3.6 Espaces vectoriels de dimension finie

3.6.1 Définition

On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie

Exemple 8 :

1. $\mathbb{R}^2$ admet pour famille génératrice $\{(1,0);(0,1)\}$ ou $\{(1,2);(3,4);(5,6)\}$

   En effet :

   (a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; alors $(x,y) = x(1,0)+y(0,1)$; on peut même, et facilement, démontrer que $\{(1,0);(0,1)\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$ et que c'est donc une base de $\mathbb{R}^2$

   (b) La famille $\{(1,2);(3,4);(5,6)\}$ est génératrice, puisque tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ peut s'écrire :

   $$(x,y) = (-2x+y)(1,2) + \left(x+\frac{1}{2}y\right)(3,4) - \frac{1}{2}y(5,6)$$

   Ou encore

   $$(x,y) = \left(-2x+\frac{3}{2}y+1\right)(1,2) + \left(x-\frac{1}{2}y-2\right)(3,4) + (5,6)$$

   On remarque que la « décomposition » n'est pas unique.
   Il n'y a rien de plus normal, puisque la famille $\{(1,2);(3,4);(5,6)\}$ est liée : nous avons, en effet :

   $$-(1,2) + 2(3,4) = (5,6)$$

   Si elle est génératrice, la famille $\{(1,2);(3,4);(5,6)\}$ ne forme pas une base.
2. Plus généralement, si $\mathbb{K}$ est un corps, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie puisque la famille $\{e_i; i=1,\cdots,n\}$ où $e_i = (0,0,\cdots 0,1,0,\cdots,0)$ et le 1 placé en i-ième place, engendre $\mathbb{K}^n$
3. Par contre, $\mathbb{K}[X]$ n'est pas un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Si la famille $\{X^n; n \in \mathbb{N}\}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$, toute partie finie de $\mathbb{K}[X]$ ne peut générer qu'un sous-espace vectoriel formé de polynômes qui ont leur degré borné.

3.6.2 Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie
Soit $G = \{x_1,\cdots,x_m\}$ une famille génératrice de E.
Alors, de cette famille génératrice G, on peut en extraire une base

Démonstration

Nous allons faire cette démonstration par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$, en posant :

$P(m)$: « Si E admet une famille génératrice G de cardinal m, alors, de G, on peut extraire une base »

- ▷ Si $m=1$, alors $G = \{x_1\}$
  - ⋆ Si $x_1 = 0_E$, alors $E = \{0_E\}$
  - ⋆ Si $x_1 \neq 0_E$, alors, G étant une famille génératrice de E est aussi une famille libre de E, donc une base de E
- ▷ Si $m=2$, alors $G = \{x_1,x_2\}$
  - ⋆ Si la famille $G = \{x_1,x_2\}$ est libre, alors, comme elle est aussi génératrice de E, elle en forme aussi une base
  - ⋆ Si la famille $G = \{x_1,x_2\}$ est liée,, alors, par exemple, x_2 est colinéaire à x_1 *($x_2 = \lambda x_1$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$)*, et de la famille $G = \{x_1,x_2\}$, on peut extraire une base qui sera $\{x_1\}$
- ▷ Supposons maintenant $P(m)$ vraie
- ▷ Démontrons, maintenant $P(m+1)$
  Soit donc $G = \{x_1,x_2,\cdots,x_m,x_{m+1}\}$ une famille génératrice de E

- ⋆ Si la famille $G = \{x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}\}$ est libre, alors, comme elle est aussi génératrice de E, elle en forme aussi une base.
- ⋆ Si la famille $G = \{x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}\}$ est liée,, alors, l'un des vecteurs de G s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs de G. Quitte à ré-ordonner, admettons que ce soit x_{m+1} qui soit combinaison linéaire des $\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$.
  Alors, la famille $G_1 = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$, à m éléments,est aussi génératrice de E. En utilisant l'hypothèse de récurrence $P(m)$, de cette famille G_1, on peut extraire une base de E

D'où le théorème est démontré

Remarque 18 :

1. Une autre façon de le dire est celle-ci :

   Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E, de toute famille génératrice, on peut extraire une base finie

   Ainsi, tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie admet une base finie
2. De ce théorème, on peut aussi déduire que si $G = \{x_1, \cdots, x_m\}$ une famille génératrice de E et $B = \{y_1, \cdots, y_n\}$ une base de E, alors $n \leqslant m$

3.6.3 Lemme

La démonstration de ce lemme sera utile à la démonstration du théorème 3.6.4

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}^*$
On considère $n+1$ vecteurs de E $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}\}$ qui sont combinaison linéaire de n autres vecteurs $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ de E
Alors la famille $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}\}$ est aussi une famille liée

Démonstration

On remarquera que E n'est pas spécifié de dimension finie.
Nous démontrons ce théorème par récurrence sur n en démontrant la propriété $P(n)$ suivante.

$P(n)$: « Si $n+1$ vecteurs de E $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}\}$ sont combinaison linéaire de n autres vecteurs $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ de E alors la famille $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}\}$ forme aussi une famille liée »

1. Vérifions pour $n = 1$
   Soient donc 2 vecteurs de E $\{x_1, x_2\}$ qui sont combinaison linéaire d'un vecteur $u \in E$.
   Il existe alors $\lambda_1 \in \mathbb{K}$ et $\lambda_2 \in \mathbb{K}$ tels que $x_1 = \lambda_1 u$ et $x_2 = \lambda_2 u$
   - ▷ Si $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 0$, alors $x_1 = 0_E$ ou $x_2 = 0_E$ et la famille $\{x_1, x_2\}$ est bien liée
   - ▷ Si $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 \neq 0$, alors, par exemple, $u = \dfrac{1}{\lambda_2} x_2$, et donc $x_1 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} x_2$ et la famille $\{x_1, x_2\}$ est bien liée

   $P(1)$ est donc bien vérifiée
2. Supposons maintenant $P(n)$ vraie
3. Démontrons $P(n+1)$
   Soient $n+2$ vecteurs $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}\}$ qui sont combinaisons linéaires de $n+1$ vecteurs $\{u_1, u_2, \cdots, u_n, u_{n+1}\}$ de E.
   Il existe donc des scalaires $\alpha_{i,j}$ où $1 \leqslant i \leqslant n+2$ et $1 \leqslant j \leqslant n+1$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1 = & \alpha_{1,1}u_1 + \alpha_{1,2}u_2 + \cdots + \alpha_{1,n+1}u_{n+1} \\ x_2 = & \alpha_{2,1}u_1 + \alpha_{2,2}u_2 + \cdots + \alpha_{2,n+1}u_{n+1} \\ x_3 = & \alpha_{3,1}u_1 + \alpha_{3,2}u_2 + \cdots + \alpha_{3,n}u_{n+1} \\ \vdots & \qquad\quad \vdots \\ x_{n+1} = & \alpha_{n+1,1}u_1 + \alpha_{n+1,2}u_2 + \cdots + \alpha_{n+1,n+1}u_{n+1} \\ x_{n+2} = & \alpha_{n+2,1}u_1 + \alpha_{n+2,2}u_2 + \cdots + \alpha_{n+2,n+1}u_{n+1} \end{array}\right.$$

- ▷ Supposons que pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant n+2$, nous ayions $\alpha_{i,n+1} = 0$, alors, nous avons :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 = & \alpha_{1,1}u_1 + \alpha_{1,2}u_2 + \cdots + \alpha_{1,n}u_n \\ x_2 = & \alpha_{2,1}u_1 + \alpha_{2,2}u_2 + \cdots + \alpha_{2,n}u_n \\ x_3 = & \alpha_{3,1}u_1 + \alpha_{3,2}u_2 + \cdots + \alpha_{3,n}u_n \\ \vdots & \vdots \\ x_{n+1} = & \alpha_{n+1,1}u_1 + \alpha_{n+1,2}u_2 + \cdots + \alpha_{n+1,n}u_n \end{array}\right.$$

Ce qui montre que la famille $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}\}$ est combinaison linéaire des n vecteurs $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ de E et donc, d'après l'hypothèse de récurrence $P(n)$, la famille $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}\}$ est liée et, à fortiori, $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}\}$ est aussi liée.

- ▷ Supposons qu'il existe i_0 tel que $1 \leqslant i_0 \leqslant n+2$ tel que nous ayions $\alpha_{i_0,n+1} \neq 0$. Quitte à ré-ordonner, pour simplifier la démonstration, nous supposons $\alpha_{n+2,n+1} \neq 0$. Alors, dans ce cas :

$$u_{n+1} = \frac{1}{\alpha_{n+2,n+1}}x_{n+2} - \frac{\alpha_{n+2,1}}{\alpha_{n+2,n+1}}u_1 - \frac{\alpha_{n+2,2}}{\alpha_{n+2,n+1}}u_2 - \cdots - \frac{\alpha_{n+2,n}}{\alpha_{n+2,n+1}}u_n$$

En remplaçant u_{n+1} dans les $n+1$ vecteurs $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}\}$, nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 - \dfrac{1}{\alpha_{n+2,n+1}}x_{n+2} = & \lambda_{1,1}u_1 + \lambda_{1,2}u_2 + \cdots + \lambda_{1,n}u_n \\ x_2 - \dfrac{1}{\alpha_{n+2,n+1}}x_{n+2} = & \lambda_{2,1}u_1 + \lambda_{2,2}u_2 + \cdots + \lambda_{2,n}u_n \\ x_3 - \dfrac{1}{\alpha_{n+2,n+1}}x_{n+2} = & \lambda_{3,1}u_1 + \lambda_{3,2}u_2 + \cdots + \lambda_{3,n}u_n \\ \vdots & \vdots \\ x_{n+1} - \dfrac{1}{\alpha_{n+2,n+1}}x_{n+2} = & \lambda_{n+1,1}u_1 + \lambda_{n+1,2}u_2 + \cdots + \lambda_{n+1,n}u_n \end{array}\right.$$

Où, pour $1 \leqslant i \leqslant n+1$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, nous avons $\lambda_{i,j} = \alpha_{i,j} - \dfrac{\alpha_{n+2,j}}{\alpha_{n+2,n+1}}$

Les $n+1$ vecteurs $x_i - \dfrac{1}{\alpha_{n+2,n+1}}x_{n+2}$ où $1 \leqslant i \leqslant n+1$ sont donc combinaisons linéaires des n vecteurs $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ et, d'après l'hypothèse de récurrence $P(n)$, la famille

$$\left\{x_1 - \frac{1}{\alpha_{n+2,n+1}}x_{n+2}, x_2 - \frac{1}{\alpha_{n+2,n+1}}x_{n+2}, \cdots, x_n - \frac{1}{\alpha_{n+2,n+1}}x_{n+2}, x_{n+1} - \frac{1}{\alpha_{n+2,n+1}}x_{n+2}\right\}$$

est liée.
Il existe donc des scalaires $\beta_i \in \mathbb{K}$ avec $1 \leqslant i \leqslant n+1$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \beta_i \left(x_i - \frac{1}{\alpha_{n+2,n+1}}x_{n+2}\right) = 0_E$$

Et donc :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \beta_i \left(x_i - \frac{1}{\alpha_{n+2,n+1}}x_{n+2}\right) = 0_E \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i x_i - \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\beta_i}{\alpha_{n+2,n+1}}\right) x_{n+2} = 0_E$$

Avec des β_i non tous nuls, ce qui montre que la famille $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}\}$ est une famille liée.

Le lemme est démontré

3.6.4 Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie
Alors, toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments.
Ce nombre est appelé **la dimension** de E et est noté $\dim E$

Démonstration

Soient $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n,\}$ et $\mathcal{B}_1 = \{y_1, y_2, \cdots, y_m,\}$ 2 bases de E.
$\mathcal{B}$ est une famille génératrice de E, et donc, chacun des vecteurs de $\mathcal{B}_1$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.
Nous avons $n \leqslant m$

En effet, supposons $n > m$.
D'après le lemme 3.6.3, ceci signifierait que la famille $\mathcal{B}_1$ est une famille liée, ce qui est contradictoire avec le fait que $\mathcal{B}_1$ est une base.
Donc $n \leqslant m$

De même, on montre que $m \leqslant n$.
Donc $m = n$

Remarque 19 :

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel réduit au vecteur nul, c'est à dire si $E = \{0_E\}$, nous convenons alors que $\dim E = 0$

Exemple 9 :

1. $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, puisque nous en connaissons une base de cardinal n, la base canonique
2. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1, alors E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel qui admet pour base un seul vecteur non nul ; c'est une roite vectorielle

3.6.5 Théorème de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soit $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$ un **système libre** de E et soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base de E.
Alors H peut être complétée par $(n - m)$ vecteurs $\{x_{m+1}, \cdots, x_n\}$ de telle sorte que la famille $\{h_1, h_2, \ldots, h_m, x_{m+1}, \cdots, x_n\}$ forme une base de E

Démonstration

Soient $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$ une famille libre de E et $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base de E

- Si H est une famille génératrice de E, alors H est une base de E, et c'est terminé
- Si, cette fois ci, H n'est pas une famille génératrice de E. Considérons $\text{Vect}\left(\{h_1, h_2, \ldots, h_m\}\right)$ le sous-espace vectoriel engendré par H. Nous disons qu'il existe un indice i_0, avec $1 \leqslant i_0 \leqslant n$ tel que $e_{i_0} \notin \text{Vect}\left(\{h_1, h_2, \ldots, h_m\}\right)$

  Sinon,
  Supposons que pour tout i avec $1 \leqslant i \leqslant n$ tel que $e_i \in \text{Vect}\left(\{h_1, h_2, \ldots, h_m\}\right)$, ceci sous-entend que la la famille H est génératrice *(donc base)* de E, et il y a donc contradiction.

  Alors, la famille $H \cup \{e_{i_0}\} = \{h_1, h_2, \ldots, h_m, e_{i_0}\}$ forme une famille libre car e_{i_0} n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de la famille H
- Si la famille $H \cup \{e_{i_0}\}$ est génératrice, c'est donc une base et nous nous arrêtons. Si elle ne l'est pas, nous itérons le processus.
- Ce processus s'arrêtera sûrement et nous obtiendrons une famille libre et génératrice donc une base.

  Si ce processus ne s'arrêtait pas, nous obtiendrions, au final, une famille $H \cup \mathcal{B}$ qui serait génératrice, mais pas libre.

Remarque 20 :

1. Le théorème signifie que si on a une famille libre de E, on peut **la compléter** pour obtenir une base de E, d'où le nom de base incomplète.
2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Alors :
   (a) Les familles libres de E ont au plus n éléments
   (b) Si une famille libre de E est de cardinal n, alors, c'est une base de E
3. D'après la démonstration du théorème, pour compléter une famille libre de E pour en faire une base, nous pouvons la compléter en prenant des éléments dans une base de E fixée d'avance.
4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Alors :
   (a) Les familles génératrices de E ont **au moins** n éléments
   (b) Si une famille génératrice de E est de cardinal n, alors, c'est une base de E
5. La dimension d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est le nombre minimum de vecteurs générateurs et le nombre maximum de vecteurs libres
6. La dimension d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dépend du corps de base, c'est pourquoi nous notons souvent la dimension $\dim_{\mathbb{K}} E$ et la référence au corps $\mathbb{K}$ est enlevée lorsqu'il n'y a pas ambiguité

   Exemples

   Nous avons $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ et $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$
7. Nous avons, si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie : $E \neq \{0_E\} \Longleftrightarrow \dim_{\mathbb{K}} E \geqslant 1$

3.6.6 Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Alors :

1. On appelle **droite** sous-espace vectoriel de E de dimension 1
2. On appelle **plan** sous-espace vectoriel de E de dimension 2
3. On appelle **hyperplan** sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$

Remarque 21 :

On peut remarquer que dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3, plans et hyperplans sont identiques alors que si $n \neq 3$, ces 2 notions sont distinctes.

Exemple 10 :

1. Nous avons $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$, et plus généralement, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$. Ainsi, tout corps $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1 sur lui-même.
2. $\mathbb{K}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ sur $\mathbb{K}$. Une base de $\mathbb{K}_n[X]$ est donnée par $\left\{1, X, X^2, \cdots, X^n\right\}$
3. $\mathbb{R}$ peut être considéré comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel ; ce n'est sûrement pas un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension 1.

   En effet, la famille $\left\{1, \sqrt{2}\right\}$ forme une famille libre.

   Démontrons le :

   Soient $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$ tels que $a + b\sqrt{2} = 0$;

   Si $a = b = 0$, nous avons bien entendu $a + b\sqrt{2} = 0$

   Sinon supposons $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

   ⋆ Si $a \neq 0$, alors $b \neq 0$ et :

   $$a + b\sqrt{2} = 0 \Longleftrightarrow b\sqrt{2} = -a \Longleftrightarrow \sqrt{2} = \frac{-a}{b}$$

   Comme $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$, alors $\sqrt{2} = \dfrac{-a}{b} \in \mathbb{Q}$, ce qui est impossible

⋆ Si $b \neq 0$, alors, nous avons, à nouveau :

$$a + b\sqrt{2} = 0 \Longleftrightarrow b\sqrt{2} = -a \Longleftrightarrow \sqrt{2} = \frac{-a}{b}$$

Et la conclusion est identique

La seule possibilité que nous ayions est $a = b = 0$ et donc la famille $\left\{1, \sqrt{2}\right\}$ forme une famille libre dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$

Exercice 27 :

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$, alors $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$
2. Démontrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, tout $\beta \in \mathbb{Q}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$, nous avons l'implication :
$$\alpha + \beta\sqrt{n} = 0 \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$$
3. Démontrer que la famille $\left\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right\}$ est une famille libre dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$

3.6.7 Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n ; alors E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$

Démonstration

Soit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E et $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
On appelle $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{K}$ l'unique application linéaire définie par $\Phi(e_i) = \varepsilon_i$. Comme $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\}$ est une base de $\mathbb{K}^n$, Φ est bien un isomorphisme de E dans $\mathbb{K}^n$

Remarque 22 :

De cet isomorphisme, on peut dire que que les seuls $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension n sont les $\mathbb{K}^n$

3.6.8 Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace vectoriel de E. Alors :

1. F est de dimension finie et $\dim F \leqslant n$
2. Si $\dim F = n$, alors $F = E$

Démonstration

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E et $\{u_1, \cdots, u_p\}$ une famille libre de p éléments de F ; c'est, en particulier une famille libre de E.
Cette remarque s'applique évidemment si $\{u_1, \cdots, u_p\}$ est une base de F et donc $\dim F \leqslant n$
2. Si $p = n$, c'est à dire, si $\{u_1, \cdots, u_n\}$ est une base de F, c'est aussi une base de E, et donc $F = E$

3.6.9 Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Alors, tout sous-espace vectoriel $F \subset E$ admet, dans E un supplémentaire G, c'est à dire $E = F \bigoplus G$ et ce supplémentaire G n'est, en général, pas unique

Démonstration

Soit F un sous-espace vectoriel de E
$\Longrightarrow$ Si $F = E$, alors le supplémentaire de F est alors $G = \{0_E\}$
$\Longrightarrow$ Et vice-versa, si $F = \{0_E\}$ alors le supplémentaire de F est alors E

$\Longrightarrow$ Supposons, maintenant F de dimension finie p avec $1 \leqslant p < n$.
Soit $\mathcal{B} = \{u_1, \cdots, u_p\}$ une base de F. C'est aussi une famille libre de E. D'après le théorème de la base incomplète 3.6.5, il existe des vecteurs $\{u_{p+1}, \cdots, u_n\}$ indépendants de telle sorte que la famille $\mathcal{F} = \{u_1, \cdots, u_p, u_{p+1}, \cdots, u_n\}$ forme une base de E.
Nous appelons $G = \text{Vect}\left(\{u_{p+1}, \cdots, u_n\}\right)$, et nous disons que G est un supplémentaire de F dans G, c'est à dire que $E = F \bigoplus G$.
En effet :

- Tout vecteur $u \in E$ se décompose en $u = x + y$ où $x \in F$ et $x \in G$

  En effet, si $u \in E$, alors u se décompose de manière unique dans la base $\mathcal{F}$: $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$. Or, nous pouvons écrire :

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i}_{\in F} + \underbrace{\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i u_i}_{\in G}$$

  Ainsi, tout élément $u \in E$ est donc la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G[1]

- Nous avons $F \cap G = \{0_E\}$

  En effet, soit $x \in F \cap G$. Alors, $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$ et $x = \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i u_i$ de telle sorte que nous ayions :

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i u_i \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i - \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E \Longleftrightarrow \lambda_1 u_1 + \cdots \lambda_p u_p - \lambda_{p+1} u_{p+1} - \cdots - \lambda_n u_n = 0_E$$

  De l'indépendance des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$, nous déduisons $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = \lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_n = 0$ d'où nous tirons $x = 0_E$
  Et nous déduisons donc que $F \cap G = \{0_E\}$

D'où nous tirons que $E = F \bigoplus G$
Du choix des vecteurs $\{u_{p+1}, \cdots, u_n\}$, on déduit bien que le choix de G n'est pas unique.

3.6.10 Rang d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = \{x_1, \cdots, x_n\}$ une famille de n vecteurs de E
Le **rang** de $\mathcal{F}$ est la dimension de $\text{Vect}\left(\{x_1, \cdots, x_n\}\right)$

$$\text{rang}\left(\mathcal{F}\right) = \dim\left(\text{Vect}\left(\{x_1, \cdots, x_n\}\right)\right)$$

Exemple 11 :

1. Considérons, dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, la famille $\mathcal{F} = \{u_1, u_2, u_3\}$ où $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (4, 5, 6)$, $u_3 = (7, 8, 9)$.
   Par calcul simple et évident, nous avons $u_2 = \dfrac{1}{2}\left(u_1 + u_3\right)$ et, comme les vecteurs u_1 et u_3 sont linéairement indépendants, nous avons $\text{rang}\left(\mathcal{F}\right) = \dim\left(\text{Vect}\left(\{u_1, u_2, u_3\}\right)\right) = 2$
2. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, la famille de 5 vecteurs
$$\mathcal{F} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (49, 6, 3, 0), (-5, 3, -1, 0)\}$$
   est de rang 3
3. Considérons cette fois-ci $E = \mathcal{F}\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}\right)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions numériques d'une variable réelle.
   On considère 3 fonctions f_1, f_2 et f_3 :
$$\left\{\begin{array}{rcl} f_1 : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_1(x) = 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} f_2 : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_2(x) = e^x \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} f_3 : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_3(x) = |x| \end{array}\right.$$

1. La décomposition de u dans la base $\mathcal{F}$ nous laisse penser que cette décomposition est unique

Nous avons $\text{rang}\left(\{f_1, f_2, f_3\}\right) = 3$, c'est à dire que la famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ est libre et forme une base de $\text{Vect}\left(\{f_1, f_2, f_3\}\right)$

Montrons que la famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ est libre

Soient donc $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = \mathcal{O}$ où $\mathcal{O}$ est la fonction nulle. Ceci signifie donc que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 e^x + \lambda_3 |x| = 0$$

⋆ Pour $x = -1$, nous obtenons $\lambda_1 + \lambda_2 e^{-1} + \lambda_3 = 0$
⋆ Pour $x = 0$, nous avons $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$
⋆ Pour $x = 1$, nous obtenons $\lambda_1 + \lambda_2 e + \lambda_3 = 0$

D'où nous obtenons le système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{rl} \lambda_1 + \lambda_2 e^{-1} + \lambda_3 = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 e + \lambda_3 = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

La famille $\{f_1, f_2, f_3\}$ est donc libre

Exercice 28 :

1. On considère $\mathbb{C}^3$ en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 3, muni de sa base canonique. Déterminer, suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{C}$ le rang de la famille $\mathcal{F} = \{a, b, c\}$ où

$$a = (1, 1, \alpha) \quad b = (1, \alpha, 1) \quad c = (\alpha, 1, 1)$$

2. Même question, pour le même système considéré comme famille de vecteurs de l'espace vectoriel $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ sur le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

3.6.11 Définition et théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
On considère F et G 2 sous-espaces vectoriels de E de dimension finie tels que $F \cap G = \{0_E\}$. Il nous est alors possible de considérer $H = F \oplus G$. On dit que F **et** G **sont en somme directe**

1. Si $\{u_1, \cdots, u_p\}$ est une base de F et $\{v_1, \cdots, v_n\}$ une base de G, alors $\{u_1, \cdots, u_p, v_1, \cdots, v_n\}$ est une base de $H = F \oplus G$
2. Nous avons aussi $\dim H = \dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$

Démonstration

1. Si nous appelons $H = F + G = \{u \in E \text{ tels que } u = x_F + x_G \text{ où } x_F \in F \text{ et } x_G \in G\}$.
Comme $F \cap G = \{0_E\}$, la décomposition $u = x_F + x_G$ est unique et il est possible d'écrire $H = F \oplus G$
2. Soient $\{u_1, \cdots, u_p\}$ une base de F et $\{v_1, \cdots, v_n\}$ une base de G.
(a) La famille $\{u_1, \cdots, u_p, v_1, \cdots, v_n\}$ est une famille génératrice de $H = F \oplus G$

En effet, si $u \in H$, alors $u = x_F + x_G$ et comme $x_F = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$ et $x_g = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i$ avec les $\lambda_i \in \mathbb{K}$ et $\mu_i \in \mathbb{K}$, nous avons alors :

$$u = x_F + x_G = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p + \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n$$

Ce qui montre que la famille $\{u_1, \cdots, u_p, v_1, \cdots, v_n\}$ est une famille génératrice de $H = F \oplus G$

(b) La famille $\{u_1, \cdots, u_p, v_1, \cdots, v_n\}$ est une famille linéairement indépendante.

Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_p, \mu_1, \cdots, \mu_n$, $n+p$ scalaires telles que :

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p + \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n = 0_E$$

Alors

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = -\mu_1 v_1 - \cdots - \mu_n v_n$$

Posons $X = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = -\mu_1 v_1 - \cdots - \mu_n v_n$; comme $X = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p$, alors $X \in F$ et comme nous avons aussi $X = -\mu_1 v_1 - \cdots - \mu_n v_n$, nous avons aussi $X \in G$, c'est à dire que $X \in F \cap G$, et donc $X = 0_E$.
Alors, de l'indépendance de $\{u_1, \cdots, u_p\}$, nous avons :

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$$

Et, par le même argument d'indépendance de $\{v_1, \cdots, v_n\}$, nous avons

$$\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n = 0_E \Longrightarrow \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_n = 0$$

Et donc, la famille $\{u_1, \cdots, u_p, v_1, \cdots, v_n\}$ est une famille linéairement indépendante.

On conclue donc que $\{u_1, \cdots, u_p, v_1, \cdots, v_n\}$ est une base de $H = F \oplus G$

3. D'après ce nous venons de démontrer, nous avons $\dim H = \dim (F \oplus G) = n + p = \dim F + \dim G$

3.6.12 Théorème

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , F et G 2 sous-espaces vectoriels de E de dimension finie. Alors :

$$\dim (F + G) = \dim F + \dim G - \dim (F \cap G)$$

Démonstration

1. On pose $H = F \cap G$
   Alors, H est un sous-espace vectoriel de G, sous-espace vectoriel de dimension finie ; H admet, dans G, un supplémentaire G_1, et nous avons dons $G = H \oplus G_1$
2. Nous avons $F + G = F \oplus G_1$
   (a) Tout d'abord $F \cap G_1 = \{0_E\}$
   Soit $u \in F \cap G_1$; comme $G_1 \subset G$, nous avons aussi $u \in F \cap G$, c'est à dire $u \in H$ et donc $u \in H \cap G_1$; comme $H \cap G_1 = \{0_E\}$, nous avons $u = 0_E$ et donc $F \cap G_1 = \{0_E\}$
   (b) Nous avons $F + G = F + G_1$
   → Nous avons $F + G \subset F + G_1$
   En effet, soit $u \in F + G$; alors $u = x_F + x_G$. Comme G est somme directe de H et G_1, nous avons, et de manière unique, $x_G = y_H + y_{G_1}$ d'où $u = x_F + x_G = x_F + y_H + y_{G_1}$.
   Comme $H = F \cap G$, nous avons $y_H \in F$ et donc $u = \underbrace{x_F + y_H}_{\in F} + \underbrace{y_{G_1}}_{\in G_1}$
   C'est à dire $u \in F + G_1$
   → Démontrons que nous avons $F + G_1 \subset F + G$
   Là, c'est évident, puisque si $u \in F + G_1$, alors $u = x_F + x_{G_1}$. Comme $G_1 \subset G$, nous avons aussi $x_{G_1} \in G$, et donc $u \in F + G$
   Et donc $F + G = F + G_1$
   (c) Comme F et G_1 sont en somme directe, nous avons, en fait, $F + G = F \oplus G_1$
3. Ainsi, $\dim (F + G) = \dim (F \oplus G_1) = \dim F + \dim G_1$.
   Comme $G = H \oplus G_1$, nous avons $\dim G = \dim H + \dim G_1$, et en remplaçant $\dim G_1$ par $\dim G - \dim H$, nous obtenons :

$$\dim (F + G) = \dim F + \dim G - \dim H \Longleftrightarrow \dim (F + G) = \dim F + \dim G - \dim (F \cap G)$$

Ce que nous voulions

3.6.13 Théorème du rang

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension finie** et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque.
Nous considérons une application linéaire $f : E \longrightarrow F$

1. On appelle rang de f, le nombre $\operatorname{rang}(f)$ défini par $\operatorname{rang}(f) = \dim(\operatorname{Im} f)$
2. Nous avons : $\dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\ker f) = \dim E$

Démonstration

1. **Nous commençons par un commentaire**
   (a) Tout d'abord, il faut remarquer que seul le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est de dimension finie, alors que F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque, et, surtout, pas forcément de dimension finie.
   (b) Si $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est une base de E, $\operatorname{Im} f = f(E)$ admet pour famille génératrice, la famille $\{f(e_1), \cdots, f(e_n)\}$. Ainsi, $\dim(\operatorname{Im} f) = \operatorname{rang}(\{e_1, \cdots, e_n\})$, et il n'est donc pas aberrant de parler du rang de f en posant :
   $$\operatorname{rang}(f) = \operatorname{rang}(\{e_1, \cdots, e_n\}) = \dim(\operatorname{Im} f)$$
2. **Démontrons le théorème du rang**
   (a) Si $\ker f = \{0_E\}$, alors $\dim(\ker f) = 0$ et f est injective. Si la famille $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est une base de E, alors la famille $\{f(e_1), \cdots, f(e_n)\}$ est libre, forme une base de $\operatorname{Im} f$ et donc $\dim(\operatorname{Im} f) = n$. Nous avons bien, dans ce cas, l'égalité
   $$\dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\ker f) = \dim E$$
   (b) Supposons, maintenant, que $\ker f \neq \{0_E\}$ et $\dim(\ker f) = p$ où $1 \leqslant p \leqslant n$.
   Soit alors $\{x_1, \cdots, x_p\}$ une base de $\ker f$ que nous complétons par des vecteurs $\{x_{p+1}, \cdots, x_n\}$ de telle sorte que $\{x_1, \cdots, x_p, x_{p+1}, \cdots, x_n\}$ forme une base de E
      i. La famille $\{f(x_{p+1}), \cdots, f(x_n)\}$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$

      En effet, soit $y \in \operatorname{Im} f$; il existe donc $u \in E$ tel que $y = f(u)$, et, dans la base $\{x_1, \cdots, x_p, x_{p+1}, \cdots, x_n\}$, nous avons $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, d'où $f(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.
      Or, pour $i = 1, \cdots, p$, nous avons $f(x_i) = 0_F$, de telle sorte que
      $$y = f(u) = \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$
      Ainsi, tout $y \in \operatorname{Im} f$ s'écrit en fonction de $\{f(x_{p+1}), \cdots, f(x_n)\}$ et nous pouvons en déduire que la famille de vecteurs de F $\{f(x_{p+1}), \cdots, f(x_n)\}$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$

      ii. La famille $\{f(x_{p+1}), \cdots, f(x_n)\}$ est une famille libre de E

      Soient $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-p}$, $n-p$ scalaires tels que
      $$\alpha_1 f(x_{p+1}) + \alpha_2 f(x_{p+2}) + \cdots + \alpha_{n-p} f(x_n) = 0_F$$
      Alors,
      $$\alpha_1 f(x_{p+1}) + \alpha_2 f(x_{p+2}) + \cdots + \alpha_{n-p} f(x_n) = 0_F$$
      $$\Longleftrightarrow$$
      $$f(\alpha_1 x_{p+1} + \alpha_2 x_{p+2} + \cdots + \alpha_{n-p} x_n) = 0_F$$
      Ce qui veut dire que $\alpha_1 x_{p+1} + \alpha_2 x_{p+2} + \cdots + \alpha_{n-p} x_n \in \ker f$, et donc est combinaison linéaire des vecteurs $\{x_1, \cdots, x_p\}$, et donc :
      $$\alpha_1 x_{p+1} + \alpha_2 x_{p+2} + \cdots + \alpha_{n-p} x_n = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_p x_p$$
      $$\Longleftrightarrow$$
      $$\alpha_1 x_{p+1} + \alpha_2 x_{p+2} + \cdots + \alpha_{n-p} x_n - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 - \cdots - \lambda_p x_p = 0_E$$

La famille $\{x_1, \cdots, x_p, x_{p+1}, \cdots, x_n\}$ formant une base de E, nous avons

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots + \alpha_{n-p} = \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$$

Ce qui montre que la famille $\{f(x_{p+1}), \cdots, f(x_n)\}$ est une famille libre de E

En conclusion, la famille $\{f(x_{p+1}), \cdots, f(x_n)\}$ est une base de E

Donc, $\dim(\mathrm{Im} f) = n - p$.

Ainsi, $\dim(\mathrm{Im} f) + \dim(\ker f) = n - p + p = n = \dim E$

Remarque 23 :

Dans la démonstration précédente, nous avons choisi des bases adaptées au problème à résoudre. C'est un principe qui facilite grandement les démonstrations.

Exemple 12 :

Nous allons prendre des exemples de base adaptéee dans $\mathbb{K}_n[X]$

1. Dans $\mathbb{K}_n[X]$ on étudie 1'application linéaire D définie par $D(P) = P'$ où P' est le polynôme dérivé de P

   Une base adaptée sera formée des polynômes $E_k = \dfrac{X^k}{k!}$ avec $k = 0, \cdots, n$ dont les transformées par D sont de la même forme ; en effet, nous avons, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $D(E_k) = E_{k-1}$ et $D(E_0) = 0$
2. Mais si on étudie l'application linéaire V définie par $V(P)(x) = P(x+1) - P(x)$, on vérifiera que la base formée des poiynomes $F_k(X) = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-(k-1))}{k!}$ avec $0 \leqslant k \leqslant n$, est adepte car nous avons $V(P_k) = P_{k-1}$ si $1 \leqslant k \leqslant n$ et $V(P_0) = 0$

3.6.14 Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n

Soit $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de E.

Les 4 propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est un automorphisme de E
2. f est injective
3. f est surjective
4. $\mathrm{rang}(f) = n$

Démonstration

Une application linéaire $f : E \longrightarrow E$ est un automorphisme de E, veut dire que f est une application linéaire bijective de E dans E.

1. On suppose que f est un automorphisme de E

   f est, par définition, bijective, donc f est injective
2. On suppose que f est injective

   Alors, $\ker f = \{0_E\}$ et de $\dim(\ker f) = 0$, on tire $\dim(\mathrm{Im} f) = n$, et donc $\mathrm{Im} f = E$ et f est bien surjective.
3. On suppose que f est surjective

   Alors $\dim(\mathrm{Im} f) = n$ et donc, $\mathrm{rang}(f) = n$
4. On suppose que $\mathrm{rang}(f) = n$

   Alors $\dim(\mathrm{Im} f) = n$ et donc $\dim(\ker f) = 0$, d'où f est surjective et injective. Donc bijective