3.8 Formes linéaires

3.8.1 Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . On appelle **forme linéaire** toute application linéaire $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$
On appelle **espace dual** et on le note souvent E^* l'ensemble des formes linéaires $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$

Remarque 25 :

1. Une forme linéaire est donc un élément de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$; nous avons donc $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Comme vu précédemment, $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
2. Pour toute forme linéaire $f \in E^*$, l'image de x par f peut être écrite $f(x)$ ou $\langle f/x \rangle$

Exemple 13 :

1. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on peut considérer l'application linéaire Φ_a, avec $a \in \mathbb{R}$ définie par :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Phi_a : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \Phi_a(f) = f(a) \end{array} \right.$$
Φ_a est une forme linéaire
2. Par contre, dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions numériques continuement dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, l'application linéaire Ψ_a, avec $a \in \mathbb{R}$ définie par :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Psi_a : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & \Psi_a(f) = (f'(a))^2 \end{array} \right.$$
n'est pas une forme linéaire.
En effet, si f est, par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = (1+i)x$; alors, $f'(x) = (1+i)$ et $\Psi_a(f) = (1+i)^2$
Nous avons $(2f)(x) = 2f(x) = 2(1+i)x$ d'où $(2f)'(x) = 2f'(x) = 2(1+i)$, d'où
$$\Psi_a(2f) = (2(1+i))^2 = 4(1+i)^2 = 4\Psi_a(f)$$
Il n'y a donc pas linéarité ; nous n'avons pas $\Psi_a(\lambda f) = \lambda \Psi_a(f)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$
3. Dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, on peut considérer l'application linéaire I définie par :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} I : \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & I(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t \end{array} \right.$$
I est une forme linéaire
4. Dans $\mathbb{C}[X]$, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$, on peut considérer l'application linéaire S qui à un polynômes P fait correspondre la somme des coefficients :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} S : \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k & \longmapsto & S(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \end{array} \right.$$
S est une forme linéaire

Remarque 26 :

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, d'après le théorème du rang, pour toute forme linéaire f, $\dim \ker f + \dim \mathbb{K} = \dim E = n \iff \dim \ker f + 1 = n \iff \dim \ker f = n - 1$
Le noyau d'une forme linéaire f est donc un hyperplan.
Etant donné un hyperplan $H \subset E$, il y a plusieurs *(une infinité même !)* formes linéaires qui admettent H comme noyau

3.8.2 Définition et théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E

1. On appelle e_i^* l'application linéaire qui, à tout $x \in E$ fait correspondre la composante de x sur le vecteur e_i, c'est à dire :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} e_i^* : E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i & \longmapsto & e_i^*(x) = x_i \end{array} \right.$$
2. $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ forme une base de $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ qui est donc de même dimension que E.
3. La base $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ est caractérisée par :
$$(\forall 1 \leqslant i \leqslant n)\,(\forall 1 \leqslant j \leqslant n) \left(e_i^*(e_j) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{array} \right. \right)$$

Démonstration

1. Il est, bien entendu évident, d'après la définition de e_i^*, que, pour tout j tel que $1 \leqslant j \leqslant n$, $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker
2. Démontrons, maintenant, que la famille $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ forme une base de $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$
   $\Rightarrow$ **C'est une famille génératrice de** E^*
   Soit $f \in E^*$.
   Alors, tout $x \in E$ s'écrit $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et donc, $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\, e_i^*(x)$, en remarquant que, par définition, $e_i^*(x) = x_i$.
   Ainsi, pour tout $x \in E$, $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(e_i)\, e_i^*(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} f(e_i)\, e_i^* \right)(x)$ et nous avons donc $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(e_i)\, e_i^*$
   f est donc combinaison linéaire des $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$, et la famille $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ est donc génératrice.
   $\Rightarrow$ **C'est une famille libre de** E^*
   Soient $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, n scalaires tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^* = \mathcal{O}$, ce qui veut dire que, pour tout $x \in E$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*(x) = 0$.
   En particulier, pour tout vecteur e_j de la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E :
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*(e_j) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{i,j} = 0 \Longleftrightarrow \lambda_j = 0$$
   Et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$
   Ainsi, la famille $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ est libre.
   Libre et génératrice, la famille $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ est une base de E^*
   Nous en déduisons que $\dim E^* = n$

Remarque 27 :

1. Il est clair que les coordonnées de $f \in E^*$ sont $(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$ dans la base $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$.
2. Il existe donc un isomorphisme linéaire $u : E \longrightarrow E^*$, tel que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $u(e_i) = e_i^*$.
   Cet isomorphisme dépend essentiellement de la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ choisie.
   Ainsi, étant donnée une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E, il existe une et une seule base $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ de E^* telle que $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$; ...et réciproquement : étant donnée une base $\{f_1^*, \ldots, f_n^*\}$ de E^*, il existe une et une seule base $\{f_1, \ldots, f_n\}$ de Ef telle que $f_i^*(f_j) = \delta_{i,j}$

Exercice 33 :

On considère $\mathbb{R}^4$, muni de sa base canonique classique $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.
On considère, maintenant, la base duale de $\left(\mathbb{R}^4\right)^\star = \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}\right)$, $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*\}$ et les formes linéaires f_1, f_2, f_3 et f_4 de coordonnées, dans les bases duales :

$$f_1 = (1, 0, -\lambda, 0) \quad f_2 = \left(0, 1, 0, \frac{-1}{\lambda}\right) \quad f_3 = (1, 0, 0, -\mu) \quad f_4 = \left(0, 1, 0, \frac{-1}{\mu}\right)$$

Avec $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$
Etudier l'indépendance de ces formes linéaires, et trouver, lorsqu'elles sont indépendantes, la base de $\mathbb{R}^4$, duale de $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$

Exercice 34 :

Cet exercice est exactement le même que celui ci-dessus. C'est seulement l'ensemble de référence qui change ; ici, ce seront les polynômes $\mathbb{K}_2[X]$ est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degré inférieur ou égal à 2. On considère les formes linéaires Ψ_1, Ψ_2 et Ψ_3 définies par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Psi_1 : \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ P & \longmapsto & \Psi_1(P) = P(1) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} \Psi_2 : \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ P & \longmapsto & \Psi_2(P) = P'(1) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Psi_3 : \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ P & \longmapsto & \Psi_3(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

1. Démontrer que la famille $\{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\}$ est une base de $(\mathbb{K}_2[X])^*$
2. En déterminer la base duale dans $\mathbb{K}_2[X]$

3.8.3 Définition de droite vectorielle

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
Soit $a \in E$ tel que $a \neq 0_E$. Nous appelons $\mathbb{K}a$ l'ensemble suivant :

$$\mathbb{K}a = \{u \in E \text{ tels que } u = \lambda a \text{ où } \lambda \in \mathbb{K}\}$$

L'ensemble $\mathbb{K}a$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 1 appelé **droite vectorielle**

Démonstration

La démonstration que $\mathbb{K}a$ est un sous-espace vectoriel de E est évidente. La définition de droite vectorielle a déjà été donnée

Remarque 28 :

Il nous serait tout aussi possible de définir de la même manière **un plan vectoriel** :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
Soit $a \in E$, $b \in E$ tels que $a \neq 0_E$, $b \neq 0_E$ et a et b non colinéaires. Nous appelons $\mathbb{K}a + \mathbb{K}b$ l'ensemble suivant :

$$\mathbb{K}a + \mathbb{K}b = \{u \in E \text{ tels que } u = \lambda a + \mu b \text{ où } \lambda \in \mathbb{K} \text{ et } \mu \in \mathbb{K}\}$$

L'ensemble $\mathbb{K}a + \mathbb{K}b$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 appelé **plan vectoriel**

Voir aussi page 75

3.8.4 Définition d'hyperplan

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .
On appelle **hyperplan** de E tout sous-espace vectoriel H de E qui admet une droite vectorielle pour supplémentaire.

Remarque 29 :

1. Ceci veut donc dire qu'il existe $a \in E$ tel que $a \notin H$ et $a \neq 0$ et $E = H \oplus \mathbb{K}a$
2. **Si** E **est de dimension finie** n, cela équivaut à $\dim H = n - 1$

3.8.5 Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
Si H est un hyperplan de E, alors, pour tout vecteur $b \notin H$ non nul, nous avons $E = H \oplus \mathbb{K}b$.

Démonstration

C'est un résultat assez remarquable qui ne pose pas de difficultés dans la démonstration.
H est un hyperplan et donc, par définition, il existe $a \in E$ tel que $a \notin H$ et $E = H \oplus \mathbb{K}a$
Soit $b \notin H$

$\Rightarrow$ Montrons que $\mathbb{K}b \cap H = \{0_E\}$
Soit $x \in \mathbb{K}b \cap H$, alors $x = \lambda b$. Si $\lambda b \in H$ pour tout $\lambda \neq 0$, comme H est un sous-espace vectoriel de E, pour tout $\mu \in \mathbb{K}$, $\mu x = \mu \lambda x \in H$, en particulier pour $\mu = \dfrac{1}{\lambda}$ qui nous montre qu'alors $b \in H$; ce qui est contradictoire.
Donc $x = \lambda b \notin H$ sauf pour $\lambda = 0$.
Le seul élément commun à H et $\mathbb{K}b$ est 0_E et donc $\mathbb{K}b \cap H = \{0_E\}$

$\Rightarrow$ Montrons que $\mathbb{K}b + H = E$
Soit $x \in E$.
Nous allons démontrer que nous pouvons écrire $x = h + \mu b$ avec $h \in H$ et $\mu \in \mathbb{K}$
Tout d'abord, comme $E = H \oplus \mathbb{K}a$, nous pouvons écrire, et de manière unique :
- $\star$ $x = h_x + \lambda_x a$
- $\star$ $b = h_b + \lambda_b a$ avec $\lambda_b \neq 0$, puisque $b \notin H$

De la seconde égalité, nous tirons $a = \dfrac{1}{\lambda_b}(b - h_b)$, expression que nous pouvons remplacer dans $x = h_x + \lambda_x a$:

$$x = h_x + \lambda_x a \iff x = h_x + \lambda_x \left(\frac{1}{\lambda_b}(b - h_b) \right) \iff x = \left(h_x - \frac{\lambda_x}{\lambda_b} h_b \right) + \frac{1}{\lambda_b} b$$

Or, $\left(h_x - \dfrac{\lambda_x}{\lambda_b} h_b \right) \in H$ et $\dfrac{1}{\lambda_b} b \in \mathbb{K}b$
Ainsi, tout $x \in E$ peut s'écrire $x = h + \mu b$ avec $h \in H$ et $\mu \in \mathbb{K}$ et donc $\mathbb{K}b + H = E$

Nous venons de démontrer que $\mathbb{K}b + H = E$ et $\mathbb{K}b \cap H = \{0_E\}$, nous avons donc $E = H \oplus \mathbb{K}b$
Ce que nous voulions

3.8.6 Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

1. Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement si il existe une forme linéaire $\varphi \in E^*$, non nulle, telle que $H = \ker \varphi$
2. Si φ et ψ sont deux formes linéaires non nulles sur E telles que $\ker \varphi = \ker \psi$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\psi = \lambda \varphi$

Démonstration

1. **Démontrons l'équivalence du premier point**
   $\Rightarrow$ Soit H un hyperplan de E
   Alors, il existe $a \in E$ tel que $a \notin H$ et $E = H \oplus \mathbb{K}a$.
   Soit $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par :

$$\begin{cases} \varphi : E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x = h + \lambda a & \longmapsto & \varphi(x) = \lambda \end{cases}$$

φ est linéaire et donc $\varphi \in E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$

Soient $x_1 \in E$, $x_2 \in E$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\beta \in \mathbb{K}$. Alors :

- ⋆ Comme $E = H \oplus \mathbb{K}a$, nous pouvons écrire, et de manière unique, $x_1 = h_1 + \lambda_1 a$ et $x_2 = h_1 + \lambda_2 a$ où $h_1 \in H$ et $h_2 \in H$ et nous avons :

$$\varphi(x_1) = \lambda_1 \text{ et } \varphi(x_2) = \lambda_2$$

- ⋆ Dès lors,

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha(h_1 + \lambda_1 a) + \beta(h_2 + \lambda_2 a) = (\alpha h_1 + \beta h_2) + (\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2) a$$

H étant un sous-espace vectoriel , $(\alpha h_1 + \beta h_2) \in H$ et donc :

$$\varphi(\alpha x_1 + \beta x_2) = (\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2) = \alpha\varphi(x_1) + \beta\varphi(x_2)$$

φ est donc linéaire

Maintenant :

$$x \in \ker\varphi \Longleftrightarrow \varphi(x) = 0 \Longleftrightarrow \varphi(h + \lambda a) = \varphi(h) + \lambda = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0$$

puisque $\varphi(h) = 0$

Et donc, $x = h$, ce qui sous-entend que $x \in H$ et donc $\ker\varphi = H$

$\Rightarrow$ Soit $\varphi \in E^*$ une forme linéaire non nulle et on note $H = \ker\varphi$

Nous allons démontrer que H est un hyperplan

φ étant non nulle, il existe $b \in E$ tel que $\varphi(b) \neq 0$.

Posons $a = \dfrac{1}{\varphi(b)} b$, nous avons alors $\varphi(a) = 1$

Nous allons montrer alors que $E = H \oplus \mathbb{K}a$, ce qui prouvera que H est un hyperplan.

- ⋆ Tout d'abord, montrons que $H \cap \mathbb{K}a = \{0_E\}$

  Soit $x \in H \cap \mathbb{K}a$, alors, comme $x \in \mathbb{K}a$, nous avons $x = \lambda a$ et comme $x \in H$, $\varphi(x) = 0$, d'où nous déduisons

$$\varphi(\lambda a) = 0 \Longleftrightarrow \lambda\varphi(a) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0$$

  Donc $x = 0_E$ et donc $H \cap \mathbb{K}a = \{0_E\}$

- ⋆ Montrons, maintenant, que $E = H + \mathbb{K}a$

  C'est à dire que tout $x \in E$ peut s'écrire de la forme $x = h + \lambda a$ avec $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

  Ecrivons $x = \varphi(x)\, a + (x - \varphi(x)\, a)$

  - ▷ De manière évidente, comme $\varphi(x) \in \mathbb{K}$, nous avons $\varphi(x)\, a \in \mathbb{K}a$
  - ▷ D'autre part :

$$\varphi(x - \varphi(x)\, a) = \varphi(x) - \varphi(x)\,\varphi(a) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0$$

  Et donc, $(x - \varphi(x)\, a) \in \ker\varphi = H$

  Ainsi, tout $x \in E$ peut s'écrire de la forme $x = h + \lambda a$ avec $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

Et donc $E = H \oplus \mathbb{K}a$

2. **Montrons le second point**

Soient $\varphi \in E^*$ et $\psi \in E^*$ telles que $\ker\varphi = \ker\psi$. Notons $H = \ker\varphi$.

Il existe alors $a \notin H$ tel que $\varphi(a) \neq 0$ et $E = H \oplus \mathbb{K}a$.

Soit $\lambda = \dfrac{\psi(a)}{\varphi(a)}$. Alors, pour tout $x \in E$ que nous écrivons $x = h + ka$ avec $k \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}
\psi(x) = &\ \psi(h + ka) \\
= &\ \psi(h) + k\psi(a) \\
= &\ k\psi(a) \\
= &\ k \times \lambda\varphi(a) \\
= &\ \varphi(h) + k \times \lambda\varphi(a) \\
= &\ \lambda\varphi(h) + k \times \lambda\varphi(a) \\
= &\ \lambda(\varphi(h) + k\varphi(a)) \\
= &\ \lambda\varphi(h + ka) = \lambda\varphi(x)
\end{aligned}$$

De $\psi(x) = \lambda\varphi(x)$ pour tout $x \in E$, nous déduisons que $\psi = \lambda\varphi$

3.8.7 Equation d'un hyperplan

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
Si H est un hyperplan de E tel que $H = \ker \varphi$ où $\varphi \in E^*$ et φ non nulle, l'équation $\varphi(x) = 0$ est l'équation de l'hyperplan H

Remarque 30 :

Cette définition est valable pour tous les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels