3.7 Espaces d'applications linéaires

3.7.1 Introduction

Soit E un ensemble quelconque et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel tout aussi quelconque.
Nous allons considérer $F^E = \mathcal{F}(E,F)$ l'ensemble des applications de E dans F. Nous construisons, pour $\mathcal{F}(E,F)$ 2 lois de composition :

1. **Une opération d'addition**
   Pour définir cette opération d'addition, nous utilisons les outils habituels :
   Si $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $g \in \mathcal{F}(E,F)$, nous définissons la fonction $f+g \in \mathcal{F}(E,F)$ par :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} f+g : E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & (f+g)(x) = f(x)+g(x) \end{array}\right.$$
   On démontre facilement que cette addition est commutative, associative, admet un élément neutre *(la fonction nulle)*, et chaque fonction $f \in \mathcal{F}(E,F)$ admet un symétrique pour l'opération d'addition : $-f$.
   Muni de cette opération, $(\mathcal{F}(E,F),+)$ est un groupe commutatif
2. **Une loi externe**
   De la même manière, pour définir cette loi externe, nous utilisons les outils habituels :
   Si $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, nous définissons la fonction $\lambda f \in \mathcal{F}(E,F)$ par :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} (\lambda f)\, E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \end{array}\right.$$

On démontre facilement que, **muni de ces deux lois, $\mathcal{F}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .**
Il est intéressant de remarquer que cette structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$ dépendent uniquement de la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de F

Exercice 29 :

$\mathbb{C}^{\mathbb{N}} = \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$; c'est, en fait, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites numériques complexes.

1. Soient $a_1 \in \mathbb{C}$ et $a_2 \in \mathbb{C}$ 2 scalaires complexes
   Nous appelons F le sous-ensemble $F \subset \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ défini par :
   $$F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C}) \text{ telles que pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ nous avons } f(n) + a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) = 0\}$$
   Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C})$.
   Cet ensemble est l'ensemble des suites vérifiant une récurrence linéaire d'ordre 2
2. Soit Φ une application de F dans $\mathbb{C}^2$ ainsi définie :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} \Phi : F & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ f & \longmapsto & \Phi(f) = (f(0), f(0)) \end{array}\right.$$
   Démontrer que Φ est un isomorphisme de F vers $\mathbb{C}^2$
   Quelle est la dimension de F ?
3. Touver tous les éléments $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que la fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) = \alpha^n$ soit dans F.
4. Trouver une base de F lorsque $a_1^2 \neq 4a_2$.
5. On suppose que $a_1^2 = 4a_2$. Montrer que si $\gamma \in \mathbb{C}$ vérifie $\gamma^2 + a_1\gamma + a_2 = 0$, alors, la fonction $h \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{C})$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $h(n) = n\gamma^n$ est dans F. Trouver une base de F

3.7.2 Définition et théorème

Soient E et F 2 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels
On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F
$\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$

Démonstration

1. Tout d'abord $\mathcal{L}(E,F) \neq \emptyset$ puisque l'application nulle $\mathcal{O}_{E\to F}$ est un élément de $\mathcal{L}(E,F)$
   Rappel de ce qu'est $\mathcal{O}_{E\to F}$:
$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{E\to F} : E & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & \mathcal{O}_{E\to F}(u) = 0_F \end{array}\right.$$
   La démonstration de la linéarité de $\mathcal{O}_{E\to F}$ est simple
2. Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(E,F)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$. Il faut donc montrer que $\lambda u + \mu v \in \mathcal{L}(E,F)$.
   Soient donc $x \in E$, $y \in E$, $a \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}$. Alors :
$$\begin{array}{rl} (\lambda u + \mu v)(ax+by) = & (\lambda u)(ax+by) + (\mu v)(ax+by) \\ = & (\lambda u)(ax) + (\lambda u)(by) + (\mu v)(ax) + (\mu v)(by) \\ = & \lambda u(ax) + \lambda u(by) + \mu v(ax) + \mu v(by) \\ = & a\lambda u(x) + b\lambda u(y) + a\mu v(x) + b\mu v(y) \ \text{ linéarité} \\ = & a\lambda u(x) + a\mu v(x) + b\lambda u(y) + b\mu v(y) \\ = & a(\lambda u)(x) + a(\mu v)(x) + b(\lambda u)(y) + b(\mu v)(y) \\ = & a[(\lambda u)(x) + (\mu v)(x)] + b[(\lambda u)(y) + (\mu v)(y)] \\ = & a[(\lambda u + \mu v)(x)] + b[(\lambda u + \mu v)(y)] \end{array}$$
   Nous venons de montrer que $\lambda u + \mu v$ est linéaire et que, donc, $\lambda u + \mu v \in \mathcal{L}(E,F)$

$\mathcal{L}(E,F)$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$

3.7.3 Proposition

Soient E et F 2 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de **dimension finie**. On suppose $\dim E = m$ et $\dim F = n$
Alors $\mathcal{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \times \dim F = mn$

Démonstration

1. Soit $\{e_1, \ldots, e_m\}$ une base de E et soit $\Phi : \mathcal{L}(E,F) \longrightarrow F^m$ une application définie par :
$$\left\{\begin{array}{rcl} \Phi : \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & F^m \\ u & \longmapsto & \Phi(u) = (u(e_1), \ldots, u(e_m)) \end{array}\right.$$
2. Par hypothèse, F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et comme produit cartésien F^m est aussi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $m \times \dim F = mn$. Il suffit de voitr que F, $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$ et donc que F^m est isomorphe à $(\mathbb{K}^n)^m = \mathbb{K}^{mn}$
3. **Φ est un isomorphisme entre $\mathcal{L}(E,F)$ et F^m**
   En effet,
   (a) <u>Φ est linaire</u>
   ⇒ Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(E,F)$, alors :
$$\begin{array}{rl} \Phi(u+v) = & ((u+v)(e_1), \ldots, (u+v)(e_m)) \\ = & (u(e_1) + v(e_1), \ldots, u(e_m) + v(e_m)) \\ = & (u(e_1), \ldots, u(e_m)) + (v(e_1), \ldots, v(e_m)) \\ = & \Phi(u) + \Phi(v) \end{array}$$
   Donc, $\Phi(u+v) = \Phi(u) + \Phi(v)$
   ⇒ Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors :
$$\begin{array}{rl} \Phi(\lambda u) = & ((\lambda u)(e_1), \ldots, (\lambda u)(e_m)) \\ = & (\lambda u(e_1), \ldots, \lambda u(e_m)) \\ = & \lambda(u(e_1), \ldots, u(e_m)) \\ = & \lambda\Phi(u) \end{array}$$
   Donc, $\Phi(\lambda u) = \lambda\Phi(u)$

Φ est donc linéaire

(b) Φ est bijective

$\Rightarrow$ Montrons que Φ est injective en recherchant son noyau $\ker \Phi$; nous avons :

$$u \in \ker \Phi \Longleftrightarrow \Phi(u) = 0_{F^m} = (0_F, \dots, 0_F)$$

Ce qui veut dire que $u(e_1) = u(e_2) = \cdots = u(e_m) = 0_F$ et donc que $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est la fonction nulle $\mathcal{O}_{E \to F}$ et donc $\ker \Phi = \{\mathcal{O}_{E \to F}\}$
Φ est donc injective

$\Rightarrow$ Montrons que Φ est surjective.
Soit $(f_1, f_2, \dots, f_m) \in F^m$. Une application linéaire est entièrement déterminée par la donnée des images de ses vecteurs de base. Il existe donc une et une seule application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que, pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$, $u(e_i) = f_i$.
En d'autres termes, il existe une et une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\Phi(u) = (f_1, f_2, \dots, f_m)$
Φ est donc surjective

$\Rightarrow$ Comme Φ est à la fois surjective et injective, elle est donc bijective.
(L'unicité de l'application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ du point précédent est aussi une marque de la bijection)

Φ est donc un isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et F^m

4. De l'isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et F^m, nous déduisons que $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim F^m = mn$

3.7.4 Définition et théorème

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
On note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$ l'ensemble des endomorphismes de E ; alors

1. $\mathcal{L}(E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
2. $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un **anneau unitaire** d'unité Id_E l'application identique de E

Démonstration

1. Le fait que $\mathcal{L}(E)$ soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un cas particulier du théorème 3.7.2 qui dit que $\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
2. On sait, déjà que $(\mathcal{L}(E), +)$ est un groupe abélien, que la composition de 2 applications linéaires est une application linéaire et que cette même composition est associative. Il reste à montrer que la composition est distributive par rapport à l'addition.
Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $v \in \mathcal{L}(E)$ et $w \in \mathcal{L}(E)$; alors, pour tout $x \in E$, nous avons :

$$\begin{aligned} [u \circ (v + w)](x) = & \; u[(v + w)(x)] \\ = & \; u[v(x) + w(x)] \\ = & \; u[v(x)] + u[w(x)] \\ = & \; u \circ v(x) + u \circ w(x) \\ = & \; [u \circ v + u \circ w](x) \end{aligned}$$

Et nous avons donc $u \circ (v + w) = u \circ v + u \circ w$; il y a donc distributivité.

Remarque 24 :

1. L'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ n'est, en général pas commutatif
Considérons, par exemple, dans $\mathbb{R}[X]$ les 2 applications linéaires suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} D : \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & D(P) = P' \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} I : \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & I(P) = \displaystyle\int_0^X P(t)\, \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

Alors, pour $P(X) = 1$, nous avons :

$$(D \circ I) P(X) = 1 \text{ alors que } (I \circ D) P(X) = 0$$

Nous avons donc $I \circ D \neq D \circ I$

2. On appelle $\mathrm{GL}(E)$ le groupe des éléments inversibles de l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$. On l'appelle le **groupe linéaire** C'est aussi le groupe des automorphismes de E
3. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ et tout $n \in \mathbb{N}$, u^n désigne donc Id_E si $n = 0$ et $\underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{n \text{ fois}}$
4. Comme dans tout anneau, deux formules importantes sont vraies dans $\mathcal{L}(E)$
   - ⋆ La formule du binôme $(f+g)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}$
   - ⋆ $f^n - g^n = (f-g) \circ \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-k-1} \right)$

   pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ et tout $g \in \mathcal{L}(E)$ **QUI COMMUTENT**.
5. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est **nilpotent** si $f^k = \mathcal{O}_E$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Le plus petit de ces entiers k est alors appelé **l'indice de nilpotence** de f .

Exercice 30 :

E étant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , on appelle projecteur tout endomorphisme p de E, tel que $p^2 = p \circ p = p$. On désigne par Id_E l'identité de E.

1. Démontrer que p est un projecteur si et seulement si $(\mathrm{Id}_E - p)$ en est un.
2. Montrer que si p est un projecteur, alors les relations suivantes sont vérifiées :

   $\rightarrow$ $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - p) = \ker p$ $\rightarrow$ $\ker(\mathrm{Id}_E - p) = \mathrm{Im} p$
3. Démontrer que si p est un projecteur, alors $E = \mathrm{Im} p \oplus \ker p$
4. Démontrer qu'un projecteur p commute avec un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ si et seulement si son noyau et son image sont stables par u.

Exercice 31 :

E étant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n où $n \geqslant 2$, on désigne par f un endomorphisme non nul de E $(f \in \mathcal{L}(E))$ commutant avec tout automorphisme de E.

1. Montrer que si x et y sont deux éléments linéairement indépendants de E, il existe un automorphisme $u \in \mathrm{GL}(E)$ de E tel que $u(x) = x$ et $u(y) = x + y$
2. Soit $a \in E$ un élément de E n'appartenant pas à $\ker f$. Démontrer que les vecteurs a et $b = f(a)$ sont liés. En déduire l'existence d'un élément $\lambda(a)$ de $\mathbb{K}$ tel que $f(a) = \lambda(a) a$
3. Démontrer que $\lambda(a)$ ne dépend pas de a.
4. Quel est le centre de l'anneau $\mathcal{L}(E)$?

Exercice 32 :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. On pose :

$$f^0 = \mathrm{Id}_E \quad f^k = f^{k-1} \circ f (k \geqslant 1) \quad N_k = \ker f^k \quad I_k = \mathrm{Im} f^k$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel k, on a :

$$N_k \subset N_{k+1} \text{ et } I_{k+1} \subset I_k$$

2. Démontrer qu'il existe un entier naturel r_0 tel que pour $k < r_0$ on ait $N_k \neq N_{k+1}$, et pour $k \geqslant r_0$, $N_k = N_{k+1}$

3. Démontrer que pour $k \leqslant r_0$,$I_k \neq I_{k+1}$ et pour $k > r_0$, $I_k = I_{k+1}$
4. Démontrer que $E = I_{r_0} \oplus N_{r_0}$
5. Démontrer que la restriction de f à I_{r_0} induit une fonction de I_{r_0} dans I_{r_0} qui est un automorphisme de I_{r_0}