3.2 Sous-espaces vectoriels

3.2.1 Définition de sous-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$ une partie de E
On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

1. $0_E \in F$
2. $(\forall x \in F)\,(\forall y \in F)\,(x + y \in F)$
3. $(\forall x \in F)\,(\forall \lambda \in \mathbb{K})\,(\lambda x \in F)$

Remarque 3 :

1. Un sous-espace vectoriel F est forcément un sous-groupe additif de $(E, +)$
2. Un sous-espace vectoriel est bien entendu, pour les lois induites par celles de E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

3.2.2 Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . Alors :
$F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

1. $F \neq \emptyset$
2. $(\forall x \in F)\,(\forall y \in F)\,(\forall \lambda \in \mathbb{K})\,(\forall \mu \in \mathbb{K})\,(\lambda x + \mu y \in F)$

Démonstration

1. Si F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
   - ▷ Alors $(F, +)$ est un sous-groupe additif de $(E, +)$ et donc $0_E \in F$ et donc $F \neq \emptyset$
   - ▷ D'autre part, soient $x \in F$, $y \in F$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$, alors $\lambda x \in F$ et $\mu y \in F$. De la structure de sous-groupe de F, nous avons $\lambda x + \mu y \in F$

   La condition est donc suffisante
2. Réciproquement, supposons $F \neq \emptyset$ et $(\forall x \in F)\,(\forall y \in F)\,(\forall \lambda \in \mathbb{K})\,(\forall \mu \in \mathbb{K})\,(\lambda x + \mu y \in F)$
   - ▷ Comme $f \neq \emptyset$, il existe $x \in F$, et en faisant $\lambda = \mu = 0$, nous avons $\lambda x + \mu y = 0x + 0y = 0_E$
   - ▷ Ensuite, pour $x \in F$ et $y \in F$, $x + y = 1x + 1y \in F$ et donc $x + y \in F$
   - ▷ Et en prenant $x \in F$ et $y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, nous avons $\lambda x + 0y = \lambda x \in F$

Nous avons donc établi l'équivalence

Remarque 4 :

IMPORTANT et intéressant à retenir
Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors on a nécessairement $0_E \in F$. En d'autres termes, si $0_E \notin F$ alors F n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Exemple 2 :

Des exemples canoniques de sous-espaces vectoriels

1. Premier exemple trivial, mais immensément nécessaire et utile. Dans tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, $\{0_E\}$ et E lui-même sont des sous-espaces vectoriels de E
2. Si E et F dont 2 $\mathbb{K}$-espace vectoriel , alors $E \times \{0_F\}$ est un sous-espace vectoriel de $E \times F$.
   Plus généralement, $\mathbb{K} \times \{0\} \times \{0\}_t imes \cdots \times \{0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$
   (a) Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont :
      - ▷ $\{(0, 0)\}$ et $\mathbb{R}^2$
      - ▷ Les droites vectorielles : $\Delta = \{\lambda\,(x_0, y_0)\ \text{avec}\ \lambda \in \mathbb{R}\}$

   (b) Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont :

- ▷ $\{(0,0,0)\}$ et $\mathbb{R}^3$
- ▷ Les droites vectorielles : $\Delta = \{\lambda\,(x_0, y_0, z_0) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}\}$
- ▷ Les plans vectoriels : $\Pi = \{\lambda\,(x_0, y_0, z_0) + \mu\,(x_1, y_1, z_1) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}\}$

3. Dans $\mathbb{K}[X]$, le sous-ensemble noté $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$
4. Dans $\mathbb{K}^A = \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$, le sous-ensemble des fonctions qui s'annulent en un point $a \in A$ est un sous-espace vectoriel
5. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, le sous ensemble $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est un sous-espace vectoriel
6. De même pour le sous ensembles $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des fonctions k fois continuement dérivables.

Exercice 1 :

On munit $\mathbb{R}^3$ des opérations usuelles, donnant à $\mathbb{R}^3$ la structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel

1. Montrer que $F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x + y - 2z = 0\big\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$
2. Montrer que $G = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x + y - 2z = 1\big\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$
3. Montrer que $H = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } xyz = 0\big\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

Exercice 2 :

Parmi les sous-ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

1. $E_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \text{ telles que } f(1) = 0\}$
2. $E_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \text{ telles que } f(0) = f(1) + 2\}$
3. $E_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \text{ telles que } (\forall x \in \mathbb{R})\, f(x) = f(1 - x)\}$

Exercice 3 :

1. Soit Λ l'ensemble des suites numériques réelles convergeant vers 0. Vérifiez qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
2. Prouver que l'ensemble des suites réelles presque nulles *(c'est à dire qui s'annulent à partir d'un certain rang)* est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel .

3.2.3 Intersection de sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit I un ensemble non vide.
Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille *(finie ou infinie)* de sous-espaces vectoriels de E. Alors $\bigcap\limits_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E

Démonstration

La démonstration n'est pas difficile et nous allons utiliser 3.2.2 pour le faire.

1. Comme, pour tout $i \in I$, F_i est un sous-espace vectoriel de E, alors, pour tout $i \in I$, $0_E \in F_i$, c'est à dire $o_E \in \bigcap\limits_{i \in I} F_i$ et donc $\bigcap\limits_{i \in I} F_i \neq \emptyset$
2. En second lieu, soient $x \in \bigcap\limits_{i \in I} F_i$, $y \in \bigcap\limits_{i \in I} F_i$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$. Alors, comme pour tout $i \in I$, F_i est un sous-espace vectoriel de E, pour tout $i \in I$, $\lambda x + \mu y \in F_i$ et donc $\lambda x + \mu y \in \bigcap\limits_{i \in I} F_i$

Ainsi, $\bigcap\limits_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E

Exercice 4 :

On considère $\mathbb{R}^2$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel .

1. Montrer que $F_1 = \{\lambda(2,3) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $F_2 = \{\lambda(-2,3) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.
2. Est-ce que $F_1 \cup F_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?
3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

3.2.4 Définition

1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ n éléments de E
   On appelle combinaison linéaire de ces n éléments, tout élément de la forme :
   $$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \text{ où } \lambda_i \in \mathbb{K}$$
2. Soit $A \neq \emptyset$ une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
   L'ensemble des combinaisons linéaires d'eléments de A est un sous-espace vectoriel de E noté $\text{Vect}(A)$.
   $$\text{Vect}(A) = \left\{ x \in E \text{ tels que } x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \text{ où } \lambda_i \in \mathbb{K} \text{ et } a_i \in A \right\}$$

Démonstration

Il faut, tout d'abord, remarquer que A peut très bien être un ensemble fini du type $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ ou un ensemble infini. Dans ce cas, la combinaison linéaire $\sum_{i \in I} \lambda_i a_i$ est toujours une combinaison linéaure finie d'éléments de I, c'est à dire que nous extrayons une famille finie $\{i_1, \cdots, i_p\} \subset I$ d'éléments de I et $\sum_{i \in I} \lambda_i a_i = \sum_{k=i_1}^{i_p} \lambda_{i_k} a_{i_k}$; d'où l'énoncé qui ne considère que des sommes finies.

La démonstration du fait que $\text{Vect}(A)$ est un sous-espace vectoriel de E est évidente.

1. Premièrement, $\text{Vect}(A) \neq \emptyset$ puisque $0_E \in \text{Vect}(A)$
   En effet, pour tout $a \in A$, $0_E = 0 \times a$
2. D'autre part, si $u \in \text{Vect}(A)$ et $v \in \text{Vect}(A)$, alors, $u = \sum_{i=i_1}^{i_m} \lambda_i a_i$ et $v = \sum_{k=k_1}^{k_p} \mu_k a_k$, et donc :
   $$u + v = \sum_{i=i_1}^{i_m} \lambda_i a_i + \sum_{k=k_1}^{k_p} \mu_k a_k = \lambda_{i_1} a_{i_1} + \lambda_{i_2} a_{i_2} + \cdots + \lambda_{i_m} a_{i_m} + \mu_{k_1} a_{k_1} + \cdots + \mu_{k_p} a_{k_p}$$
   $u + v$ apparaît donc comme la combinaison linéaire de $i_m + k_p$ éléments de A, et donc $u + v \in \mu_{k_1} a_{k_1} \text{Vect}(A)$
3. Pour terminer, si $u = \sum_{i=i_1}^{i_m} \lambda_i a_i$ est un élément de $\text{Vect}(A)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors $\alpha u = \sum_{i=i_1}^{i_m} \alpha \lambda_i a_i$ est aussi un élément de $\text{Vect}(A)$

Et donc $\text{Vect}(A)$ est un sous-espace vectoriel de E

Remarque 5 :

Il est immédiat que si $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ sont n éléments d'un sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors toute combinaison linéaire des x_i est dans F.

3.2.5 Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $A \subset E$ une partie de E
Alors, il existe un plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A.
Ce sous-espace vectoriel noté $\Gamma(A)$ est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A

Démonstration

Nous appelons $\mathcal{A}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E qui contiennent A.
Alors, $\bigcap\limits_{X \in \mathcal{A}} X$ est un sous-espace vectoriel de E comme intersection des sous-espaces vectoriels de E
D'autre part, comme pour tout $X \in \mathcal{A}$, $A \subset X$ et que, toujours pour tout $X \in \mathcal{A}$, $\bigcap\limits_{X \in \mathcal{A}} X \subset X$, nous avons $\Gamma(A) = \bigcap\limits_{X \in \mathcal{A}} X$

3.2.6 Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $A \subset E$ une partie de E
Alors, $\Gamma(A) = \text{Vect}(A)$
Autrement dit, le plus petit sous-espace vectoriel contenant A ou encore <u>sous-espace vectoriel engendré par A</u> est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A

Démonstration

Soit A une partie de E. On appelle toujours $\mathcal{A}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E qui contiennent A et donc $\Gamma(A) = \bigcap\limits_{X \in \mathcal{A}} X$.
Nous appelons aussi $\text{Vect}(A)$ le sous-espace vectoriel des combinaisons linéaires d'éléments de A

1. <u>Nous démontrons que $\Gamma(A) \subset \text{Vect}(A)$</u>
   Tout d'abord, et clairement, $A \subset \text{Vect}(A)$, et donc, par définition de $\Gamma(A)$, $\Gamma(A) \subset \text{Vect}(A)$
2. <u>Démontrons, maintenant que $\text{Vect}(A) \subset \Gamma(A)$</u>
   Soit X un sous-espace vectoriel de E contenant A, c'est à dire $X \in \mathcal{A}$.
   Alors, toutes les combinaisons linéaires $\sum\limits_{i \in I} \lambda_i a_i$ où $a_i \in A$ et $\lambda_i \in \mathbb{K}$ sont des éléments de X puisque X est un sous-espace vectoriel et que, pour tout $i \in I$, $a_i \in X$.
   Ainsi, tous les éléments de $\text{Vect}(A)$ sont des éléments de X, et ce, pour tout $X \in \mathcal{A}$, et donc, $\text{Vect}(A) \subset \bigcap\limits_{X \in \mathcal{A}} X = \Gamma(A)$

Remarque 6 :

1. On dit que A est un **système générateur** de $\text{Vect}(A)$
2. Par convention, on dira que $\text{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$
3. **Quelques propriétés évidentes :**
   (a) Pour tout $A \subset E$, $A = \text{Vect}(A) \iff A$ sous-espace vectoriel de E
   (b) Pour tout $A \subset E$, $\text{Vect}(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(A)$
   (c) Pour tout $A \subset E$ et tout $B \subset E$, $A \subset B \Longrightarrow \text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$

Exemple 3 :

1. **Droite vectorielle :** *(Voir aussi 3.8.3)*
   Si $x_0 \in E$ avec $x_0 \neq 0_E$, alors le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(\{x_0\}) = \{\lambda x_0 \text{ où } \lambda \in \mathbb{K}\}$ est appelé une <u>droite vectorielle</u> de E.

2. **Plan vectoriel :** *(de même, voir aussi 3.8.3)*
   Si x_0 et x_1 sont deux vecteurs non colinéaires de E, alors le sous-espace vectoriel
   $$\text{Vect}\left(\{x_0, x_1\}\right) = \{\lambda x_0 + \mu x_1 \text{ où } \lambda \in \mathbb{K} \text{ et } \mu \in \mathbb{K}\}$$
   est appelé plan vectoriel de E.
3. Puisque tout polynôme est combinaison linéaire de la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $\mathbb{K}[X] = \text{Vect}\left(\{X^n ; n \in \mathbb{N}\}\right)$
4. De même, $\mathbb{K}_n[X] = \text{Vect}\left(\left\{X^k ; 0 \leqslant k \leqslant n\right\}\right)$
5. L'ensemble $\mathcal{E}$ des suites numériques réelles vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0$$
   sont les suites de la forme $(\lambda 2^n + \mu 5^n)_{n\in\mathbb{N}}$, et donc $\mathcal{E} = \text{Vect}\left(\left\{(2^n)_{n\in\mathbb{N}} ; (5^n)_{n\in\mathbb{N}}\right\}\right)$

Exercice 5 :

$\mathbb{R}^3$ est muni des opérations usuelles de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel . Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. On fournira, dans chaque cas, sa partie génératrice

1. $F_1 = \{(x+y, 2y, x-y) \text{ où } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$
2. $F_2 = \{(x, x, x) \text{ où } x \in \mathbb{R}\}$
3. $F_3 = \{(x-y, 2y, x+y) \text{ où } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$
4. $F_4 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ où } x - y + z = 0\right\}$
5. $F_5 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ où } x - y + z = 0 \text{ et } 2x + 5y + z = 0\right\}$

Exercice 6 :

$\mathbb{R}^3$ est muni des opérations usuelles de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel .
Soient $u = (1, 1, 3)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (2, 1, 0)$
Il faut montrer que l'ensemble $\{u, v, w\}$ est générateur de $\mathbb{R}^3$, autrement dit que $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}\left(\{u, v, w\}\right)$

3.2.7 Somme de 2 sous-espaces vectoriels

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , F et G 2 sous-espaces vectoriels de E
On appelle sous-espace vectoriel somme de F et G l'ensemble $F + G$ ainsi défini :
$$F + G = \{u \in E \text{ tel que } u = x_F + x_G \text{ où } x_F \in F \text{ et } x_G \in G\}$$
$F + G$ est un sous-espace vectoriel de E

Démonstration

Démontrons que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E

⇒ $F + G$ est non vide puisque $0_E \in F + G$.
En effet, comme $0_E \in F$ et $0_E \in G$ et que $0_E = 0_E + 0_E$, nous avons bien $0_E \in F + G$

⇒ D'autre part, soient $u \in F + G$, $v \in F + G$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$
- ⋆ Comme $u \in F + G$, il existe $x_F^u \in F$ et $x_G^u \in G$ tels que $u = x_F^u + x_G^u$
- ⋆ De même, comme $v \in F + G$, il existe $x_F^v \in F$ et $x_G^v \in G$ tels que $v = x_F^v + x_G^v$
- ⋆ Ainsi,
$$\lambda u + \mu v = \lambda\left(x_F^u + x_G^u\right) + \mu\left(x_F^v + x_G^v\right) = \left(\lambda x_F^u + \mu x_F^v\right) + \left(\lambda x_G^u + \mu x_G^v\right)$$
  F étant un sous-espace vectoriel de E, alors $\lambda x_F^u + \mu x_F^v \in F$ et G étant un sous-espace vectoriel de E, alors $\lambda x_G^u + \mu x_G^v \in G$

Et donc, $\lambda u + \mu v \in F + G$

$F + G$ est donc bien un sous-espace vectoriel de E

Remarque 7 :

Cette proposition est aussi vraie pour la somme de n sous-espaces vectoriels de E

3.2.8 Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , $A \subset E$ et $B \subset E$ 2 sous-ensembles de E. Alors

$$\text{Vect}\,(A \cup B) = \text{Vect}\,(A) + \text{Vect}\,(B)$$

Démonstration

1. On démontre que $\text{Vect}\,(A) + \text{Vect}\,(B) \subset \text{Vect}\,(A \cup B)$
   $\rightarrow$ Comme $A \subset A \cup B$, nous avons $\text{Vect}\,(A) \subset \text{Vect}\,(A \cup B)$; de même, $\text{Vect}\,(B) \subset \text{Vect}\,(A \cup B)$
   $\rightarrow$ Soit $y \in \text{Vect}\,(A) + \text{Vect}\,(B)$
   Alors $y = u_A + u_B$ où $u_A \in \text{Vect}\,(A)$ et $u_B \in \text{Vect}\,(B)$
   Or, d'après la remarque précédente, $u_A \in \text{Vect}\,(A \cup B)$ et $u_B \in \text{Vect}\,(A \cup B)$. Comme $\text{Vect}\,(A \cup B)$ est un sous-espace vectoriel de E, $u_A + u_B \in \text{Vect}\,(A \cup B)$, et donc $y \in \text{Vect}\,(A \cup B)$
   En conclusion, $\text{Vect}\,(A) + \text{Vect}\,(B) \subset \text{Vect}\,(A \cup B)$
2. On démontre que $\text{Vect}\,(A \cup B) \subset \text{Vect}\,(A) + \text{Vect}\,(B)$
   D'après la proposition 3.2.7, $\text{Vect}\,(A) + \text{Vect}\,(B)$ est un sous-espace vectoriel de E
   $\rightarrow$ Tout d'abord, $A \subset \text{Vect}\,(A)$ et $B \subset \text{Vect}\,(V)$
   $\rightarrow$ D'autre part, $\text{Vect}\,(A) \subset \text{Vect}\,(A) + \text{Vect}\,(B)$ tout comme $\text{Vect}\,(B) \subset \text{Vect}\,(A) + \text{Vect}\,(B)$
   $\rightarrow$ Ainsi $A \subset \text{Vect}\,(A) + \text{Vect}\,(B)$ et $B \subset \text{Vect}\,(A) + \text{Vect}\,(B)$ et donc, $A \cup B \subset \text{Vect}\,(A) + \text{Vect}\,(B)$
   $\rightarrow$ $\text{Vect}\,(A \cup B)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $A \cup B$; nous avons donc

$$\text{Vect}\,(A \cup B) \subset \text{Vect}\,(A) + \text{Vect}\,(B)$$

De $\text{Vect}\,(A \cup B) \subset \text{Vect}\,(A) + \text{Vect}\,(B)$ et $\text{Vect}\,(A) + \text{Vect}\,(B) \subset \text{Vect}\,(A \cup B)$, nous déduisons

$$\text{Vect}\,(A) + \text{Vect}\,(B) = \text{Vect}\,(A \cup B)$$

Ce que nous voulions

Remarque 8 :

En particulier, si F **et** G **sont 2 sous-espaces vectoriels d'un** $\mathbb{K}$**-espace vectoriel** E, alors

$$\text{Vect}\,(F \cup G) = F + G$$

Exercice 7 :

Dans $\mathbb{R}^3$ muni des opérations usuelles de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel , on considère les ensembles suivants :

1. $F = \{(x, 0, 0)\ \text{ avec } x \in \mathbb{R}\}$
2. $G = \{(y, y, 0)\ \text{ avec } y \in \mathbb{R}\}$

Il faut montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $F + G$

Remarque 9 :

Autre remarque, pratique, mais néanmoins importante.
Considérons $\mathbb{R}^3$ est muni des opérations usuelles de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel . Soient les sous-espaces vectoriels suivants :

- ▷ $F = \{(0, y, z)\ \text{ avec } z \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$
- ▷ $G = \{(x, y, 0)\ \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$

Considérons, maintenant $F + G$.
Nous avons le triplet $(1, 2, 3)$ qui est un élément de $F + G$, puisque $(1, 2, 3) = (1, 1, 0) + (0, 1, 3)$, mais cette décomposition n'est pas unique puisque :

$$(1, 2, 3) = (1, 1, 0) + (0, 1, 3) = (1, -3, 0) + (0, 5, 3)$$

De manière générale, pour tout triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, cette décomposition n'est pas unique, puisque :

$$(x, y, z) = \left(x, \frac{y}{2}, 0\right) + \left(0, \frac{y}{2}, z\right) = (x, -3y, 0) + (0, 4y, z)$$

Quelles sont les conditions d'unicité ?