin{cases} \Phi : \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ \quad (\lambda, u) & \longmapsto & \Phi\left[(\lambda, u)\right] = \lambda \bullet u \end{cases}$$

**Remarque 1 :**

Le point $\bullet$ entre $\lambda$ et $u$ « est » la loi externe. Ce point va rapidement disparaître et on écrira $2u$ à la place de $\Phi\left[(\lambda, u)\right]$ ou $\lambda \bullet u$

### 3.1.2 Définition d'espace vectoriel

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $E$ un ensemble.
On dit que $E$ espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ si $E$ est muni :
- $\Rightarrow$ D'une loi de composition interne : $+$
- $\Rightarrow$ D'une loi de composition externe : $\bullet$ de $\mathbb{K} \times E$ dans $E$

vérifiant

1. $(E, +)$ est un groupe commutatif
2. La loi externe vérifie :
   (a) $(\forall x \in E)$, $(\forall \lambda \in \mathbb{K})$ $(\forall \mu \in \mathbb{K})$ $\lambda \bullet (\mu \bullet x) = (\lambda \times \mu) \bullet x$
   (b) $(\forall x \in E)$, $(\forall \lambda \in \mathbb{K})$ $(\forall \mu \in \mathbb{K})$ $(\lambda + \mu) \bullet x = (\lambda \bullet x) + (\mu \bullet x)$
   (c) $(\forall x \in E)$, $(\forall y \in E)$ $(\forall \lambda \in \mathbb{K})$ $\lambda \bullet (x + y) = \lambda \bullet x + \lambda \bullet y$
   (d) $(\forall x \in E)$, $1 \bullet x = x$

Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés les **scalaires** . Les éléments de $E$ sont appelés **vecteurs**.
On dit que $E$ est un **$\mathbb{K}$-espace vectoriel**

**Remarque 2 :**

A partir de maintenant, nous enlevons le $\bullet$ de la loi externe et le $\times$ de la loi multiplicative de $\mathbb{K}$

### 3.1.3 Propriétés immédiates

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . Nous notons $0_E$ le neutre pour l'addition de $E$ *(le vecteur nul)*. Alors :

1. $(\forall x \in E)$, $(\forall y \in E)$ $(\forall \lambda \in \mathbb{K})$ $\lambda (x - y) = \lambda x - \lambda y$
2. $(\forall \lambda \in \mathbb{K})$ $\lambda \bullet 0_E = 0_E$
3. $(\forall y \in E)$ $(\forall \lambda \in \mathbb{K})$ $\lambda (-y) = -\lambda y$
4. $(\forall x \in E)$, $(\forall \mu \in \mathbb{K})$ $(\forall \lambda \in \mathbb{K})$ $(\lambda - \mu) x = \lambda x - \mu y$
5. $(\forall x \in E)$, $0 \bullet x = 0_E$
6. $(\forall x \in E)$, $(\forall \lambda \in \mathbb{K})$ $(-\lambda) x = -(\lambda x)$, en particulier, $(-1) x = -x$
7. $(\forall \lambda \in \mathbb{K})$, $(\forall x \in E)$, $(-\lambda)(-x) = \lambda x$
8. $\lambda x = 0_E$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $x = 0_E$
9. L'application $h_\lambda : E \longrightarrow E$ définie par :
$$\begin{cases} h_\lambda : E & \longrightarrow & E \\ \quad\quad x & \longmapsto & h_\lambda (x) = \lambda x \end{cases}$$
   est appelée homothétie de rapport $\lambda$. $h_\lambda$ est bijective si et seulement si $\lambda \neq 0$

**Démonstration**

1. **Montrons que** $(\forall x \in E)$, $(\forall y \in E)$ $(\forall \lambda \in \mathbb{K})$ $\lambda (x - y) = \lambda x - \lambda y$
   En effet : $\lambda x = \lambda [(x - y) + y] = \lambda (x - y) + \lambda y$ et donc $\lambda x - \lambda y = \lambda (x - y)$
2. **Montrons que** $(\forall \lambda \in \mathbb{K})$ $\lambda \bullet 0_E = 0_E$
   En faisant $x = y$ dans l'item précédent, nous avons :
$$\lambda (x - x) = \lambda x - \lambda x \Longleftrightarrow \lambda \bullet 0 = 0_E$$
3. **Montrons que** $(\forall y \in E)$ $(\forall \lambda \in \mathbb{K})$ $\lambda (-y) = -\lambda y$
   En faisant $x = 0_E$ dans le premier item, nous avons :
$$\lambda (0_E - y) = \lambda (-y) = \lambda 0_E - \lambda y = 0_E - \lambda y = -\lambda y \Longleftrightarrow \lambda (-y) = -\lambda y$$

4. **Montrons que** $(\forall x \in E)$, $(\forall \mu \in \mathbb{K})$ $(\forall \lambda \in \mathbb{K})$ $(\lambda - \mu)\, x = \lambda x - \mu y$
   Nous reprenons la méthode du premier item :
   $$\lambda x = [(\lambda - \mu) + \mu]\, x = (\lambda - \mu)\, x + \mu x$$
   Et donc $\lambda x = (\lambda - \mu)\, x + \mu x \Longleftrightarrow \lambda x - \mu x = (\lambda - \mu)\, x$
5. **Montrons que** $(\forall x \in E)$, $0 \bullet x = 0_E$
   Facile à démontrer ; il suffit de faire $\lambda = \mu$ dans l'identité précédente.
6. **Montrons que** $(\forall x \in E)$, $(\forall \lambda \in \mathbb{K})$ $(-\lambda)\, x = -(\lambda x)$
   C'est facile à démontrer, nous avons $\mu x - \lambda x = (\mu - \lambda)\, x$, et en faisant $\mu = 0$, nous avons :
   $$0x - \lambda x = (0 - \lambda)\, x \Longleftrightarrow 0_E - \lambda x = (-\lambda)\, x \Longleftrightarrow (-\lambda)\, x = -(\lambda x)$$
7. **Montrons que** $(\forall \lambda \in \mathbb{K})$, $(\forall x \in E)$, $(-\lambda)(-x) = \lambda x$
   Nous avons $(-\lambda)(-x) = -(\lambda(-x)) = -(-\lambda x) = \lambda x$
8. **Montrons que** $\lambda x = 0_E$ **si et seulement si** $\lambda = 0$ **ou** $x = 0_E$
   - ▷ Si $\lambda = 0$ ou $x = 0_E$ alors, bien entendu, $\lambda x = 0_E$
   - ▷ Supposons $\lambda x = 0_E$ et $\lambda \neq 0$. Comme $\lambda \in \mathbb{K}$, alors, $\lambda$ est inversible, et donc :
   $$\lambda^{-1}(\lambda x) = \lambda^{-1} 0_E \Longleftrightarrow \left(\lambda^{-1}\lambda\right) x = 0_E \Longleftrightarrow 1 \bullet x = 0_E \Longleftrightarrow x = 0_E$$
9. **Montrons que l'homothétie** $h_\lambda : E \longrightarrow E$ **est bijective si et seulement si** $\lambda \neq 0$
   - ▷ Si $\lambda = 0$, alors, pour tout $x \in E$, $h_\lambda(x) = 0x = 0_E$, et, évidemment, $h_\lambda$ n'est pas bijective
   - ▷ Supposons $\lambda \neq 0$.
     - ⋆ Alors $h_\lambda$ est injective
       Soient $x \in E$ et $y \in E$ tels que $h_\lambda(x) = h_\lambda(y)$.
       Alors, $\lambda x = \lambda y \Longleftrightarrow \lambda^{-1}(\lambda x) = \lambda^{-1}(\lambda y) \Longleftrightarrow \left(\lambda^{-1}\lambda\right) x = \left(\lambda^{-1}\lambda\right) y \Longleftrightarrow x = y$
       $h_\lambda$ est bien injective
     - ⋆ Alors $h_\lambda$ est surjective
       Soit $y \in E$ ; alors, $x = \lambda^{-1} y$ est tel que $h_\lambda(x) = h_\lambda\left(\lambda^{-1} y\right) = \lambda\left(\lambda^{-1} y\right) = y$

     $h_\lambda$ est donc bijective.

**Exemple 1 :**

**Premiers exemples basiques de $\mathbb{K}$-espace vectoriel**

1. L'ensemble des vecteurs de la géométrie classique forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour l'addition des vecteurs et la multiplication par un scalaire.
2. Tout corps $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur lui-même
3. Si $\mathbb{K}_1$ est un sous-corps de $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}_1$. En particulier, $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sue $\mathbb{Q}$, et $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
4. On munit $\mathbb{K}^n$ d'une addition et d'une multiplication par un scalaire :
   $$(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$$
   Et de la multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ :
   $$\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n)$$
   Muni de ces deux opérations $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
   En particulier $\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel . c'est l'espace vectoriel de la géométrie plane et $\mathbb{C}^2$ peut être considéré comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel
5. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficents dans le corps $\mathbb{K}$ muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire habituelles est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
6. Si $A$ est un en semble quelconque et $\mathbb{K}$ un corps. On note $\mathbb{K}^A = \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications de $A$ dans $\mathbb{K}$. On définit :

→ L'addition :

$$\left(\forall f \in \mathbb{K}^A\right)\left(\forall g \in \mathbb{K}^A\right)(\forall a \in A)\left((f+g)(a) = f(a) + g(a)\right)$$

→ La multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\left(\forall f \in \mathbb{K}^A\right)(\forall \lambda \in \mathbb{K})(\forall a \in A)\left((\lambda f)(a) = \lambda f(a)\right)$$

Muni de ces 2 opérations, $\mathbb{K}^A$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

7. En particulier l'espace des suites $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . les vecteurs sont donc les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Le vecteur nul est donc la suite nulle $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $O_n = 0$
8. Toujours comme cas particulier de $\mathbb{K}^A = \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$, on peut donner $\mathbb{R}^{\mathbb{C}} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des fonctions numériques d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$
9. <u>Produit d'espaces vectoriels</u>
   Soient $E$ et $F$ 2 $\mathbb{K}$-espace vectoriel , alors le produit

$$E \times F = \{(x, y) \text{ où } x \in E \text{ et } y \in F\}$$

muni des 2 opérations d'addition et de multiplication :

▷ L'addition :

$$(\forall (x,y) \in E \times F)(\forall (z,t) \in E \times F)\left((x,y) + (z,t) = (x+z, y+t)\right)$$

▷ La multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$

$$(\forall (x,y) \in E \times F)(\forall \lambda \in \mathbb{K})\left(\lambda (x,y) = (\lambda x, \lambda y)\right)$$

Muni de ces 2 opérations, $E \times F$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Il est possible de généraliser à $n$ $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E_1, E_2, \cdots, E_n$ et l'espace produit $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$

On retrouve comme cas particulier $\mathbb{K}^n$ lorsque nous faisons $E_1 = \mathbb{K}, E_2 = \mathbb{K}, \cdots, E_n = \mathbb{K}$