3.11 Introduction aux équations linéaires

Cette section est une introduction au chapitre 7

3.11.1 Définition

Soient E et F 2 $\mathbb{K}$-espace vectoriel
On apelle **équation linéaire** toute équation du type

$$u(X) = Y \tag{3.1}$$

Où $Y \in F$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ sont des données du problème.
Résoudre l'équation 3.1, c'est trouver tous les vecteurs $X \in E$ qui ont $Y \in F$ pour image par u.

Remarque 36 :

Une autre façon de voir les choses, est de dire que résoudre l'équation 3.1, c'est déterminer l'ensemble $u^{-1}(\{Y\})$

Exemple 16 :

Commençons par des exemples

1. Dans $\mathbb{R}$ considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1, l'équation $aX = b$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ est une équation linéaire.
2. Si $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \mathbb{R}^2$, le système :

$$\begin{cases} ax + by + cz = & \alpha \\ a_1x + b_1y + c_1z = & \beta \end{cases}$$

   peut s'interpréter comme une équation linéaire.
   En effet, soit $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\begin{cases} u : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & u[(x, y, z)] = (ax + by + cz, a_1x + b_1y + c_1z) \end{cases}$$

   u est linéaire et le système est donc équivalent à $u[(x, y, z)] = (\alpha, \beta)$
   Résoudre cette équation, c'est bien rechercher les antécédents du couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
3. Soient E l'ensemble $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continuement dérivables sur $\mathbb{R}$ et $F = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensmble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
   Si $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une fonction continue donnée, trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $f' = g$, c'est résoudre une équation linéaire.
4. Dons $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, trouver toutes les fonctions numériques $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui vérifient, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x+1) - f(x) = 1 \tag{3.2}$$

   c'est résoudre une équation linéaire
   En effet, si nous considérons $\Delta : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par :

$$\begin{cases} \Delta : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \Delta(f) \end{cases}$$ où, pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons $\Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x)$

   Δ est bien une application linéaire[3] et résoudre l'équation $f(x+1) - f(x) = 1$, c'est résoudre l'équation $\Delta(f) = 1$ où 1 est la fonction constante égale à 1

3. Pourquoi ne pas le démontrer ?

3.11.2 Proposition

On se met, dans cette proposition, dans les conditions de la définition 3.11.1

1. Si u est une application linéaire bijective, alors l'équation 3.1 admet une unique solution $X_0 = u^{-1}(Y)$
2. Si u n'est pas une application linéaire bijective,
   (a) Si $Y \notin \mathrm{Im} u$, alors, l'équation 3.1 n'a pas de solution.
   (b) Si $Y \in \mathrm{Im} u$, alors, l'équation 3.1 admet au moins une solution.
   Toutes les solutions de l'équation 3.1 sont obtenues en ajoutant à tous les élément du noyau $\ker u$ une solution particulière de l'équation 3.1

Démonstration

▷ La démonstration des points 1 et 2-(a) ne pose pas de difficultés

▷ Supposons maintenant que $Y \in \mathrm{Im} u$

⋆ Supposons que X_0 soit une solution particulière de l'équation 3.1 ; alors, bien entendu, $u(X_0) = Y$.
Soit $Z \in \ker u$; alors $u(X_0 + Z) = u(X_0) + u(Z) = Y + 0 = Y$.
Donc, $X_0 + Z$ est donc solution de l'équation 3.1

⋆ Réciproquement, si X_0 et X_1 sont solutions de l'équation 3.1, posons $Z = X_0 - X_1$.
Alors, $u(X_0 - X_1) = u(X_0) - u(X_1) = Y - Y = 0$, ce qui veut dire $Z \in \ker u$ et donc que $X_0 = X_1 + Z$

Remarque 37 :

1. Lorsque u est une application linéaire bijective, la résolution est simple si u^{-1} s'exprime simplement.
2. Le cas où $Y \in \mathrm{Im} u$ est des plus classiques et on le retrouve dans les équations différentielles linéaires (voir le théorème 15.3.4).
   Nous sommes alors ramenés à résoudre les équations suivantes :
   → Trouver une solution particulière de 3.1
   → Rechercher le noyau de u, c'est à dire $\ker u$ en trouvant **toutes** les solutions de $u(X) = 0$
   → L'équation $u(X) = 0$ est l'équation linéaire homogène associée de l'équation 3.1

Exemple 17 :

Cherchons à résoudre l'équation 3.2 : $f(x+1) - f(x) = 1$

1. Une solution particulère de l'équation 3.2 est $f_0(x) = x$ puisque :
$$f_0(x+1) - f_0(x) = x + 1 - x = 1$$
2. Toutes les solutions de l'équation linéaire homogène associée $f(x+1) - f(x) = 0$ sont les fonctions périodiques et de période 1
3. Donc toutes les fonctions $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui vérifient l'équation 3.2 sont du type $f(x) = x + \varphi(x)$ où φ est une fonction numérique de période 1

3.11.3 Proposition

Une nouvelle fois, nous nous mettons, dans cette proposition, dans les conditions de la définition 3.11.1

On suppose que $Y \in F$ s'écrive $Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$

Alors, nous obtenons une solution de l'équation linéaire 3.1 $u(X) = Y$ en cherchant une solution de chacune des équations $u(X) = Y_i$ pour $i = 1, \cdots, n$ et en ajoutant ces solutions

Démonstration

La démonstration est très simple et laissée au lecteur

Exemple 18 :

Recherchons les solutions de l'équation :

$$f(x+1) - f(x) = 1 + \cos 2\pi x \tag{3.3}$$

Il suffit, puisque nous avons déjà résolu l'équation 3.2 de trouver une solution particulière à l'équation

$$f(x+1) - f(x) = \cos 2\pi x$$

On peut remarquer que la fonction $f_1(x) = x\cos 2\pi x$ vérifie l'équation ci-dessus. En effet :

- ⋆ $f_1(x+1) = (x+1)\cos 2\pi(x+1) = (x+1)\cos(2\pi x + 2\pi) = (x+1)\cos 2\pi x$
- ⋆ Et donc $f_1(x+1) - f_1(x) = (x+1)\cos 2\pi x - x\cos 2\pi x = \cos 2\pi x$

Donc, les fonctions qui vérifient l'équation 3.3 sont du type $f(x) = x + x\cos 2\pi x + \varphi(x)$ où φ est une fonction numérique de période 1