3.9 Transposition

3.9.1 Définition de forme bilinéaire

Soit E et F 2 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels .
On appelle **forme bilinéaire** sur $E \times F$ toute application $\Psi : E \times F \longrightarrow \mathbb{K}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Psi : E \times F & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (u, v) & \longmapsto & \Psi\left((u, v)\right) \end{array} \right.$$

qui vérifie :

⇒ Pour tout $u_1 \in E$ tout $u_2 \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $\mu \in \mathbb{K}$ et tout $v \in F$:

$$\Psi\left((\lambda u_1 + \mu u_2, v)\right) = \lambda \Psi\left((u_1, v)\right) + \mu \Psi\left((u_2, v)\right)$$

⇒ Pour tout $v_1 \in F$ tout $v_2 \in F$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $\mu \in \mathbb{K}$ et tout $u \in E$:

$$\Psi\left((u, \lambda v_1 + \mu v_2)\right) = \lambda \Psi\left((u, v_1)\right) + \mu \Psi\left((u, v_2)\right)$$

Remarque 31 :

On dit, parfois, que Ψ est linéaire en chacune des variables

3.9.2 Définition et théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et E^* son espace dual.
On définit une application $\Psi : E \times e^* \longrightarrow \mathbb{K}$ par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Psi : E \times E^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x, f) & \longmapsto & \Psi\left((x, f)\right) = \langle x/f \rangle = f(x) \end{array} \right.$$

Alors, cette application Ψ est une forme bilinéaire. Elle est appelée **forme bilinéaire canonique** définie sur $E \times E^*$.
L'expression $\langle x/f \rangle$ est appelée **crochet de dualité**

Démonstration

La démonstration est simple et liée, d'une part à la linéarité des formes linéaires et à la définition des opérations sur les applications linéaires

1. Soient $x \in E$, $y \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mu \in \mathbb{K}$ et $f \in E^*$; alors :
$$\langle \lambda x + \mu y/f \rangle = f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) = \lambda \langle x/f \rangle + \mu \langle y/f \rangle$$
2. Soient $f \in E^*$, $g \in E^*$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mu \in \mathbb{K}$ et $x \in E$; alors :
$$\langle x/\lambda f + \mu g \rangle = (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda \langle x/f \rangle + \mu \langle x/g \rangle$$

Voilà, c'est tout ! !

Remarque 32 :

A partir de ce crochet de dualité, il est possible de donner d'autres définitions et d'explorer les espaces créés par ces définitions.

1. Soit $x \in E$; on note $\tilde{x}$ l'application $\tilde{x} : E^* \longrightarrow \mathbb{K}$, définie par :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} \tilde{x} : E^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \tilde{x}(f) = \langle x/f \rangle = f(x) \end{array} \right.$$
   (a) $\tilde{x}$ est linéaire ; c'est une forme linéaire sur E^* et donc $\tilde{x}$ est un élément du dual de E^* ; donc $\tilde{x} \in (E^*)^*$

(b) Considérons $\Psi : E^* \times (E^*)^* \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Psi : E^* \times (E^*)^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (f, \tilde{x}) & \longmapsto & \Psi\left[(f, \tilde{x})\right] = \tilde{x}(f) = \langle f / \tilde{x} \rangle \end{array} \right.$$

C'est la forme bilinéaire canonique définie sur $E^* \times (E^*)^*$, et nous avons, pour tout $x \in E$ et tout $f \in E^*$:

$$\langle f / \tilde{x} \rangle = \tilde{x}(f) = f(x) = \langle x / f \rangle$$

Et donc, $\langle f / \tilde{x} \rangle = \langle x / f \rangle$

(c) L'application $F : E \longrightarrow (E^*)^*$ définie pour tout $x \in E$ par $F(x) = \tilde{x}$ est linéaire

2. On dit que $x \in E$ et $y^* \in E^*$ sont orthogonaux [2] si $\langle x / y^* \rangle = y^*(x) = 0$

(a) Si $y^* \in E^*$ est fixé dans E^*, l'orhtogonal de y^*, noté $(y^*)^{\circ}$ est l'ensemble

$$(y^*)^{\circ} = \{x \in E \text{ tel que } \langle x / y^* \rangle = 0\}$$

C'est, en fait, le noyau de y^*. Nous avons donc $(y^*)^{\circ} = \ker y^*$; c'est un sous-espace vectoriel de E ; c'est même un hyperplan de E

(b) Pour $x \in E$, l'orthogonal de x noté $(\{x\})^{\circ}$ est défini par :

$$(\{x\})^{\circ} = \{y^* \in E^* \text{ tel que } \langle x / y^* \rangle = 0\}$$

Nous avons $(\{x\})^{\circ} \subset E^*$; c'est même un sous-espace vectoriel de E^*

(c) Plus généralement, si $X \subset E$, l'orthogonal de X noté $(X)^{\circ}$ est défini par :

$$(X)^{\circ} = \{y^* \in E^* \text{ tel que pour tout } x \in X \text{ nous avons } \langle x / y^* \rangle = 0\}$$

Nous avons $(X)^{\circ} \subset E^*$; c'est même un sous-espace vectoriel de E^*

Exercice 35 :

1. Démontrer que, pour tout $x \in E$, $\tilde{x}$ est linéaire, que $\Psi : E^* \times (E^*)^* \longrightarrow \mathbb{K}$ est bilinéaire et que $F : E \longrightarrow (E^*)^*$ est linéaire
2. Démontrer que si $X \subset E$, alors $(X)^{\circ}$ est un sous-espace vectoriel de E^*

3.9.3 Théorème et définition de transposée

Soient E et F 2 $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire ($f \in \mathcal{L}(E, F)$)
L'application ${}^t f : F^* \longrightarrow E^*$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} {}^t f : F^* & \longrightarrow & E^* \\ y^* & \longmapsto & {}^t f(y^*) = y^* \circ f \end{array} \right.$$

est une application linéaire . ${}^t f$ est appelée transposée de f et nous avons ${}^t f \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$
Pour tout $x \in E$ et tout $y^* \in F^*$, nous avons :

$$\langle x / {}^t f(y^*) \rangle = \langle f(x) / y^* \rangle$$

Démonstration

1. La transposée existe
   $\Rightarrow$ Soient donc E et F 2 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels , et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire .
   Soit $y^* \in F^*$; alors $y^* \circ f : E \longrightarrow \mathbb{K}$, est linéaire comme composée de 2 applications linéaires, et est donc une forme linéaire sur E, et donc $y^* \circ f \in E^*$

2. Ne pas confondre avec l'orthogonalité du produit scalaire, même si nous pouvons y trouver des liens

$\Rightarrow$ Appelons $x^* = y^* \circ f$. Nous avons alors le diagramme ci-après :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "x^*"'] & F \arrow[d, "y^*"] \\ & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

Ainsi, à toute application linéaire $f : E \longrightarrow F$ et à toute forme linéaire $y^* \in F^*$, nous pouvons faire correspondre une forme linéaire $x^* \in E^*$ définie par $x^* = y^* \circ f$

$\Rightarrow$ Ainsi, l'application :

$$\begin{cases} {}^t f : F^* & \longrightarrow & E^* \\ \quad y^* & \longmapsto & {}^t f\left(y^*\right) = y^* \circ f \end{cases}$$

existe bien, et pour tout $x \in E$, nous avons :

$$\left\langle x / {}^t f\left(y^*\right) \right\rangle = {}^t f\left(y^*\right)(x) = y^* \circ f(x) = \left\langle f(x) / y^* \right\rangle$$

Et donc, nous avons, pour tout $x \in E$ et tout $y^* \in F^*$, $\left\langle x / {}^t f\left(y^*\right) \right\rangle = \left\langle f(x) / y^* \right\rangle$

2. La transposée est une application linéaire

Que ${}^t f$ soit une application linéaire veut dire que ${}^t f \in \mathcal{L}\left(F^*, E^*\right)$

$\Rightarrow$ Soient $y_1^* \in F^*$ et $y_2^* \in F^*$. Il nous faut donc montrer que ${}^t f\left(y_1^* + y_2^*\right) = tf\left(y_1^*\right) + tf\left(y_2^*\right)$.
Pour tout $x \in E$, nous avons :

$$\begin{aligned} {}^t f\left(y_1^* + y_2^*\right)(x) = & \ \left\langle x / {}^t f\left(y_1^* + y_2^*\right) \right\rangle = \left\langle f(x) / y_1^* + y_2^* \right\rangle \\ = & \ \left\langle f(x) / y_1^* \right\rangle + \left\langle f(x) / y_2^* \right\rangle \text{ d'après 3.9.2} \\ = & \ \left\langle x / {}^t f\left(y_1^*\right) \right\rangle + \left\langle x / {}^t f\left(y_2^*\right) \right\rangle \\ = & \ {}^t f\left(y_1^*\right)(x) + {}^t f\left(y_2^*\right)(x) \\ = & \ \left({}^t f\left(y_1^*\right) + {}^t f\left(y_2^*\right)\right)(x) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in E$, nous avons

$$ {}^t f\left(y_1^* + y_2^*\right)(x) = \left({}^t f\left(y_1^*\right) + {}^t f\left(y_2^*\right)\right)(x)$$

Et donc

$$ {}^t f\left(y_1^* + y_2^*\right) = tf\left(y_1^*\right) + tf\left(y_2^*\right)$$

Ce que nous voulions

$\Rightarrow$ Maintenant, soient $y^* \in F^*$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Il nous faut donc montrer que ${}^t f\left(\lambda y^*\right) = \lambda {}^t f\left(y^*\right)$.
Pour tout $x \in E$, nous avons :

$$\begin{aligned} {}^t f\left(\lambda y^*\right)(x) = & \ \left\langle x / {}^t f\left(\lambda y^*\right) \right\rangle \\ = & \ \left\langle f(x) / \lambda y^* \right\rangle \\ = & \ \lambda \left\langle f(x) / y^* \right\rangle \\ = & \ \lambda \left\langle x / {}^t f\left(y^*\right) \right\rangle \\ = & \ \lambda {}^t f\left(y^*\right)(x) \\ = & \ \left(\lambda {}^t f\left(y^*\right)\right)(x) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in E$, nous avons ${}^t f\left(\lambda y^*\right)(x) = \left(\lambda {}^t f\left(y^*\right)\right)(x)$, ce qui montre que

$$ {}^t f\left(\lambda y^*\right) = \lambda {}^t f\left(y^*\right)$$

Ce que nous voulions

Ainsi, ${}^t f$ soit une application linéaire et donc ${}^t f \in \mathcal{L}\left(F^*, E^*\right)$

Exemple 14 :

En supposant $E = F$ et $f = \mathrm{Id}_E$, alors, pour tout $x \in E$, et tout $y^* \in E^*$ nous avons :

$$\left\langle x / {}^t\left(\mathrm{Id}_E\right)\left(y^*\right) \right\rangle = \left\langle \mathrm{Id}_E(x) / y^* \right\rangle = \left\langle x / y^* \right\rangle$$

C'est à dire que nous avons, pour tout $x \in E$, ${}^t\left(\mathrm{Id}_E\right)\left(y^*\right)(x) = y^*(x)$, c'est à dire ${}^t\left(\mathrm{Id}_E\right)\left(y^*\right) = y^*$. De là, nous concluons que ${}^t\left(\mathrm{Id}_E\right) = \mathrm{Id}_{E^*}$

Remarque 33 :

Remarque importante : si f est une application linéaire de E dans F, c'est à dire si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, sa transposée ${}^t f$ est une application linéaire , certes, mais de F^* dans E^*, c'est à dire ${}^t f \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ qui est d'une toute autre nature ! Le théorème 3.9.3 fait le lien entre ces deux applications linéaires

3.9.4 Propriétés des la transposée

1. Soit E et F 2 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de duals respectifs E^* et F^*. On considère l'application $\mathcal{A}$ suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{A} : \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{L}(F^*, E^*) \\ \qquad\qquad f & \longmapsto & \mathcal{A}(f) = {}^t f \end{cases}$$

   Alors, $\mathcal{A}$ est linéaire, c'est à dire que, pour tout $f \in \mathcal{L}(E, F)$, tout $g \in \mathcal{L}(E, F)$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$${}^t(f+g) = {}^t f + {}^t g \text{ et } {}^t(\lambda f) = \lambda {}^t f$$

2. Soit E, F et G 3 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de duals respectifs E^*, F^* et G^*.
   Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors

$${}^t(g \circ f) = {}^t f \circ {}^t g$$

3. Soit E et F 2 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de duals respectifs E^* et F^* et $f \in \mathcal{L}(E, F)$
   Si f est bijective, il en est de même de ${}^t f$ et, mieux, ${}^t\left(f^{-1}\right) = \left({}^t f\right)^{-1}$

Démonstration

1. Montrons que $\mathcal{A}$ est une application linéaire
   $\Rightarrow$ Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, tout $g \in \mathcal{L}(E, F)$ et ${}^t f \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$, tout ${}^t g \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ les transposées respectives.
   Alors, pour tout $x \in E$ et tout $y^* \in F^*$, nous avons :

$$\begin{aligned} \langle x / {}^t(f+g)(y^*) \rangle &= \langle (f+g)(x) / y^* \rangle \\ &= \langle f(x) + g(x) / y^* \rangle = \langle f(x) / y^* \rangle + \langle g(x) / y^* \rangle \\ &= \langle x / {}^t f(y^*) \rangle + \langle x / {}^t g(y^*) \rangle \\ &= \langle x / {}^t f(y^*) + {}^t g(y^*) \rangle \\ &= \langle x / \left({}^t f + {}^t g\right)(y^*) \rangle \end{aligned}$$

   Et nous avons donc ${}^t(f+g) = {}^t f + {}^t g$, c'est à dire $\mathcal{A}(f+g) = \mathcal{A}(f) + \mathcal{A}(g)$
   $\Rightarrow$ Soient, maintenant $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors, pour tout $x \in \mathbb{K}$ et tout $y^* \in F^*$, nous avons :

$$\begin{aligned} \langle x / {}^t(\lambda f)(y^*) \rangle &= \langle (\lambda f)(x) / y^* \rangle \\ &= \langle \lambda f(x) / y^* \rangle = \lambda \langle f(x) / y^* \rangle \\ &= \lambda \langle x / {}^t f(y^*) \rangle \\ &= \langle x / \lambda {}^t f(y^*) \rangle \end{aligned}$$

   Et nous avons donc ${}^t(\lambda) = \lambda {}^t f$, c'est à dire $\mathcal{A}(\lambda f) = \lambda \mathcal{A}(f)$
   $\mathcal{A}$ est donc une application linéaire
2. Démontrons que ${}^t(g \circ f) = {}^t f \circ {}^t g$
   C'est à dire que nous avons les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & F \arrow[d, "g"] \\ & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G^* \arrow[r, "{}^t g"] \arrow[dr, "{}^t f \circ {}^t g"'] & F^* \arrow[d, "{}^t f"] \\ & E^* \end{tikzcd}$$

Soit $x \in E$ et $z^* \in G^*$. Alors :

$$\begin{array}{rcl}\langle x/^t (g \circ f)(z^*)\rangle & = & \langle (g \circ f)(x)/z^*\rangle \\ & = & \langle g[f(x)]/z^*\rangle \\ & = & \langle f(x)/^t g(z^*)\rangle \\ & = & \langle x/^t f[^t g(z^*)]\rangle \\ & = & \langle x/^t f \circ^t g(z^*)\rangle \end{array}$$

Et donc, nous avons ${}^t(g \circ f) = {}^t f \circ {}^t g$

3. Montrons que si f est bijective, alors ${}^t f$ l'est aussi et que ${}^t\left(f^{-1}\right) = \left({}^t f\right)^{-1}$

$f : E \longrightarrow F$ étant bijective, $f^{-1} : F \longrightarrow E$ l'est aussi et nous avons donc :

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F \text{ et } f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$$

En passant à la transposée, nous avons :

$${}^t\left(f \circ f^{-1}\right) = {}^t\left(\mathrm{Id}_F\right) \Longleftrightarrow {}^t\left(f^{-1}\right) \circ {}^t f = \mathrm{Id}_{F^*}$$

Et

$${}^t\left(f^{-1} \circ f\right) = {}^t\left(\mathrm{Id}_E\right) \Longleftrightarrow {}^t f \circ {}^t\left(f^{-1}\right) = \mathrm{Id}_{E^*}$$

Ce qui montre que ${}^t f$ est inversible et que $\left({}^t f\right)^{-1} = {}^t\left(f^{-1}\right)$