3.4 Applications linéaires

3.4.1 Définition

Soient E et F, 2 $\mathbb{K}$-espace vectoriel
Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite linéaire si et seulement si :

1. Pour tout $u \in E$ et tout $v \in E$, $f(u+v) = f(u) + f(v)$
2. Pour tout $u \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda u) = \lambda f(u)$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$
Une application linéaire est aussi appelée homomorphisme d'espaces vectoriels

Exemple 5 :

1. L'application identique de E est une application linéaire
2. Dans tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel , les homothéties sont des applications linéaires
3. Si $E = \mathbb{K}[X]$ et $F = \mathbb{K}$, l'application Υ définie par :

$$\begin{cases} \Upsilon : \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ P = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k X^k & \longmapsto & \Upsilon(P) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \end{cases}$$

   Υ est la fonction qui, à un polynôme, fait correspondre la somme de ses coefficients.
   Υ est une application linéaire

4. Si $E = \mathcal{C}([-1;+1], \mathbb{C})$, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $[-1;+1]$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, l'application Ψ définie par :

$$\begin{cases} \Psi : \mathcal{C}([-1;+1], \mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & \Psi(f) = \displaystyle\int_{-1}^{+1} f(t)\, \mathrm{d}t \end{cases}$$

   Ψ est la fonction qui, à une fonction, fait correspondre son intégrale entre -1 et $+1$.
   Ψ est une application linéaire

Exercice 13 :

Vérifier que la bijection Φ définie en 3.3.3 est bien une application linéaire

Remarque 12 :

Soient E et F, 2 $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire

1. Alors, pour toute famille $\{x_1, \cdots, x_n\}$ d'éléments de E et toute famille $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, nous avons :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

2. Si $f : E \longrightarrow F$ est une application linéaire , c'est, en particulier, un morphisme du groupe additif $(E, +)$ dans $(F, +)$, et nous avons, en particulier $f(0_E) = 0_F$

3.4.2 Proposition

Soient E et F, 2 $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \longrightarrow F$ une application de E dans F
f est linéaire si et seulement si :

$$(\forall u \in E)(\forall v \in E)(\forall \lambda \in \mathbb{K})(\forall \mu \in \mathbb{K})(f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y))$$

Démonstration

La démonstration est simple et laissée au lecteur

Exercice 14 :

$\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont munis des opérations usuelles de la structure naturelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel .
On considère $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & f[(x, y, z)] = (2x - y + z, y - z) \end{cases}$$

Démontrer que f est une application linéaire

3.4.3 Théorème

Soient E, F et G 3 $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ 2 applications linéaires
Alors, la composition $g \circ f : E \longrightarrow G$ est une application linéaire

Démonstration

La démonstration a été faite dans le cours de L_0 pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; il suffit de la reproduire ici

3.4.4 Théorème

Soient E et F 2 $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire

1. Si $X \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E, alors $f(X)$ est un sous-espace vectoriel de F
2. Si $Y \subset F$ est un sous-espace vectoriel de F, alors $f^{-1}(Y)$ est un sous-espace vectoriel de E

Démonstration

1. Soit $X \subset E$ un sous-espace vectoriel de E, montrons que $f(X)$ est un sous-espace vectoriel de F
   - ▷ Tout d'abord, $f(X) \neq \emptyset$ puisque, comme X est un sous-espace vectoriel de E, $0_E \in X$ et comme $f(0_E) = 0_F$, $0_F \in f(X)$ et nous avons bien $f(X) \neq \emptyset$
   - ▷ Ensuite, soient $x \in f(X)$, $y \in f(X)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$; avons nous $\lambda x + \mu y \in f(X)$?
     Comme $x \in f(X)$, il existe $u \in X$ tel que $x = f(u)$; de même, comme $y \in f(X)$, il existe $v \in X$ tel que $y = f(v)$, de telle sorte que :
     $$\lambda x + \mu y = \lambda f(u) + \mu f(v) = f(\lambda u + \mu v)$$
     Comme X est un sous-espace vectoriel de E, $\lambda u + \mu v \in X$ et de l'égalité $\lambda x + \mu y = f(\lambda u + \mu v)$, nous déduisons que $\lambda x + \mu y \in f(X)$

   $f(X)$ est donc bien un sous-espace vectoriel de F
2. Soit $Y \subset F$ un sous-espace vectoriel de F, montrons que $f^{-1}(Y)$ est un sous-espace vectoriel de E
   - ▷ Tout d'abord, $f^{-1}(Y) \neq \emptyset$ puisque $0_E \in f^{-1}(Y)$; en effet, $f(0_E) = 0_F$, et comme Y est un sous-espace vectoriel de F, $0_F \in Y$ et donc $0_E \in f^{-1}(Y)$
   - ▷ Ensuite, soient $x \in f^{-1}(Y)$, $y \in f^{-1}(Y)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$; avons nous $\lambda x + \mu y \in f^{-1}(Y)$?
     Comme $x \in f^{-1}(Y)$, alors $f(x) \in Y$, et, de même, $f(y) \in Y$.
     Comme Y est un sous-espace vectoriel de F, $\lambda f(x) + \mu f(y) \in Y$. De $\lambda f(x) + \mu f(y) = f(\lambda x + \mu y)$, nous déduisons que $\lambda x + \mu y \in f^{-1}(Y)$.

   $f^{-1}(Y)$ est donc bien un sous-espace vectoriel de E

Remarque 13 :

1. Parmi tous les sous-espace vectoriel $X \subset E$, il y en a un qui tout à fait particulier, c'est $X = E$ lui-même. Ainsi $f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F

   Soient E et F 2 $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire . $f(E)$ est appelé image de f et est notée $\mathrm{Im} f$
   D'après 3.4.4, $\mathrm{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F

2. De même, parmi tous les sous-espace vectoriel $Y \subset F$, il y en a un qui tout à fait particulier, c'est $Y = \{0_F\}$ le sous-espace vectoriel uniquement formé du vecteur nul. Ainsi $f^{-1}(\{0_F\})$ est un sous-espace vectoriel de E

   Soient E et F 2 $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire . $f^{-1}(\{0_F\})$ est appelé noyau de f et est notée $\ker f$
   D'après 3.4.4, $\ker f$ est un sous-espace vectoriel de E

3.4.5 Théorème

Soient E et F 2 $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire
f est injective si et seulement si $\ker f = \{0_E\}$

Démonstration

Comme tout à l'heure, la démonstration a été faite dans le cours de L_0 pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; il suffit de la reproduire ici

Remarque 14 :

Soient E et F 2 $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire ; f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im} f = F$

Exercice 15 :

$\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont munis des opérations usuelles de la structure naturelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel . Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & f[(x, y)] = (x - y, x + 2y, -y) \end{array} \right.$$

Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$. f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 16 :

$\mathbb{C}$ est considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ; soit $a \in \mathbb{C}^*$. Montrer que l'application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\left\{ \begin{array}{ccc} f : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f(z) = z + a\overline{z} \end{array} \right.$$

Montrer que f est $\mathbb{R}$-linéaire et déterminer son noyau et son image

3.4.6 Proposition

Soient E et F 2 $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire bijective
Alors, son application inverse $f^{-1} : F \longrightarrow E$ est aussi une application linéaire

Démonstration

$f : E \longrightarrow F$ étant une application bijective, f^{-1} existe.
Pour $y_1 \in F$, $y_2 \in F$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$, il faut montrer que $f^{-1}(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda f^{-1}(y_1) + \mu f^{-1}(y_2)$
f étant bijective, il existe $x_1 \in E$ tel que $f(x_1) = y_1 \iff x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 \in E$ tel que $f(x_2) = y_2 \iff x_2 = f^{-1}(y_2)$
Nous avons :

$$\lambda y_1 + \mu y_2 = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) = f(\lambda x_2 + \mu x_2)$$

Ce qui veut dire que $\lambda x_1 + \mu x_2 = f^{-1}(\lambda y_1 + \mu y_2) \iff \lambda f^{-1}(y_1) + \mu f^{-1}(y_2) = f^{-1}(\lambda y_1 + \mu y_2)$
f^{-1} est donc linéaire

3.4.7 Définitions

1. Soient E et F 2 $\mathbb{K}$-espace vectoriel . On appelle isomorphisme entre E et F toute application linéaire bijective de E sur F
2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . On appelle endomorphisme de E toute application linéaire de E dans lui-même. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$
3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . On appelle automorphisme de E toute application linéaire bijective de E dans lui-même. L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathrm{GL}(E)$

Exercice 17 :

Cet exercice ne devrait pas poser de difficultés
Nous considérons 3 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E, F, G et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, une application linéaire surjective et $g : F \longrightarrow G$, une application quelconque.
On suppose que $f \circ g : E \longrightarrow G$ est une application linéaire . Il faut montrer que g est linéaire

Exercice 18 :

Soient E_1, E_2, F_1 et F_2, 4 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels . On considère $f_1 \in \mathcal{L}(E_1, F_1)$ et $f_2 \in \mathcal{L}(E_2, F_2)$.
On construit une application $\Phi : E_1 \times E_2 \longrightarrow F_1 \times F_2$ de cette manière :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Phi : E_1 \times E_2 & \longrightarrow & F_1 \times F_2 \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & \Phi[(x_1, x_2)] = (f(x_1), f(x_2)) \end{array}\right.$$

1. Démontrer que Φ est une application linéaire
2. Démontrer que Φ est surjective si et seulement si f_1 et f_2 sont surjectives
3. Démontrer que Φ est injective si et seulement si f_1 et f_2 sont injectives

Exercice 19 :

Soient E et F 2 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On construit $\Phi : E \times F \longrightarrow E \times F$ par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Phi : E \times F & \longrightarrow & E \times F \\ (x, y) & \longmapsto & \Phi[(x, y)] = (x, y - f(x)) \end{array}\right.$$

Il faut montrer que Φ est linéaire et bijective, donc $\Phi \in \mathrm{GL}(E \times F)$