3.13 Quelques exercices corrigés

Dans cette partie, nous ne corrigeons pas tous les exercices. Les plus faciles sont laissés à la sagacité du lecteur

Exercice 3 :

Prouver que l'ensemble des suites réelles presque nulles (c'est à dire qui s'annulent à partir d'un certain rang) *est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel .*

Les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui s'annulent àpartir d'un certain rang, peuvent être considérées comme des suites finies. Formellement, elles peuvent se définir ainsi :

$$\text{Il existe } N_x \in \mathbb{N} \text{ tel que pour } n \geqslant N_x \text{ alors } x_n = 0$$

Appelons $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des suites qui s'annulent à partir d'un certain rang. Nous annons démontrer que $\mathcal{S}_0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

→ Bien ententendu, la suite nulle est un élément de $\mathcal{S}_0$

→ Soient $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $V = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites de $\mathcal{S}_0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mu \in \mathbb{C}$. Nous allons montrer que $\lambda U + \mu V \in \mathcal{S}_0$
Il existe donc $N_U \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant N_U$ alors $u_n = 0$. On peut alors remarquer que pour tout $n \geqslant N_U$, nous avons $\lambda u_n = 0$
De même, il existe $N_V \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant N_V$ alors $v_n = 0$, et pour tout $n \geqslant N_V$, nous avons $\mu v_n = 0$
Ainsi, si $N_0 \geqslant \max\{N_U, N_V\}$, pour $n \geqslant N_0$, alors $\lambda u_n = 0$ et $\mu v_n = 0$ et donc la suite $\lambda U + \mu V$ est nulle à partir d'un certain rang. et donc $\lambda U + \mu V \in \mathcal{S}_0$

Ainsi, $\mathcal{S}_0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Exercice 4 :

On considère $\mathbb{R}^2$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel . On appelle $F_1 = \text{vect}\,(\{(2,3)\})$ et $F_2 = \text{vect}\,(\{(-2,3)\})$

1. *Est-ce que $F_1 \cup F_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?*

   Il est évident que $F_1 \cup F_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Il suffit, pour cela de prendre un contre exemple.
   Soient $u = (2,3)$ et $v = (-2,3)$ 2 vecteurs de $F_1 \cup F_2$ puisque $u \in F_1$ et $v \in F_2$.
   Or, $u + v = (0,6)$ et $u + v \notin F_1 \cup F_2$ et $F_1 \cup F_2$ ne peut être un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

2. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.*

   ⇒ **Supposons que $F \subset G$ ou $G \subset F$**
   Si $F \subset G$, alors $F \cup G = G$ et nous avons bien $F \cup G$ qui est un sous-espace vectoriel de E.
   La résolution est la même si $G \subset F$

   ⇒ **Supposons, maintenant que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E**
   Montrons que $F \subset G$ ou $G \subset F$.
   Pour le démontrer, supposons le contraire, c'est à dire $F \not\subseteq G$ et $G \not\subseteq F$ et soient donc $a \in F$ tel que $a \notin G$ et $b \in G$ tel que $b \notin F$.
   Nous avons $a \in F \cup G$ et $b \in F \cup G$. $F \cup G$ étant un sous-espace vectoriel de E, nous avons $c = a + b \in F \cup G$.
   - ⋆ Si $c \in F$, alors $b = c - a$ et comme F est un sous-espace vectoriel , $c - a \in F$ et donc $b \in F$, ce qui est impossible
   - ⋆ Nous arrivons à la même contradiction si $c \in G$

   Donc nous avons $F \subset G$ ou $G \subset F$

   L'équivalence est démontrée

Exercice 5 :

$\mathbb{R}^3$ est muni des opérations usuelles de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel .Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. On fournira, dans chaque cas, sa partie génératrice

1. $F_1 = \{(x+y, 2y, x-y)$ *où* $x \in \mathbb{R}$ *et* $y \in \mathbb{R}\}$

   Si $u \in F_1$, nous avons $u = (x+y, 2y, x-y) = x\,(1,0,1) + y\,(1,2,-1)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Nous avons donc : $F_1 = \text{Vect}\left(\{(1,0,1)\,;(1,2,-1)\}\right)$
   F_1 est un plan vectoriel
2. $F_3 = \{(x-y, 2y, x+y)$ *où* $x \in \mathbb{R}$ *et* $y \in \mathbb{R}\}$

   De la même manière : $F_3 = \text{Vect}\left(\{(1,0,1)\,;(-1,2,1)\}\right)$
   F_3 est un plan vectoriel
3. $F_4 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ où } x-y+z=0\right\}$

   Alors, cette fois ci, c'est plus difficile *(quoique !!)*
   De $x-y+z=0$, on tire que $y = x+z$ et donc, si $u \in F_4$, nous avons
   $$u = (x, x+z, z) = x\,(1,1,0) + z\,(0,1,1)$$
   Avec $x \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}$.
   Donc, $F_4 = \text{Vect}\left(\{(1,1,0)\,;(0,1,1)\}\right)$
   F_4 est un plan vectoriel
4. $F_5 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ où } x-y+z=0 \text{ et } 2x+5y+z=0\right\}$

   Bon, ce n'est pas plus difficile !!
   Nous devons jouer avec $x-y+z=0$ et $2x+5y+z=0$. C'est donc, en fait un système où la variable $z \in \mathbb{R}$ jouera le rôle de paramètre.
   $$\left\{\begin{array}{rl} x-y+z= & 0 \\ 2x+5y+z= & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} x-y= & -z \\ 2x+5y= & -z \end{array}\right. \iff x = \frac{-6}{7}z \text{ et } y = \frac{1}{7}z \text{ avec } z \in \mathbb{R}$$
   Ainsi, si $u = (x,y,z) \in F_5$, nous avons $u = \left(\frac{-6}{7}z, \frac{1}{7}z, z\right) = z\left(\frac{-6}{7}, \frac{1}{7}, 1\right)$ avec $z \in \mathbb{R}$
   D'où nous tirons $F_5 = \text{Vect}\left(\left\{\left(\frac{-6}{7}, \frac{1}{7}, 1\right)\right\}\right)$
   F_5 est une droite vectorielle
   Remarquez que nous avons aussi $F_5 = \text{Vect}\left(\{(-6,1,7)\}\right)$

Exercice 6 :

$\mathbb{R}^3$ est muni des opérations usuelles de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel .
Soient $u = (1,1,3)$, $v = (1,0,1)$ et $w = (2,1,0)$
Il faut montrer que l'ensemble $\{u,v,w\}$ est générateur de $\mathbb{R}^3$.

Autrement dit, il faut montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}\left(\{u,v,w\}\right)$
Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$; il faut donc trouver $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que
$$(x,y,z) = \alpha u + \beta v + \gamma w \iff (x,y,z) = \alpha\,(1,1,3) + \beta\,(1,0,1) + \gamma\,(2,1,0)$$

C'est à dire que $(x,y,z) = (\alpha+\beta+2\gamma, \alpha+\gamma, 3\alpha+\beta)$. Nous obtenons alors le système :

$$\begin{cases} \alpha+\beta+2\gamma = & x \\ \alpha+\gamma = & y \\ 3\alpha+\beta = & z \end{cases}$$
$$\iff$$
$$\begin{cases} \alpha+\beta+2\gamma = & x \\ \gamma = & y-\alpha \\ \beta = & z-3\alpha \end{cases}$$
$$\iff$$
$$\begin{cases} \alpha+z-3\alpha+2y-2\alpha = & x \\ \gamma = & y-\alpha \\ \beta = & z-3\alpha \end{cases}$$
$$\iff$$
$$\begin{cases} -4\alpha = & x-2y-z \\ \gamma = & y-\alpha \\ \beta = & z-3\alpha \end{cases}$$
$$\iff$$
$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{-x}{4}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{4} \\ \gamma = \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}-\dfrac{z}{4} \\ \beta = \dfrac{3x}{4}-\dfrac{3y}{2}+\dfrac{z}{4} \end{cases}$$

Ainsi, pour tout triplet $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $(x,y,z) = \alpha u + \beta v + \gamma w$
Nous venons de démontrer que l'ensemble $\{u,v,w\}$ est générateur de $\mathbb{R}^3$

Exercice 7 :

Dans $\mathbb{R}^3$ muni des opérations usuelles de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel , on considère les ensembles suivants :

1. $F = \{(x,0,0)$ *avec* $x \in \mathbb{R}\}$
2. $G = \{(y,y,0)$ *avec* $y \in \mathbb{R}\}$

Il faut montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $F+G$

F et G sont des sous-espaces vectoriels *(démonstration facile)* et nous avons $F = \text{Vect}(\{(1,0,0)\})$, comme nous avons $G = \text{Vect}(\{(1,1,0)\})$
Et donc $F+G = \text{Vect}(\{(1,0,0),(1,1,0)\})$

Exercice 8 :

Dans $\mathbb{R}^3$ muni des opérations usuelles de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel , on considère les ensembles suivants :

1. $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ avec } x+y+z=0\right\}$
2. $G = \{(y,y,y)$ *avec* $y \in \mathbb{R}\}$

Il faut montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

Nous allons procéder très classiquement : nous allons démontrer que $F \cap G = \{(0,0,0)\}$, et que tout triplet $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ peut s'écrire comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

- **Tout d'abord, comment sont les éléments de F ?**
  Si $(x,y,z) \in F$, alors $z = -x-y$ et nous pouvons écrire : $F = \left\{(x,y,-x-y) \in \mathbb{R}^3 \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\right\}$ et nous pouvons donc écrire que :
  $$F = \{x(1,0,-1) + y(0,1,-1) \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(\{(1,0,-1);(0,1,-1)\})$$
- **De la même manière,** nous avons $G = \text{Vect}(\{(1,1,1)\})$

- **Recherchons $F \cap G$**
  Si $u \in F \cap G$, alors $u = (x, y, -x-y) = (x, x, x)$, et nous avons alors $x = y$, $x = -x-y$. Or
  $$x = -x-y \Longleftrightarrow y = -2y \Longleftrightarrow y = x = 0$$
  et donc $u = (0,0,0)$
  D'où $F \cap G = \{(0,0,0)\}$
- **Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, quelconque**
  Il nous faut montrer que (x,y,z) peut être décomposé en une somme d'un élément de F et d'un élément de G
  Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et recherchons $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que :
  $$(x,y,z) = \alpha\,(1,0,-1) + \beta\,(0,1,-1) + \gamma\,(1,1,1) = (\alpha+\gamma, \beta+\gamma, -\alpha-\beta+\gamma)$$
  Nous obtenons donc le système d'équations :
  $$\left\{\begin{array}{rl} \alpha+\gamma = & x \\ \beta+\gamma = & y \\ -\alpha-\beta+\gamma = & z \end{array}\right.$$
  $$\Longleftrightarrow$$
  $$\left\{\begin{array}{rl} -\alpha-\beta+\gamma = & z \\ \alpha+\gamma = & x \\ \beta+\gamma = & y \end{array}\right.$$
  $$\Longleftrightarrow$$
  $$\left\{\begin{array}{rl} -\alpha-\beta+\gamma = & z \\ -\beta+2\gamma = & x+z \\ \beta+\gamma = & y \end{array}\right.$$
  $$\Longleftrightarrow$$
  $$\left\{\begin{array}{rl} -\alpha-\beta+\gamma = & z \\ -\beta+2\gamma = & x+z \\ 3\gamma = & x+y+z \end{array}\right.$$
  D'où nous tirons $\gamma = \dfrac{1}{3}(x+y+z)$, $\beta = \dfrac{1}{3}(-x+2y-z)$ et $\alpha = \dfrac{1}{3}(2x-y-z)$. D'où, nous avons bien :
  $$(x,y,z) = \underbrace{\frac{1}{3}(2x-y-z)(1,0,-1) + \frac{1}{3}(-x+2y-z)(0,1,-1)}_{\in F} + \underbrace{\frac{1}{3}(x+y+z)(1,1,1)}_{\in G}$$

Ainsi, F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$

Exercice 9 :

Dans $\mathbb{R}^3$ muni des opérations usuelles de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel , on considère les sous-espaces vectoriels suivants :

1. $F = \text{Vect}\left(\{(2,1,0);(0,1,2)\}\right)$
2. $G = \text{Vect}\left(\{(0,1,0);(1,0,2)\}\right)$

F et G sont-ils des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$?

Ces 2 sous-espaces vectoriels ne sont pas supplémentaires puisque $F \cap G \neq (0,0,0)$.
En effet, soit $u \in F \cap G$. Alors :
$$u = \alpha\,(2,1,0) + \beta\,(0,1,2) = x\,(0,1,0) + y\,(1,0,2) \Longleftrightarrow (2\alpha, \alpha+\beta, 2\beta) = (y, x, 2y)$$
Nous arrivons donc au système :
$$\left\{\begin{array}{rl} 2\alpha = & y \\ \alpha+\beta = & x \\ 2\beta = & 2y \end{array}\right. \Longleftrightarrow \alpha = \frac{y}{2} \qquad \beta = y \qquad x = \frac{3y}{2}$$
Ainsi, $u = (2y, 3y, 4y)$ avec $y \in \mathbb{R}$ et donc $F \cap G = \{y\,(2,3,4) \text{ avec } y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\left(\{(2,3,4)\}\right)$.
Ainsi $F \cap G \neq (0,0,0)$ et F et G ne sont pas 2 sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Exercice 10 :

Soit $\mathbb{C}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à 3.
Soient E_1, E_2 et E_3 les sous-ensembles de $\mathbb{C}_3[X]$ formés des polynômes multiples respectivement de $(X-1)$, (X^2+1) et (X^3+1) .

1. *Montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}_3[X]$*

   Nous allons aller un peu plus loin que la question posée et généraliser le propos.
   Nous allons démontrer que dans tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel de polynômes $\mathbb{C}_n[X]$ de degré inférieur ou égal à n tous les ensembles de multiples d'un polynôme $Q \in \mathbb{C}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_n[X]$
   Soit donc $I = \{P \in \mathbb{C}_n[X] \text{ tel que } P = RQ \text{ où } \deg R + \deg Q \leqslant n\}$
   $\longrightarrow$ Tout d'abord, $I \neq \emptyset$ puisque le polynôme nul est un multiple évident de Q.
   Il n' y a d'ailleurs pas que le polynôme nul qui soit dans I, il y a aussi, bien entendu Q lui même
   $\longrightarrow$ Soient $P_1 \in I$ et $P_2 \in I$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mu \in \mathbb{C}$
   - ⋆ Il existe $R_1 \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $P_1 = R_1Q$ et $\deg R_1 \leqslant n - \deg Q$; de même, il existe $R_2 \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $P_2 = R_2Q$ et $\deg R_2 \leqslant n - \deg Q$
   - ⋆ $\lambda P_1 + \mu P_2 = (\lambda R_1 + \mu R_2)Q$, et $\lambda P_1 + \mu P_2$ apparaît donc comme un multiple du polynôme Q
   - ⋆ De plus, $\deg(\lambda R_1 + \mu R_2) \leqslant \max(\deg R_1, \deg R_2) \leqslant n - \deg Q$

   Ainsi $\lambda P_1 + \mu P_2 \in I$
   Et donc I est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_n[X]$
   Les cas de E_1, E_2 et E_3 sont donc des cas particuliers de ces ensembles de multiples dans $\mathbb{C}_3[X]$ qui sont donc des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}_3[X]$

2. *Avons nous :*

   (a) $\mathbb{C}_3[X] = E_1 \bigoplus E_2$

   Pour commencer, comme $E_1 \subset \mathbb{C}_3[X]$, nous avons

   $$E_1 = \left\{P \in \mathbb{C}_3[X] \text{ tel que } P(X) = \left(aX^2 + bX + C\right)(X-1) \text{ où } a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{C}\right\}$$

   Et, de la même manière, $E_2 = \left\{P \in \mathbb{C}_3[X] \text{ tel que } P(X) = (aX+b)\left(X^2+1\right) \text{ où } a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}\right\}$
   Le polynôme $P(X) = (X-1)\left(X^2+1\right)$ est à la fois un multiple de $(X-1)$ et de $\left(X^2+1\right)$ et donc $P \in E_1 \cap E_2$
   L'intersection $E_1 \cap E_2$ n'est pas vide. Donc, E_1 et E_2 ne sont pas en somme directe

   (b) $\mathbb{C}_3[X] = E_1 \bigoplus E_3$

   $\longrightarrow$ **Nous allons tout d'abord étudier l'intersection $E_1 \cap E_3$**
   Soit donc $P \in E_1 \cap E_3$, alors, nous avons $P(X) = \left(\alpha X^2 + \beta X + \gamma\right)(X-1)$ puisque $P \in E_1$. Mais, comme $P \in E_3$, nous avons aussi $P(X) = \lambda\left(X^3+1\right)$. En effectuant, nous avons donc :

   $$P(X)\, \alpha X^3 + (\beta - \alpha)X^2 + (\gamma - \beta)X - \gamma = \lambda X^3 + \lambda$$

   En identifiant, nous obtenons :

   $$\alpha = \lambda \quad -\alpha + \beta = 0 \quad -\beta + \gamma = 0 \quad \gamma = -\lambda$$

   D'où nous tirons $\alpha = \beta = \gamma = \lambda = 0$.
   Ainsi, $E_1 \cap E_3$ contient le seul polynôme nul.
   $\longrightarrow$ **Il faut, maintenant, démontrer que tout polynôme de $\mathbb{C}_3[X]$ se décompose en un polynôme de E_1 et un polynôme de E_3**
   Soit donc $aX^3 + bX^2 + cX + d$ un polynôme de $\mathbb{C}_3[X]$; il faut donc trouver $\alpha \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{C}$, $\gamma \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que :

   $$aX^3 + bX^2 + cX + d = \left(\alpha X^2 + \beta X + \gamma\right)(X-1) + \lambda\left(X^3+1\right)$$

En développant et en identifiant, nous obtenons le système :

$$\left\{\begin{array}{rl} \alpha+\lambda= & a \\ \beta-\alpha= & b \\ -\beta+\gamma= & c \\ -\gamma+\lambda= & d \end{array}\right.$$

D'où nous tirons, par élimination et substitution :

$$\lambda=\frac{a+b+c+d}{2} \quad \gamma=\frac{a+b+c-d}{2} \quad \beta=\frac{a+b-c-d}{2} \quad \alpha=\frac{a-b-c-d}{2}$$

Ainsi, pour tout polynôme $aX^3+bX^2+cX+d \in \mathbb{C}_3\left[X\right]$:

$$aX^3+bX^2+cX+d=\underbrace{\left(\left(\frac{a-b-c-d}{2}\right)X^2+\left(\frac{a+b-c-d}{2}\right)X+\left(\frac{a+b+c-d}{2}\right)\right)(X-1)}_{\in E_1}+\underbrace{\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)\left(X^3+1\right)}_{\in E_3}$$

Nous avons donc $\mathbb{C}_3\left[X\right]=E_1 \bigoplus E_3$

(c) $\mathbb{C}_3\left[X\right]=E_2 \bigoplus E_3$

La technique de démonstration sera semblable à celle de la question précédente.

$\longrightarrow$ **Nous allons tout d'abord étudier l'intersection $E_2 \cap E_3$**

Soit donc $P \in E_2 \cap E_3$, alors, nous avons $P\left(X\right)=\left(\alpha X+\beta\right)\left(X^2+1\right)$ puisque $P \in E_2$. Mais, comme $P \in E_3$, nous avons aussi $P\left(X\right)=\lambda\left(X^3+1\right)$. En effectuant, nous avons donc :

$$P\left(X\right)=\alpha X^3+\beta X^2+\alpha X+\beta=\lambda X^3+\lambda$$

En identifiant, nous obtenons :

$$\alpha=\lambda \quad \beta=0 \quad \alpha=0 \quad \beta=\lambda$$

D'où nous tirons $\alpha=\beta=\lambda=0$.
Ainsi, $E_1 \cap E_3$ contient le seul polynôme nul.

Il faut, maintenant, démontrer que tout polynôme de $\mathbb{C}_3\left[X\right]$ se décompose en un polynôme de E_2 et un polynôme de E_3

Soit donc aX^3+bX^2+cX+d un polynôme de $\mathbb{C}_3\left[X\right]$; il faut donc trouver $\alpha \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que :

$$aX^3+bX^2+cX+d=\left(\alpha X+\beta\right)\left(X^2+1\right)+\lambda\left(X^3+1\right)$$

En développant et en identifiant, nous obtenons le système :

$$\left\{\begin{array}{rl} \alpha+\lambda= & a \\ \beta= & b \\ \alpha= & c \\ \beta+\lambda= & d \end{array}\right.$$

D'où nous tirons, par élimination et substitution :

$$\beta=b \quad \alpha=c \quad \lambda=d-b \text{ et } \lambda=a-c$$

Ce qui est impossible

E_2 etE_3 ne sont donc pas en somme directe

Exercice 11 :

On considère $\mathcal{C}([-1;+1],\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues de l'intervalle $[-1;+1]$ dans $\mathbb{C}$.
Soient

- ▷ $F=\{f\in\mathcal{C}([-1;+1],\mathbb{C})$ *telle que* f *est constante*$\}$
- ▷ $G=\left\{f\in\mathcal{C}([-1;+1],\mathbb{C})\text{ telle que }\displaystyle\int_{-1}^{+1}f(t)\,\mathrm{d}t=0\right\}$

Il faut montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{C}([-1;+1],\mathbb{C})$

Ce n'est pas un exercice très compliqué !!

⟶ **Nous montrons que $\mathcal{C}([-1;+1],\mathbb{C})=F+G$**

Soit $f\in\mathcal{C}([-1;+1],\mathbb{C})$, alors, nous pouvons écrire :

$$f=\left(f-\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}f(t)\,\mathrm{d}t\right)+\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}f(t)\,\mathrm{d}t$$

⋆ En posant, pour tout $x\in[-1;+1]$ $\Psi(x)=f(x)-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{+1}f(t)\,\mathrm{d}t$, nous avons :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1}\Psi(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{+1}\left(f(x)-\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{+1}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{-1}^{+1}\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_{-1}^{+1}f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{+1}f(t)\,\mathrm{d}t\right)\int_{-1}^{+1}\mathrm{d}x\\ &= \int_{-1}^{+1}f(x)\,\mathrm{d}x-2\times\frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{+1}f(t)\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \int_{-1}^{+1}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{-1}^{+1}f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= 0\end{aligned}$$

Nous avons donc $\displaystyle\int_{-1}^{+1}\Psi(x)\,\mathrm{d}x=0$ et donc $\Psi\in G$

⋆ Posons, maintenant, pour tout $x\in[-1;+1]$ $\Phi(x)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{+1}f(t)\,\mathrm{d}t$. Φ est bien une fonction constante et donc $\Phi\in F$

En résumé, toute fonction $f\in\mathcal{C}([-1;+1],\mathbb{C})$ s'écrit $f=\Phi+\Psi$ où $\Phi\in F$ et $\Psi\in G$ et donc, nous avons, effectivement :

$$\mathcal{C}([-1;+1],\mathbb{C})=F+G$$

⟶ **Nous montrons, maintenant, que $F\cap G=\{\mathcal{O}\}$ où $\mathcal{O}$ est la fonction nulle**

Soit donc $f\in F\cap G$.

Alors, $\displaystyle\int_{-1}^{+1}f(x)\,\mathrm{d}x=0$ et, pour tout $x\in[-1;+1]$, $f(x)=k$ où $k\in\mathbb{C}$. Or :

$$\int_{-1}^{+1}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{+1}k\,\mathrm{d}x=2k=0$$

Et donc, $k=0$.
Ainsi, pour tout $x\in[-1;+1]$, $f(x)=0$ et f est donc la fonction nulle.
Donc, $F\cap G=\{\mathcal{O}\}$

Et donc $\mathcal{C}([-1;+1],\mathbb{C})=F\oplus G$

Pour aller plus loin

Nous faisons référence au point 3.8.1 qui définit les formes linéaires et au point 3.8.7 qui définit ce qu'est un hyperplan.

L'application $\Phi:\mathcal{C}([-1;+1],\mathbb{C})\longrightarrow\mathbb{C}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\Phi:\mathcal{C}([-1;+1],\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ f & \longmapsto & \Phi(f)=\displaystyle\int_{-1}^{+1}f(t)\,\mathrm{d}t\end{array}\right.$$

est une forme linéaire dont le noyau $\ker \Phi$ est G lequel est un hyperplan de $\mathcal{C}\left([-1;+1],\mathbb{C}\right)$

Exercice 12 :

Soit $P_0 \in \mathbb{R}[X]$ non nul et F l'ensemble des multiples de P_0 dans $\mathbb{R}[X]$, c'est à dire :

$$F = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } P = P_0 \times Q \text{ où } Q \in \mathbb{R}[X]\}$$

Déterminer un supplémentaire de F.

Soit P un polynôme quelconque de $\mathbb{R}[X]$.
Effectuons la division euclidienne de P par P_0. Nous avons donc :

$$P = P_0 \times Q + R \text{ où } \deg R < \deg P_0$$

Ainsi, si $\mathcal{R}_{P_0} = \{R \in \mathbb{R}[X] \text{ tels que } \deg R < \deg P_0\}$, alors, tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ s'écrit comme la somme d'un polynôme de F et d'un polynôme de $\mathcal{R}_{P_0}$.
Nous avons donc $\mathbb{R}[X] = F + \mathcal{R}_{P_0}$
Soit $\Delta \in F \cap \mathcal{R}_{P_0}$.
Alors, comme $\Delta \in F$, alors, Δ est un multiple de P_0 et donc $\deg \Delta \geqslant \deg P_0$, et comme $\Delta \in \mathcal{R}_{P_0}$, alors $\deg \Delta < \deg P_0$, ce qui est impossible, sauf si Δ est le polynôme nul.
Et donc $\mathbb{R}[X] = F \oplus \mathcal{R}_{P_0}$

Exercice 15 :

$\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont munis des opérations usuelles de la structure naturelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel . Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{ccl} f:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & f[(x,y)] = (x-y, x+2y, -y) \end{array}\right.$$

Déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$. f est-elle injective ? surjective ?

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que f est une application linéaire .

$\longrightarrow$ **Recherche de $\ker f$**

Il faut donc trouver $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f[(x,y)] = (x-y, x+2y, -y) = (0,0,0)$. C'est à dire que nous devons avoir :

$$x - y = 0 \qquad x + 2y = 0 \qquad y = 0$$

Et nous concluons que $x = y = 0$
D'où $\ker f = \{(0,0)\}$, et nous concluons donc que f est injective

$\longrightarrow$ **Recherche de $\operatorname{Im} f$**

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, nous avons :

$$f[(x,y)] = (x-y, x+2y, -y) = x(1,1,0) + y(-1,2,-1)$$

De telle sorte que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left(\{(1,1,0);(-1,2,-1)\}\right)$
f ne peut pas être surjective puisque, par exemple, le triplet $(0,1,0) \in \mathbb{R}^3$ n'a pas d'antécédent par f. En effet, s'il existait $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f[(x,y)] = (0,1,0)$, nous devrions avoir le système :

$$\left\{\begin{array}{rl} x - y = & 0 \\ x + 2y = & 1 \\ y = & 0 \end{array}\right.$$

Système qui est impossible.
Si nous nous intéressons aux dimensions, nous avons $\dim \operatorname{Im} f = 2$ et donc, comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, $\operatorname{Im} f$ est strictement inclus dans $\mathbb{R}^3$.
Nous pouvons vérifier, ici, l'égalité $\dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f = \dim \mathbb{R}^2 = 2$

Exercice 16 :

$\mathbb{C}$ est considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ; soit $a \in \mathbb{C}^*$. Montrer que l'application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f(z) = z + a\overline{z} \end{array} \right.$$

Montrer que f est $\mathbb{R}$-linéaire et déterminer son noyau et son image

$\Rightarrow$ Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}$; alors :

$$\begin{array}{rl} f(\lambda z_1 + \mu z_2) = & (\lambda z_1 + \mu z_2) + a\overline{(\lambda z_1 + \mu z_2)} \\ = & \lambda z_1 + \mu z_2 + a\lambda\overline{z_1} + a\mu\overline{z_2} \\ = & \lambda z_1 + a\lambda\overline{z_1} + \mu z_2 + a\mu\overline{z_2} \\ = & \lambda(z_1 + a\overline{z_1}) + \mu(z_2 + a\overline{z_2}) \\ = & \lambda f(z_1) + \mu f(z_2) \end{array}$$

f est donc une application linéaire .

$\Rightarrow$ Recherchons $\ker f$, le noyau de f

Nous avons $z \in \ker f \iff f(z) = 0$.

Soit donc $z \in \ker f$; alors $z + a\overline{z} = 0$

$\star$ Nous posons $z = x + iy$ et $a = \alpha + i\beta$ avec $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{array}{rl} z + a\overline{z} = 0 \iff & (x+iy) + (\alpha + i\beta)(x - iy) = 0 \\ \iff & (x+iy) + (\alpha x - i\alpha y + i\beta x + \beta y) = 0 \\ \iff & (x + \alpha x + \beta y) + i(y - \alpha y + \beta x) = 0 \end{array}$$

Donc :

$$z + a\overline{z} = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rl} (1+\alpha)x + \beta y = & 0 \\ \beta x + (1-\alpha)y = & 0 \end{array} \right.$$

$\star$ Calculons le déterminant δ du système :

$$\delta = \begin{vmatrix} (1+\alpha) & \beta \\ \beta & (1-\alpha) \end{vmatrix} = 1 - \alpha^2 - \beta^2$$

$\Rightarrow$ Ainsi, si $\alpha^2 + \beta^2 = |a|^2 \neq 1$, alors $\delta \neq 0$ et le seul couple solution du système est $(0,0)$, c'est à dire $\ker f = \{0\}$ et $\mathrm{Im} f = \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ Supposons, maintenant, que $\delta = 0$, c'est à dire $\alpha^2 + \beta^2 = |a|^2 = 1$.

$\star$ Nous posons alors $a = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$, c'est à dire que $\theta = \arg(z)$; alors :

$$z + a\overline{z} = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rl} (1+\cos\theta)x + \sin\theta y = & 0 \\ \sin\theta x + (1-\cos\theta)y = & 0 \end{array} \right.$$

En utilisant les formules trigonométriques classiques :

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\tfrac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 \text{ et } \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

Nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{rl} (1+\cos\theta)x + \sin\theta y = & 0 \\ \sin\theta x + (1-\cos\theta)y = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff$$

$$\left\{ \begin{array}{rl} 2\cos^2\dfrac{\theta}{2}x + 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}y = & 0 \\ 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}x + 2\sin^2\dfrac{\theta}{2}y = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff$$

$$\left\{ \begin{array}{rl} 2\cos\dfrac{\theta}{2}\left(\cos\dfrac{\theta}{2}x + \sin\dfrac{\theta}{2}y\right) = & 0 \\ 2\sin\dfrac{\theta}{2}\left(\cos\dfrac{\theta}{2}x + \sin\dfrac{\theta}{2}y\right) = & 0 \end{array} \right.$$

⋆ Si $\theta \equiv \pi\,[2\pi]$ alors $a = -1$, et le système devient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\cos\frac{\pi}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}x + \sin\frac{\pi}{2}y\right) & = & 0 \\ 2\sin\frac{\pi}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}x + \sin\frac{\pi}{2}y\right) & = & 0 \end{array}\right. \iff y = 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}$$

Ainsi, $z = x$ et donc $z \in \mathbb{R}$; nous avons donc $\ker f = \mathbb{R}$.
Avec $a = -1$, nous avons $f(z) = z - \overline{z}$ et $f(z)$ est imaginaire pur. Donc, $\operatorname{Im} f$ est l'ensemble des imaginaires purs[4].

⋆ Si $\theta \equiv 0\,[2\pi]$ alors $a = 1$, et, par un calcul semblable, on démontre que le système admet pour solution $x = 0$ et $y \in \mathbb{R}$.
Donc, $\ker f$ est l'ensemble des imaginaires purs et, comme $f(z) = z + \overline{z}$, $f(z) \in \mathbb{R}$ et $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$

⋆ Supposons, maintenant, que $\theta \neq 0\,[2\pi]$ et $\theta \neq \pi\,[2\pi]$
Alors le système se réduit à une seule équation $\cos\frac{\theta}{2}x + \sin\frac{\theta}{2}y = 0$.
Nous avons alors $x = -\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}y$ et $z = -\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}y + iy = y\left(-\tan\frac{\theta}{2} + i\right)$
Donc, $\ker f = \left\{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } z = y\left(-\tan\frac{\theta}{2} + i\right) \text{ avec } y \in \mathbb{R}\right\}$
Recherchons, maintenant $\operatorname{Im} f$.
Cette fois-ci, nous avons $f(z) = z + e^{i\theta}\overline{z}$. En écrivant $z = x + iy$, nous avons :

$$\begin{array}{rcl} f(z) = z + e^{i\theta}\overline{z} = & & (x+iy) + e^{i\theta}(x - iy) \\ & = & x\left(1 + e^{i\theta}\right) + iy\left(1 - e^{i\theta}\right) \\ & = & \left(1 + e^{i\theta}\right)\left[x + iy\left(\frac{\left(1 - e^{i\theta}\right)}{\left(1 + e^{i\theta}\right)}\right)\right] \end{array}$$

Regardons, de manière plus proche $\frac{\left(1 - e^{i\theta}\right)}{\left(1 + e^{i\theta}\right)}$

$$\begin{array}{rcl} \frac{\left(1 - e^{i\theta}\right)}{\left(1 + e^{i\theta}\right)} & = & \frac{\left(1 - e^{i\theta}\right)\left(1 + e^{-i\theta}\right)}{\left(1 + e^{i\theta}\right)\left(1 + e^{-i\theta}\right)} \\ & = & \frac{1 + e^{-i\theta} - e^{i\theta} - 1}{\left|1 + e^{i\theta}\right|^2} \\ & = & \frac{-2i\sin\theta}{\left|1 + e^{i\theta}\right|^2} \end{array}$$

D'où $\left[x + iy\left(\frac{\left(1 - e^{i\theta}\right)}{\left(1 + e^{i\theta}\right)}\right)\right] = x + iy \times \left(\frac{-2i\sin\theta}{\left|1 + e^{i\theta}\right|^2}\right) = x + \frac{2y\sin\theta}{\left|1 + e^{i\theta}\right|^2}$.
Or, $x + \frac{2y\sin\theta}{\left|1 + e^{i\theta}\right|^2} \in \mathbb{R}$, et donc $f(z) = \left(1 + e^{i\theta}\right)\left(x + \frac{2y\sin\theta}{\left|1 + e^{i\theta}\right|^2}\right)$
Ainsi, $\operatorname{Im} f = \left\{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } z = \lambda\left(1 + e^{i\theta}\right) \text{ tel que } \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

Exercice 17 :

Nous considérons 3 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E, F, G et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, une application linéaire surjective et $g : F \longrightarrow G$, une application quelconque.
On suppose que $f \circ g : E \longrightarrow G$ est une application linéaire . Il faut montrer que g est linéaire

Soient $y_1 \in F$, $y_2 \in F$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$.
Il nous faut donc montrer que $g(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda g(y_1) + \mu g(y_2)$
f étant surjective, il existe $x_1 \in E$ tel que $y_1 = f(x_1)$ et $x_2 \in E$ tel que $y_2 = f(x_2)$. Alors, $\lambda g(y_1) + \mu g(y_2)$ devient :

$$\lambda g(y_1) + \mu g(y_2) = \lambda g \circ f(x_1) + \mu g \circ f(x_2)$$

4. Les imaginaires purs peuvent être notés $i\mathbb{R}$

De la linéarité de $g \circ f$, nous tirons :

$$\begin{array}{rcl} \lambda g(y_1) + \mu g(y_2) & = & \lambda g \circ f(x_1) + \mu g \circ f(x_2) \\ & = & g \circ f(\lambda x_1 + \mu x_2) \\ & = & g[f(\lambda x_1 + \mu x_2)] \\ & = & g[\lambda f(x_1) + \mu f(x_2)] \text{ par linéarité de } f \\ & = & g(\lambda y_1 + \mu y_2) \end{array}$$

g est bien linéaire

Exercice 19 :

Soient E et F 2 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On construit $\Phi : E \times F \longrightarrow E \times F$ par :

$$\begin{cases} \Phi : E \times F & \longrightarrow & E \times F \\ (x, y) & \longmapsto & \Phi[(x, y)] = (x, y - f(x)) \end{cases}$$

Il faut montrer que Φ est linéaire et bijective, donc $\Phi \in \mathrm{GL}(E \times F)$

$\Rightarrow$ **Montrons que Φ est linéaire**

$\star$ Soient $(x, y) \in E \times F$ et $(x_1, y_1) \in E \times F$; alors :

$$\begin{array}{rcl} \Phi[(x, y) + (x_1, y_1)] & = & \Phi[(x + x_1, y + y_1) + (x_1, y_1)] \\ & = & (x + x_1, y + y_1 - f(x + x_1)) \\ & = & (x + x_1, y + y_1 - f(x) - f(x_1)) \text{ par linéarité de } f \\ & = & (x, y - f(x)) + (x_1, y_1 - f(x_1)) \\ & = & \Phi[(x, y)] + \Phi[(x_1, y_1)] \end{array}$$

Nous avons donc $\Phi[(x, y) + (x_1, y_1)] = \Phi[(x, y)] + \Phi[(x_1, y_1)]$

$\star$ Soient $(x, y) \in E \times F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$; alors :

$$\begin{array}{rcl} \Phi[\lambda(x, y)] & = & \Phi[(\lambda x, \lambda y)] \\ & = & (\lambda x, \lambda y - f(\lambda x)) \\ & = & (\lambda x, \lambda y - \lambda f(x)) \text{ par linéarité de } f \\ & = & \lambda(x, y - f(x)) \\ & = & \lambda \Phi[(x, y)] \end{array}$$

Nous avons donc $\Phi[\lambda(x, y)] = \lambda \Phi[(x, y)]$

$\Rightarrow$ **Montrons que Φ est bijective**

Point difficile.

Considérons Ψ défini par :

$$\begin{cases} \Psi : E \times F & \longrightarrow & E \times F \\ (x, y) & \longmapsto & \Phi[(x, y)] = (x, y + f(x)) \end{cases}$$

On montre, facilement, que $\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}_{E \times F}$, et donc que $\Psi = \Phi^{-1}$

Φ est donc bijective et $\Phi \in \mathrm{GL}(E \times F)$

Exercice 21 :

Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, muni des opérations usuelles de sa structure naturelle de $\mathbb{C}$-espace vectoriel , On considère les fonctions $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = \sin x$ et $f_3(x) = \cos 2x$. La famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ forme-t-elle une famille libre ou liée ?

Cet exercice est corrigé pour donner une méthode générale dans les espaces de fonctions.

Soient $a_1 \in \mathbb{C}$, $a_2 \in \mathbb{C}$ et $a_3 \in \mathbb{C}$ tels que $a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 = \mathcal{O}$, ce qui veut dire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + a_3 f_3(x) = \mathcal{O}(x) = 0 \Longleftrightarrow a_1 \cos x + a_2 \sin x + a_3 \cos 2x = \mathcal{O}(x) = 0$$

Cette égalité est vraie pour $x = 0$, et nous avons donc : $a_1 + a_3 = 0$

Pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, $a_2 - a_3 = 0$
Pour $x = \pi$, $-a_1 + a_3 = 0$
Nous obtenons donc le système :

$$\left\{ \begin{array}{rl} a_1 + a_3 = & 0 \\ a_2 - a_3 = & 0 \\ -a_1 + a_3 = & 0 \end{array} \right. \iff a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

La famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ est donc une famille libre.

Exercice 22 :

1. *Prouver que la famille de polynômes* $\left\{X^k (1 - X^n) ; k \in \mathbb{N}\right\}$ *est une famille libre de* $\mathbb{R}[X]$.

   Appellons $E_k^n(X) = X^k (1 - X^n) = -X^{n+k} + X^k$.
   L'objet de cette question est de montrer que la famille $\{E_k^n ; k \in \mathbb{N}\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.
   Dans l'exemple 10 page 87, nous démontrons qu'une famille de polynômes de degrés différents forme une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.
   Ainsi, pour n fixé, $\deg E_k^n = n + k$ et donc, si $k \neq k'$, alors $\deg E_k^n \neq \deg E_{k'}^n$, et la famille $\{E_k^n ; k \in \mathbb{N}\}$ forme donc une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.

2. *Soit* $\alpha \in \mathbb{K}$ *et* $\beta \in \mathbb{K}$ *tels que* $\alpha \neq \beta$ *et* $n \in \mathbb{N}$
   Montrer que la famille de polynômes $\left\{(X - \alpha)^k (X - \beta)^{n-k} ; 0 \leqslant k \leqslant n\right\}$ *est une famille libre de* $\mathbb{K}_n[X]$.

   Cette démonstration est toujours un peu délicate.
   Appelons, pour $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, $F_k(X) = (X - \alpha)^k (X - \beta)^{n-k}$; nous devons donc montrer que la famille $\{F_k ; 0 \leqslant k \leqslant n\}$ est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$.
   Soient donc $\lambda_0 \in \mathbb{K}, \lambda_1 \in \mathbb{K}, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, $n + 1$ scalaires tels que $\lambda_0 F_0 + \lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_n F_n = \mathcal{O}$, alors :

   $$\lambda_0 F_0(X) + \lambda_1 F_1(X) + \cdots + \lambda_n F_n(X) = \mathcal{O}(X) = 0$$
   $$\iff$$
   $$\lambda_0 (X - \beta)^n + \lambda_1 (X - \alpha)(X - \beta)^{n-1} + \cdots + \lambda_n (X - \alpha)^n = 0$$

   $\Rightarrow$ En posant, $Q(X) = \lambda_0 (X - \beta)^n + \lambda_1 (X - \alpha)(X - \beta)^{n-1} + \cdots + \lambda_n (X - \alpha)^n$, en remplaçant X par α, nous obtenons $Q(\alpha) = \lambda_0 (\alpha - \beta)^n = 0$, et comme $\alpha \neq \beta$, $\lambda_0 = 0$.
   Nous avons donc :

   $$Q(X) = \lambda_1 (X - \alpha)(X - \beta)^{n-1} + \cdots + \lambda_n (X - \alpha)^n$$

   $\Rightarrow$ En factorisant par $(X - \alpha)$, nous avons $Q(X) = (X - \alpha) Q_1(X)$ où

   $$Q_1(X) = \lambda_1 (X - \beta)^{n-1} + \lambda_2 (X - \alpha)(X - \beta)^{n-2} + \cdots + \lambda_n (X - \alpha)^{n-1}$$

   Comme $Q(X) = 0$ et que $(X - \alpha)$ n'est pas le polynôme nul, nous avons $Q_1(X) = 0$.
   Comme tout à l'heure $Q_1(\alpha) = \lambda_1 (\alpha - \beta)^{n-1} = 0$ et donc $\lambda_1 = 0$
   $\Rightarrow$ Arrivé au rang k, nous avons

   $$Q_k(X) = \lambda_k (X - \beta)^{n-k} + \lambda_{k+1} (X - \alpha)(X - \beta)^{n-k-1} + \cdots + \lambda_n (X - \alpha)^{n-k}$$

   Et nous avons donc $Q_k(\alpha) = \lambda_k (\alpha - \beta)^{n-k} = 0$ et donc $\lambda_k = 0$
   $\Rightarrow$ Au rang n, nous avons $Q_n(X) = \lambda_n = 0$
   Nous avons donc démontré que $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = \cdots = \lambda_n = 0$.
   La famille $\{F_k ; 0 \leqslant k \leqslant n\}$ est donc une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 26 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ une famille libre de E. On pose :

$$b_1 = a_1, b_2 = a_1 + a_2, \ldots, b_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Montrer que la famille $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ est une famille libre de E

Voilà un exercice qui n'est pas difficile du tout, mais qui est, néanmoins, intéressant.

Une autre façon de présenter la famille $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ est de la présenter sous forme de tableau. On remarquera que ce tableau est triangulaire :

$$\left\{\begin{array}{ll} b_1 = & a_1 \\ b_2 = & a_1 + a_2 \\ \vdots & \vdots \\ b_k = & a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k \\ \vdots & \vdots \\ b_n = & a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + \cdots + a_n \end{array}\right.$$

Soient donc $\lambda_1 \in \mathbb{K}, \lambda_2 \in \mathbb{K}, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_n b_n = 0$.
Alors, nous avons :

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 (a_1 + a_2) + \lambda_3 (a_1 + a_2 + a_3) + \cdots + \lambda_k (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + \cdots + \lambda_n (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = 0$$

En regroupant, nous obtenons :

$$\lambda_n a_n + (\lambda_n + \lambda_{n-1}) a_{n-1} + \cdots + (\lambda_n + \lambda_{n-1} + \cdots + \lambda_k) a_k + \cdots + (\lambda_n + \lambda_{n-1} + \cdots + \lambda_1) a_1 = 0$$

La famille $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ étant une famille libre de E, nous avons :

$$\lambda_n = (\lambda_n + \lambda_{n-1}) = \cdots = (\lambda_n + \lambda_{n-1} + \cdots + \lambda_k) = \cdots = (\lambda_n + \lambda_{n-1} + \cdots + \lambda_1) = 0$$

Nous obtenons donc un système triangulaire :

$$\begin{array}{rl} \lambda_n = & 0 \\ \lambda_n + \lambda_{n-1} = & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_n + \lambda_{n-1} + \cdots + \lambda_k = & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_n + \lambda_{n-1} + \cdots + \lambda_1 & = 0 \end{array}$$

Ce qui nous donne, facilement, $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = \ldots = \lambda_n = 0$, et donc la famille $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ est une famille libre de E

Exercice 27 :

1. *Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$, alors $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$*

   Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$ et supposons que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$.

   Alors, $\sqrt{n} = \dfrac{p}{q}$ avec pgcd $(p, q) = 1$. Nous avons alors $n = \dfrac{p^2}{q^2} \Longleftrightarrow p^2 = q^2 n$.

   Considérons la décomposition de n en un produit de facteurs alors $n = x_1^{\alpha_1} \ldots x_k^{\alpha_k}$.
   Il existe alors un exposant α_i qui est impair car, sinon, $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$, ce qui est contraire à l'hypothèse.
   C'est l'égalité $p^2 = q^2 n$ qui va nous donner la solution : si tous les exposants de p^2 et q^2 sont pairs, alors que les exposants dans la décomposition de n et donc de nq^2 ne le sont pas tous, c'est impossible ; il y a donc contradiction.
   Et donc $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$

Une autre façon de démontrer est d'utiliser le lemme de Gauss
En effet, si $\text{pgcd}\,(p,q)=1$, alors $\text{pgcd}\left(p^2,q^2\right)=1$. De l'égalité $p^2=q^2n$, on déduit que q^2 divise p^2 et comme q^2 est premier avec p^2, d'après le lemme de Gauss, q^2 divise 1, c'est à dire que $q=1$ et donc $\sqrt{n}=p$ et $\sqrt{n}\in\mathbb{N}$; il y a donc contradiction et nous concluons que $\sqrt{n}\notin\mathbb{Q}$

2. *Démontrer que, pour tout $\alpha\in\mathbb{Q}$, tout $\beta\in\mathbb{Q}$ et tout $n\in\mathbb{N}$ tel que $\sqrt{n}\notin\mathbb{Q}$, nous avons l'implication :*
$$\alpha+\beta\sqrt{n}=0\Longrightarrow\alpha=\beta=0$$

Voilà une question peu difficile ; en effet, soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $\sqrt{n}\notin\mathbb{Q}$, $\alpha\in\mathbb{Q}$ et $\beta\in\mathbb{Q}$ tels que $\alpha+\beta\sqrt{n}=0$.
   - ⋆ Si $\alpha=\beta=0$, la question est résolue.
   - ⋆ Supposons $\beta\neq 0$, alors $\sqrt{n}=\dfrac{-\alpha}{\beta}$.

     Comme $\alpha\in\mathbb{Q}$ et $\beta\in\mathbb{Q}$ alors $\dfrac{-\alpha}{\beta}\in\mathbb{Q}$, ce qui est contradictoire avec le fait que $\sqrt{n}\notin\mathbb{Q}$.

     Donc, $\beta=0$ et donc $\alpha=0$

3. *Démontrer que la famille $\left\{1,\sqrt{2},\sqrt{3}\right\}$ est une famille libre dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$*

Cette question est plus subtile ! !
Soient donc $a\in\mathbb{Q}$, $b\in\mathbb{Q}$ et $c\in\mathbb{Q}$ tels que $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}=0$
Nous avons, $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}=0\Longleftrightarrow c\sqrt{3}=-a-b\sqrt{2}$.
En élevant au carré, nous obtenons $3c^2=a^2+2b^2+2ab\sqrt{2}\Longleftrightarrow a^2+2b^2-3c^2+2ab\sqrt{2}=0$
   - ⋆ D'après la question précédente, nous avons $a^2+2b^2-3c^2+2ab\sqrt{2}=0\Longleftrightarrow a^2+2b^2-3c^2=0$ et $ab=0$
   - ⋆ Supposons $a=0$, alors $2b^2-3c^2=0$ et donc $\left(b\sqrt{2}+c\sqrt{3}\right)\left(b\sqrt{2}-c\sqrt{3}\right)=0$
     - ⇒ Donc, de $b\sqrt{2}+c\sqrt{3}=0$, toujours d'après la question précédente $b=c=0$
     - ⇒ Et, de $b\sqrt{2}-c\sqrt{3}=0$, on tire aussi $b=c=0$
   - ⋆ Supposons $b=0$, alors $a^2-3c^2=0$ et donc $\left(a+c\sqrt{3}\right)\left(a-c\sqrt{3}\right)=0$
     - ⇒ Donc, de $a+c\sqrt{3}=0$, toujours d'après la question précédente $a=c=0$
     - ⇒ Et, de $a-c\sqrt{3}=0$, on tire aussi $a=c=0$

Nous avons donc démontré que si $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}=0$ avec $a\in\mathbb{Q}$, $b\in\mathbb{Q}$ et $c\in\mathbb{Q}$, alors $a=b=c=0$

Pour aller plus loin
Ceci montre que $\mathbb{R}$, considéré comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel n'est pas de dimension finie. Nous nous sommes intéressés aux entiers $n\in\mathbb{N}$ tels que $\sqrt{n}\notin\mathbb{Q}$, mais, lorsque nous considérons π, e que devient la dimension de $\mathbb{R}$?

Exercice 28 :

1. *On considère $\mathbb{C}^3$ en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 3, muni de sa base canonique. Déterminer, suivant les valeurs de $\alpha\in\mathbb{C}$ le rang de la famille $\mathcal{F}=\{a,b,c\}$ où*
$$a=(1,1,\alpha)\qquad b=(1,\alpha,1)\qquad c=(\alpha,1,1)$$

C'est un exercice des plus classiques ! !
   - ⋆ Il est clair que si $\alpha=1$, alors $a=b=c$ et le système est de rang 1.
   - ⋆ Supposons $\alpha\neq 1$ et soient $x\in\mathbb{C}$, $y\in\mathbb{C}$ et $z\in\mathbb{C}$ tels que $xa+yb+zc=0$. Ceci se traduit par :
   $$x\,(1,1,\alpha)+y\,(1,\alpha,1)+z\,(\alpha,1,1)=(0,0,0)$$
     Nous obtenons alors le système :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+\alpha z= & 0 & (L_1)\\ x+\alpha y+z= & 0 & (L_2)\\ \alpha x+y+z= & 0 & (L_3)\end{array}\right.$$

Nous allons jouer sur les combinaisons linéaires de lignes *(Méthode de Gauss)*

- ▷ Nous commençons par écrire $(L'_1) = (L_1)$, $(L'_2) = (L_2) - (L_1)$ et $(L'_3) = (L_3) - \alpha(L_1)$. Nous avons donc le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y + \alpha z = & 0 & (L'_1) \\ (\alpha - 1)\, y + (1-\alpha)\, z = & 0 & (L'_2) \\ (1-\alpha)\, y + \left(1-\alpha^2\right) z = & 0 & (L'_3) \end{array}\right.$$

Comme $\alpha \neq 1$, nous pouvons simplifier par $1 - \alpha$, et nous obtenons le nouveau système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y + \alpha z = & 0 & (L'_1) \\ -y + z = & 0 & (L'_2) \\ y + (1+\alpha)\, z = & 0 & (L'_3) \end{array}\right.$$

- ▷ Nous faisons une seconde combinaison linéaire $(L''_1) = (L'_1)$, $(L''_2) = (L'_2)$ et $(L''_3) = (L'_3) + (L'_2)$. Nous avons donc le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y + \alpha z = & 0 & (L'_1) \\ -y + z = & 0 & (L'_2) \\ (2+\alpha)\, z = & 0 & (L'_3) \end{array}\right.$$

- ▷ Si $2 + \alpha \neq 0 \iff \alpha \neq -2$, alors, $z = 0$ et, en remontant, $x = y = z = 0$; la famille de vecteurs $\mathcal{F} = \{a, b, c\}$ est de rang 3.
- ▷ Si $\alpha = -2$, $z \in \mathbb{C}$, $y = z$ et la première ligne devient $x + z - 2z = 0 \iff x = z$. Nous avons alors :

$$z\left[(1, 1, -2) + (1, -2, 1) + (-2, 1, 1)\right] = (0, 0, 0)$$

Et la famille de vecteurs $\mathcal{F} = \{a, b, c\}$ est de rang 1

En conclusion, la famille de vecteurs $\mathcal{F} = \{a, b, c\}$ est de rang 3, sauf pour $\alpha = 1$ ou $\alpha = -2$ où elle est de rang 1.

2. *Même question, pour le même système considéré comme famille de vecteurs de l'espace vectoriel $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ sur le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$*

Première remarque, c'est que $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ n'a que 8 éléments et que α ne peut prendre que 2 valeurs, 0 ou 1.

- ⊵ Si $\alpha = 1$, nous avons, une nouvelle fois $a = b = c$ et la famille de vecteurs $\mathcal{F} = \{a, b, c\}$ est de rang 1.
- ⊵ Si $\alpha = 0$, alors :

$$a = (1, 1, 0) \qquad b = (1, 0, 1) \qquad c = (0, 1, 1)$$

La famille $\{a, b\}$ est une famille indépendante, mais nous avons $a + b = c$, et donc le système est de rang 2.

Exercice 29 :

$\mathbb{C}^{\mathbb{N}} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$

1. *Soient $a_1 \in \mathbb{C}$ et $a_2 \in \mathbb{C}$ 2 scalaires complexes. Nous appelons F le sous-ensemble $F \subset \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ défini par :*

$$F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \text{ telles que pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ nous avons } f(n) + a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) = 0\}$$

Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

- ▷ Montrons que $F \neq \emptyset$.
La fonction nulle $\mathcal{O} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ est un élément de F puisque :

$$\mathcal{O}(n) + a_1 \mathcal{O}(n-1) + a_2 \mathcal{O}(n-2) = 0 + a_1 \times 0 + a_2 \times 0 = 0$$

▷ Soient $f \in F$ et $g \in G$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$; il faut que nous montrions que $\lambda f + \mu g \in F$.
Soit donc $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{c}(\lambda f + \mu g)(n) + a_1 (\lambda f + \mu g)(n-1) + a_2 (\lambda f + \mu g)(n-1) = \\ \lambda f(n) + \mu g(n) + a_1 \lambda f(n-1) + a_1 \mu g(n-1) + a_2 \lambda f(n-2) + a_2 \mu g(n-2) \\ = \lambda f(n) + a_1 \lambda f(n-1) + a_2 \lambda f(n-2) + \mu g(n) + a_1 \mu g(n-1) + a_2 \mu g(n-2) \\ = \lambda (f(n) + a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2)) + \mu (g(n) + a_1 g(n-1) + a_2 g(n-2)) \\ = \lambda \times 0 + \mu \times 0 \text{ puisque } f \in F \text{ et } g \in F \\ = 0\end{array}$$

Donc $\lambda f + \mu g \in F$

Et F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$

2. *Soit Φ une application de F dans $\mathbb{C}^2$ ainsi définie :*

$$\begin{cases} \Phi : F & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ \quad f & \longmapsto & \Phi(f) = (f(0), f(1)) \end{cases}$$

Démontrer que Φ est un isomorphisme de F vers $\mathbb{C}^2$
Quelle est la dimension de F ?

⇒ Nous commençons par vérifier que Φ est une application linéaire.
Soient $f \in E$ et $g \in E$
Alors

$$\begin{aligned}\Phi(f+g) = &\ ((f+g)(0), (f+g)(1)) \\ = &\ (f(0) + g(0), f(1) + g(1)) \\ = &\ (f(0), f(1)) + (g(0), g(1)) \\ = &\ \Phi(f) + \Phi(g)\end{aligned}$$

De plus, soit $\lambda \in \mathbb{C}$
Alors

$$\Phi[\lambda f] = ((\lambda f)(0), (\lambda f)(1)) = (\lambda f(0); \lambda f(1)) = \lambda (f(0); f(1)) = \lambda \Phi(f)$$

⇒ Vérifions maintenant que Φ est injective.
Recherchons les éléments du noyau de Φ

$$\ker \Phi = \{f \in E \text{ tels que } \Phi(f) = ((f(0), f(1))) = (0; 0)\}$$

On peut démontrer facilement par récurrence qu'il ne peut s'agir que de la suite nulle.

Il faut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = 0$
- ⋆ C'est donc vrai pour $n = 0$ et $n = 1$
- ⋆ Supposons que pour $p \leqslant n$, $f(p) = 0$
- ⋆ Alors, de l'identité $f(n+1) + a_1 f(n) + a_2 f(n-1) = 0$, nous déduisons, d'après l'hypothèse de récurrence que nous avons $f(n+1) = 0$

Et donc f est l'application nulle

Donc $\ker \Phi = \{\mathcal{O}\}$ et donc Φ est injective.

⇒ Vérifions maintenant que Φ est surjective.
Soit $a = (x; y) \in \mathbb{C}^2$
Alors en prenant la fonction $f \in E$ telle que $f(0) = x$ et $f(1) = y$ on a bien $\Phi(f) = (x; y) = a$
Donc $\forall a \in \mathbb{C}^2, \exists f \in E,$ telle que $\Phi(f) = a$
Donc Φ est surjective.

⇒ Φ, linéaire et bijective, est donc bien un isomorphisme

⇒ Ainsi, d'après le théorème du rang, E et $\mathbb{C}^2$ sont de même dimension.
Or, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$, et donc $\dim_{\mathbb{C}} F = 2$

3. *Touver tous les éléments $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que la fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ définie pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par $f(n) = \alpha^n$ soit dans F.*

Si la fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ définie pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par $f(n) = \alpha^n$ est dans F, alors, nous avons :

$$\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} = 0 \Longleftrightarrow \alpha^{n-2} \left(\alpha^2 + a_1 \alpha + a_2\right) = 0$$

⇒ Une première solution, évidente, est $\alpha = 0$; c'est, en fait, la fonction nulle.

⇒ Sinon, si $\alpha \neq 0$, nous devons avoir $\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0$

C'est une équation du second degré dont le discriminant Δ est $\Delta = a_1^2 - 4a_2$

⋆ Si $\Delta > 0$ il y a 2 solutions ; en posant ω une racine carrée de Δ, nous avons comme solution :

$$\alpha_1 = \frac{-a_1 + \omega}{2} \qquad \alpha_2 = \frac{-a_1 - \omega}{2}$$

⋆ Si $\Delta = 0$ il n'y a qu'une seule solution $\alpha = \dfrac{-a_1}{2}$

4. *Trouver une base de F lorsque $a_1^2 \neq 4a_2$.*

Si $a_1^2 \neq 4a_2$, alors $\Delta \neq 0$ et il y a 2 solutions à l'équation $\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0$. Nous avons donc 2 fonctions $f_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ et $f_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ éléments de F qui vérifient donc $f_1(n) = \alpha_1^n$ et $f_2(n) = \alpha_2^n$.
Les éléments de F étant complètement déterminés par la donnée de leur 2 premiers termes, f_1 est donc entièrement déterminée par $(f_1(0), f_1(1))$ et f_2 par $(f_2(0), f_2(1))$.
Si la famille $\{f_1, f_2\}$ est linéairement indépendante, alors elle forme une base de F, et tous les éléments de F s'expriment comme combinaison linéaire de f_1 et de f_2.
Or, $(f_1(0), f_1(1)) = (1, \alpha_1)$ et $(f_2(0), f_2(1)) = (1, \alpha_2)$ qui ne sont pas colinéaires. Ainsi, si $a_1^2 \neq 4a_2$, les éléments de F sont de la forme $g = \lambda f_1 + \mu f_2$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mu \in \mathbb{C}$ c'est à dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$g(n) = \lambda\alpha_1^n + \mu\alpha_2^n$$

Il était aussi tout à fait possible d'utiliser les déterminants d'ordre 2. En effet :

$$\det(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{-a_1 + \omega}{2} & \dfrac{-a_1 - \omega}{2} \end{vmatrix} = -\omega$$

Comme $\omega \neq 0$, $\det(f_1, f_2) \neq 0$ et les deux « vecteurs » f_1 et f_2 sont indépendants et forment une base de F

5. *On suppose que $a_1^2 = 4a_2$. Montrer que si $\gamma \in \mathbb{C}$ vérifie $\gamma^2 + a_1\gamma + a_2 = 0$, alors, la fonction $h \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $h(n) = n\gamma^n$ est dans F. Trouver une base de F*

Si $a_1^2 = 4a_2$, alors $\Delta = 0$, et l'équation $\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0$ admet une racine double $\gamma = \dfrac{-a_1}{2}$, ce qui nous permet de dire que la fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) = \gamma^n$ est bien un élément de F.
Montrons aussi que si $a_1^2 = 4a_2$, alors la fonction $h \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $h(n) = n\gamma^n$ est dans F.

$$\begin{aligned}
h(n) + a_1 h(n-1) + a_2 h(n-2) &= n\gamma^n + a_1(n-1)\gamma^{n-1} + a_2(n-2)\gamma^{n-2} \\
&= \gamma^{n-2}\left[n\gamma^2 + a_1(n-1)\gamma + a_2(n-2)\right] \\
&= \gamma^{n-2}\left[(n-1)\gamma^2 + \gamma^2 + a_1(n-1)\gamma + a_2(n-1) - a_2\right] \\
&= \gamma^{n-2}\left[(n-1)\left(\gamma^2 + a_1\gamma + a_2\right) - a_2 + \gamma^2\right] \\
&= \gamma^{n-2}\left[(n-1)\left(\underbrace{\gamma^2 + a_1\gamma + a_2}_{=0}\right) - a_2 + \gamma^2\right] \\
&= \gamma^{n-2}\left[-a_2 + \gamma^2\right] \\
&= \gamma^{n-2}\left[-a_2 + \frac{a_1^2}{4}\right] \text{ puisque } \gamma = \frac{-a_1}{2} \\
&= \gamma^{n-2}\left[\frac{a_1^2 - 4a_2}{4}\right] \\
&= 0 \text{ car } a_1^2 = 4a_2
\end{aligned}$$

Ainsi, si $a_1^2 = 4a_2$, la fonction $h(n) = n\gamma^n$ où $\gamma = \dfrac{-a_1}{2}$ est bien une fonction de F
Les éléments de F étant complètement déterminés par la donnée de leur 2 premiers termes, f est donc entièrement déterminée par $(f(0), f(1))$ et h par $(h(0), h(1))$.

Si la famille $\{f,h\}$ est linéairement indépendante, alors elle forme une base de F, et tous les éléments de F s'expriment comme combinaison linéaire de f et de h.
Or, $(f(0), f(1)) = (1,\gamma)$ et $(h(0), h(1)) = (0,\gamma)$ qui ne sont pas colinéaires. Ainsi, si $a_1^2 = 4a_2$, les éléments de F sont de la forme $g = \lambda f + \mu$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mu \in \mathbb{C}$ c'est à dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$g(n) = \lambda\gamma^n + \mu n\gamma^n = \gamma^n(\mu n + \lambda)$$

Pour aller plus loin

1. Le problème s'intéresse aux suites définies par une récurrence linéaire, ici une récurrence linéaire d'ordre 2 du type $u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}$. Nous venons de traiter les suites numériques complexes, c'est à dire des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ où $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$. Il y a deux choses importantes à retenir dans ces cas :
   (a) La première question clef est la dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence ; dans le cas des récurrences linéaires, ce $\mathbb{C}$-espace vectoriel est de dimension 2
   (b) La seconde question clef est la résolution de l'équation du second degré $r^2 - ar - b = 0$ qui est appelée **équation caractéristique** de cette relation de récurrence

   Dans le cas du $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites vérifiant une récurrence linéaire d'ordre 2, la question a été totalement résolue

2. **Intéressons nous maintenant au cas réel**
   Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par :

$$(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N})\,(u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n)$$

   L'équation $r^2 - ar - b = 0$ est appelée **équation caractéristique**
   - Si l'équation caractéristique admet 2 solutions distinctes $r_1 \in \mathbb{R}$ et $r_2 \in \mathbb{R}$, alors :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,(u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}$$

     avec λ et μ uniques
   - Si l'équation caractéristique admet 1 racine double $r \in \mathbb{R}$, alors :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,(u_n = \lambda r^n + \mu n r^n = r^n(\lambda + n\mu)) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}$$

     avec λ et μ uniques
   - Si l'équation caractéristique admet 2 racines complexes conjuguées $r_1 = re^{i\theta}$ et $r_1 = re^{-i\theta}$ (avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$), alors :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,(u_n = r^n(\lambda\cos n\theta + \mu\sin n\theta)) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}$$

     avec λ et μ uniques

   Preuve
   ⋆ Les deux premiers points ont déjà été démontrés dans le problème
   ⋆ Si l'équation caractéristique admet 2 racines complexes conjuguées, ceci veut que le discriminant est négatif *(c'est à dire $a^2 + 4b = 0$)*
   Si nous « plongeons » l'ensemble dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, d'après les résultats que nous avons établis dans le probème, nous anons :

$$u_n = Ar^n e^{in\theta} + Br^n e^{-in\theta} \text{ avec } A \in \mathbb{C} \text{ et } B \in \mathbb{C}$$

   Nous allons démontrer que $B = \overline{A}$
   Nous avons :

$$\left\{\begin{array}{rl} u_0 = & A + B \\ u_1 = & Are^{i\theta} + Bre^{-i\theta} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} u_0 = & A + B \\ u_1 - u_0re^{i\theta} = & Bre^{-i\theta} - Bre^{i\theta} \end{array}\right.$$

   Et donc $B = \dfrac{u_0re^{i\theta} - u_1}{2i\sin\theta}$ et, en faisant le même calcul, $A = \dfrac{u_1 - u_0re^{-i\theta}}{2i\sin\theta}$.

$$\overline{A} = \frac{u_1 - u_0 re^{i\theta}}{-2i\sin\theta} = \frac{u_0 re^{i\theta} - u_1}{2i\sin\theta} = B$$

Et nous avons donc, en posant $A = x + iy$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in_R$

$$\begin{array}{rl} u_n = & Ar^n e^{in\theta} + \overline{A}r^n e^{-in\theta} \\ = & (x+iy)\left(r^n\cos n\theta + ir^n\sin n\theta\right) + (x-iy)\left(r^n\cos n\theta - ir^n\sin n\theta\right) \\ = & \left(xr^n\cos n\theta - yr^n\sin n\theta\right) + i\left(xr^n\sin n\theta + yr^n\cos n\theta\right) + \cdots \\ & \quad\cdots\left(xr^n\cos n\theta - yr^n\sin n\theta\right) - i\left(xr^n\sin n\theta + yr^n\cos n\theta\right) \\ = & 2xr^n\cos n\theta - 2yr^n\sin n\theta \end{array}$$

Ce que nous voulions

3. **Etude d'un exemple : la suite de Fibonacci**

La suite de Fibonacci est ainsi définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \text{ et } F_0 = F_1 = 1$$

$\Rightarrow$ L'équation caractéristique de cette suite est donc $r^2 - r - 1 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = 5$. Nons obtenons 2 racines :

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \overline{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Remarquons que φ est le nombre d'or et que $\overline{\varphi} = -\dfrac{1}{\varphi}$

$\Rightarrow$ Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $F_n = \lambda\varphi^n + \mu\overline{\varphi}^n$

$\Rightarrow$ Déterminons λ et μ.

- $\star$ Pour $n = 0$, nous avons $\lambda + \mu = 1$
- $\star$ Pour $n = 1$, nous avons $\lambda\varphi + \mu\overline{\varphi} = 1$
- $\star$ D'où la résolution du système :

$$\left\{\begin{array}{ll} \lambda + \mu = & 1 \\ \lambda\varphi + \mu\overline{\varphi} & = 1 \end{array}\right.$$

nous donne $\lambda = \dfrac{\varphi}{\sqrt{5}}$ et $\mu = -\dfrac{\overline{\varphi}}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow$ l'expression générale de F_n est donc donnée par :

$$F_n = \frac{\varphi}{\sqrt{5}} \times \varphi^n - \frac{\overline{\varphi}}{\sqrt{5}} \times \overline{\varphi}^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+1} - \overline{\varphi}^{n+1}\right)$$

$\Rightarrow$ Il peut être intéressant de s'intéresser au comportement de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $+\infty$.

$\rightarrow$ Tout d'abord, $|\varphi| = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ et donc $|\overline{\varphi}| = \left|-\dfrac{1}{\varphi}\right| < 1$, et donc, nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} F_n = +\infty$$

$\rightarrow$ Il est possible de donner un équivalent de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $+\infty$. En effet, nous avons :

$$F_n \underset{+\infty}{\approx} \frac{\varphi^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

puisque

$$\frac{F_n}{\dfrac{\varphi^{n+1}}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}F_n}{\varphi^{n+1}} = 1 - \frac{\overline{\varphi}^{n+1}}{\varphi^{n+1}}$$

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\overline{\varphi}^{n+1}}{\varphi^{n+1}} = 0$, et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{5}F_n}{\varphi^{n+1}} = 1$

Ce que nous voulions

Exercice 30 :

Voici un exercice très classique sur les projecteurs. On retrouve ce type de problèmes explicitement dans des résultats du cours (théorèmes oup propositions) ou encore dans des questions d'examens de fin de première année (c'est du vécu !!)

E étant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , on appelle projecteur tout endomorphisme p de E, tel que $p^2 = p \circ p = p$. On désigne par Id_E l'identité de E.

1. *Démontrer que p est un projecteur si et seulement si $(\mathrm{Id}_E - p)$ en est un.*
   - ⋆ Supposons que p est un projecteur
     C'est à dire que $p \circ p = p$. Alors,
     $$(\mathrm{Id}_E - p) \circ (\mathrm{Id}_E - p) = \mathrm{Id}_E - p - p + p \circ p = \mathrm{Id}_E - p - p + p = \mathrm{Id}_E - p$$
     Et ainsi, $(\mathrm{Id}_E - p)$ eest un projecteur
   - ⋆ Supposons que $(\mathrm{Id}_E - p)$ est un projecteur
     Alors $(\mathrm{Id}_E - p) \circ (\mathrm{Id}_E - p) = (\mathrm{Id}_E - p)$. Donc :
     $$(\mathrm{Id}_E - p) = (\mathrm{Id}_E - p) \circ (\mathrm{Id}_E - p) = \mathrm{Id}_E - p - p + p \circ p$$
     Donc, de $\mathrm{Id}_E - p = \mathrm{Id}_E - p - p + p \circ p$, nous tirons $-p + p \circ p = \mathcal{O}_E \Longleftrightarrow p \circ p = p$
     p est donc un projecteur.

   D'où p est un projecteur si et seulement si $(\mathrm{Id}_E - p)$ en est un
2. *Montrer que si p est un projecteur, alors les relations suivantes sont vérifiées :*

   $\rightarrow$ $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_E - p) = \ker p$ $\rightarrow$ $\ker\,(\mathrm{Id}_E - p) = \mathrm{Im} p$

   (a) **Montrons que** $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_E - p) = \ker p$
   - ⋆ Montrons que $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_E - p) \subset \ker p$
     Soit donc $y \in \mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_E - p)$.
     Il existe donc $x \in E$ tel que $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_E - p)\,(x) = y$. Or :
     $$\begin{aligned} \mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_E - p)\,(x) = y &\Longleftrightarrow \quad x - p\,(x) = y \\ &\Longleftrightarrow \quad p\,(x) - p \circ p\,(x) = p\,(y) \\ &\Longleftrightarrow \quad p\,(x) - p\,(x) = p\,(y) \\ &\Longleftrightarrow \quad p\,(y) = 0_E \end{aligned}$$
     Et donc $y \in \ker p$
     D'où $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_E - p) \subset \ker p$
   - ⋆ Montrons que $\ker p \subset \mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_E - p)$
     Soit $x \in \ker p$
     Alors $p\,(x) = 0_E$ et donc $(\mathrm{Id}_E - p)\,(x) = x - p\,(x) = x$, ce qui veut dire que x est un point fixe de l'application linéaire $(\mathrm{Id}_E - p)$ et donc, que $x \in \mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_E - p)$.
     En conclusion $\ker p \subset \mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_E - p)$

   Et donc, $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}_E - p) = \ker p$

   (b) **Montrons que** $\ker\,(\mathrm{Id}_E - p) = \mathrm{Im} p$
   - ⋆ Montrons que $\ker\,(\mathrm{Id}_E - p) \subset \mathrm{Im} p$
     Soit $x \in \ker\,(\mathrm{Id}_E - p)$; alors :
     $$x \in \ker\,(\mathrm{Id}_E - p) \Longleftrightarrow (\mathrm{Id}_E - p)\,(x) = 0_E \Longleftrightarrow x = p\,(x)$$
     x apparaît donc comme un point fixe de p, et donc, comme tout à l'heure, $x \in \mathrm{Im} p$
   - ⋆ Montrons que $\mathrm{Im} p \subset \ker\,(\mathrm{Id}_E - p)$
     Soit $y \in \mathrm{Im} p$; il existe alors $x \in E$ tel que $y = p\,(x)$ et donc
     $$(\mathrm{Id}_E - p)\,(y) = y - p\,(y) = p\,(x) - p \circ p\,(x) = p\,(x) - p\,(x) = 0_E$$
     Donc $y \in \ker\,(\mathrm{Id}_E - p)$ et $\mathrm{Im} p \subset \ker\,(\mathrm{Id}_E - p)$

En conclusion, $\ker(\mathrm{Id}_E - p) = \mathrm{Im}p$

La relation $\ker(\mathrm{Id}_E - p) = \mathrm{Im}p$, nous permet d'écrire :

$$x \in \mathrm{Im}p \iff x \in \ker(\mathrm{Id}_E - p) \iff x - p(x) = 0_E \iff p(x) = x$$

C'est à dire que les éléments de $\mathrm{Im}p$ sont invariants par p

3. *Démontrer que si p est un projecteur, alors $E = \mathrm{Im}p \oplus \ker p$*

◇ **Montrons que** $E = \mathrm{Im}p + \ker p$

Soit $x \in E$, alors :

$$x = p(x) + (x - p(x))$$

Or, $p(x) \in \mathrm{Im}p$ et $(x - p(x)) \in \ker p$.

Tout vecteur $x \in E$ s'écrit bien comme somme d'un vecteur de $\ker p$ et d'un vecteur de $\mathrm{Im}p$.

Nous avons donc bien $E = \mathrm{Im}p + \ker p$

◇ **Montrons que** $\mathrm{Im}p \cap \ker p = \{0_E\}$

Soit donc $y \in \mathrm{Im}p \cap \ker p$. Alors de $y \in \ker P$, on tire que $p(y) = 0_E$

Nous venons de démontrer que $\ker(\mathrm{Id}_E - p) = \mathrm{Im}p$; alors, de $y \in \mathrm{Im}p$, on tire que $y \in \ker(\mathrm{Id}_E - p)$ et que donc $(\mathrm{Id}_E - p)(y) = 0_E$. Or :

$$(\mathrm{Id}_E - p)(y) = 0_E \iff y - p(y) = 0_E \iff y = 0_E$$

Donc $\mathrm{Im}p \cap \ker p = \{0_E\}$

En conclusion, $E = \mathrm{Im}p \oplus \ker p$

4. *Démontrer qu'un projecteur p commute avec un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ si et seulement si son noyau et son image sont stables par u.*

Une autre façon d'écrire l'énoncé est de démontrer l'équivalence suivante, pour tout projecteur p et tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$:

$$p \circ u = u \circ p \iff u(\ker p) \subset \ker p \text{ et } u(\mathrm{Im}p) \subset \mathrm{Im}p$$

(a) **Supposons que** $p \circ u = u \circ p$

Il nous faut donc montrer que $u(\ker p) \subset \ker p$ et $u(\mathrm{Im}p) \subset \mathrm{Im}p$

→ <u>On démontre que $u(\ker p) \subset \ker p$</u>

Soit donc $y \in u(\ker p)$.

Il existe alors $x \in \ker p$ tel que $y = u(x)$. Alors :

$$p(y) = p \circ u(x) = u \circ p(x) = u(0_E) = 0_E$$

Et donc $y \in \ker p$, et donc $u(\ker p) \subset \ker p$

→ <u>Montrons que $u(\mathrm{Im}p) \subset \mathrm{Im}p$</u>

Soit $y \in u(\mathrm{Im}p)$.

Il existe donc $z \in \mathrm{Im}p$ tel que $y = u(z)$; et comme $z \in \mathrm{Im}p$, il existe $x \in E$ tel que $z = p(x)$. Ainsi :

$$y = u(z) = u \circ p(x) = p \circ u(x)$$

Et donc, $y \in \mathrm{Im}p$.

Nous avons bien $u(\mathrm{Im}p) \subset \mathrm{Im}p$

(b) **Supposons, maintenant, que** $u(\ker p) \subset \ker p$ **et** $u(\mathrm{Im}p) \subset \mathrm{Im}p$

Nous devons donc montrer que $p \circ u = u \circ p$

Soit $x \in E$.

Il existe donc $x_1 \in \ker p$ et $x_2 \in \mathrm{Im}p$, uniques, tels que $x = x_1 + x_2$.

Alors, $p(x) = p(x_1 + x_2) = p(x_1) + p(x_2) = p(x_2) = x_2$

- Et donc $u \circ p(x) = u(x_2)$
- Maintenant, $p \circ u(x) = p \circ u(x_1 + x_2) = p \circ u(x_1) + p \circ u(x_2)$
  - ⋆ Comme $u(\ker p) \subset \ker p$, de $x_1 \in \ker p$, nous déduisons $u(x_1) \in \ker p$ et donc $p \circ u(x_1) = 0_E$, et donc $p \circ u(x) = p \circ u(x_2)$

  - $\star$ De même, comme $u(\mathrm{Im}p) \subset \mathrm{Im}p$, de $x_2 \in \mathrm{Im}p$, nous déduisons $u(x_2) \in \mathrm{Im}p$. Il existe donc $y \in E$ tel que $u(x_2) = p(y)$. Ainsi :

$$p \circ u(x) = p \circ u(x_2) = p \circ p(y) = p(y) = u(x_2)$$

- Nous venons de voir que, pour tout $x \in E$:

$$u \circ p(x) = u(x_2) = p \circ u(x)$$

Ainsi, $p \circ u = u \circ p$

Exercice 31 :

E étant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n où $n \geqslant 2$, on désigne par f un endomorphisme non nul de E ($f \in \mathcal{L}(E)$) commutant avec tout automorphisme de E.

1. *Montrer que si x et y sont deux éléments linéairement indépendants de E, il existe un automorphisme $u \in \mathrm{GL}(E)$ de E tel que $u(x) = x$ et $u(y) = x + y$*

   Soit donc E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et x et y, deux éléments linéairement indépendants de E.
   D'après le théorème de la base incomplète 3.6.5, il existe des vecteurs $\{e_3, \cdots, e_n\}$ tels que la famille $\mathcal{B} = \{x, y, e_3, \cdots, e_n\}$ forme une base de E.
   Soit $\mathcal{B}' = \{x, x + y, e_3, \cdots, e_n\}$ une famille de vecteurs de E. Cette famille est libre et forme donc une base de E.
   En effet, si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont n scalaires tels que $\lambda_1 x + \lambda_2 (x + y) + \cdots + \lambda_n e_n = 0_E$. Nous avons :

$$\lambda_1 x + \lambda_2 (x + y) + \cdots + \lambda_n e_n = 0_E \Longleftrightarrow \lambda_1 x + (\lambda_1 + \lambda_2) y + \lambda_3 e_3 + \cdots + \lambda_n e_n = 0_E$$

   De l'indépendance de la famille $\mathcal{B} = \{x, y, e_3, \cdots, e_n\}$, nous déduisons que :

$$\lambda_1 = (\lambda_1 + \lambda_2) = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0$$

   Et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0$.
   La famille $\mathcal{B}' = \{x, x + y, e_3, \cdots, e_n\}$ est donc une famille libre et forme donc une base de E.
   D'après le théorème 3.5.7, il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que :

$$u(x) = x \qquad u(y) = x + y \qquad \text{et pour } i = 3, \ldots, n \quad u(e_i) = e_i$$

   Par le même théorème 3.5.7, cette application linéaire u est une bijection et donc $u \in \mathrm{GL}(E)$

2. *Soit $a \in E$ un élément de E n'appartenant pas à $\ker f$. Démontrer que les vecteurs a et $b = f(a)$ sont liés. En déduire l'existence d'un élément $\lambda(a)$ de $\mathbb{K}$ tel que $f(a) = \lambda(a)\, a$*

   Soit $a \in E$ tel que $a \notin \ker f$; alors $a \neq 0_E$ et $f(a) \neq 0_E$.
   Nous devons démontrer que a et $f(a)$ sont liés.
   Supposons le contraire, c'est à dire que a et $f(a)$ sont indépendants.
   Il existe alors $u \in \mathrm{GL}(E)$ de E tel que $u(a) = a$ et $u(f(a)) = a + f(a)$
   Comme f commute avec toute application linéaire de E, nous devrions avoir :

$$f(a) = f \circ u(a) = u(f(a)) = a + f(a)$$

   Comme a et $f(a)$ sont supposés indépendants, il est impossible d'avoir $f(a) = a + f(a)$
   Donc, a et $f(a)$ sont liés.
   Il existe donc $\lambda(a) \in \mathbb{K}$ tel que $f(a) = \lambda(a)\, a$.

3. *Démontrer que $\lambda(a)$ ne dépend pas de a.*

   Soient $a_1 \in E$, $a_2 \in E$, 2 vecteurs tels que $a_1 \neq a_2$, $a_1 \neq 0_E$ et $a_2 \neq 0_E$.
   Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ telle que $v(a_1) = a_2$. Alors :
   - $\star$ $f \circ v(a_1) = f(a_2) = \lambda(a_2)\, a_2$

$\star$ $v \circ f(a_1) = v(\lambda(a_1) a_1) = \lambda(a_1) v(a_1) = \lambda(a_1) a_2$
Comme f commute avec v, nous avons $f \circ v(a_1) = v \circ f(a_1)$, et donc :

$$f \circ v(a_1) = v \circ f(a_1) \Longleftrightarrow \lambda(a_2) a_2 = \lambda(a_1) a_2 \Longleftrightarrow (\lambda(a_2) - \lambda(a_1)) a_2 = 0_E$$

Comme $a_2 \neq 0_E$, nous avons $\lambda(a_2) - \lambda(a_1) = 0$, c'est à dire $\lambda(a_2) = \lambda(a_1)$
Ainsi, si f commute avec tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, alors f est telle que, pour tout $x \in E$, $f(x) = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$

4. *Quel est le centre de l'anneau $\mathcal{L}(E)$?*

   Réciproquement, une homothétie h définie pour tout $x \in E$ par $h(x) = \mu x$ où $\mu \in \mathbb{K}$ commute avec tout endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. En effet :

$$\varphi \circ h(x) = \varphi[h(x)] = \varphi(\mu x) = \mu\varphi(x) = h[\varphi(x)] = h \circ \varphi(x)$$

   Ainsi, nous pouvons énoncer le résultat suivant :

   Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de **dimension finie** n où $n \geqslant 2$
   Les homothéties sont les seuls endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$ qui commutent avec tous les endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$
   Autrement dit :
   Le centre de l'anneau $\mathcal{L}(E)$ est l'ensemble des homothéties de E

Exercice 32 :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. On pose :

$$f^0 = \mathrm{Id}_E \quad f^k = f^{k-1} \circ f (k \geqslant 1) \quad N_k = \ker f^k \quad I_k = \mathrm{Im} f^k$$

1. *Démontrer que pour tout entier naturel k, on a :*

$$N_k \subset N_{k+1} \text{ et } I_{k+1} \subset I_k$$

   $\Rightarrow$ **On démontre que** $N_k \subset N_{k+1}$
   Soit $x \in N_k$.
   Alors, $f^k(x) = 0_E$, et donc $f^{k+1}(x) = f\left[f^k(x)\right] = f[0_E] = 0_E$, et donc $x \in N_{k+1}$
   D'où $N_k \subset N_{k+1}$

   $\Rightarrow$ **On démontre que** $I_{k+1} \subset I_k$
   Soit $z \in I_{k+1} = \mathrm{Im} f^{k+1}$.
   Il existe donc $y \in E$ tel que $z = f^{k+1}(y) = f^k[f(y)]$.
   Il existe donc $z' \in E$, et $z' = f(y)$ tel que $f^k[z'] = z$ et donc $z \in \mathrm{Im} f^k = I_k$
   Nous avons donc $I_{k+1} \subset I_k$

2. *Démontrer qu'il existe un entier naturel r_0 tel que pour $k < r_0$ on ait $N_k \neq N_{k+1}$, et pour $k \geqslant r_0$, $N_k = N_{k+1}$*

   Pour commencer, nous construisons une suite d'entiers $(n_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définie par $n_k = \dim N_k$

   (a) Comme, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, nous avons $N_k \subset E$, et que $\dim E = n$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, nous avons $\dim N_k \leqslant \dim E$, c'est à dire $n_k \leqslant n$

   (b) D'autre part, comme $N_k \subset N_{k+1}$, nous avons $\dim N_k \leqslant \dim N_{k+1}$, c'est à dire $n_k \leqslant n_{k+1}$

   (c) La suite d'entiers $(n_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est donc croissante et majorée par n, elle est donc stationnaire. Il existe donc $r \in \mathbb{N}^*$ tel que si $k \geqslant r$, alors $n_{k+1} = n_k = n_r$
   Nous appelons r_0 le plus petit entier tel que $k \geqslant r_0$, alors $n_{k+1} = n_k = n_{r_0}$

   (d) Pour $k \geqslant r_0$, de $N_k \subset N_{k+1}$ et de $n_{k+1} = n_k = n_{r_0} \Longleftrightarrow \dim N_{k+1} = \dim N_k = \dim N_{r_0}$ nous déduisons que $N_k = N_{k+1} = N_{r_0}$

(e) Démontrons que si $k < r_0$, alors $N_k \neq N_{k+1}$
Supposons le contraire, c'est à dire $N_k = N_{k+1}$ lorsque $k < r_0$, alors $\dim N_k = \dim N_{k+1} \iff n_k = n_{k+1}$ et il y a contradiction avec le fait que r_0 soit le plus petit entier tel que si $k \geqslant r_0$, $n_{k+1} = n_k = n_r$
Donc, si $k < r_0$, alors $N_k \neq N_{k+1}$

3. *Démontrer que pour $k \leqslant r_0$,$I_k \neq I_{k+1}$ et pour $k > r_0$, $I_k = I_{k+1}$*

Cette question est un corollaire de la question précédente.
Nous avons, d'après le théorème du rang 3.6.13, $\dim N_k + \dim I_k = \dim E = n$, de telle sorte que la suite $(m_k)_{k\geqslant 1}$ définie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ par $m_k = n - n_k$ est une suite décroissante et bornée, stationnaire à partir du rang r_0, c'est à dire que si $k \geqslant r_0$, alors $m_k = m_{k+1}$.
Donc, par le même raisonnement que ci-dessus ($I_{k+1} \subset I_k$ et $\dim I_k = \dim I_{k+1}$), si $k \geqslant r_0$, alors $I_{k+1} = I_k$.
De la même manière, si $k < r_0$, alors $I_{k+1} \neq I_k$

4. *Démontrer que $E = I_{r_0} \oplus N_{r_0}$*

C'est une question plus difficile !!

(a) **Démontrons que** $I_{r_0} \cap N_{r_0} = \{0_E\}$
Soit donc $y \in I_{r_0} \cap N_{r_0}$.
Comme $y \in N_{r_0}$ alors $f^{r_0}(y) = 0_E$.
De même, comme $y \in I_{r_0}$ alors, il existe $x \in E$ tel que $f^{r_0}(x) = y$
Alors, $f^{r_0}(y) = f^{2r_0}(x) = 0_E$, et donc $x \in N_{2r_0}$.
Comme $2r_0 \geqslant r_0$, nous avons $N_{2r_0} = N_{r_0}$ et donc $x \in N_{r_0}$, d'où $f^{r_0}(x) = 0_E$, c'est à dire, comme $f^{r_0}(x) = y$, $y = 0_E$
D'où $I_{r_0} \cap N_{r_0} = \{0_E\}$

(b) **Démontrons que** $E = I_{r_0} + N_{r_0}$
Soit $x \in E$; il faut donc écrire x comme somme d'un élément de I_{r_0} et d'un autre de N_{r_0}
Nous avons $f^{r_0}(x) \in I_{r_0}$. Comme $2r_0 \geqslant r_0$, nous avons $I_{r_0} = I_{2r_0}$ et donc $f^{r_0}(x) \in I_{2r_0}$. Il existe donc $y \in E$ tel que $f^{2r_0}(y) = f^{r_0}(x)$, et nous avons :

$$f^{2r_0}(y) = f^{r_0}(x) \iff f^{2r_0}(y) - f^{r_0}(x) = 0_E \iff f^{r_0}\left[f^{r_0}(y) - x\right] = 0_E$$

De là, nous tirons que $f^{r_0}(y) - x \in \ker f^{r_0} = N_{r_0}$.
En écrivant $x = (x - f^{r_0}(y)) + f^{r_0}(y)$, nous répondons à la question.

Donc $E = I_{r_0} \oplus N_{r_0}$

5. *Démontrer que la restriction de f à I_{r_0} induit une fonction de I_{r_0} dans I_{r_0} qui est un automorphisme de I_{r_0}*

(a) **La restriction de f à I_{r_0} est un endomorphisme de I_{r_0}**
⋆ Tout d'abord, nous avons $f(I_{r_0}) \subset I_{r_0+1}$
En effet, soit $y \in f(I_{r_0})$; il existe donc $x \in I_{r_0}$ tel que $y = f(x)$.
Et comme $x \in I_{r_0}$, il existe $z \in E$ tel que $x = f^{r_0}(z)$ et alors :

$$y = f(x) = f\left[f^{r_0}(z)\right] = f^{r_0+1}(z)$$

Et donc, $y \in I_{r_0+1}$
Nous avons donc $f(I_{r_0}) \subset I_{r_0+1}$
⋆ Comme $r_0 + 1 \geqslant r_0$, nous avons $I_{r_0} = I_{r_0+1}$ et la restriction de f à I_{r_0} induit donc un endomorphisme de I_{r_0}

(b) **On démontre que f est bijective de I_{r_0} dans I_{r_0}**
⋆ On montre que $f : I_{r_0} \longrightarrow I_{r_0}$ est injective.
Comme I_{r_0} est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, on pourra déduire que $f : I_{r_0} \longrightarrow I_{r_0}$ est bijective.
⋆ Soit donc $y \in I_{r_0}$ tel que $f(y) = 0_E$

- ⋆ Comme $y \in I_{r_0}$, il existe $x \in E$ tel que $y = f^{r_0}(x)$
- ⋆ Alors, $f(y) = f[f^{r_0}(x)] = f^{r_0+1}(x) = 0_E$, et donc $x \in N_{r_0+1}$
- ⋆ Comme $N_{r_0+1} = N_{r_0}$, nous avons alors $x \in N_{r_0}$ et donc $f^{r_0}(x) = 0_E$
- ⋆ Et donc $y = 0_E$

Donc f induit donc un endomorphisme bijectif de I_{r_0}, c'est à dire un automorphisme de I_{r_0}

Exercice 33 :

On considère $\mathbb{R}^4$, muni de sa base canonique classique $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.
On considère, maintenant, la base duale de $\left(\mathbb{R}^4\right)^\star = \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}\right)$, $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*\}$ et les formes linéaires f_1, f_2, f_3 et f_4 de coordonnées, dans les bases duales :

$$f_1 = (1, 0, -\lambda, 0) \quad f_2 = \left(0, 1, 0, \frac{-1}{\lambda}\right) \quad f_3 = (1, 0, 0, -\mu) \quad f_4 = \left(0, 1, 0, \frac{-1}{\mu}\right)$$

Avec $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$
Etudier l'indépendance de ces formes linéaires, et trouver, lorsqu'elles sont indépendantes, la base de $\mathbb{R}^4$, duale de $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$

▷ **Introduction**

Nous allons faire un petit exposé dans $\mathbb{R}^4$ *(c'est le cadre de l'exercice)* mais il est très facilement extensible à $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$
Si $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*\}$ est la base duale de $\left(\mathbb{R}^4\right)^\star$, alors toute forme linéaire f de coordonnées $f = (a, b, c, d)$ peut donc s'écrire $f = ae_1^* + be_2^* + ce_3^* + de_4^*$ et pour tout quadruplet $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, nous avons :

$$f(x, y, z, t) = ae_1^*(x, y, z, t) + be_2^*(x, y, z, t) + ce_3^*(x, y, z, t) + de_4^*(x, y, z, t) = ax + by + cz + dt$$

C'est l'expression générale de toute forme linéaire.
Par exemple, si $f_1 = (1, 0, -\lambda, 0)$ comme dans l'énoncé, nous avons $f_1(x, y, z, t) = x - \lambda t$

▷ **Résolution de l'exercice**

⇒ Etude de l'indépendance des formes linéaires $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$
Soient $a \in \mathbb{K}$, $b \in \mathbb{K}$, $c \in \mathbb{K}$ et $d \in \mathbb{K}$ quatre scalaires tels que $af_1 + bf_2 + cf_3 + df_2 = \mathcal{O}_{(\mathbb{R}^4)^\star}$.
Alors :

$$\begin{aligned} af_1 + bf_2 + cf_3 + df_2 = \mathcal{O}_{(\mathbb{R}^4)^\star} \iff & \; a(1, 0, -\lambda, 0) + b\left(0, 1, 0, \frac{-1}{\lambda}\right) + \\ & c(1, 0, 0, -\mu) + d\left(0, 1, 0, \frac{-1}{\mu}\right) = (0, 0, 0, 0) \\ \iff & \left(a + c, b + d, -c\lambda, \frac{-b}{\lambda} - c\mu - \frac{d}{\mu}\right) = (0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

D'où nous obtenons le système :

$$\begin{cases} a + c = & 0 \quad (1) \\ b + d = & 0 \quad (2) \\ -c\lambda = & 0 \quad (3) \\ \dfrac{-b}{\lambda} - c\mu - \dfrac{d}{\mu} = & 0 \quad (4) \end{cases}$$

Les équations (1) et (3) donnent :$a = c = 0$. Alors, les équations (2) et (4) deviennent :

$$\begin{cases} b + d = & 0 \\ \dfrac{-b}{\lambda} - c\mu - \dfrac{d}{\mu} = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b + d = & 0 \\ \dfrac{b}{\lambda} + \dfrac{d}{\mu} = & 0 \end{cases}$$

- ⋆ Si $\lambda \neq \mu$ alors $b = d = 0$
- ⋆ Si $\lambda = \mu$ alors $b = -d$, avec $b \in \mathbb{K}$ et le système $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est un système lié dans $\left(\mathbb{R}^4\right)^\star$

La famille $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est un système libre dans $\left(\mathbb{R}^4\right)^\star$, et donc une base de $\left(\mathbb{R}^4\right)^\star$, si et seulement si $\lambda \neq \mu$

⇒ Recherche de la base duale de $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$

Bien sûr, dans ce cas, on suppose $\lambda \neq \mu$.

On appelle $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ la base de $\mathbb{R}^4$ duale de $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$.

Pour tout i et j tels que $1 \leqslant i \leqslant 4$ et $1 \leqslant j \leqslant 4$, nous avons $f_i\left(\varphi_j\right) = \delta_{i,j}$.

Soit $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Nous posons $\varphi_i = \sum_{k=0}^{4} x_k^i e_k$

⋆ Commençons par φ_1. Nous avons :

$$\begin{aligned} f_1\left(\varphi_1\right) = &\quad 1 &= x_1^1 - \lambda x_3^1 \\ f_2\left(\varphi_1\right) = &\quad 0 &= x_2^1 - \frac{1}{\lambda} x_4^1 \\ f_3\left(\varphi_1\right) = &\quad 0 &= x_1^1 - \mu x_4^1 \\ f_4\left(\varphi_1\right) = &\quad 0 &= x_2^1 - \frac{1}{\mu} x_4^1 \end{aligned}$$

Nous obtenons donc un système d'équations d'inconnues $x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1$:

$$\left\{\begin{aligned} x_1^1 - \lambda x_3^1 = &\quad 1 \\ x_2^1 - \frac{1}{\lambda} x_4^1 = &\quad 0 \\ x_1^1 - \mu x_4^1 = &\quad 0 \\ x_2^1 - \frac{1}{\mu} x_4^1 = &\quad 0 \end{aligned}\right. \iff \left\{\begin{aligned} x_2^1 - \frac{1}{\lambda} x_4^1 = &\quad 0 \\ x_2^1 - \frac{1}{\mu} x_4^1 = &\quad 0 \end{aligned}\right. \text{ et } \left\{\begin{aligned} x_1^1 - \lambda x_3^1 = &\quad 1 \\ x_1^1 - \mu x_4^1 = &\quad 0 \end{aligned}\right.$$

D'où nous tirons $x_2^1 = x_4^1 = 0$, puis $x_1^1 = 0$ et $x_3^1 = \frac{-1}{\lambda}$. Donc :

$$\varphi_1 = \left(0, 0, \frac{-1}{\lambda}, 0\right)$$

⋆ Continuons par φ_2. Nous avons :

$$\begin{aligned} f_1\left(\varphi_2\right) = &\quad 0 &= x_1^2 - \lambda x_3^2 \\ f_2\left(\varphi_2\right) = &\quad 1 &= x_2^2 - \frac{1}{\lambda} x_4^2 \\ f_3\left(\varphi_2\right) = &\quad 0 &= x_1^2 - \mu x_4^2 \\ f_4\left(\varphi_2\right) = &\quad 0 &= x_2^2 - \frac{1}{\mu} x_4^2 \end{aligned}$$

Nous obtenons donc un système d'équations d'inconnues $x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1$:

$$\left\{\begin{aligned} x_1^2 - \lambda x_3^2 = &\quad 0 \\ x_2^2 - \frac{1}{\lambda} x_4^2 = &\quad 1 \\ x_1^2 - \mu x_4^2 = &\quad 0 \\ x_2^2 - \frac{1}{\mu} x_4^2 = &\quad 0 \end{aligned}\right. \iff \left\{\begin{aligned} x_2^2 - \frac{1}{\lambda} x_4^2 = &\quad 1 \\ x_2^2 - \frac{1}{\mu} x_4^2 = &\quad 0 \end{aligned}\right. \text{ et } \left\{\begin{aligned} x_1^2 - \lambda x_3^2 = &\quad 0 \\ x_1^2 - \mu x_4^2 = &\quad 0 \end{aligned}\right.$$

D'où nous tirons $x_2^2 = \frac{\lambda}{\lambda - \mu}$, $x_4^2 = \frac{\lambda\mu}{\lambda - \mu}$, puis $x_1^2 = \frac{\lambda\mu^2}{\lambda - \mu}$ et $x_3^2 = \frac{\mu^2}{\lambda - \mu}$. Donc :

$$\varphi_2 = \left(\frac{\lambda\mu^2}{\lambda - \mu}, \frac{\lambda}{\lambda - \mu}, \frac{\mu^2}{\lambda - \mu}, \frac{\lambda\mu}{\lambda - \mu}\right)$$

⋆ Pour conclure, en utilisant la même méthode, nous avons :

$$\varphi_3 = \left(1, 0, \frac{1}{\lambda}, 0\right)$$

Et

$$\varphi_4 = \left(\frac{\lambda\mu^2}{\mu - \lambda}, \frac{\mu}{\mu - \lambda}, \frac{\mu^2}{\mu - \lambda}, \frac{\lambda\mu}{\mu - \lambda}\right)$$

Exercice 34 :

$\mathbb{K}_2[X]$ est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degré inférieur ou égal à 2. On considère les formes linéaires Ψ_1, Ψ_2 et Ψ_3 définies par :

$$\begin{cases} \Psi_1 : \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \quad P & \longmapsto & \Psi_1(P) = P(1) \end{cases} \qquad \begin{cases} \Psi_2 : \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \quad P & \longmapsto & \Psi_2(P) = P'(1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Psi_3 : \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \quad P & \longmapsto & \Psi_3(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

1. *Démontrer que la famille $\{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\}$ est une base de $(\mathbb{K}_2[X])^*$*

   Nous allons appeler $\{e_0, e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$, c'est à dire :

   $$e_0(X) = 1 \quad e_1(X) = X \quad e_2(X) = X^2$$

   Et donc, tout $P \in \mathbb{K}_2[X]$ s'écrit $P = ae_2 + be_1 + ce_0$ avec $a \in \mathbb{K}$, $b \in \mathbb{K}$ et $c \in \mathbb{K}$
   Ainsi, pour tout $P \in \mathbb{K}_2[X]$:
   - ⋆ $\Psi_1(P) = P(1) = a + b + c$
   - ⋆ $\Psi_2(P) = P'(1) = 2a + b$
   - ⋆ $\Psi_3(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 at^2 + bt + c\,\mathrm{d}t = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c$

   En appellant $\{e_0^*, e_1^*, e_2^*\}$ la base de $(\mathbb{K}_2[X])^*$, duale de la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$, les coordonnées de Ψ_1, Ψ_2 et Ψ_3, dans cette base duale sont :

   $$\Psi_1 = (1, 1, 1) \quad \Psi_2 = (0, 1, 2) \quad \Psi_3 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$$

   Si nous réussissons à démontrer que la famille $\{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\}$ est libre, nous aurons aussi démontré que c'est une base de $(\mathbb{K}_2[X])^*$, puisque $\dim(\mathbb{K}_2[X])^* = 3$
   Soient $\alpha \in \mathbb{K}$, $\beta \in \mathbb{K}$ et $\gamma \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha\Psi_1 + \beta\Psi_2 + \gamma\Psi_3 = \mathcal{O}_{(\mathbb{K}_2[X])^*}$. Nous obtenons alors le système d'équations :

   $$\begin{cases} \alpha + \gamma = & 0 \\ \alpha + \beta + \dfrac{\gamma}{2} = & 0 \\ \alpha + 2\beta + \dfrac{\gamma}{3} = & 0 \end{cases} \iff \alpha = -\gamma \text{ et } \begin{cases} 2\beta - \dfrac{2\gamma}{3} = & 0 \\ \beta - \dfrac{\gamma}{2} = & 0 \end{cases} \implies \alpha = \beta = \gamma = 0$$

   La famille $\{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\}$ est donc une famille libre et forme une base de $(\mathbb{K}_2[X])^*$

2. *En déterminer la base duale dans $\mathbb{K}_2[X]$*

   Nous appellerons $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ la base de $\mathbb{K}_2[X]$ duale de $\{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\}$.
   Nous avons donc, pour tout i et j tels que $0 \leqslant i \leqslant 2$ et $0 \leqslant j \leqslant 2$, $\Psi_i(\psi_j) = \delta_{i,j}$.
   Posons $\psi_j = c_je_0 + b_je_1 + a_je_2$.
   ⇒ <u>Détermination de ψ_1</u>
   Par construction, nous avons

   $$\begin{aligned} \psi_1 = c_1e_0 + b_1e_1 + a_1e_2 &\iff \psi_1(X) = c_1e_0(X) + b_1e_1(X) + a_1e_2(X) \\ &\iff \psi_1(X) = a_1X^2 + b_1X + c_1 \end{aligned}$$

   Donc :
   - ⋆ $\Psi_1(\psi_1) = 1 = a_1 + b_1 + c_1$
   - ⋆ $\Psi_2(\psi_1) = 0 = 2a_1 + b_1$
   - ⋆ $\Psi_3(\psi_1) = 0 = \dfrac{a_1}{3} + \dfrac{b_1}{2} + c_1$

Nous obtenons donc le système :

$$\begin{cases} a_1+b_1+c_1 = & 1 \\ 2a_1+b_1 = & 0 \\ \dfrac{a_1}{3}+\dfrac{b_1}{2}+c_1 = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow b_1=-2a_1 \text{ et } \begin{cases} -a_1+c_1 = & 1 \\ -\dfrac{2a_1}{3}+c_1 = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow a_1=-3 \quad b_1=6 \quad c_1=-2$$

Nous avons donc $\psi_1(X)=-3X^2+6X-2$

$\Rightarrow$ Par le même type de calcul *(que nous laissons au lecteur le soin de réaliser)* nous trouvons :

$$\psi_2(X)=\frac{3}{2}X^2-2X+\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \psi_3(X)=3X^2-6X+3$$

Exercice 36 :

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n Montrer que, pour tout $x\in E$ et tout $y\in E$, si $x\neq y$ alors, il existe $\varphi\in E^*$ tel que $\varphi(x)\neq\varphi(y)$

Soient $x\in E$ et $y\in E$ tels que $x\neq y$. On considère la droite vectorielle $\mathbb{K}(x-y)$ et H un hyperplan tel que $E=H\oplus\mathbb{K}(x-y)$. Appelons $\varphi\in E^*$ la forme linéaire non nulle dont H est le noyau. *(On pourrait aussi dire que l'hyperplan H a pour équation $\varphi(u)=0$)*
Alors $\varphi(x-y)\neq 0$ et donc $\varphi(x)\neq\varphi(y)$

Remarque

Cette forme linéaire $\varphi\in E^*$ n'est donc pas unique puisque le supplémentaire H à $\mathbb{K}(x-y)$ n'est pas non plus unique.

Exercice 37 :

1. *Soit $E=\mathbb{R}^{*+}\times\mathbb{R}$. On définit sur E 2 opération :*
   - **Une loi interne :** $(a,b)\star(c,d)=(ac,b+d)$
   - **Une loi externe :** $\lambda\bullet(a,b)=(a^\lambda,\lambda b)$

   Est-ce que E muni de ces deux lois est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

   $\Rightarrow$ Tout d'abord $(E,\star)$ est un groupe abélien comme produit direct des groupes commutatifs $(\mathbb{R}^{*+},\times)$ et $(\mathbb{R},+)$

   $\Rightarrow$ Vérifions que la loi externe $\bullet$ vérifie les axiômes de $\mathbb{R}$-espace vectoriel

   $\triangleright$ **Soit $(a,b)\in E$, $\lambda\in\mathbb{R}$ et $\mu\in\mathbb{R}$. Montrons que $\lambda\bullet(\mu\bullet(a,b))=(\lambda\mu)\bullet(a,b)$**

$$\begin{aligned}\lambda\bullet(\mu\bullet(a,b)) = & \ \lambda\bullet(a^\mu,\mu b) \\ = & \ \left((a^\mu)^\lambda,\lambda\mu b\right) \\ = & \ \left(a^{\mu\lambda},\lambda\mu b\right) \\ = & \ (\lambda\mu)\bullet(a,b)\end{aligned}$$

   Nous avons donc $\lambda\bullet(\mu\bullet(a,b))=(\lambda\mu)\bullet(a,b)$

   $\triangleright$ **Soit $\lambda\in\mathbb{R}$, $\mu\in\mathbb{R}$, montrons que** $(\lambda+\mu)\bullet(a,b)=\lambda\bullet(a,b)+\mu\bullet(a,b)$

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu)\bullet(a,b) = & \ \left(a^{\lambda+\mu},(\lambda+\mu)b\right) \\ \lambda\bullet(a,b)+\mu\bullet(a,b) = & \ \left(a^\lambda,\lambda b\right)+\left(a^\mu,\mu b\right)=\left(a^\lambda a^\mu,(\lambda+\mu)b\right) \\ = & \ \left(a^{\lambda+\mu},(\lambda+\mu)b\right)\end{aligned}$$

   Nous avons, donc $(\lambda+\mu)\bullet(a,b)=\lambda\bullet(a,b)+\mu\bullet(a,b)$

   $\triangleright$ **Soit $\lambda\in\mathbb{R}$, $(a,b)\in E$ et $(c,d)\in E$, montrons que** $\lambda\bullet((a,b)+(c,d))=\lambda\bullet(a,b)+\lambda\bullet(c,d)$

$$\begin{aligned}\lambda\bullet((a,b)+(c,d)) = & \ \lambda\bullet(ac,b+d) \\ = & \ \left((ac)^\lambda,\lambda(b+d)\right) \\ \lambda\bullet(a,b)+\lambda\bullet(c,d) = & \ \left(a^\lambda,\lambda b\right)+\left(c^\lambda,\lambda d\right) \\ = & \ \left(a^\lambda c^\lambda,\lambda(b+d)\right)\end{aligned}$$

   Et donc, nous avons $\lambda\bullet((a,b)+(c,d))=\lambda\bullet(a,b)+\lambda\bullet(c,d)$

▷ **Montrons que pour tout** $(a,b) \in E$**, nous avons** $1 \bullet (a,b) = (a,b)$

$$1 \bullet (a,b) = \left(a^1, 1 \times b\right) = (a,b)$$

E muni de ces deux lois est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

2. *Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. On munit $\mathbb{K}^2$:*
   - **De l'addition habituelle :** $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$
   - **D'une loi externe :** $\lambda \bullet (a,b) = (\lambda a, 0)$

   Pourquoi n'obtenons nous pas un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ?

   ⇒ Tout d'abord $\left(\mathbb{K}^2, +\right)$ est un groupe abélien comme produit direct des groupes commutatifs $(\mathbb{K}, +)$ et $(\mathbb{K}, +)$

   ⇒ Par contre, nous n'avons pas $1 \bullet (a,b) = (a,b)$
   En effet, $1 \bullet (a,b) = (1 \times a, 0) = (a, 0) \neq (a,b)$

   Donc, $\mathbb{K}^2$, muni de ces 2 lois, n'est pas un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Exercice 38 :

Montrer que l'ensemble

$$\mathfrak{A} = \left\{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \text{ telles que } \left(\exists A_f \in \mathbb{R}^+\right)\left(\exists a \in \mathbb{R}^+\right)\left((\forall x \in \mathbb{R})\,(|x| \geqslant a) \Longleftrightarrow |f(x)| \leqslant A_f\,|x|\right)\right\}$$

est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel pour les lois usuelles dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Nous allons démontrer que $\mathfrak{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

⇒ Tout d'abord, $\mathfrak{A} \neq \emptyset$ puisque la fonction nulle $\mathcal{O} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est trivialement un élément de $\mathfrak{A}$

⇒ Soit $f \in \mathfrak{A}$ et $g \in \mathfrak{A}$.
- ⋆ Il existe donc $A_f \geqslant 0$ et $a \geqslant 0$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $|x| \geqslant a$, alors $|f(x)| \leqslant A_f\,|x|$
- ⋆ De même, il existe donc $A_g \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $|x| \geqslant b$, alors $|g(x)| \leqslant A_g\,|x|$

Soit $c \geqslant \max(a,b)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \geqslant c$. Alors $|x| \geqslant a$ et $|x| \geqslant b$ et donc :

$$|(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant (A_f + A_g)\,|x|$$

Et donc $f + g \in \mathfrak{A}$

⇒ Soit $f \in \mathfrak{A}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Il existe donc $A_f \geqslant 0$ et $a \geqslant 0$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $|x| \geqslant a$, alors $|f(x)| \leqslant A_f\,|x|$
Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \geqslant a$. Alors :

$$|(\lambda f)(x)| = |\lambda f(x)| \leqslant |\lambda|\,|f(x)| \leqslant (|\lambda|\,A_f +)\,|x|$$

Et donc $\lambda f \in \mathfrak{A}$

$\mathfrak{A}$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Exercice 39 :

Démontrer que l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ telles que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (|u_n|)^{\frac{1}{n}} < +\infty$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel

Pour nous simplifier la vie, nous posons $\mathcal{E}$ cet ensemble.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{E}$, alors $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (|u_n|)^{\frac{1}{n}} < +\infty$. Appelons $M_u = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (|u_n|)^{\frac{1}{n}}$. Remarquons que $M_u \geqslant 0$
Nous avons alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(|u_n|)^{\frac{1}{n}} \leqslant M_u$, ce qui est équivalent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| \leqslant M_u^n$.

⇒ **Soient** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{E}$ **et** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{E}$ **; montrons que** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{E}$
Nous avons alors :

$$|u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n| \leqslant M_u^n + M_v^n \leqslant (M_u + M_v)^n$$

Et donc : $(|u_n + v_n|)^{\frac{1}{n}} \leqslant M_u + M_v$, et ce, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; en particulier $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (|u_n + v_n|)^{\frac{1}{n}} < +\infty$

Ainsi, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{E}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{E}$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{E}$

Remarque 1

Pour affirmer que $M_u^n + M_v^n \leqslant (M_u + M_v)^n$, nous avons utilisé le fait que pour tout $a \geqslant 0$ et tout $b \geqslant 0$, nous avons $a^n + b^n \leqslant (a+b)^n$.

On démontre cette inégalité à l'aide de la formule du binôme de Newton. En effet :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = a^n + b^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \geqslant 0$, nous avons $(a+b)^n \geqslant a^n + b^n$

$\Rightarrow$ **Soient** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{E}$ **et** $\lambda \in \mathbb{K}$**; montrons que** $\lambda (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{E}$

Nous avons :

$$|\lambda u_n| = |\lambda| \, |u_n| \leqslant |\lambda| \, M_u^n \iff (|\lambda u_n|)^{\frac{1}{n}} \leqslant \max(\{1, |\lambda|\}) \, M_u$$

Ainsi, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\lambda (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{E}$

Remarque 2

Dans la question précédente, nous avons

$$(|\lambda u_n|)^{\frac{1}{n}} \leqslant |\lambda|^{\frac{1}{n}} \, M_u^n \leqslant \max(\{1, |\lambda|\}) \, M_u$$

C'est à dire que nous avons utilisé le fait que pour $a \geqslant 0$, nous avons $a^{\frac{1}{n}} \leqslant \max(\{1, a\})$

- $\star$ C'est totalement vrai pour $a = 0$, ainsi que pour $a = 1$
- $\star$ Supposons $a > 0$ et $a \neq 1$. Nous allons étudier la fonction $f(x) = a^{\frac{1}{x}}$ pour $x \geqslant 1$.
  - $\triangleright$ Nous avons $f(x) = e^{\frac{\ln a}{x}}$ et la dérivée $f'(x) = -\dfrac{\ln a}{x^2} e^{\frac{\ln a}{x}}$.
  - $\triangleright$ Ainsi, si $0 < a < 1$, nous avons $f'(x) > 0$ et la fonction est toujours croissante. Nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln a}{x}} = 1$ et donc, pour tout $x \geqslant 1$, nous avons $f(x) = a^{\frac{1}{x}} \leqslant 1$
  - $\triangleright$ Si $a > 1$, alors $f'(x) < 0$ et la fonction est toujours décroissante et donc pour tout $x \geqslant 1$,nous avons $f(x) = a^{\frac{1}{x}} \leqslant f(1) = a$
- $\star$ Ainsi, en restreignant la fonction $f(x) = a^{\frac{1}{x}}$ pour $x \geqslant 1$ à $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons :
  - $\triangleright$ Si $a = 0$, alors $\max(\{1, a\}) = 1$ et $0^{\frac{1}{n}} = 0 \leqslant \max(\{1, 0\}) = 1$
  - $\triangleright$ Si $a = 1$, alors $\max(\{1, a\}) = 1$ et $1^{\frac{1}{n}} = 1 \leqslant \max(\{1, 1\}) = 1$
  - $\triangleright$ Si $0 < a < 1$, alors $\max(\{1, a\}) = 1$ et comme $a^{\frac{1}{n}} \leqslant 1$, nous avons $a^{\frac{1}{n}} \leqslant \max(\{1, a\})$
  - $\triangleright$ Si $a > 1$, alors $\max(\{1, a\}) = a$ et comme $a^{\frac{1}{n}} \leqslant a$, nous avons $a^{\frac{1}{n}} \leqslant \max(\{1, a\})$

Ainsi, dans tous les cas, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \geqslant 0$, nous avons $a^{\frac{1}{n}} \leqslant \max(\{1, a\})$

Exercice 40 :

On considère $\mathbb{R}_4[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 4. Dans $\mathbb{R}_4[X]$, on considère les ensembles suivants :

- $\rightarrow$ $F_1 = \{P \in \mathbb{R}_4[X]$ *tel que* $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0\}$
- $\rightarrow$ $F_2 = \{P \in \mathbb{R}_4[X]$ *tel que* $P(1) = P'(2) = 0\}$

Il est facile de démontrer que F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_4[X]$

1. *Donner une base de F_1 et de F_2*

Nous allons utiliser le fait que, pour $a \in \mathbb{R}$, la famille $\left\{ \dfrac{(X-a)^k}{k!} \text{ où } 0 \leqslant k \leqslant 5 \right\}$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$ et utiliser la **formule de Taylor pour les polynômes :**

$$P(X) = P(a) + (X-a) P'(a) + \frac{(X-a)^2}{2!} P''(a) + \frac{(X-a)^3}{3!} P^{(3)}(a) + \frac{(X-a)^4}{4!} P^{(4)}(a)$$

$\Rightarrow$ **Etudions d'abord** F_1

De la remarque ci-dessus, tout polynôme de F_1 peut s'écrire :

$$P(X) = P(1) + (X-1)P'(1) + \frac{(X-1)^2}{2!}P''(1) + \frac{(X-1)^3}{3!}P^{(3)}(1) + \frac{(X-1)^4}{4!}P^{(4)}(1)$$

Comme $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$, tout polynôme de F_1 s'écrit :

$$\begin{aligned} P(X) &= \frac{(X-1)^3}{3!}P^{(3)}(1) + \frac{(X-1)^4}{4!}P^{(4)}(1) \\ &= \frac{(X-1)^3}{3!}\left(P^{(3)}(1) + \frac{(X-1)}{4}P^{(4)}(1)\right) \end{aligned}$$

Ce qui montre, tout de suite, que tout polynôme $P \in F_1$ est un multiple, dans $\mathbb{R}_4[X]$, de $(X-1)^3$ En posant $P_1(X) = \frac{(X-1)^3}{3!}$ et $P_2(X) = \frac{(X-1)^4}{4!}$, la famille $\{P_1, P_2\}$ engendre F_1, et comme $\deg P_1 = 3$ et $\deg P_2 = 4$, les polynômes P_1 et P_2 sont de degrés différents et forment une famille libre.
$\{P_1, P_2\}$ est donc une base de F_1

$\Rightarrow$ **Etudions maintenant F_2**
De la même manière, tout polynôme de F_2 peut s'écrire :

$$P(X) = P(2) + (X-2)P'(2) + \frac{(X-2)^2}{2!}P''(2) + \frac{(X-2)^3}{3!}P^{(3)}(2) + \frac{(X-2)^4}{4!}P^{(4)}(2)$$

Comme $P'(2) = 0$, tout polynôme de F_2 s'écrit :

$$P(X) = P(2) + \frac{(X-2)^2}{2!}P''(2) + \frac{(X-2)^3}{3!}P^{(3)}(2) + \frac{(X-2)^4}{4!}P^{(4)}(2)$$

Comme $P(1) = 0$, nous avons :

$$0 = P(2) + \frac{P''(2)}{2!} - \frac{P^{(3)}(2)}{3!} + \frac{P^{(4)}(2)}{4!}$$

Et donc, en remplaçant $P(2)$ par $P(2) = -\frac{P''(2)}{2!} + \frac{P^{(3)}(2)}{3!} - \frac{P^{(4)}(2)}{4!}$, nous obtenons :

$$P(X) = \frac{\left[(X-2)^2 - 1\right]}{2!}P''(2) + \frac{\left[(X-2)^3 + 1\right]}{3!}P^{(3)}(2) + \frac{\left[(X-2)^4 - 1\right]}{4!}P^{(4)}(2)$$

En posant $Q_1(X) = \frac{\left[(X-2)^2 - 1\right]}{2!}$, $Q_2(X) = \frac{\left[(X-2)^3 - 1\right]}{3!}$ et $Q_3(X) = \frac{\left[(X-2)^4 - 1\right]}{4!}$, la famille $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ engendre F_2, et comme $\deg Q_1 = 2$, $\deg Q_2 = 3$, et $\deg Q_3 = 4$, les polynômes Q_1, Q_2 et Q_2 sont de degrés différents et forment une famille libre.
La famille $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ est donc une base de F_2

2. *Avons nous $\mathbb{R}_4[X] = F_1 \oplus F_2$?*

La réponse est **non**

$\Rightarrow$ Nous pourrions le penser, puisque $\dim F_1 = 2$, $\dim F_2 = 3$ et $\dim \mathbb{R}_4[X] = 5$, mais c'est insuffisant

$\Rightarrow$ Soit $P \in F_1 \cap F_2$

- $\star$ Tout d'abord $P \in F_1$, et donc P est, dans $\mathbb{R}_4[X]$, un multiple de $(X-1)^3$, c'est à dire qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ et $D \in \mathbb{R}$ tels que :

$$P(X) = (X-1)^3(CX + D)$$

- $\star$ Puis, P est aussi un élément de F_2. Le fait que $P(1) = 0$ ne nous apporte rien de plus. Utilisons la seconde condition d'appartenance à F_2, c'est à dire $P'(2) = 0$ et calculons, pour ce faire, $P'(X)$:

$$\begin{aligned} P'(X) &= 3(X-1)^2(CX + D) + C(X-1)^3 \\ &= (X-1)^2(3CX + 3D + C(X-1)) \\ &= (X-1)^2(4CX + 3D - C) \end{aligned}$$

Donc, $P'(2) = 7C + 3D$ et $P'(2) = 0 \Longleftrightarrow C = -\dfrac{3}{7}D$
Ainsi :

$$\begin{aligned} P(X) = &\ (X-1)^3\left(-\frac{3}{7}DX + D\right) \\ = &\ \frac{D}{7}(X-1)^3(-3X+7) \\ = &\ \lambda (X-1)^3(-3X+7) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ainsi $F_1 \cap F_2 \neq \{\mathcal{O}\}$. $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ de dimension 1 et de base le polynôme $(X-1)^3(-3X+7)$

Exercice 41 :

$\mathbb{C}_n[X]$ est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n (avec $n \geqslant 2$). *Soit $x_1 \in \mathbb{C}$ et $x_2 \in \mathbb{C}$*
E_1 est l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}_n[X]$ qui s'annulent en x_1 et E_1, l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}_n[X]$ qui s'annulent en x_2

1. *Montrer que E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}_n[X]$*
2. *Démontrer que $\mathbb{C}_n[X] = E_1 + E_2$*
3. *Avons-nous $\mathbb{C}_n[X] = E_1 \oplus E_2$?*

Nous allons faire une correction globale de cet exercice.

1. Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, on appelle $\Phi_\alpha : \mathbb{C}_n[X] \longrightarrow \mathbb{C}$, la fonction définie par :
$$\begin{cases} \Phi_\alpha : \mathbb{C}_n[X] & \longrightarrow \mathbb{C} \\ \qquad\qquad P & \longmapsto \Phi_\alpha(P) = P(\alpha) \end{cases}$$
En fait Φ_α est une forme linéaire sur $\mathbb{C}_n[X]$
Donc, $E_1 = \ker \Phi_{x_1}$ et $E_2 = \ker \Phi_{x_2}$ sont des hyperplans de $\mathbb{C}_n[X]$ nous avons donc $\dim E_1 = \dim E_2 = n$, et nous n'avons certainement pas $\mathbb{C}_n[X] = E_1 \oplus E_2$
D'autre part :
$$E_1 = \left\{P \in \mathbb{C}_n[X] \text{ tels que } P(X) = (X - x_1)\left(a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0\right)\right\}$$
$$E_2 = \left\{P \in \mathbb{C}_n[X] \text{ tels que } P(X) = (X - x_2)\left(b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_1X + b_0\right)\right\}$$
Et
$$E_1 \cap E_2 = \left\{P \in \mathbb{C}_n[X] \text{ tels que } P(X) = (X - x_1)(X - x_2)\left(c_{n-2}X^{n-2} + \cdots + c_1X + c_0\right)\right\}$$
L'intersection est donc très loin d'être réduite au seul polynôme nul.
2. Tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ peut cependant s'écrire comme somme d'un polynôme de E_1 et d'un polynôme de E_2.
En effet, soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$ avec $P(X) = c_nX^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_1X + c_0$. Il faut trouver un polynôme $P_1 \in E_1$ et un polynôme $P_2 \in E_2$ tels que $P = P_1 + P_2$.
En fait, il faut trouver $2n$ nombres complexes $a_{n-1}, \dots, a_1, a_0, b_{n-1}, \dots, b_1, b_0$ tels que :
$$\begin{aligned} c_nX^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_1X + c_0 = &\ (X - x_1)\left(a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0\right) + \\ &\ (X - x_2)\left(b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_1X + b_0\right) \end{aligned}$$
En développant la partie de droite, nous obtenons un système linéaire de n équations à $2n$ inconnues :
$$\begin{aligned} a_{n-1} + b_{n-1} = &\ c_n \\ -a_{n-1}x_1 + a_{n-2} + b_{n-2} - x_2b_{n-1} = &\ c_{n-1} \\ \vdots \quad &\ \vdots \\ x_1a_0 - x_2b_0 = &\ c_0 \end{aligned}$$
qui nous donne, par substitutions successives, une infinité de solutions [5]

5. J'aurais voulu une solution plus subtile à cette question. Je n'ai donc trouvé qu'une méthode d'équations linéaires qui nous offre une infinité de solutions, ce qui est conforme aux structures même de E_1 et de E_2

Exercice 42 :

Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère le sous-ensemble E défini par :

$$E = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \text{ tels que } \int_0^1 xP(x)\,\mathrm{d}x = 0 \right\}$$

1. *Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$*

   $\Rightarrow$ Tout d'abord, $E \neq \emptyset$, puisque le polynôme nul $\mathcal{O}$ est évidemment dans E

   $\Rightarrow$ Soient $P \in E$ et $Q \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$

   Alors, $\displaystyle\int_0^1 xP(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et $\displaystyle\int_0^1 xQ(x)\,\mathrm{d}x = 0$

   Avons-nous $\lambda P + \mu Q \in E$? Démontrons le.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x(\lambda P + \mu Q)(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x(\lambda P(x) + \mu Q(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x\lambda P(x) + x\mu Q(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x\lambda P(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x\mu Q(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lambda \int_0^1 xP(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_0^1 xQ(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

   Et donc $\lambda P + \mu Q \in E$

   Et donc, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$

2. *Soit $B_1(x) = x$. Démontrer que E et $\mathrm{Vect}(B_1)$ sont en somme directe.*

   Soit $P \in E \cap \mathrm{Vect}(B_1)$.

   Alors, $P = aB_1$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_0^1 xaB_1(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Nous avons :

$$\int_0^1 xaB_1(x)\,\mathrm{d}x = 0 \iff \int_0^1 ax^2\,\mathrm{d}x = 0 \iff a\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 0 \iff \frac{a}{3} = 0 \iff a = 0$$

   Ainsi $P = \mathcal{O}$ et $E \cap \mathrm{Vect}(B_1) = \{\mathcal{O}\}$

   E et $\mathrm{Vect}(B_1)$ sont donc en somme directe.

Pour aller plus loin

1. Il ne faut pas confondre « Etre en somme directe » et « Etre supplémentaire »
   - ⋆ **Etre en somme directe** veut dire que si $F = E + \mathrm{Vect}(B_1)$, comme $E \cap \mathrm{Vect}(B_1) = \{\mathcal{O}\}$, alors $F = E \oplus \mathrm{Vect}(B_1)$, mais nous n'avons pas $\mathbb{R}[X] = E \oplus \mathrm{Vect}(B_1)$
   - ⋆ **Etre supplémentaire** veut dire que $\mathbb{R}[X] = E \oplus \mathrm{Vect}(B_1)$, ce que nous n'avons pas ici.
2. Un autre point de vue pour résoudre l'exercice, est un point de vue de **produit scalaire** dans $\mathbb{R}[X]$.

   Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ et tout polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, la forme bilinéaire B définie par :

$$B(P,Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$$

   est un produit scalaire.

   De ce point de vue, E est l'ensemble des polynômes orthogonaux à $\mathrm{Vect}(B_1)$, et alors, bien entendu, $E \cap \mathrm{Vect}(B_1) = \{\mathcal{O}\}$

3. Un autre point de vue consiste à considérer $\Phi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \Phi(P) = \displaystyle\int_0^1 xP(x)\,\mathrm{d}x \end{array} \right.$$

Φ est une forme linéaire dont E est le noyau, et comme $\Phi(B_1) = \dfrac{1}{3}$, nous avons encore $E \cap \mathrm{Vect}(B_1) = \{\mathcal{O}\}$

D'autre part, si n est le degré du polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, nous avons $P(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ et comme $XP(X) = a_n X^{n+1} + a_{n-1}X^n + \cdots + a_1 X^2 + a_0 X$, nous avons :

$$\Phi(P) = \frac{a_n}{n+2} + \frac{a_{n-1}}{n+1} + \cdots + \frac{a_1}{3} + \frac{a_0}{2}$$

et donc si, pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$,nous avons $a_k > 0$, alors $\Phi(P) > 0$ et donc $P \notin E$.
Ainsi, si $P \in E$, alors il existe i_0, avec $0 \leqslant i_0 \leqslant n$ tel que $a_{i_0} \leqslant 0$

Exercice 43 :

Dans l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère les fonctions f_k définies pour tout $k \in \mathbb{N}$ par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_k : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_k(x) = \sin kx \end{array} \right.$$

On appelle $\delta_p(q)$ le symbole de Kronecker défini par : $\delta_p(q) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } p = q \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$

1. *Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $q \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(px)\sin(qx)\,\mathrm{d}x = \delta_p(q)\pi$*

   Dans la résolution, nous utiliserons beaucoup de formules trigonométriques

   $\Rightarrow$ Si $p = q$, alors $\sin(px)\sin(qx) = \sin^2(px) = \dfrac{1}{2}(1 - \cos(2px))$, de telle sorte que :

$$\int_0^{2\pi} \sin(px)\sin(qx)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \sin^2(px)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(2px)\,\mathrm{d}x$$

   Or :

   $\star$ $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x = \pi$

   $\star$ Et $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(2px)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2px}{2p}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}(\sin 4p\pi - \sin 0) = 0$

   Et donc, pour conclure, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2(px)\,\mathrm{d}x = \pi$

   $\Rightarrow$ Si $p \neq q$, alors, $\sin(px)\sin(qx) = \dfrac{1}{2}(\cos(p-q)x - \cos(p+q)x)$, de telle sorte que :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(px)\sin(qx)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi} \cos(p-q)x - \cos(p+q)x\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{\sin(p-q)x}{p-q} - \frac{\sin(p+q)x}{p+q}\right]_0^{2\pi}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

   En conclusion, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $q \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(px)\sin(qx)\,\mathrm{d}x = \delta_p(q)\pi$

2. *En déduire que la famille $F = \{f_k; k \in \mathbb{N}\}$ est libre.*

   On doit montrer que toute sous-famille finie non vide de la famille $F = \{f_k; k \in \mathbb{N}\}$ est libre.

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $\{i_1, \dots i_p\}$ p entiers tels que $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$.
Soient $\lambda_1 \in \mathbb{K}, \lambda_2 \in \mathbb{K}, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 f_{i_1} + \lambda_2 f_{i_2} + \cdots + \lambda_p f_{i_p} = 0$.
Ceci veut dire, que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_1 \sin i_1 x + \lambda_2 \sin i_2 x + \cdots + \lambda_p \sin i_p x = 0$$

Ce qui signifie que :

$$\int_0^{2\pi} \left(\lambda_1 \sin i_1 x + \lambda_2 \sin i_2 x + \cdots + \lambda_p \sin i_p x\right) \mathrm{d}x = 0$$

Multiplions $\lambda_1 \sin i_1 x + \lambda_2 \sin i_2 x + \cdots + \lambda_p \sin i_p x$ par $\sin i_1 x$, alors, nous avons :

$$\lambda_1 \sin^2 i_1 x + \lambda_2 \sin i_2 x \sin i_1 x + \cdots + \lambda_p \sin i_p x \sin i_1 x = 0$$

Et, en passant à l'intégrale :

$$\int_0^{2\pi} \left(\lambda_1 \sin^2 i_1 x + \lambda_2 \sin i_2 x \sin i_1 x + \cdots + \lambda_p \sin i_p x \sin i_1 x\right) \mathrm{d}x = 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\lambda_1 \int_0^{2\pi} \sin^2 i_1 x \,\mathrm{d}x + \lambda_2 \int_0^{2\pi} \sin i_2 x \sin i_1 x \,\mathrm{d}x + \cdots + \lambda_p \int_0^{2\pi} \sin i_p x \sin i_1 x \,\mathrm{d}x = 0$$

De la question précédente, comme $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$, nous avons $\lambda_1 \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2 i_1 x \,\mathrm{d}x = \lambda_1 \pi$ et, pour $k \geqslant 2$, $\lambda_k \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin i_k x \sin i_1 x \,\mathrm{d}x = 0$
Nous en concluons donc que $\lambda_1 = 0$.
Pour montrer que $\lambda_k = 0$, nous procédons de manière identique en multipliant $\lambda_1 \sin i_1 x + \lambda_2 \sin i_2 x + \cdots + \lambda_p \sin i_p x$ par $\sin i_k x$, puis en passant à l'intégrale.
Ainsi, nous montrons que la famille $F = \{f_k; k \in \mathbb{N}\}$ est libre. Plus généralement, la famille $F = \{f_k; k \in \mathbb{N}\}$ est une base du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\left(\{f_k; k \in \mathbb{N}\}\right)$

Pour aller plus loin

La famille $\left\{e^{inx}; n \in \mathbb{Z}\right\}$ forme une base de $\mathrm{Vect}\left(\left\{e^{inx}; n \in \mathbb{Z}\right\}\right)$.
En effet :

$\Rightarrow$ Si nous posons $\left\langle e^{ipx}/e^{iqx}\right\rangle = \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ipx} e^{-iqx} \,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} e^{i(p-q)x} \,\mathrm{d}x$, nous avons :

- $\star$ Si $p = q$, $\left\langle e^{ipx}/e^{ipx}\right\rangle = \displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x = 2\pi$
- $\star$ Si $p \neq q$, $\left\langle e^{ipx}/e^{iqx}\right\rangle = \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i(p-q)x} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{p-q}\left[e^{i(p-q)x}\right]_0^{2\pi} = 0$

$\Rightarrow$ Montrons que c'est une famille libre.
Comme tout à l'heure, soit $p \in \mathbb{N}$ et $\{i_1, \dots i_p\}$ p entiers tels que $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$.
Soient $\lambda_1 \in \mathbb{K}, \lambda_2 \in \mathbb{K}, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 e^{i_1 xi} + \lambda_2 e^{i_2 xi} + \cdots + \lambda_p e^{i_p xi} = 0$
En multipliant l'expression $\lambda_1 e^{i_1 xi} + \lambda_2 e^{i_2 xi} + \cdots + \lambda_p e^{i_p xi}$ par $e^{i_k xi}$ où $1 \leqslant k \leqslant p$, puis en passant à l'intégrale, nous obtenons $\lambda_k = 0$
Ainsi, la famille $\left\{e^{inx}; n \in \mathbb{Z}\right\}$ forme une famille libre

En conclusion la famille $\left\{e^{inx}; n \in \mathbb{Z}\right\}$ forme une base de $\mathrm{Vect}\left(\left\{e^{inx}; n \in \mathbb{Z}\right\}\right)$.

On verra *(en L_2)* que l'expression $\left\langle e^{ipx}/e^{iqx}\right\rangle = \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ipx} e^{-iqx} \,\mathrm{d}x$ est un produit scalaire et que la famille $\left\{e^{inx}; n \in \mathbb{Z}\right\}$ est une famille orthogonale.

Exercice 44 :

$\mathbb{K}[X]$ est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Nous considérons l'application u : $\mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u:\mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & u[P] \end{array}\right. \quad \text{où } u[P](X) = P(\alpha)X + P(\beta) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{K} \text{ et } \beta \in \mathbb{K} \text{ et } \alpha \neq \beta$$

1. *Démontrer que u est une application linéaire*

   Ce n'est pas une question difficile.
   Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $Q \in KX$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\begin{aligned} u[\lambda P + \mu Q](X) = & \ [\lambda P + \mu Q](\alpha)X + [\lambda P + \mu Q](\beta) \\ = & \ (\lambda P(\alpha) + \mu Q(\alpha))X + \lambda P(\beta) + \mu Q(\beta) \\ = & \ \lambda P(\alpha)X + \mu Q(\alpha)X + \lambda P(\beta) + \mu Q(\beta) \\ = & \ \lambda(P(\alpha)X + P(\beta)) + \mu(Q(\alpha)X + Q(\beta)) \\ = & \ \lambda u[P](X) + \mu u[Q](X) \\ = & \ [\lambda u[P] + \mu u[Q]](X) \end{aligned}$$

   Et nous avons $u[\lambda P + \mu Q] = \lambda u[P] + \mu u[Q]$
   u est donc une application linéaire

2. *Déterminer $\ker u$ le noyau de u et $\mathrm{Im} u$, l'image de u*

   ▷ **Recherche de $\mathrm{Im} u$**
   Il est évident que $\mathrm{Im} u \subset \mathbb{K}_1[X]$ où $\mathbb{K}_1[X]$ est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur à 1, à coefficients dans $\mathbb{K}$.
   Réciproquement, si $AX + B$ est un polynôme de $\mathbb{K}_1[X]$, existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $u[P](X) = AX + B$

   Il suffit de prendre le polynôme $P \in \mathbb{K}_1[X]$ défini par $P(X) = \dfrac{A(X-\beta) - B(X-\alpha)}{\alpha - \beta}$

   Et donc, $\mathrm{Im} u = \mathbb{K}_1[X]$

   ▷ **Recherche de $\ker u$**
   Si $P \in \ker u$, alors $P(\alpha) = P(\beta) = 0$, et donc α et β sont des racines de P et P s'écrit donc :

$$P(X) = (X-\alpha)(X-\beta)Q(X)$$

   Ainsi,

$$\ker u = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tels que } P(X) = (X-\alpha)(X-\beta)Q(X)\}$$

   ▷ **Que se passe-t-il si $\alpha = \beta$?**
   Alors, nous avons $P(\alpha) = P(\beta)$ et $u[P](X) = P(\alpha)(X+1)$. Nous concluons simplement :
   - ⋆ Si $B(X) = X + 1$, alors $\mathrm{Im} u = \mathrm{Vect}(\{B\})$
   - ⋆ Et $\ker u = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tels que } P(X) = (X-\alpha)Q(X)\}$

Exercice 45 :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p_1 et p_2 deux projecteurs de E tels que $p_1 \circ p_2 = \mathcal{O}_E$ et $q = p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1$. Montrer que q est un projecteur et trouver son noyau et son image.

⇒ **Montrons que q est un projecteur**
Il faut donc démontrer que $q \circ q = q$

$$\begin{aligned} q \circ q = & \ (p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1) \circ (p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1) \\ = & \ p_1 \circ p_1 + p_1 \circ p_2 - p_1 \circ (p_2 \circ p_1) + p_2 \circ p_1 + p_2 \circ p_2 - p_2 \circ (p_2 \circ p_1) - \\ & \quad (p_2 \circ p_1) \circ p_1 - (p_2 \circ p_1) \circ p_2 + (p_2 \circ p_1) \circ (p_2 \circ p_1) \\ = & \ p_1 - (p_1 \circ p_2) \circ p_1 + p_2 \circ p_1 + p_2 - (p_2 \circ p_2) \circ p_1 - p_2 \circ (p_1 \circ p_1) - \\ & \quad p_2 \circ (p_1 \circ p_2) + p_2 \circ (p_1 \circ p_2) \circ p_1 \\ = & \ p_1 + p_2 \circ p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1 - p_2 \circ p_1 \\ = & \ p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1 = q \end{aligned}$$

q est donc un projecteur

$\Rightarrow$ **Recherche du noyau de** q
Soit $u \in \ker q$. Alors, $q(u) = 0 \Longleftrightarrow p_1(u) + p_2(u) - (p_2 \circ p_1)(u) = 0$
En composant par p_1 à gauche, nous avons :

$$p_1 \circ (p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1) = p_1 \circ p_1 + p_1 \circ p_2 - p_1 \circ (p_2 \circ p_1) = p_1 - (p_1 \circ p_2) \circ p_1 = p_1$$

Ainsi, si $q(u) = 0$, alors $p_1(u) = 0$. Et donc, si $u \in \ker q$, alors $u \in \ker p_1$
De même, en composant par p_2 à gauche, nous avons :

$$\begin{aligned} p_2 \circ (p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1) = & \ p_2 \circ p_1 + p_2 \circ p_2 - p_2 \circ (p_2 \circ p_1) = p_2 \circ p_1 + p_2 - (p_2 \circ p_2) \circ p_1 \\ = & \ p_2 \circ p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1 \\ = & \ p_2 \end{aligned}$$

Ainsi, si $q(u) = 0$, alors $p_2(u) = 0$. Et donc, si $u \in \ker q$, alors $u \in \ker p_2$
Donc, si $u \in \ker q$, alors $u \in \ker p_1 \cap \ker p_2$
La réciproque est évidente : si $u \in \ker p_1 \cap \ker p_2$, alors $u \in \ker q$
Et nous avons bien $\ker q = v$

$\Rightarrow$ **Nous allons montrer que** $\mathrm{Im}q = \mathrm{Im}p_1 \oplus \mathrm{Im}p_2$
Pas si évident de trouver ce résultat ; pour ma part j'ai traîné pas mal avant de penser -et de démontrer- le résultat

- $\star$ <u>Tout d'abord, nous avons $\mathrm{Im}q = \mathrm{Im}p_1 + \mathrm{Im}p_2$</u>
  Soit $u \in E$
  Alors, $q(u) \in \mathrm{Im}q$ et :
  $$\begin{aligned} q(u) = & \ (p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1)(u) \\ = & \ p_1(u) + p_2(u - p_1(u)) \end{aligned}$$
  Or, $p_1(u) \in \mathrm{Im}p_1$ et $p_2(u - p_1(u)) \in \mathrm{Im}p_2$.
  Ainsi, tout élément de $\mathrm{Im}q$ peut se décomposer en une somme d'un élément de $\mathrm{Im}p_1$ et d'un élément de $\mathrm{Im}p_2$. Donc, $\mathrm{Im}q = \mathrm{Im}p_1 + \mathrm{Im}p_2$
- $\star$ <u>Ensuite, nous avons $\mathrm{Im}p_1 \cap \mathrm{Im}p_2 = \{0\}$</u>
  Pour démontrer que $\mathrm{Im}p_1$ et $\mathrm{Im}p_2$ sont en somme directe, il faut démontrer que $\mathrm{Im}p_1 \cap \mathrm{Im}p_2 = \{0\}$
  Soit donc $u \in \mathrm{Im}p_1 \cap \mathrm{Im}p_2$.
  Comme $u \in \mathrm{Im}p_1$, nous avons $p_1(u) = u$; de même, comme $u \in \mathrm{Im}p_2$, nous avons $p_2(u) = u$. Donc :
  $$(p_1 \circ p_2)(u) = p_1[p_2(u)] = p_1[u] = u$$
  C'est à dire $(p_1 \circ p_2)(u) = u$
  De l'hypothèse $p_1 \circ p_2 = \mathcal{O}_E$, nous déduisons que $u = 0$.
  Donc, $\mathrm{Im}p_1 \cap \mathrm{Im}p_2 = \{0\}$

D'où nous avons bien $\mathrm{Im}q = \mathrm{Im}p_1 \oplus \mathrm{Im}p_2$

Exercice 46 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , $f \in \mathcal{L}(E)$, $a \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}$ deux scalaires tels que $a \neq b$. On suppose que $(f - a\mathrm{Id}_E) \circ (f - b\mathrm{Id}_E) = \mathcal{O}_E$

Avant de commencer, remarquons que $(f - a\mathrm{Id}_E) \circ (f - b\mathrm{Id}_E) = (f - b\mathrm{Id}_E) \circ (f - a\mathrm{Id}_E)$, la démonstration se faisant par un calcul très simple :

$$\begin{aligned} (f - a\mathrm{Id}_E) \circ (f - b\mathrm{Id}_E) = & \ f^2 - bf - af + ab\mathrm{Id}_E = f^2 - (a+b)f + ab\mathrm{Id}_E = \mathcal{O}_E \\ (f - b\mathrm{Id}_E) \circ (f - a\mathrm{Id}_E) = & \ f^2 - af - bf + ab\mathrm{Id}_E = f^2 - (a+b)f + ab\mathrm{Id}_E = \mathcal{O}_E \end{aligned}$$

1. *Etablir l'existence de $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$ non nuls tels que $\lambda(f - a\mathrm{Id}_E)$ et $\mu(f - a\mathrm{Id}_E)$ soient des projecteurs.*

   $\Rightarrow$ De l'identité $(f - a\mathrm{Id}_E) \circ (f - b\mathrm{Id}_E) = \mathcal{O}_E$, nous tirons :

   $$(f - a\mathrm{Id}_E) \circ (f - b\mathrm{Id}_E) = \mathcal{O}_E \Longleftrightarrow f^2 - (a+b)f + ab\mathrm{Id}_E = \mathcal{O}_E \Longleftrightarrow f^2 = (a+b)f - ab\mathrm{Id}_E$$

$\Rightarrow$ **Etudions maintenant** $(f - a\mathrm{Id}_E) \circ (f - a\mathrm{Id}_E)$
Nous avons, en utilisant l'identité $f^2 = (a+b)\, f - ab\mathrm{Id}_E$:

$$\begin{aligned} (f - a\mathrm{Id}_E) \circ (f - a\mathrm{Id}_E) = & \ f^2 - 2af + a^2 \mathrm{Id}_E \\ = & \ (a+b)\, f - ab\mathrm{Id}_E - 2af + a^2 \mathrm{Id}_E \\ = & \ (b-a)\, f - a\,(b-a)\,\mathrm{Id}_E \\ = & \ (b-a)\,(f - a\mathrm{Id}_E) \end{aligned}$$

En posant $\lambda = \dfrac{1}{b-a}$, nous avons $(f - a\mathrm{Id}_E) \circ (f - a\mathrm{Id}_E) = \dfrac{1}{\lambda}\,(f - a\mathrm{Id}_E)$, et donc :

$$\begin{aligned} [\lambda\,(f - a\mathrm{Id}_E)] \circ [\lambda\,(f - a\mathrm{Id}_E)] = & \ \lambda^2\,[(f - a\mathrm{Id}_E) \circ (f - a\mathrm{Id}_E)] \\ = & \ \lambda^2 \left[\frac{1}{\lambda}\,(f - a\mathrm{Id}_E)\right] \\ = & \ \lambda\,(f - a\mathrm{Id}_E) \end{aligned}$$

Ainsi $\dfrac{1}{b-a}\,(f - a\mathrm{Id}_E)$ est un projecteur

$\Rightarrow$ **Continuons avec** $(f - b\mathrm{Id}_E) \circ (f - b\mathrm{Id}_E)$
Vous vous doutez bien que la méthode pour y arriver sera la même !!
Nous avons, en utilisant l'identité $f^2 = (a+b)\, f - ab\mathrm{Id}_E$:

$$\begin{aligned} (f - a\mathrm{Id}_E) \circ (f - a\mathrm{Id}_E) = & \ f^2 - 2bf + b^2 \mathrm{Id}_E \\ = & \ (a+b)\, f - ab\mathrm{Id}_E - 2bf + b^2 \mathrm{Id}_E \\ = & \ (a-b)\, f - b\,(a-b)\,\mathrm{Id}_E \\ = & \ (a-b)\,(f - b\mathrm{Id}_E) \end{aligned}$$

En utilisant le même raisonnement que ci-dessus, et en posant $\mu = \dfrac{1}{a-b}$, nous avons $\dfrac{1}{a-b}\,(f - b\mathrm{Id}_E)$ qui est un projecteur

$\Rightarrow$ **Allons un peu plus loin**
En posant $p = \dfrac{1}{b-a}\,(f - a\mathrm{Id}_E)$ et $q = \dfrac{1}{a-b}\,(f - b\mathrm{Id}_E)$, nous avons $f = bp + aq$. En effet :

$$\begin{aligned} bp + aq = & \ \frac{b}{b-a}\,(f - a\mathrm{Id}_E) + \frac{a}{a-b}\,(f - b\mathrm{Id}_E) \\ = & \ \left(\frac{b}{b-a} + \frac{a}{a-b}\right) f - \left(\frac{ab}{b-a} + \frac{ab}{a-b}\right) \mathrm{Id}_E \\ = & \ \left(\frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a}\right) f \\ = & \ f \end{aligned}$$

2. *Montrer que* $\mathrm{Im}\,(f - b\mathrm{Id}_E) = \ker\,(f - a\mathrm{Id}_E)$.

$\Rightarrow$ **Montrons que** $\mathrm{Im}\,(f - b\mathrm{Id}_E) \subset \ker\,(f - a\mathrm{Id}_E)$
Soit donc $y \in \mathrm{Im}\,(f - b\mathrm{Id}_E)$; il nous faut montrer que $y \in \ker\,(f - a\mathrm{Id}_E)$
Comme $y \in \mathrm{Im}\,(f - b\mathrm{Id}_E)$, il existe $x \in E$ tel que $y = (f - b\mathrm{Id}_E)\,(x)$; et donc :

$$(f - a\mathrm{Id}_E)\,(y) = (f - a\mathrm{Id}_E) \circ (f - b\mathrm{Id}_E)\,(x) = \mathcal{O}_E\,(x) = 0$$

et donc $y \in \ker\,(f - a\mathrm{Id}_E)$ et nous avons bien $\mathrm{Im}\,(f - b\mathrm{Id}_E) \subset \ker\,(f - a\mathrm{Id}_E)$

$\Rightarrow$ **Montrons que** $\ker\,(f - a\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Im}\,(f - b\mathrm{Id}_E)$
Soit $x \in \ker\,(f - a\mathrm{Id}_E)$. Il nous faut montrer que $x \in \mathrm{Im}\,(f - b\mathrm{Id}_E)$, c'est à dire qu'il existe $x' \in E$ tel que $\mathrm{Im}\,(f - b\mathrm{Id}_E)\,(x') = x$
Comme $x \in \ker\,(f - a\mathrm{Id}_E)$, alors $(f - a\mathrm{Id}_E)\,(x) = 0 \Longleftrightarrow f\,(x) = ax$, et donc $(f - b\mathrm{Id}_E)\,(x) = ax - bx = (a-b)\,x$.
Posons $x' = \dfrac{1}{a-b}x$, alors :

$$(f - b\mathrm{Id}_E)\,(x') = f\,(x') - bx' = f\left(\frac{1}{a-b}x\right) - \frac{b}{a-b}x = \frac{1}{a-b}f\,(x) - \frac{b}{a-b}x = \frac{a}{a-b}x - \frac{b}{a-b}x = x$$

Nous avons montré que $x \in \mathrm{Im}\,(f - b\mathrm{Id}_E)$ et que, donc, $\ker\,(f - a\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Im}\,(f - b\mathrm{Id}_E)$

En conclusion, $\text{Im}(f - b\text{Id}_E) = \ker(f - a\text{Id}_E)$

3. *Calculer f^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

   Nous allons utiliser le fait que $f = bp + aq$, que $p \circ q = q \circ p = \mathcal{O}_E$ et que, pour $k \geqslant 1$, $p^k = p$ ainsi que $q^k = q$
   Comme p et q commutent, on utilise le binôme de Newton :

   $$f^n = (bp + aq)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k} p^k q^{n-k} = b^n p^n + a^n q^n$$

   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n = b^n p^n + a^n q^n$

4. *Si $ab \neq 0$, montrer que $f \in \text{GL}(E)$*

   De l'identité $f^2 - (a+b)f + ab\text{Id}_E = \mathcal{O}_E$, nous tirons $f^2 - (a+b)f = -ab\text{Id}_E$, c'est à dire

   $$f \circ (f - (a+b)\text{Id}_E) = -ab\text{Id}_E$$

   Si $ab \neq 0$, posons $\varphi = \dfrac{1}{ab}((a+b)\text{Id}_E - f)$. Alors,

   $$f \circ \varphi = \varphi \circ f = \text{Id}_E$$

   Et donc $\varphi = f^{-1}$
   Ainsi, f est bijective, c'est à dire $f \in \text{GL}(E)$ et $f^{-1} = \dfrac{1}{ab}((a+b)\text{Id}_E - f)$

Exercice 47 :

Dans tout l'exercice $\mathbb{K}$ est un corps commutatif

1. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E tel que, pour tout $x \in E$, la famille $\{x, f(x)\}$ soit une famille liée. Il faut montrer que f est une homothétie.*

   $\Rightarrow$ Si f est une homothétie, alors, pour tout $x \in E$, la famille $\{x, f(x)\}$ est une famille liée
   $\Rightarrow$ Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E tel que, pour tout $x \in E$, la famille $\{x, f(x)\}$ soit une famille liée, c'est à dire qu'il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$, à priori dépendant de $x \in E$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.
   Soient $x \in E$ et $y \in E$ 2 vecteurs de E quelconques non nuls*(Le cas de nullité est trivial)*.
   Nous avons $f(x) = \lambda_x x$ et $f(y) = \lambda_y y$ et il nous faut montrer que $\lambda_x = \lambda_y$
   - $\star$ On suppose que la famille $\{x, y\}$ est une famille liée. Alors, $y = \mu x$ avec $\mu \in \mathbb{K}$
     Nous avons $f(y) = \lambda_y y = \lambda_y \mu x$ et $f(y) = f(\mu x) = \mu f(x) = \mu \lambda_x x$.
     Donc,$f(y) = \lambda_y \mu x = \mu \lambda_x x$ d'où nous tirons $\lambda_x = \lambda_y$
   - $\star$ On suppose, maintenant, que la famille $\{x, y\}$ est une famille libre.
     Comme tout à l'heure, $f(x) = \lambda_x x$ et $f(y) = \lambda_y y$. Nous allons nous pencher sur le cas $x + y$:

     $$\begin{aligned} f(x+y) = &\ \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y} x + \lambda_{x+y} y \\ = &\ f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y \end{aligned}$$

     Nous avons donc

     $$\lambda_{x+y} x + \lambda_{x+y} y = \lambda_x x + \lambda_y y \iff (\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0$$

     De l'indépendance de x et de y, nous déduisons que $\lambda_{x+y} - \lambda_x = \lambda_{x+y} - \lambda_y = 0$, c'est à dire $\lambda_{x+y} - \lambda_x = \lambda_{x+y} - \lambda_y = 0$ et donc, nous déduisons que $\lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$

   f est donc une homothétie.

2. *Soient E et F 2 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels . Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(E, F)$ 2 applications linéaires . On suppose que, pour tout $x \in E$, il existe un nombre $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $g(x) = \lambda_x f(x)$. Il faut montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $g = \lambda f$*

   Comme tout à l'heure, soient $x \in E$ et $y \in E$ 2 vecteurs de E quelconques non nuls *(Le cas de nullité est trivial)*.
   Nous avons $g(x) = \lambda_x f(x)$ et $g(y) = \lambda_y f(y)$ et il nous faut montrer que $\lambda_x = \lambda_y$

- ⋆ On suppose que les deuc vecteurs x et y sont liés, c'est à dire $y = \mu x$, où $\mu \in \mathbb{K}$ et donc que la famille $\{f(x), f(y)\}$ est une famille liée.
  Alors, $f(y) = \mu f(x)$.
  Nous avons $g(y) = \lambda_y f(y) = \lambda_y \mu f(x)$.
  Et $g(y) = g(\mu x) = \mu g(x) = \mu \lambda_x f(x)$; nous avons donc $g(y) = \lambda_y \mu f(x) = \mu \lambda_x f(x)$
  D'où nous tirons $\lambda_x = \lambda_y$
- ⋆ On suppose que la famille $\{f(x), f(y)\}$ soit une famille libre.
  Alors, $g(y) = \lambda_y f(y)$ et $g(x) = \lambda_x f(x)$ et :

$$\begin{aligned} g(x+y) = & \lambda_{x+y} f(x+y) \\ = & \lambda_{x+y} f(x) + \lambda_{x+y} f(y) \\ = & g(x) + g(y) = \lambda_x f(x) + \lambda_y f(y) \end{aligned}$$

  D'où nous tirons :

$$\lambda_{x+y} f(x) + \lambda_{x+y} f(y) = \lambda_x f(x) + \lambda_y f(y) \Longleftrightarrow (\lambda_{x+y} - \lambda_x) f(x) + (\lambda_{x+y} - \lambda_y) f(y) = 0$$

  De l'indépendance de $f(x)$ et $f(y)$, nous tirons $\lambda_{x+y} - \lambda_x = \lambda_{x+y} - \lambda_y = 0$, c'est à dire $\lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $g = \lambda f$

3. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et E_0 un sous-espace vectoriel de E, strictement inclus dans E* (C'est à dire $E_0 \neq E$ et $E_0 \not\subseteq E$). *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.*
   On suppose que pour tout $x \in E \setminus E_0$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$. Il faut monter que f est une homothétie

   ⇒ On peut faire remarquer que si E_0 est un sous-espace vectoriel de E, $E \setminus E_0$ ne l'est pas forcément.

   ⇒ Soit $x \in E \setminus E_0$ et $y \in E \setminus E_0$.
   - ⋆ Alors nous ne pouvons avoir $x + y \in E_0$ et $x - y \in E_0$.
     En effet, supposons que nous les ayions en en même temps, c'est à dire $x + y \in E_0$ et $x - y \in E_0$.
     Comme E_0 est un sous-espace vectoriel , alors $(x+y) + (x-y) \in E_0$, c'est à dire $2x \in E_0$, ce qui est impossible
   - ⋆ Nous avons donc $x + y \in E \setminus E_0$ ou $x - y \in E \setminus E_0$ qu'il est possible de résumer en écrivant qu'il existe $\varepsilon \in \{-1; +1\}$, tel que $x + \varepsilon y \in E \setminus E_0$
   - ⋆ Supposons $x \in E \setminus E_0$ et $y \in E \setminus E_0$ liés.
     Alors, il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $y = \mu x$
     Nous avons $f(y) = \lambda_y y = \lambda_y \mu x$ et $f(y) = f(\mu x) = \mu f(x) = \mu \lambda_x x$.
     Donc,$f(y) = \lambda_y \mu x = \mu \lambda_x x$ d'où nous tirons $\lambda_x = \lambda_y$
   - ⋆ Supposons, maintenant, que $x \in E \setminus E_0$ et $y \in E \setminus E_0$ soient libres.
     Soit donc $\varepsilon \in \{-1; +1\}$, tel que $x + \varepsilon y \in E \setminus E_0$. Alors :

$$\begin{aligned} f(x+\varepsilon y) = & \lambda_{x+\varepsilon y}(x+\varepsilon y) = \lambda_{x+\varepsilon y} x + \varepsilon \lambda_{x+\varepsilon y} y \\ = & f(x) + \varepsilon f(y) \\ = & \lambda_x x + \varepsilon \lambda_y y \end{aligned}$$

     Donc :

$$\lambda_{x+\varepsilon y} x + \varepsilon \lambda_{x+\varepsilon y} y = \lambda_x x + \varepsilon \lambda_y y \Longleftrightarrow (\lambda_{x+\varepsilon y} - \lambda_x) x + \varepsilon (\lambda_{x+\varepsilon y} - \lambda_y) y$$

     De l'indépendance de x et de y, nous obtenons $\lambda_{x+\varepsilon y} - \lambda_x = \lambda_{x+\varepsilon y} - \lambda_y = 0$, c'est à dire $\lambda_x = \lambda_y$

   Ainsi, pour tout $x \in E \setminus E_0$, nous avons $f(x) = \lambda x$

   ⇒ Soit, maintenant, $x \in E_0$; il existe $y_0 \in E \setminus E_0$ tel que $x + y_0 \in E \setminus E_0$ et $x - y_0 E \setminus E_0$.
   Nous avons alors $x = \dfrac{1}{2}[(x + y_0) + (x - y_0)]$ et donc :

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x+y_0) + f(x-y_0)] = \frac{1}{2}[\lambda(x+y_0) + \lambda(x-y_0)] = \lambda x$$

   Ainsi, nous déduisons que pour tout $x \in E$, $f(x) = \lambda x$

Exercice 48 :

1. *$\mathbb{K}[X]$ est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Pour tout $x \in \mathbb{K}$, on définit l'application $\Phi_x : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}$ par :*

$$\begin{cases} \Phi_x : \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \qquad P & \longmapsto & \Phi_x(P) = P(x) \end{cases}$$

(a) *Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{K}$, Φ_x est une forme linéaire sur $\mathbb{K}[X]$*

Cette question ne pose aucune difficulté. Pour la résoudre nous allons utiliser les opérations d'addition des polynômes et de la multiplication par un scalaire.
Soient donc $x \in \mathbb{K}$, $P \in \mathbb{K}[X]$, $Q \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$; alors :

$$\Phi_x(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(x) = \lambda P(x) + \mu Q(x) = \lambda \Phi_x(P) + \mu \Phi_x(Q)$$

Donc $\Phi_x(\lambda P + \mu Q) = \lambda \Phi_x(P) + \mu \Phi_x(Q)$
Φ_x est donc bien linéaire.

(b) *Démontrer que la famille $(\Phi_x)_{x\in\mathbb{K}}$ est une famille libre de $\mathcal{L}(\mathbb{K}[X], \mathbb{K}) = (\mathbb{K}[X])^*$*

Pour démontrer cette question, nous devons extraire une famille finie quelconque de la famille $(\Phi_x)_{x\in\mathbb{K}}$ et démontrer qu'elle est libre.
Soient donc $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n éléments de $\mathbb{K}$, 2 à 2 distincts et $\{\Phi_{x_i}, 1 \leqslant i \leqslant n\}$, les formes linéaires correspondantes.
Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, n éléments de $\mathbb{K}$ tels que $\lambda_1\Phi_{x_1} + \lambda_2\Phi_{x_2} + \cdots + \lambda_n\Phi_{x_n} = \mathcal{O}_{(\mathbb{K}[X])^*}$
Ceci veut donc dire que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$:

$$\lambda_1\Phi_{x_1}(P) + \lambda_2\Phi_{x_2}(P) + \cdots + \lambda_n\Phi_{x_n}(P) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 P(x_1) + \lambda_2 P(x_2) + \cdots + \lambda_n P(x_n) = 0$$

L'égalité précédente est vraie pour tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$, c'est à dire pour les polynômes de degré 1, 2 ou 452896.

Incise
Nous allons introduire, pour résoudre cet exercice, les polynômes de Lagrange adaptés aux scalaires $x_1, x_2, \ldots, x_n$ [6]. Ce sont des polynômes du type :

$$L_i(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$$

Nous avons alors

$$L_i(x_i) = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \frac{x_i - x_k}{x_i - x_k} = 1$$
$$L_i(x_j) = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \frac{x_j - x_k}{x_i - x_k} = 0 \text{ si } i \neq j$$

En somme $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$
Donc, En appliquant l'égalité

$$\lambda_1\Phi_{x_1}(P) + \lambda_2\Phi_{x_2}(P) + \cdots + \lambda_n\Phi_{x_n}(P) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 P(x_1) + \lambda_2 P(x_2) + \cdots + \lambda_n P(x_n) = 0$$

6. C'est une indication que j'aurais pu donner à la rédaction de l'énoncé. Pour résoudre cette question, j'ai mis bien longtemps...cherchant en particulier à partir des polynômes de degré 1, 2 ou 25639. C'est en relisant des textes sur l'approximation polynômiale que les polynômes de Lagrange me sont revenus...J'ai voulu laisser la réflexion du lecteur se faire toute seule

aux polynômes de Lagrange $L_i; 1 \leqslant i \leqslant n$:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 L_1(x_1) + \lambda_2 L_1(x_2) + \cdots + \lambda_n L_1(x_n) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0\\
&\lambda_1 L_2(x_1) + \lambda_2 L_2(x_2) + \cdots + \lambda_n L_2(x_n) = 0 \Longrightarrow \lambda_2 = 0\\
&\quad\vdots\\
&\lambda_1 L_i(x_1) + \lambda_2 L_i(x_2) + \cdots + \lambda_i L_i(x_i) + \cdots + \lambda_n L_i(x_n) = 0 \Longrightarrow \lambda_i = 0\\
&\quad\vdots\\
&\lambda_1 L_n(x_1) + \lambda_2 L_n(x_2) + \cdots + \lambda_n L_n(x_n) = 0 \Longrightarrow \lambda_n = 0
\end{aligned}$$

D'où nous avons $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$

La famille $\{\Phi_{x_i}, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ forme donc une famille libre et, plus généralement, la famille $(\Phi_x)_{x\in\mathbb{K}}$ est une famille libre de $\mathcal{L}(\mathbb{K}[X], \mathbb{K}) = (\mathbb{K}[X])^*$

2. *On se place, maintenant dans $\mathbb{K}_n[X]$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degré inférieur ou égal à n.*

   (a) *Soient $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, $n+1$ scalaires du corps $\mathbb{K}$ 2 à 2 distincts. D'après la question précédente, la famille $\{\Phi_{x_0}, \Phi_{x_1}, \cdots, \Phi_{x_n}\}$ forme une base de $(\mathbb{K}_n[X])^*$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathbb{K}_n[X]$.*
   En chercher la base duale sur $\mathbb{K}_n[X]$

   L'incise de la question précédente prend, ici, tout son sens.
   D'après le théorème 3.8.2, étant donnée une base $\{\Phi_{x_0}, \Phi_{x_1}, \cdots, \Phi_{x_n}\}$ de $(\mathbb{K}_n[X])^*$, il existe une et une seule base $P_0, \ldots, P_n$ de $\mathbb{K}_n[X]$ telle que $\Phi_{x_i}(P_j) = \delta_{i,j}$.
   En réutilisant le résultat de la question précédente, cette base est donnée par les polynômes de Lagrange adaptés aux $n+1$ scalaires $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$. Ainsi, les polynômes :

$$L_i(X) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{X - x_j}{x_i - x_j} \text{ avec } 0 \leqslant i \leqslant n$$

   Forment la base duale de $\{\Phi_{x_0}, \Phi_{x_1}, \cdots, \Phi_{x_n}\}$

   (b) *Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, montrer qu'il existe des réels $\lambda_0 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \in \mathbb{R}, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, uniques, tels que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$*

$$\int_0^1 P(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i)$$

   On sait que $F : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ P & \longmapsto & F(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\, \mathrm{d}t \end{array}\right.$$

   F est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$
   Pour $n+1$ réels distincts 2 à 2 $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, les formes linéaires $\{\Phi_{x_0}, \Phi_{x_1}, \cdots, \Phi_{x_n}\}$ forment une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$.
   Il existe donc $n+1$ réels $\lambda_0 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \in \mathbb{R}, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, uniques, tels que,

$$F = \lambda_0 \Phi_{x_0} + \lambda_1 \Phi_{x_1} + \cdots + \lambda_n \Phi_{x_n}$$

   C'est à dire, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$

$$F(P) = \lambda_0 \Phi_{x_0}(P) + \lambda_1 \Phi_{x_1}(P) + \cdots + \lambda_n \Phi_{x_n}(P) \Longleftrightarrow \int_0^1 P(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i)$$

   Ce que nous voulions

Pour aller plus loin

Il est très facile de démontrer que la famille des polynômes de Lagrange $\{L_i; 0 \leqslant i \leqslant n\}$ forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Soient donc $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ $n+1$ scalaires de $\mathbb{K}$ tels que :

$$\lambda_0 L_0 + \lambda_1 L_1 + \cdots + \lambda_n L_n = \mathcal{O}$$

ce qui veut dire que, pour tout $x \in \mathbb{K}$, nous avons :

$$\lambda_0 L_0(x) + \lambda_1 L_1(x) + \cdots + \lambda_n L_n(x) = \mathcal{O}(x) = 0$$

En particulier si $x = x_0, x = x_1, \ldots, x = x_n$ et donc :

$$\begin{array}{l}
\lambda_0 L_0(x_0) + \lambda_1 L_1(x_0) + \cdots + \lambda_n L_n(x_0) = 0 \Longrightarrow \lambda_0 = 0 \\
\lambda_0 L_0(x_1) + \lambda_1 L_1(x_1) + \cdots + \lambda_n L_n(x_1) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0 \\
\quad\vdots \\
\lambda_0 L_0(x_i) + \lambda_1 L_1(x_i) + \cdots + \lambda_i L_i(x_i) + \cdots + \lambda_n L_n(x_i) = 0 \Longrightarrow \lambda_i = 0 \\
\quad\vdots \\
\lambda_0 L_0(x_n) + \lambda_1 L_1(x_n) + \cdots + \lambda_n L_n(x_n) = 0 \Longrightarrow \lambda_n = 0
\end{array}$$

Et donc $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ et la famille $\{L_i; 0 \leqslant i \leqslant n\}$ est libre et forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$

Exercice 49 :

1. *Soient A et B 2 $\mathbb{C}$-espaces vectoriels et $f : A \longrightarrow B$ une application $\mathbb{R}$-linéaire. Il faut démontrer que f est $\mathbb{C}$-linéaire si et seulement si, pour tout $x \in A$, $f(ix) = if(x)$*

   On suppose $f : A \longrightarrow B$ une application $\mathbb{R}$-linéaire.
   → Si f est aussi $\mathbb{C}$-linéaire, il est évident qu'alors, pour tout $x \in A$, $f(ix) = if(x)$
   → Réciproquement, supposons que f soit $\mathbb{R}$-linéaire et que pour tout $x \in A$, $f(ix) = if(x)$
   Soit alors $z = a + ib$ un nombre complexe ; pour tout $x \in A$, nous avons :

$$\begin{array}{rcl}
f(zx) = & & f((a+ib)x) \\
& = & f(ax + bix) = f(ax) + f(bix) \\
& = & af(x) + bf(ix) \\
& = & af(x) + bif(x) \\
& = & (a+ib)f(x) = zf(x)
\end{array}$$

   f est donc $\mathbb{C}$-linéaire

2. *Soit, maintenant, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On considère le produit cartésien $E \times E$ dans lequel, nous définissons :*
   — ***Une addition interne*** *:*
   Pour tout $(x, y) \in E \times E$ et $(x', y') \in E \times E$ $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$
   — ***Une loi externe*** *:*
   Pour tout $(x, y) \in E \times E$ et tout $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $\alpha = a + ib$, $\alpha(x, y) = (ax - by, bx + ay)$
   Montrer que $E \times E$ muni de ces deux lois est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel que nous noterons $E_{\mathbb{C}}$

   La présentation classique de la loi externe n'est pas, ici, respectée. Une présentation classique pourrait être celle-ci :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\Phi : \mathbb{C} \times (E \times E) & \longrightarrow & E \times E \\
(a + ib, (x, y)) & \longmapsto & \Phi[(a + ib, (x, y))] = (ax - by, bx + ay)
\end{array}\right.$$

   Mais, comme c'est le dernier exercice de la longue liste des exercices proposés, je suppose que vous maîtrisez bien ! !

   ⇒ **$(E \times E, +)$ est un groupe commutatif**
   Comme $(E, +)$ est un groupe commutatif (puisque E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel), $(E \times E, +)$ est un produit direct de groupes commutatifs et est donc un groupe commutatif

⇒ **Etude de la loi externe**
Dans la résolution qui suit, nous écrivons $\lambda = a + ib$ et $\mu = c + id$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mu \in \mathbb{C}$
Alors pour tout $(x, y) \in E \times E$, tout $(x_1, y_1) \in E \times E$, tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $\mu \in \mathbb{C}$

⋆ Montrons que $(\lambda\mu)(x, y) = \lambda(\mu(x, y))$ Pour commencer :

$$\begin{aligned}(\lambda\mu)(x, y) = &\ (ac - bd + i(bc + ad))(x, y)\\ = &\ ((ac - bd)x - (bc + ad)y, (bc + ad)x + (ac - bd)y)\end{aligned}$$

Et maintenant

$$\begin{aligned}\lambda(\mu(x, y)) = &\ \lambda(cx - dy, dx + cy)\\ = &\ (a(cx - dy) - b(dx + cy), b(cx - dy) + a(dx + acy))\\ = &\ (acx - ady - bdx - bcy, bcx - bdy + adx + acy)\\ = &\ ((ac - bd)x - (ad + bc)y, (bc + ad)x + (ac - bd)y)\end{aligned}$$

Nous avons bien $(\lambda\mu)(x, y) = \lambda(\mu(x, y))$

⋆ Montrons que $\lambda[(x, y) + (x_1, y_1)] = \lambda(x, y) + \lambda(x_1, y_1)$
Tout d'abord, $(x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1)$, et donc :

$$\begin{aligned}\lambda[(x, y) + (x_1, y_1)] = &\ \lambda(x + x_1, y + y_1)\\ = &\ (a + ib)(x + x_1, y + y_1)\\ = &\ [a(x + x_1) - b(y + y_1), b(x + x_1) + a(y + y_1)]\\ = &\ [ax + ax_1 - by - by_1, bx + bx_1 + ay + ay_1]\\ = &\ (ax - by, bx + ay) + (ax_1 - by_1, bx_1 + ay_1)\\ = &\ \lambda(x, y) + \lambda(x_1, y_1)\end{aligned}$$

⋆ Montrons que $(\lambda + \mu)(x, y) = \lambda(x, y) + \mu(x, y)$
Nous avons

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu)(x, y) = &\ [(a + ib) + (c + id)](x, y)\\ = &\ [(a + c) + i(b + d)](x, y)\\ = &\ [(a + c)x - (b + d)y, (b + d)x + (a + c)y]\\ = &\ (ax + cx - by - dy, bx + dx + ay + cy)\\ = &\ (ax - by, bx + ay) + (cx - dy, dx + cy)\\ = &\ (a + ib)(x, y) + (c + id)(x, y)\\ = &\ \lambda(x, y) + \mu(x, y)\end{aligned}$$

⋆ E, pour terminer, montrons que $1 \times (x, y) = (x, y)$
Nous avons $1 = 1 + 0i$, et donc :

$$\begin{aligned}1 \times (x, y) = &\ (1 + 0i)(x, y)\\ = &\ (1 \times x - 0 \times y, 0 \times x + 1 \times y) = (x, y)\end{aligned}$$

Donc, $E \times E$ muni de ces deux lois est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel

3. *Soit $J : E \longrightarrow E_{\mathbb{C}}$ une application définie par :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} J : E & \longrightarrow & E_{\mathbb{C}}\\ x & \longmapsto & J(x) = (x, 0)\end{array}\right.$$

(a) Montrer que J est $\mathbb{R}$-linéaire

(b) Montrer que J est injective

(c) Montrer que, pour tout $(x, y) \in E_{\mathbb{C}}$, nous avons $(x, y) = J(x) + iJ(y)$

▷ **J est $\mathbb{R}$-linéaire**
⋆ Soient $x \in E$ et $y \in E$. Alors :

$$J(x + y) = (x + y, 0) = (x, 0) + (y, 0) = J(x) + J(y)$$

⋆ Soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, comme E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel , $\lambda x \in E$ et, dans $E_{\mathbb{C}}$:

$$\lambda (x,0) = (\lambda + i0)(x,0) = (\lambda x - 0 \times 0, 0x + \lambda 0) = (\lambda x, 0)$$

Donc :

$$J(\lambda x) = (\lambda x, 0) = \lambda (x,0) = \lambda J(x)$$

J est donc $\mathbb{R}$-linéaire

▷ **J est injective**
Soient $x \in E$ et $y \in E$ tels que $J(x) = J(y)$
Alors $J(x) = J(y) \Longleftrightarrow (x,0) = (y,0) \Longleftrightarrow x = y$
J est donc injective

▷ **Pour tout $(x,y) \in E_{\mathbb{C}}$, nous avons $(x,y) = J(x) + iJ(y)$**
Il suffit d'utiliser la définition :

$$J(x) + iJ(y) = (x,0) + i(y,0) = (x,0) + (0 \times y - 1 \times 0, 1 \times y + 0 \times 0) = (x,0) + (0,y) = (x,y)$$

Nous avons donc $(x,y) = J(x) + iJ(y)$

4. *Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel quelconque et $f : E \longrightarrow V$ une application $\mathbb{R}$-linéaire. Montrer qu'il existe une application $\tilde{f} : E_{\mathbb{C}} \longrightarrow V$, $\mathbb{C}$-linéaire telle que $f = \tilde{f} \circ J$*

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel quelconque et $f : E \longrightarrow V$ une application $\mathbb{R}$-linéaire. En fait on nous demande de trouver une fonction $\tilde{f} : E_{\mathbb{C}} \longrightarrow V$ telle que le schéma suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "J"'] & V \\ & E_{\mathbb{C}} \arrow[u, "\tilde{f}"'] \end{tikzcd}$$

C'est à dire que nous aurons donc $f = \tilde{f} \circ J$

▷ **Supposons qu'il existe une fonction $\tilde{f} : E_{\mathbb{C}} \longrightarrow V$, $\mathbb{C}$-linéaire telle que $f = \tilde{f} \circ J$**
Alors, pour tout $(x,y) \in E_{\mathbb{C}}$, nous avons :

$$\begin{aligned} \tilde{f}[(x,y)] &= \tilde{f}[J(x) + iJ(y)] \\ &= \tilde{f}[J(x)] + i\tilde{f}[J(y)] \text{ par } \mathbb{C}\text{-linéarité} \\ &= \tilde{f} \circ J(x) + i\tilde{f} \circ J(y) \\ &= f(x) + if(y) \text{ car } f = \tilde{f} \circ J \end{aligned}$$

Ainsi, si $\tilde{f}$ existe, alors, elle est définie par $\tilde{f}[(x,y)] = f(x) + if(y)$. $\tilde{f}$ est donc entièrement déterminée par f et est donc unique.

▷ **Considérons la fonction $\tilde{f} : E_{\mathbb{C}} \longrightarrow V$, définie par $\tilde{f}[(x,y)] = f(x) + if(y)$**

⋆ Nous avons, pour tout $x \in E$ $f(x) = \tilde{f} \circ J(x)$
Soit $x \in E$. Alors, puisque f est $\mathbb{R}$-linéaire et que donc $f(0) = 0$, nous avons :

$$\tilde{f} \circ J(x) = \tilde{f}[J(x)] = \tilde{f}[(x,0)] = f(x) + if(0) = f(x)$$

Ainsi, pour tout $x \in E$, nous avons $f(x) = \tilde{f} \circ J(x)$

⋆ $\tilde{f} : E_{\mathbb{C}} \longrightarrow V$ est $\mathbb{R}$-linéaire
◊ Soient $(x,y) \in E_{\mathbb{C}}$ et $(x_1,y_1) \in E_{\mathbb{C}}$; alors :

$$\begin{aligned} \tilde{f}[(x,y) + (x_1,y_1)] &= \tilde{f}[(x + x_1, y + y_1)] \\ &= f(x + x_1) + if(y + y_1) \text{ par définition de } \tilde{f} \\ &= f(x) + f(x_1) + i(f(y) + f(y_1)) \text{ par } \mathbb{R}\text{-linéarité de } f \\ &= f(x) + if(y) + f(x_1) + if(y_1) \\ &= \tilde{f}(x,y) + \tilde{f}(x_1,y_1) \end{aligned}$$

Nous avons donc $\tilde{f}[(x,y) + (x_1,y_1)] = \tilde{f}[(x,y)] + \tilde{f}[(x_1,y_1)]$

$\lozenge$ Soient $a \in R$ et $(x, y) \in E_{\mathbb{C}}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\tilde{f}\left[a\,(x, y)\right] &= \tilde{f}\left[(ax, ay)\right] \\
&= f\,(ax) + i\,(ay) \\
&= af\,(x) + ai\,(y) \ \text{ par } \mathbb{R}-\text{linéarité de } f \\
&= a\left[f\,(x) + i\,(y)\right] \\
&= a\tilde{f}\left[(x, y)\right]
\end{aligned}$$

Nous avons donc, pour $a \in R$ et $(x, y) \in E_{\mathbb{C}}$ $\tilde{f}\left[a\,(x, y)\right] = a\tilde{f}\left[(x, y)\right]$

$\tilde{f} : E_{\mathbb{C}} \longrightarrow V$ est donc bien $\mathbb{R}$-linéaire

$\star$ Montrons maintenant que $\tilde{f} : E_{\mathbb{C}} \longrightarrow V$ est $\mathbb{C}$-linéaire

Comme $\tilde{f} : E_{\mathbb{C}} \longrightarrow V$ est $\mathbb{R}$-linéaire, il nous suffit de montrer que, pour tout $(x, y) \in E_{\mathbb{C}}$, $\tilde{f}\left[i\,(x, y)\right] = i\tilde{f}\left[(x, y)\right]$

$$\begin{aligned}
\tilde{f}\left[i\,(x, y)\right] &= \tilde{f}\left[(0 + i)\,(x, y)\right] \\
&= \tilde{f}\left[(0 \times x - y, x + 0 \times y)\right] \\
&= \tilde{f}\left[(-y, x)\right] \\
&= f\,(-y) + if\,(x) \\
&= -f\,(y) + if\,(x) = i^2 f\,(y) + if\,(x) \\
&= i\,(if\,(y) + f\,(x)) \\
&= i\tilde{f}\left[(x, y)\right]
\end{aligned}$$

Nous avons bien $\tilde{f}\left[i\,(x, y)\right] = i\tilde{f}\left[(x, y)\right]$

$\tilde{f}$ est donc bien $\mathbb{C}$-linéaire

Donc, $\tilde{f}$ définie pour tout $(x, y) \in E_{\mathbb{C}}$ par $\tilde{f}\left[(x, y)\right] = f\,(x) + if\,(y)$ est bien la seule application $\mathbb{C}$-linéaire de $E_{\mathbb{C}}$ dans V telle que $f = \tilde{f} \circ J$