3.3 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

3.3.1 Théorème

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , F et G 2 sous-espaces vectoriels de E
Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $F + G = E$ et $F \cap G = \emptyset$
2. Tout élément $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = x_F + x_G$ où $x_F \in F$ et $x_G \in G$

Démonstration

1. Supposons que $F + G = E$ et $F \cap G = \emptyset$
   - ▷ De $F + G = E$ nous avons pouvons décomposer tout $x \in E$ en $x = x_F + x_G$ où $x_F \in F$ et $x_G \in G$
   - ▷ Il faut, maintenant, démontrer l'unicité.
     Supposons qu'il y ait 2 décompositions possibles, c'est à dire :
     $$x = x_F + x_G = x_F^1 + x_G^1$$
     Alors $x_F + x_G = x_F^1 + x_G^1 \iff x_F - x_F^1 = x_G^1 - x_G$. En posant $y = x_F - x_F^1 = x_G^1 - x_G$, nous avons $y \in F \cap G$ et donc $y = 0_E$, de telle sorte que $x_F = x_F^1$. et $x_G^1 = x_G$ et l'unicité est démontrée.
2. Supposons que tout élément $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = x_F + x_G$
   - ▷ Que tout $x \in E$ s'écrive $x = x_F + x_G$ montrer que $E = F + G$
   - ▷ Démontrons maintenant que $F \cap G = \emptyset$
     Soit $x \in F \cap G$; alors $x = 0_E + x = x + 0_E$ puisque $x \in F$ et $x \in G$, et de l'unicité de cette décomposition, nous tirons $x = 0_E$

3.3.2 Définition de sous-espaces vectoriels supplémentaires

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , F et G 2 sous-espaces vectoriels de E
Quand l'une des deux conditions équivalentes du théorème 3.3.1 sont vérifiées, on dit que F et G sont supplémentaires dans E et nous notons $E = F \bigoplus G$
On dit encore que E est somme directe de F et de G et que F est un supplémentaire de G dans E

Exemple 4 :

Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions numériques à valeurs complexes, nous considérons $\mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, le sous-espace vectoriel des fonctions impaires et $\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ le sous-espace vectoriel des fonctions paires. Alors, $\mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

En effet :

- ⋆ Que $\mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ soient des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est facile à démontrer
- ⋆ D'autre part, soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
  Posons $i(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ et $p(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$
  De manière évidente, i est une fonction impaire et p une fonction paire ; de plus, nous avons $f = i + p$ et nous pouvons donc conclure que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) + \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$
- ⋆ Démontrons que, maintenant, $\mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \text{O}$ où $\mathcal{O}$ est la fonction nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$
  Soit donc $\varphi \in \mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons :
  $$\varphi(x) = \varphi(-x) = -\varphi(x)$$
  De $\varphi(x) = -\varphi(x)$, nous déduisons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2\varphi(x) = 0 \iff \varphi(x) = 0$, c'est à dire $\varphi = \mathcal{O}$

Nous avons donc bien $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \bigoplus \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Remarque 10 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E. En fait, F admet une infinité de supplémentaires dans E

Exercice 8 :

Dans $\mathbb{R}^3$ muni des opérations usuelles de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel , on considère les ensembles suivants :

1. $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ avec } x + y + z = 0\right\}$
2. $G = \{(y, y, y) \text{ avec } y \in \mathbb{R}\}$

Il faut montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 9 :

Dans $\mathbb{R}^3$ muni des opérations usuelles de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel , on considère les sous-espaces vectoriels suivants :

1. $F = \text{Vect}\left(\{(2, 1, 0) ; (0, 1, 2)\}\right)$
2. $G = \text{Vect}\left(\{(0, 1, 0) ; (1, 0, 2)\}\right)$

F et G sont-ils des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 10 :

Soit $\mathbb{C}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à 3.
Soient E_1, E_2 et E_3 les sous-ensembles de $\mathbb{C}_3[X]$ formés des polynômes multiples respectivement de $(X - 1)$, $\left(X^2 + 1\right)$ et $\left(X^3 + 1\right)$.

1. Montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}_3[X]$
2. Avons nous :
   (a) $\mathbb{C}_3[X] = E_1 \bigoplus E_2$
   (b) $\mathbb{C}_3[X] = E_1 \bigoplus E_3$
   (c) $\mathbb{C}_3[X] = E_2 \bigoplus E_3$

Exercice 11 :

On considère $\mathcal{C}([-1; +1], \mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues de l'intervalle $[-1; +1]$ dans $\mathbb{C}$.
Soient

- ▷ $F = \{f \in \mathcal{C}([-1; +1], \mathbb{C}) \text{ telle que } f \text{ est constante}\}$
- ▷ $G = \left\{f \in \mathcal{C}([-1; +1], \mathbb{C}) \text{ telle que } \displaystyle\int_{-1}^{+1} f(t)\, dt = 0\right\}$

Il faut montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{C}([-1; +1], \mathbb{C})$

Exercice 12 :

Soit $P_0 \in \mathbb{R}[X]$ non nul et F l'ensemble des multiples de P_0 dans $\mathbb{R}[X]$, c'est à dire :

$$F = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } P = P_0 \times Q \text{ où } Q \in \mathbb{R}[X]\}$$

Déterminer un supplémentaire de F. *(Se reporter au chapitre sur les polynômes)*

3.3.3 Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G 2 sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \bigoplus G$
Alors E et $F \times G$ sont en bijection

Démonstration

La démonstration ne devrait pas poser de problème.
Il faut d'abord définir cette bijection.
Tout $u \in E$ se décompose de manière unique en $u = u_F + u_G$ où $u_F \in F$ et $u_G \in G$. Il est donc normal de poser :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Phi : E & \longrightarrow & F \times G \\ u = u_F + u_G & \longmapsto & \Phi(u) = (u_F, u_G) \end{array} \right.$$

1. **Φ est injective**
   En effet, supposons que, pour $u \in E$ et $v \in E$ $\Phi(u) = \Phi(v)$. Alors, si $\Phi(u) = (x, y)$ et $\Phi(v) = (x_1, y_1)$, nous avons dans E, $u = x + y = x_1 + y_1$, et de l'unicité de la décomposition $u = v$.
   Donc Φ est injective
2. **Φ est surjective**
   En effet, soit $(x, y) \in E \times F$, alors $u \in E$ tel que $u = x + y$ est tel que $\Phi(u) = (x, y)$
   Φ est donc surjective

Φ est donc bijective

Remarque 11 :

En utilisant la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel du produit $E \times F$, nous pourrions démontrer *(et c'est facile !)* que :
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $u \in E$, $\Phi(\lambda u) = \lambda \Phi(u)$
- Pour tout $u \in E$ et tout $v \in E$, $\Phi(u + v) = \Phi(u) + \Phi(v)$