3.5 Indépendance, bases

3.5.1 Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\{x_1, \cdots, x_n\}$ une famille de vecteurs de E
Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Il existe des scalaires λ_i non tous nuls tels que :
$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0_E$$
2. L'un des x_i est combinaison linéaire des autres

Démonstration

1. **Supposons qu'il existe des scalaires λ_i non tous nuls tels que :** $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n == 0_E$
Soit i_0 l'indice $1 \leqslant i_0 \leqslant n$. tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$. Alors :
$$\begin{aligned}\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0_E \iff \quad & \lambda_{i_0} x_{i_0} = -\left(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \right.\\ & \left. \cdots + \lambda_{i_0-1} x_{i_0-1} + \lambda_{i_0+1} x_{i_0+1} + \cdots + \lambda_n x_n\right)\\ \iff \quad & x_{i_0} = -\frac{1}{\lambda_{i_0}}\left(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \right.\\ & \left. \cdots + \lambda_{i_0-1} x_{i_0-1} + \lambda_{i_0+1} x_{i_0+1} + \cdots + \lambda_n x_n\right)\\ \iff \quad & x_{i_0} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{i_0}} x_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_{i_0}} x_2 + \cdots + \\ & \cdots + \frac{\lambda_{i_0-1}}{\lambda_{i_0}} x_{i_0-1} + \frac{\lambda_{i_0+1}}{\lambda_{i_0}} x_{i_0+1} + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda_{i_0}} x_n\end{aligned}$$
On montre ainsi que x_{i_0} est combinaison linéaire des autres vecteurs
2. **Supposons que l'un des x_i est combinaison linéaire des autres**
Ceci veut donc dire que $x_i = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \lambda_k x_k$ et donc, nous avons :
$$x_i = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{i-1} x_{i-1} + \lambda_{i+1} x_{i+1} + \cdots + \lambda_n x_n \iff x_i - \lambda_1 x_1 - \cdots - \lambda_{i-1} x_{i-1} - \lambda_{i+1} x_{i+1} - \cdots + \lambda_n x_n = 0_E$$

3.5.2 Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

1. Si l'une des 2 conditions équivalentes de la proposition 3.5.1 est vérifiée, on dit que les vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont linéairement dépendants ou qu'ils forment une famille liée
2. Dans le cas où les 2 conditions équivalentes de la proposition 3.5.1 ne sont pas vérifiées, on dit que les vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont linéairement indépendants ou qu'ils forment un famille libre
3. Autrement dit, le système $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est libre si et seulement si l'implication suivante est vraie :
$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Remarque 15 :

Dans une famille libre, aucun vecteur ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres

3.5.3 Définition dans le cas d'une famille quelconque

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .
Soit I un ensemble non vide d'indices puis $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E

1. La famille $(x_i)_{i\in I}$ est liée si et seulement si il existe une sous-famille finie de la famille $(x_i)_{i\in I}$ qui est liée ou encore il existe une partie finie non vide $J \subset I$ telle que la famille $(x_i)_{i\in J}$ soit liée.
2. La famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre si et seulement si toute sous-famille finie de la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre ou encore pour toute partie finie non vide $J \subset I$, la famille $(x_i)_{i\in J}$ est libre.

Remarque 16 :

La définition précédente est surtout utile dans les espaces de polynômes, les espaces de suites ou les espaces fonctionnels.

Exemple 6 :

Des exemples de familles liées ou libres

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . On dit que 2 vecteurs $u \in E$ et $v \in E$ **sont colinéaires** si et seulement si il existe $a \in \mathbb{K}$ et $a \neq 0$ tel que $u = av$

   La famille de vecteurs $\{u, v\}$ est liée puisque $u - av = 0_E$
2. Dans $\mathbb{R}^3$ muni des sa structure habituelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel les vecteurs $u = (1, 2, 3)$, $v = (4, 5, 6)$ et $w = (7, 8, 9)$v puisque
$$u + w = 2v \Longleftrightarrow u - 2v + w = 0_{\mathbb{R}^3}$$
3. Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, la famille $\{u\}$ est libre si et seulement si $u \neq 0_E$
4. Une famille d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E contenant le vecteur nul 0_E n'est pas libre *(Elle est donc liée)*
5. Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, si la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre, alors tous les vecteurs de cette famille sont non nuls.
6. Une famille contenant 2 fois le même vecteur est liée.
7. Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, toute sous-famille d'une famille libre est libre. Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
8. Dans $\mathbb{C}[X]$, les polynômes X^2 X^2+1, X^2-1 forment un système lié puisque :
$$\left(X^2+1\right) + \left(X^2-1\right) = 2X^2 \Longleftrightarrow \left(X^2+1\right) + \left(X^2-1\right) - 2X^2 = 0$$
9. Dans $\mathbb{K}[X]$, la famille $\{X^n; n \in \mathbb{N}\}$ est libre

   La démonstration n'est pas très difficile.
   On doit montrer que toute sous-famille finie non vide de la famille $\{X^n; n \in \mathbb{N}\}$ est libre.
   Soit $p \in \mathbb{N}$ et $\{i_1, \dots i_p\}$ p entiers tels que $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$.
   Soient $\lambda_1 \in \mathbb{K}, \lambda_2 \in \mathbb{K}, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 X^{i_1} + \lambda_2 X^{i_2} + \cdots + \lambda_p X^{i_p} = 0$. Le polynôme $P(X) = \lambda_1 X^{i_1} + \lambda_2 X^{i_2} + \cdots + \lambda_p X^{i_p}$ apparaît donc comme le polynôme nul, et P est le polynôme nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, c'est à dire si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$.
   On vient de montrer que toute sous-famille finie non vide de la famille $\{X^n; n \in \mathbb{N}\}$ est libre.
   La famille $\{X^n; n \in \mathbb{N}\}$ est donc une famille libre
10. Soit $\{P_n; n \in \mathbb{N}\}$ une famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts, c'est à dire que, pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $j \in \mathbb{N}$, si $i \neq j$, alors $\deg P_i \neq \deg P_j$. La famille $\{P_n; n \in \mathbb{N}\}$ est libre.

Cette fois-ci, la démonstration est plus délicate!!
Soit $p \in \mathbb{N}$ et $\{i_1, \dots i_p\}$ p entiers. Nous extrayons de la famille $\{P_n; n \in \mathbb{N}\}$, une famille de polynômes $P_{i_1}, \cdots, P_{i_p}$ tels que, quitte à ré-ordonner, $\deg P_{i_1} < \deg P_{i_2} < \cdots < \deg P_{i_p}$
Supposons que la famille $P_{i_1}, \cdots, P_{i_p}$ soit liée, c'est à dire qu'il existe des scalaires $\lambda_1 \in \mathbb{K}, \lambda_2 \in \mathbb{K}, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$, non tous nuls tels que $\lambda_1 P_{i_1} + \lambda_2 P_{i_2} + \cdots + \lambda_p P_{i_p} = 0$.
On appelle Q le polynôme $Q = \lambda_1 P_{i_1} + \lambda_2 P_{i_2} + \cdots + \lambda_p P_{i_p}$. Q est le polynôme nul.
Soit k, $1 \leqslant k \leqslant p$, le plus grand entier tel que $\lambda_k \neq 0$. Alors $Q = \lambda_k P_{i_k} + \sum_{j<k} \lambda_j P_{i_j}$ et $\deg Q = \deg P_k$, ce qui est incompatible avec le fait que Q soit le polynôme nul.
On vient de montrer que toute sous-famille finie non vide extraite de la famille $\{P_n; n \in \mathbb{N}\}$ est libre.
La famille $\{P_n; n \in \mathbb{N}\}$ est donc une famille libre

11. En particulier, la famille $\{P_n; n \in \mathbb{N}$ tels que $\deg P_n = n\}$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$

Exercice 20 :

Dans $\mathbb{R}^3$, muni des opérations usuelles de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel , les familles $\{u, v, w\}$ forment-elles une famille libre ou liée ?

1. $u = (1, 0, 1)$, $v = (0, 1, 1)$, $w = (3, 5, 5)$
2. $u = (1, -1, 1)$, $v = (14, -2, 5)$, $w = (4, 0, 1)$

Exercice 21 :

Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, muni des opérations usuelles de sa structure naturelle de $\mathbb{C}$-espace vectoriel , les familles $\{f_1, f_2, f_3\}$ forment-elles une famille libre ou liée ?

1. $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = \sin x$, $f_3(x) = \cos 2x$
2. $f_1(x) = \cos^2 x$, $f_2(x) = \sin^2 x$, $f_3(x) = 1$

Exercice 22 :

1. Prouver que la famille de polynômes $\left\{X^k(1 - X^n); k \in \mathbb{N}\right\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\beta \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha \neq \beta$ et $n \in \mathbb{N}$
Montrer que la famille de polynômes $\left\{(X - \alpha)^k (X - \beta)^{n-k}; 0 \leqslant k \leqslant n\right\}$ est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$.

3.5.4 Définition de base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
On appelle base de E toute partie $A \subset E$ libre et génératrice

Remarque 17 :

Rappel : une famille $\{e_i; i \in I\}$ est génératrice d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E si et seulement si tout vecteur $u \in E$ peut s'écrire comme combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de la famille $\{e_i; i \in I\}$

Exemple 7 :

1. Dans $\mathbb{K}^n$, la famille $\{e_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$ où $e_i = (0, 0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ où le 1 se trouve en i-ème position, forme une base de $\mathbb{K}^n$, cette base est la base canonique
   - ▷ Dans $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{C}^2$ comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel), la base canonique est donnée par $\{(1, 0); (0, 1)\}$
   - ▷ Dans $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{C}^3$ comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel), la base canonique est donnée par $\{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$
2. La famille $\{X^n; n \in \mathbb{N}\}$ forme une base de $\mathbb{K}[X]$ puisque :
   - ▷ On vient de montrer que la famille $\{X^n; n \in \mathbb{N}\}$ est une famille libre

- ▷ D'autre part, tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit comme combinaison linéaire finie d'éléments de la famille $\{X^n ; n \in \mathbb{N}\}$; la famille $\{X^n ; n \in \mathbb{N}\}$ est donc génératrice de $\mathbb{K}[X]$

  La famille $\{X^n ; n \in \mathbb{N}\}$ forme donc une base de $\mathbb{K}[X]$

3. La famille $\{e^{inx} ; n \in \mathbb{Z}\}$ forme une base de $\mathrm{Vect}\left(\{e^{inx} ; n \in \mathbb{Z}\}\right)$
   - ▷ Elle est,bien entendu, et par définition, génératrice de $\mathrm{Vect}\left(\{e^{inx} ; n \in \mathbb{Z}\}\right)$
   - ▷ D'autre part, la famille $\{e^{inx} ; n \in \mathbb{Z}\}$ forme une famille libre *(Démonstration en exercice)*

   On retrouve cette situation dans les séries de Fourier

Exercice 23 :

Montrer que la famille formée des vecteurs $e_1 = (1,0,1)$, $e_2 = (1,-1,1)$ et $e_3 = (0,1,1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

3.5.5 Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .
Soit $\{g_i ; 1 \leqslant i \leqslant q\}$ et $\{h_i ; 1 \leqslant i \leqslant p\}$ 2 familles de vecteurs de E
On suppose que la famille $\{h_i ; 1 \leqslant i \leqslant p\}$ est libre et que la famille $\{g_1, g_2, \cdots, g_q, h_1, h_2, \cdots h_p\}$ est liée.
Alors, l'un des g_{i_0} avec $1 \leqslant i_0 \leqslant q$ est combinaison linéaire des autres $\{g_i ; 1 \leqslant i \leqslant q \text{ et } i \neq i_0\}$ et $\{h_i ; 1 \leqslant i \leqslant p\}$

Démonstration

La famille $\{g_1, g_2, \cdots, g_q, h_1, h_2, \cdots h_p\}$ étant liée, il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_q, \mu_1, \ldots, \mu_p$ non tous nuls *(sinon, la famille $\{g_1, g_2, \cdots, g_q, h_1, h_2, \cdots h_p\}$ serait libre, ce qui est contraire à l'hypothèse)* tels que :

$$\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_q g_q + \mu_1 h_1 + \mu_2 h_2 + \cdots + \mu_p h_p = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i g_i + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j = 0_E$$

Il existe un indice i_0 avec $1 \leqslant i_0 \leqslant p$ tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$.

En effet, si tous les $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ étaient nuls, nous aurions alors $\mu_1 h_1 + \mu_2 h_2 + \cdots + \mu_p h_p = 0_E$, et de l'indépendance de la famille $\{h_i ; 1 \leqslant i \leqslant p\}$, tous les scalaires $\mu_1, \ldots, \mu_p$ sont nuls, et nous tomberions sur une contradiction

Soit donc i_0 avec $1 \leqslant i_0 \leqslant q$ tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$. Nous avons alors :

$$-\lambda_{i_0} g_{i_0} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{q} \lambda_i g_i + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j \iff g_{i_0} = \frac{-1}{\lambda_{i_0}} \left[\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{q} \lambda_i g_i + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j \right]$$

Nous venons donc de démontrer que g_{i_0} était combinaison linéaire des autres $\{g_i ; 1 \leqslant i \leqslant q \text{ et } i \neq i_0\}$ et $\{h_i ; 1 \leqslant i \leqslant p\}$

3.5.6 Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\{e_i ; i \in I\}$ une base de E
Alors, tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire finie des $\{e_i ; i \in I\}$

- ⇒ On écrit $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$, où les λ_i sont tous nuls sauf un nombre fini
- ⇒ Les scalaires $(\lambda_i)_{i \in I}$ sont appelées les coordonnées de $x \in E$ dans la base $\{e_i ; i \in I\}$

Démonstration

La démonstration ne pose pas de difficultés.

- ⋆ La famille $\{e_i ; i \in I\}$ étant une base de E, il existe des scalaires $(\lambda_i)_{i \in I}$ tels que $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$

- $\star$ Supposons qu'il existe une seconde famille $(\mu_i)_{i\in I}$ telle que $x = \sum_{i\in I} \mu_i e_i$; alors :

$$x = \sum_{i\in I} \mu_i e_i = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i \iff \sum_{i\in I} (\lambda_i - \mu_i) e_i = 0_E$$

Du fait que la famille $\{e_i; i \in I\}$ est une famille libre, nous avons :

$$\sum_{i\in I} (\lambda_i - \mu_i) e_i = 0_E \Longrightarrow (\forall i \in I) (\lambda_i - \mu_i = 0) \iff (\forall i \in I) (\lambda_i = \mu_i)$$

Nous venons donc de montrer l'unicité de la décomposition d'un vecteur dans une base.

Exercice 24 :

La famille formée des vecteurs $e_1 = (1, 0, 1)$, $e_2 = (1, -1, 1)$ et $e_3 = (0, 1, 1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$; quelles sont les coordonnées, dans la base $(e_1, e_2, e_3\}$ du vecteur $(1, 2, 3)$, et plus généralement, du vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

Exercice 25 :

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ rapporté à sa base canonique, vérifier que les vecteurs

$$a = (1, 2, -1, -2) \qquad b = (2, 3, 0, -1) \qquad c = (1, 3, -1, 0) \qquad d = (1, 2, 1, 4)$$

forment une base de $\mathbb{R}^4$
Calculer les coordonnées du vecteur $X = (7, 14, -1, 2)$ dans la base $\{a, b, c, d\}$

Exercice 26 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ une famille libre de E. On pose :

$$b_1 = a_1, b_2 = a_1 + a_2, \ldots, b_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Montrer que la famille $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ est une famille libre de E

3.5.7 Proposition

Soient E et F 2 $\mathbb{K}$-espace vectoriel .
Soit $\{e_i; i \in I\}$ une base de E

1. Toute application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est entièrement déterminée par la donnée des $\{f(e_i); i \in I\}$
2. De plus, pour toute famille $\{f_i; i \in I\}$ de F, il existe une et une seule application linéaire $u : E \longrightarrow F$ telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$

Par ailleurs

1. L'application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est injective si et seulement si la famille $\{f(e_i); i \in I\}$ forme un système libre dans F
2. L'application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est surjective si et seulement si la famille $\{f(e_i); i \in I\}$ est une famille génératrice F
3. L'application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est bijective si et seulement si la famille $\{f(e_i); i \in I\}$ est une base de F

Démonstration

1. Soit $x \in E$. Il existe alors $J \subset I$, J ensemble fini, tel que $x = \sum_{i\in J} \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Alors :

$$f(x) = f\left(\sum_{i\in J} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i\in J} \lambda_i f(e_i)$$

Ce qui montre que f est entièrement déterminée par la connaissance des $\{f(e_i); i \in I\}$

2. Soit $\{f_i; i \in I\}$ une famille de vecteurs de F et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$. Montrons que cette application linéaire est unique.
   Soit donc $f : E \longrightarrow F$ une seconde application linéaire telle que, pour tout $i \in I$, $f(e_i) = f_i$; montrons que $f = u$
   Soit donc $x \in E$; nous avons $x = \sum_{i \in J} \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Alors :
   $$u(x) = u\left(\sum_{i \in J} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i \in J} \lambda_i u(e_i) = \sum_{i \in J} \lambda_i f_i = \sum_{i \in J} \lambda_i f(e_i) = f\left(\sum_{i \in J} \lambda_i e_i\right) = f(x)$$
   Donc, pour tout $x \in E$, $u(x) = f(x)$, c'est à dire que $u = f$
3. $\Rightarrow$ **Supposons que l'application linéaire $f : E \longrightarrow F$ soit injective.**
   Démontrons que la famille $\{f(e_i); i \in I\}$ forme un système libre dans F.
   Soient donc $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i \in I} \lambda_i f(e_i) = 0_F$ où seuls un nombre fini de λ_i sont non nuls.
   Alors :
   $$\sum_{i \in I} \lambda_i f(e_i) = 0_F \Longleftrightarrow f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i e_i\right) = 0_F$$
   Ce qui signifie donc que $\sum_{i \in I} \lambda_i e_i \in \ker f$.
   De l'injectivité de f nous déduisons que $\sum_{i \in I} \lambda_i e_i = 0_E$, et comme la famille $\{e_i; i \in I\}$ est une base de E, donc libre, pour tout $i \in I$, nous avons $\lambda_i = 0$ et donc la famille $\{f(e_i); i \in I\}$ forme un système libre dans F
   $\Rightarrow$ **Supposons que la famille $\{f(e_i); i \in I\}$ forme un système libre dans F**
   Démontrons que f est injective.
   Soit $x \in \ker f$; alors, il existe un ensemble fini $J \subset I$ et des réels λ_i où $i \subset J$, tel que $x = \sum_{i \in J} \lambda_i e_i$. Comme $f(x) = 0_F$, nous avons :
   $$f\left(\sum_{i \in J} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i \in J} \lambda_i f(e_i) = 0_F$$
   De l'indépendance de la famille $\{f(e_i); i \in I\}$, nous déduisons que, pour tout $i \in J$, $\lambda_i = 0$ et donc $x = 0_E$, ce qui termine de montrer que f est injective.
4. $\Rightarrow$ **Supposons que l'application linéaire $f : E \longrightarrow F$ soit surjective.**
   Démontrons que la famille $\{f(e_i); i \in I\}$ est une famille génératrice F.
   Soit $y \in F$; alors, comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
   Comme la famille $\{e_i; i \in I\}$ est une base de E, il existe un sous-ensemble fini $J \subset I$ et des scalaires $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{i \in J} \lambda_i e_i$ et donc, $y = f(x) = f\left(\sum_{i \in J} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i \in J} \lambda_i f(e_i)$.
   Ainsi, tout $y \in F$ s'écrit comme combinaison linéaire finie d'éléments de a famille $\{f(e_i); i \in I\}$
   Ce qui montre que la famille $\{f(e_i); i \in I\}$ est une famille génératrice F
   $\Rightarrow$ **Supposons, maintenant, que la famille $\{f(e_i); i \in I\}$ est une famille génératrice F**
   Démontrons que f est surjective.
   Soit $y \in F$. Il faut donc trouver $x \in E$ tel que $f(x) = y$
   La famille $\{f(e_i); i \in I\}$ étant une famille génératrice F, il existe un sous-ensemble $J \subset I$, fini et $\lambda_i \in \mathbb{K}$ avec $i \in J$ tel que $y = \sum_{i \in J} \lambda_i f(e_i)$.
   De la linéarité de f, nous déduisons :
   $$y = \sum_{i \in J} \lambda_i f(e_i) = f\left(\sum_{i \in J} \lambda_i e_i\right)$$

En posant $x = \sum_{i \in J} \lambda_i e_i$, nous avons $x \in E$ et $f(x) = y$

f est donc surjective

5. Pour terminer,

   $\Rightarrow$ Si f est bijective, elle est injective et surjective.

   - $\star$ Si elle est injective, alors la famille $\{f(e_i) ; i \in I\}$ forme un système libre dans F
   - $\star$ Si elle est surjective, alors la famille $\{f(e_i) ; i \in I\}$ forme un système générateur de F

   Et donc, la famille $\{f(e_i) ; i \in I\}$ est une base de F

   $\Rightarrow$ Si la famille $\{f(e_i) ; i \in I\}$ est une base de F

   - $\star$ Si la famille $\{f(e_i) ; i \in I\}$ est une base de F, elle est libre dans F, et f est injective
   - $\star$ Si la famille $\{f(e_i) ; i \in I\}$ est une base de F, elle est génératrice de F, et f est donc surjective

   Finalement, f est bijective.