6.10 Correction de quelques exercices

6.10.1 Correction des exercices du cours

Exercice 1 :

Calculer, dans $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$ l'expression $f^3+g^3+h^3$ où

- $\star$ $f = X^2+2X$
- $\star$ $g = 2X^2+1$
- $\star$ $h = X+2$

Facile ! !
Nous avons :

- $\star$ $f^3 = X^6+2^3X^3 = X^6+2X^3$
- $\star$ $g^3 = 2X^6+1$
- $\star$ $h^3 = X^3+5$

Donc, $f^3+g^3+h^3 = 3X^6+3X^3+6 = 0$ et donc $f^3+g^3+h^3$ est le polynôme nul de $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$

Exercice 2 :

Soient P et Q 2 polynômes de $\mathcal{A}[X]$. Démontrer qu'en général $P(Q) \neq Q(P)$

Il suffit de prendre $\mathcal{A}[X] = \mathbb{Z}[X]$ et, par exemple, $P = X^2+1$ et $Q = X^2+X$

Exercice 4 :

Est-il possible d'effectuer la division euclidienne de f par g, avec :

$$f = 6X^3+X^2+7X \qquad g = 3X^2+2X-1$$

dans $\mathbb{Z}[X]$?

A priori, non, puisque, comme nous sommes dans $\mathbb{Z}[X]$, le nombre 3 n'est pas inversible dans $\mathbb{Z}$
Cependant, nous obtenons $6X^3+X^2+7X = \left(3X^2+2X-1\right)(2X-1)+11X-1$.
Il est donc possible d'effectuer la division euclidienne de f par g dans $\mathbb{Z}[X]$
Question :*Est-il possible d'effectuer, dans $\mathbb{Z}[X]$, la division euclidienne de f par g, avec :*

$$f_1 = 2X^3+X^2+7X \qquad g_1 = 3X^2+2X-1$$

Exercice 5 :

Soient $\mathbb{K}$ un corps et $a \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}$ tels que $a \neq b$. Soit aussi $P \in \mathbb{K}[X]$.
Exprimer le reste de la division de P par le polynôme $(X-a)(X-b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$

Comme le polynôme $B = (X-a)(X-b)$ est de degré 2, le reste de la division d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ par B sera un polynôme de degré 1. Nous aurons donc :

$$P(X) = (X-a)(X-b)Q(X)+\alpha X+\beta$$

De telle sorte que nous obtenons :

$$P(a) = \alpha a+\beta \text{ et } P(b) = \alpha b+\beta$$

Nous devons trouver $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\beta \in \mathbb{K}$, c'est à dire résoudre le système :

$$\begin{cases} \alpha a+\beta = & P(a) \\ \alpha b+\beta = & P(b) \end{cases}$$

C'est un système linéaire 2×2 d'où nous trouvons $\alpha = \dfrac{P(a)-P(b)}{a-b}$ et $\beta = \dfrac{aP(b)-bP(a)}{a-b}$. Et le reste est donc donné par :

$$R(X) = \frac{1}{a-b}\left((P(a)-P(b))X+(aP(b)-bP(a))\right)$$

Exercice 7 :

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient

- $A = X^2 - 2X\cos\theta + 1$,
- $P_n = X^n \sin\theta - X\sin n\theta + \sin(n-1)\theta$
- $Q_n = X^{n+1}\cos(n-1)\theta - X^n\cos n\theta - X\cos\theta + 1$

Démontrer que A divise P_n et que A divise Q_n

Bien qu'ils soient à coefficients réels, nous allons baigner ces 3 polynômes dans $\mathbb{C}[X]$.

- Remarquons que $A = X^2 - 2X\cos\theta + 1 = \left(X - e^{i\theta}\right)\left(X - e^{-i\theta}\right)$,
- Nous allons montrer, en calculant, que $P_n\left(e^{i\theta}\right) = P_n\left(e^{-i\theta}\right) = 0$, et alors, nous pourrons écrire $P_n = \left(X - e^{i\theta}\right)\left(X - e^{-i\theta}\right)B(X) = A(X) \times B(X)$.
  En utilisant les formules d'Euler,

$$\begin{aligned}
P_n\left(e^{i\theta}\right) &= \left(e^{in\theta}\right)\left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right) - e^{i\theta}\left(\frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}\right) + \left(\frac{e^{i(n-1)\theta} - e^{-i(n-1)\theta}}{2i}\right) \\
&= \frac{e^{i(n+1)\theta} - e^{i(n-1)\theta} + e^{-i(n-1)\theta} - e^{i(n+1)\theta} + e^{i(n-1)\theta} - e^{-i(n-1)\theta}}{2i} \\
&= 0
\end{aligned}$$

  Nous avons donc $P_n\left(e^{i\theta}\right) = 0$ et comme P_n est à coefficients réels, nous avons aussi $P_n\left(e^{-i\theta}\right) = 0$.
  Le polynôme A divise donc le polynôme P_n
- $Q_n = X^{n+1}\cos(n-1)\theta - X^n\cos n\theta - X\cos\theta + 1$
  La démonstration que A divise Q_n est laissée au lecteur, mais elle est la même que pour P_n

Exercice 8 :

1. *Soient $A \in \mathbb{K}[X]$ et $A \in \mathbb{K}[X]$. Nous désignons par Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B.*
   Montrer que les racines communes à A et B sont les racines communes à B et R
2. *Résoudre les équations $A(x) = 0$ et $B(x) = 0$ avec*

$$A(X) = X^4 - 3X^3 - 7X^2 + 27X - 18 \text{ et } B(X) = X^3 - 12X^2 + 47X - 60$$

   sachant que A et B ont des racines communes

1. Soit $x_0 \in \mathbb{K}$ une racine commune à A et B.
   De $A = BQ + R$ avec $\deg R < \deg B$ nous déduisons $A(x_0) = B(x_0)Q(x_0) + R(x_0) \Longrightarrow R(x_0) = 0$.
   On démontrerait de la même manière que si $B(x_0) = R(x_0) = 0$, alors $A(x_0) = 0$
2. Effectuons la division euclidienne de A par B
   Nous avons :

$$\left(X^4 - 3X^3 - 7X^2 + 27X - 18\right) = (X+9)\left(X^3 - 12X^2 + 47X - 60\right) + \left(54X^2 - 336X + 522\right)$$

   Cherchons maintenant les racines du polynôme $R(X) = 54X^2 - 336X + 522$
   Remarquons que $54X^2 - 336X + 522 = 6\left(9X^2 - 56X + 87\right)$ d'où nous trouvons 2 racines $x_1 = \dfrac{29}{9}$ et $x_2 = 3$.
   Seule $x_2 = 3$ est une racine commune de B et R et est donc aussi racine de A
3. Pour résoudre $B(x) = 0$, nous factorisons B par $x - 3$ et nous obtenons :

$$X^3 - 12X^2 + 47X - 60 = (X-3)\left(X^2 - 9X + 20\right)$$

   Les méthodes traditionnelles pour trouver les racines nous donnent $x_1 = 5$ et $x_3 = 4$
   Les racines de B sont donc $x_1 = 5$, $x_2 = 3$ et $x_3 = 4$

4. Pour résoudre $A(x) = 0$, nous factorisons A par $x - 3$ et nous obtenons :

$$X^4 - 3X^3 - 7X^2 + 27X - 18 = (X - 3)\left(X^3 - 7X + 6\right)$$

1 est racine évidente de $X^3 - 7X + 6$ *(puisque la somme des coefficients est nulle)* et nous obtenons

$$X^3 - 7X + 6 = (X - 1)\left(X^2 + X - 6\right) = (X - 1)(X + 3)(X - 2)$$

Les racines de A sont donc $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ et $x_4 = 3$

Exercice 9 :

Trouver $a \in \mathbb{C}$ pour que $P(X) = X^5 + aX^4 + aX + 1$ admette 1 comme racine double

Si 1 est racine double de P, nous pouvons écrire $P(X) = (X - 1)^2\left(X^3 + \alpha X^2 + \beta X + 1\right)$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\beta \in \mathbb{C}$.
En développant, nous obtenons :

$$\begin{aligned} X^5 + aX^4 + aX + 1 = &\ \left(X^2 - 2X + 1\right)\left(X^3 + \alpha X^2 + \beta X + 1\right) \\ = &\ X^5 + (\alpha - 2)X^4 + (\beta - 2\alpha + 1)X^3 + (\alpha - 2\beta + 1)X^2 + (\beta - 2)X + 1 \end{aligned}$$

Et donc, en identifiant, nous obtenons :

$$\alpha - 2 = a \quad \beta - 2\alpha + 1 = 0 \quad \alpha - 2\beta + 1 = 0 \quad \beta - 2 = a$$

D'où nous tirons :

$$\begin{cases} \alpha = & 2 + a \\ \beta - 2\alpha + 1 = & 0 \\ \alpha - 2\beta + 1 = & 0 \\ \beta = & a + 2 \end{cases}$$

D'où nous extrayons le système :

$$\begin{cases} \beta - 2\alpha = & -1 \\ \alpha - 2\beta = & -1 \end{cases} \iff \alpha = \beta = 1$$

D'où nous tirons $a = -1$
Ainsi,

$$P(X) = X^5 - X^4 - X + 1 = (X - 1)^2\left(X^3 + X^2 + X + 1\right)$$

Il est, bien entendu, possible d'aller plus loin ; en effet :

$$X^3 + X^2 + X + 1 = X^2(X + 1) + X + 1 = (X + 1)\left(X^2 + 1\right) = (X + 1)(X + i)(X - i)$$

Ainsi, une décomposition de P dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$P(X) = (X - 1)^2(X + 1)\left(X^2 + 1\right)$$

Et dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P(X) = (X - 1)^2(X + 1)(X + i)(X - i)$$

On peut aussi remarquer que

$$\begin{aligned} P(X) = &\ X^5 - X^4 - X + 1 \\ = &\ X^4(X - 1) - (X - 1) = (X - 1)\left(X^4 - 1\right) = (X - 1)\left(X^2 - 1\right)\left(X^2 + 1\right) \\ = &\ (X - 1)^2(X + 1)\left(X^2 + 1\right) \\ = &\ (X - 1)^2(X + 1)(X + i)(X - i) \end{aligned}$$

Exercice 10 :

Déterminer les pgcd *des paires de polynômes A et B suivantes :*

La résolution des questions de cet exercices étant toutes semblables, nous ne donnons le corrigé que des 2 premières

1. $A = X^6 + 2X^4 - 4X^3 - 3X^2 + 8X - 5$ *et* $B = X^5 + X^2 - X + 1$
   - ▷ Nous faisons la division euclidienne de A par B et nous avons :
   $$X^6 + 2X^4 - 4X^3 - 3X^2 + 8X - 5 = X\left(X^5 + X^2 - X + 1\right) + 2X^4 - 5X^3 - 2X^2 + 7X - 5$$
   - ▷ Maintenant, division suivante ; nous avons donc :
   $$X^5 + X^2 - X + 1 = \left(\frac{X}{2} + \frac{5}{4}\right)\left(2X^4 - 5X^3 - 2X^2 + 7X - 5\right) + \frac{29}{4}X^3 - \frac{29}{4}X + \frac{29}{4}$$
   - ▷ Itérons donc
   $$2X^4 - 5X^3 - 2X^2 + 7X - 5 = \left(\frac{8}{29}X + \frac{20}{29}\right)\left(\frac{29}{4}X^3 - \frac{29}{4}X + \frac{29}{4}\right) + 10X - 10$$
   - ▷ Une fois de plus : $\dfrac{29}{4}X^3 - \dfrac{29}{4}X + \dfrac{29}{4} = \left(\dfrac{29}{40}X^2 + \dfrac{29}{40}X\right)(10X - 10) + \dfrac{29}{4}$
   - ▷ Ça sent bon la fin : $10X - 10 = \left(\dfrac{40}{29}X - \dfrac{40}{29}\right)\dfrac{29}{4}$

   Ainsi, un pgcd de $A = X^6 + 2X^4 - 4X^3 - 3X^2 + 8X - 5$ et $B = X^5 + X^2 - X + 1$ est $\dfrac{29}{4}$ et si nous utilisons un polynôme normalisé, ce pgcd est 1
2. $A = X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2$ *et* $B = X^3 - 2X^2 - X + 2$
   - ▷ Nous faisons la division euclidienne de A par B et nous avons :
   $$X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2 = (X - 1)\left(X^3 - 2X^2 - X + 2\right) + 2X^2 - 6X + 4$$
   - ▷ Maintenant, division suivante ; nous avons donc :
   $$X^3 - 2X^2 - X + 2 = \left(\frac{X}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(2X^2 - 6X + 4\right)$$

   Ainsi, un pgcd de $A = X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2$ et $B = X^3 - 2X^2 - X + 2$ est $2X^2 - 6X + 4$ et si nous utilisons un polynôme normalisé, ce pgcd est $X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$

Nous voyons ainsi, qu'il n'y a pas qu'un seul pgcd, mais, plusieurs, à une constante multiplicative près. Si nous cherchons l'unicité, il faut normaliser ce polynôme. L'unicité de ce pgcd est donc liée à la forme du polynôme.

Exercice 11 :

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ où $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$.
Soit $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ une racine rationnelle de P avec p et q premiers entre eux.

1. *Montrer que q divise a_n et que p divise a_0*

   Nous supposons $P\left(\dfrac{p}{q}\right) = 0$; alors :
   $$P\left(\frac{p}{q}\right) = a_n\left(\frac{p^n}{q^n}\right) + a_{n-1}\left(\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}\right) + \cdots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$
   En multipliant par q^n, nous obtenons :
   $$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0$$

$\Rightarrow$ Dès lors, nous avons $a_np^n = -q\left(a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1}\right)$.
Donc q divise le produit a_np^n et, si q est premier avec p, alors q est premier avec p^n. D'après le lemme de Gauss, q divise a_n

$\Rightarrow$ De même, nous avons $p\left(a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \cdots + a_1q^{n-1}\right) = -a_0q^n$.
Donc p divise le produit a_0q^n et, si p est premier avec q, alors p est premier avec q^n. D'après le lemme de Gauss, p divise a_0

2. *Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, le nombre entier $p - mq$ divise $P(m)$*

   Soit $m \in \mathbb{Z}$.
   Alors
   $$q^nP(m) = a_nq^nm^n + a_{n-1}qX^{m-1} + \cdots + a_1m + a_0$$
   Et :
   $$\begin{aligned} q^nP(m) = &\ q^nP(m) - q^nP\left(\frac{p}{q}\right) \\ = &\ a_n(q^nm^n - p^n) + a_{n-1}\left(q^nm^{n-1} - p^{n-1}q\right)m^{m-1} + \cdots + a_1q^{n-1}(mq - p) \end{aligned}$$
   De l'identité $X^n - Y^n = (X - Y)\left(\sum_{k=0}^{n-1} X^kY^{n-k}\right)$, nous concluons :
   $$(qm)^j - p^j = ((qm) - p)\left(\sum_{k=0}^{j-1}(qm)^k p^{j-k}\right) = ((qm) - p)\,Q_j(m,p,q)$$
   Et donc :
   $$q^nP(m) = ((qm) - p)\left(a_nQ_n(m,p,q) + a_{n-1}Q_{m-1}(m,p,q) + \cdots + a_1q^{n-1}\right)$$
   Nous voyons, ici, que $((qm) - p)$ divise le produite $q^nP(m)$
   Si p est premier avec q, alors $(qm) - p$ est premier avec q^n ; d'après le lemme de Gauss, $(qm) - p$ divise $P(m)$

3. *Déterminer les racines rationnelles des polynômes :*

   (a) $P_1 = X^3 - 6X^2 + 15X - 14$

   Si $\frac{p}{q}$ est une racine rationnelle de P_1, alors q divise 1 et donc $q = 1$. p divise 14 et donc $p = \pm 1$, ou $p = \pm 2$ ou $p = \pm 7$ ou $p = \pm 14$
   Par calcul, nous obtenons que la seule racine rationnelle est $x_0 = 2$

   (b) $P_2 = X^5 - 2X^4 - 4X^3 + 4X^2 - 5X + 6$

   Nous faisons la même démarche pour P_2 et nous trouvons comme solutions rationnelles de P_1, $x_0 = 1$, $x_1 = -2$ et $x_2 = 3$

4. *Déduire du 1. que si $a_n = 1$ (c'est à dire si $P \in \mathbb{Z}[X]$ est unitaire), les racines réelles de P sont soit entières, soit irrationnelles.*

   Dans cette question, $P \in \mathbb{Z}[X]$ est unitaire, c'est à dire que $a_n = 1$ et que donc $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$.
   Toute racine rationnelle de P est, en fait, entière. Donc, toute racine de P est soit entière, soit irrationnelle.

Exercice 12 :

1. *Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, alors $P + \overline{P} \in \mathbb{R}[X]$ et $P \times \overline{P} \in \mathbb{R}[X]$*

   Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ avec, pour tout $k = 1, \cdots, n$, $a_k \in \mathbb{C}$ et $a_n \neq 0$.

   Alors $\overline{P}(X) = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}X^k$

▷ Regardons $P+\overline{P}$

$$P(X)+\overline{P}(X)=\left(\sum_{k=0}^{n}a_kX^k\right)+\left(\sum_{k=0}^{n}\overline{a_k}X^k\right)=\sum_{k=0}^{n}(a_k+\overline{a_k})X^k$$

Pour tout $k=1,\cdots,n$, nous avons $a_k+\overline{a_k}\in\mathbb{R}$ et donc $P+\overline{P}\in\mathbb{R}[X]$

▷ Maintenant, regardons le produit $P\times\overline{P}$

$$P\times\overline{P}(X)=P(X)+\overline{P}(X)=\left(\sum_{k=0}^{n}a_kX^k\right)\times\left(\sum_{k=0}^{n}\overline{a_k}X^k\right)=\sum_{p=0}^{2n}b_pX^p$$

Où, par définition, $b_p=\sum_{i+j=p}a_i\overline{a_j}$ en précisant que $a_j=0$ si $j>n$ ou $j<0$.

Il faut donc regarder de plus près l'expression de b_p

⋆ Si $p\leqslant n$, alors $b_p=\sum_{i=0}^{p}a_i\overline{a_{p-i}}$ et si $p\geqslant n+1$, alors $b_p=\sum_{i=p-n}^{n}a_i\overline{a_{p-i}}$.

⋆ Il faut aussi remarquer que, si $p\leqslant n$, $b_p=\sum_{i=0}^{p}a_i\overline{a_{p-i}}=\sum_{i=0}^{p}a_{p-i}\overline{a_i}$. Alors :

$$\overline{b_p}=\overline{\sum_{i=0}^{p}a_i\overline{a_{p-i}}}=\sum_{i=0}^{p}\overline{a_i\overline{a_{p-i}}}=\sum_{i=0}^{p}\overline{a_i}a_{p-i}=b_p$$

Comme $\overline{b_p}=b_p$, nous en concluons que, si $p\leqslant n$, alors $b_p\in\mathbb{R}$

⋆ Remarquons, à nouveau, que, si $p\geqslant n+1$, alors $b_p=\sum_{i=p-n}^{n}a_i\overline{a_{p-i}}=\sum_{i=p-n}^{n}\overline{a_i}a_{p-i}$

Et alors :

$$\overline{b_p}=\overline{\sum_{i=p-n}^{n}a_i\overline{a_{p-i}}}=\sum_{i=p-n}^{n}\overline{a_i\overline{a_{p-i}}}=\sum_{i=0}^{p}\overline{a_i}a_{p-i}=b_p$$

Comme $\overline{b_p}=b_p$, nous en concluons que, si $p\geqslant n+1$, alors $b_p\in\mathbb{R}$

Ainsi, pour tout p, $b_p\in\mathbb{R}$ et donc $P\times\overline{P}\in\mathbb{R}[X]$

2. *Démontrer que, pour tout $z\in\mathbb{C}$ $\widetilde{\overline{P}}(\overline{z})=\overline{\widetilde{P(z)}}$*

   Rappelons que $\widetilde{P}$ désigne la fonction associée au polynôme P et que $\widetilde{P(z)}$ désigne aussi la valeur de la fonction $\widetilde{P}$ en P.

   Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ défini par $P(X)=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$.

   Alors, pour tout $z\in\mathbb{C}$, nous avons :

$$\widetilde{\overline{P}}(\overline{z})=\sum_{k=0}^{n}\overline{a_k}\overline{z}^k=\sum_{k=0}^{n}\overline{a_kz^k}=\overline{\sum_{k=0}^{n}a_kz^k}=\overline{\widetilde{P(z)}}$$

   Nous avons donc bien pour tout $z\in\mathbb{C}$ $\widetilde{\overline{P}}(\overline{z})=\overline{\widetilde{P(z)}}$

3. *Montrer que, pour $P\in\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{Q}\in\mathbb{C}[X]$, les 2 propositions suivantes sont équivalentes :*

   ⇒ P est divisible par Q   *⇒ $\overline{P}$ est divisible par $\overline{Q}$*

   La résolution de cet exercice repose sur la propriété $\overline{P\times Q}=\overline{P}\times\overline{Q}$.

   P est divisible par Q si et seulement si, il existe $R\in\mathbb{C}[X]$ tel que $P=QR$ et donc :

$$P=QR\Longleftrightarrow\overline{P}=\overline{QR}\Longleftrightarrow\overline{P}=\overline{Q}\overline{R}$$

   Et donc $\overline{P}$ est divisible par $\overline{Q}$.

   Ayant procédé par équivalences, nous avons équivalence entre les 2 propositions

Exercice 13 :

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. $P(X) = X^4 + 1$

   Les racines de ce polynômes sont les racines 4-ièmes de -1.

   Si θ est l'argument d'une racine de -1, nous avons $4\theta = \pi + 2k\pi \Longleftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$ avec $k = 0, \cdots, 3$, c'est à dire, qu'en fait :
   $$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{4} \text{ avec } k = 0, \cdots, 3$$
   Il y a donc bien 4 racines à ce polynôme :
   $$x_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} \quad x_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}} \quad x_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = -x_0 = \overline{x_1} \quad x_3 = e^{i\frac{7\pi}{4}} = -x_1 = \overline{x_0}$$
   Nous obtenons ainsi la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$:
   $$\begin{aligned} P(X) = X^4 + 1 = & \left(X - e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X - e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\left(X - e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)\left(X - e^{i\frac{7\pi}{4}}\right) \\ = & \prod_{k=0}^{3}\left(X - e^{i\frac{(2k+1)\pi}{4}}\right) \end{aligned}$$
   Puis, dans $\mathbb{R}[X]$:
   $$\begin{aligned} P(X) = & \ X^4 + 1 = \left(X - e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X - e^{i\frac{7\pi}{4}}\right)\left(X - e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)\left(X - e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) \\ = & \left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right) \end{aligned}$$
   La factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ est donc $P(X) = \left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right)$

2. $P(X) = X^6 - 1$

   Les racines de ce polynômes sont les racines 6-ièmes de 1.

   Si θ est l'argument d'une racine de 1, nous avons $6\theta = 2k\pi \Longleftrightarrow \theta = \dfrac{k\pi}{3}$ avec $k = 0, \cdots, 5$.

   Il y a donc bien 6 racines à ce polynôme :
   $$x_0 = 1 \quad x_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad x_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = j \quad x_3 = -1 \quad x_4 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \overline{x_2} = j^2 = \overline{j} \quad x_5 = e^{i\frac{5\pi}{3}} = \overline{x_1}$$
   Nous obtenons ainsi la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$:
   $$\begin{aligned} P(X) = X^6 - 1 = & \ (X-1)(X+1)\left(X - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X - e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)e^{i\frac{4\pi}{3}}\left(X - e^{i\frac{5\pi}{3}}\right) \\ = & \prod_{k=0}^{5}\left(X - e^{i\frac{k\pi}{3}}\right) \end{aligned}$$
   Puis, dans $\mathbb{R}[X]$:
   $$\begin{aligned} P(X) = & \ X^6 - 1 = (X-1)(X+1)\left(X - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X - e^{i\frac{5\pi}{3}}\right)e^{i\frac{4\pi}{3}}\left(X - e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) \\ = & \ (X-1)(X+1)\left(X^2 - X + 1\right)\left(X^2 + X + 1\right) \end{aligned}$$
   La factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ est donc $P(X) = (X-1)(X+1)\left(X^2 - X + 1\right)\left(X^2 + X + 1\right)$

3. $P(X) = X^8 + X^4 + 1$

   En faisant le changement de variables $U = X^4$, nous obtenons $U^2 + U + 1$ et $U^2 + U + 1 = 0$ si et seulement si $U = e^{i\frac{2\pi}{3}} = j$ ou $U = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \overline{j} = j^2$

   Et donc $X^4 = j$ ou $X^4 = j^2$

▷ Nous avons $\arg(j) = \dfrac{2\pi}{3}$ et si θ est l'argument de X, nous avons :

$$4\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Longleftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$$

Nous avons ainsi 4 racines X_k pour $k = 0, \cdots, 3$

$$X_0 = e^{\frac{i\pi}{6}} \quad X_1 = e^{\frac{2i\pi}{3}} = j \quad X_2 = e^{\frac{7i\pi}{6}} = -X_0 \quad X_3 = e^{\frac{5i\pi}{3}} = -X_1 = -j$$

▷ Nous avons $\arg\left(j^2\right) = \dfrac{4\pi}{3}$ et si θ est l'argument de X, nous avons :

$$4\theta = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \Longleftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$$

Nous avons ainsi 4 racines X_k pour $k = 4, \cdots, 7$

$$X_4 = e^{\frac{i\pi}{3}} = \overline{X_3} \quad X_5 = e^{\frac{5i\pi}{6}} = \overline{X_2} \quad X_6 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = -X_4 = \overline{X_1} = \overline{j} \quad X_7 = e^{\frac{11i\pi}{6}} = \overline{X_0}$$

D'où la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P(X) = X^8 + X^4 + 1 = \prod_{k=0}^{3} \left(X - e^{\frac{i(3k+1)\pi}{6}}\right)\left(X - e^{\frac{i(3k+2)\pi}{6}}\right)$$

Et dans $\mathbb{R}[X]$

$$P(X) = X^8 + X^4 + 1 = \left(X^2 - X + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{3}X + 1\right)\left(X^2 + X + 1\right)\left(X^2 - \sqrt{3}X + 1\right)$$

Exercice 14 :

Montrer que $P(X) = X(X+a)(X+2a)(X+3a)+a^4$ est un carré dans $\mathbb{K}[X]$. En déduire une décomposition de $Q(X) = X(X+1)(X+2)(X+3) - 8$ en produit.

▷ En développant, nous avons $P(X) = X^4 + 6aX^3 + 11a^2X^2 + 6a^3X + a^4$.
Si c'est un carré, ce sera le carré d'un polynôme de degré 2 dont l'aspect ne peut être que du type $X^2 + \beta X + a^2$.
Par calcul, nous avons :

$$\left(X^2 + \beta X + a^2\right)^2 = X^4 + 2\beta X^3 + \left(\beta^2 + 2a^2\right)X^3 + a^2\left(2a^2\beta\right)X + a^4$$

Et en identifiant, nous obtenons $\beta = 3a$
D'où $X(X+a)(X+2a)(X+3a) + a^4 = \left(X^2 + 3aX + a^2\right)^2$

▷ Maintenant, il nous faut regarder $Q(X)$.
D'après ce que nous venons de montrer, nous avons (avec $a = 1$) :

$$X(X+1)(X+2)(X+3) + 1 = \left(X^2 + 3X + 1\right)^2$$

Et donc

$$\begin{aligned} Q(X) = &\ X(X+1)(X+2)(X+3) - 8 = X(X+1)(X+2)(X+3) + 1 - 9 \\ = &\ \left(X^2 + 3X + 1\right)^2 - 9 = \left(X^2 + 3X + 1 + 3\right)\left(X^2 + 3X + 1 - 3\right) \\ = &\ \left(X^2 + 3X + 4\right)\left(X^2 + 3X - 2\right) \end{aligned}$$

▷ Remarquons que le polynôme $\left(X^2 + 3X + 4\right)$ est irréductible dans $\mathbb{R}$ alors que

$$\left(X^2 + 3X - 2\right) = \left(X - \frac{3 - \sqrt{17}}{2}\right)\left(X - \frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right)$$

⋆ Ainsi, une décomposition de Q dans $\mathbb{R}[X]$ est donnée par :

$$Q(X) = \left(X^2+3X+4\right)\left(X - \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)\left(X - \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$$

⋆ Puisque $\left(X^2+3X+4\right) = \left(X + \frac{3-i\sqrt{7}}{2}\right)\left(X + \frac{3+i\sqrt{7}}{2}\right)$, la décomposition de Q dans $\mathbb{C}[X]$ est donnée par :

$$Q(X) = \left(X + \frac{3-i\sqrt{7}}{2}\right)\left(X + \frac{3+i\sqrt{7}}{2}\right)\left(X - \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)\left(X - \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$$

Exercice 15 :

On note $D : \mathbb{R}_4[X] \longrightarrow \mathbb{R}_4[X]$ l'application définie par

$$D(P)(X) = P(X+1) - P(X)$$

1. *Montrez que D est bien une application linéaire .*

   Montrer la linéarité ne pose pas de difficulté
   Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $Q \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\begin{aligned} D(\lambda P + \mu Q)(X) = & (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) \\ = & (\lambda P)(X+1) + (\mu Q)(X+1) - (\lambda P)(X) - (\mu Q)(X) \\ = & \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) - \lambda P(X) - \mu Q(X) \\ = & \lambda P(X+1) - \lambda P(X) + \mu Q(X+1) - \mu Q(X) \\ = & \lambda[P(X+1) - P(X)] + \mu[Q(X+1) - Q(X)] \\ = & \lambda D(P)(X) + \mu D(Q)(X) \end{aligned}$$

   Nous avons donc bien, dans $\mathbb{R}[X]$, $D(\lambda P + \mu Q) = \lambda D(P) + \mu D(Q)$.
   D est donc bien linéaire

2. *Déterminer la matrice A de D dans la base canonique $\{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4\}$*

   Nous allons rechercher les images par D de chacun des vecteurs de base
   ▹ $D(e_0)(X) = e_0(X+1) - e_0(X) = 1 - 1 = 0$
   ▹ $D(e_1)(X) = e_1(X+1) - e_1(X) = X + 1 - X = 1 = e_0(X)$
   ▹ $D(e_2)(X) = e_2(X+1) - e_2(X) = (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1 = e_0(X) + 2e_1(X)$
   ▹ $D(e_3)(X) = e_3(X+1) - e_3(X) = (X+1)^3 - X^3 = 3X^2 + 3X + 1 = e_0(X) + 3e_1(X) + 3e_2(X)$
   ▹ Et le calcul de $D(e_4)$:

$$\begin{aligned} D(e_4)(X) = & e_4(X+1) - e_4(X) = (X+1)^4 - X^4 = 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1 \\ = & e_0(X) + 4e_1(X) + 6e_2(X) + 4e_3(X) \end{aligned}$$

   Et donc la matrice A de D est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. *Soit la famille de vecteurs $\mathcal{B} = \{1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2), X(X-1)(X-2)(X-3)\}$. Montrez que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$*

   Nous appelons $f_0 = e_0$, $f_1 = e_1$, $f_2 = -e_1 + e_2$, $f_3 = 2e_1 - 3e_2 + e_3$ et $f_4 = -6e_1 + 11e_2 - 6e_3 + e_4$.

Alors, $\mathcal{B} = \{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ et le déterminant de $\mathcal{B}$ dans la base canonique est :

$$\det \mathcal{B} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

La famille $\mathcal{B}$ forme donc une famille libre et est une base de $\mathbb{R}_4[X]$

4. *Déterminer les matrices de passage entre la base canonique et $\mathcal{B}$*

   ⋆ Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ dans la base canonique.
   Cette matrice nous donnera les coordonnées d'un vecteur U dans la base canonique, connaissant les coordonnées de ce vecteur U dans la base $\mathcal{B}$. Les colonnes de cette matrice P sont formées des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans la base canonique. Nous avons donc :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   ⋆ De la même manière, la matrice de passage de la base canonique dans la base $\mathcal{B}$ nous donnera les coordonnées d'un vecteur U dans la base $\mathcal{B}$, connaissant les coordonnées de ce vecteur U dans la base canoniques. Les colonnes de cette matrice sont formées des coordonnées des vecteurs de la base canonique dans la base $\mathcal{B}$. Il faut remarquer que cette matrice est P^{-1}. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} e_0 &= f_0 \\ e_1 &= f_1 \\ e_2 &= f_2 + e_1 = f_1 + f_2 \\ e_3 &= f_3 + 3e_2 - 2e_1 = -2f_1 + 3(f_1 + f_2) + f_3 = f_1 + 3f_2 + f_3 \\ e_4 &= f_4 + 6f_1 - 11(f_1 + f_2) + 6(f_1 + 3f_2 + f_3) = f_1 + 7f_2 + 6f_3 + f_4 \end{aligned}$$

   D'où nous obtenons :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. *Déterminer la matrice A_1 de D dans la base $\mathcal{B}$.*

   ⇒ En revenant aux matrices de changement de bases, nous avons :

$$\{\mathbb{R}_4[X], \mathcal{B}\} \xrightarrow{P} \{\mathbb{R}_4[X], Can\} \xrightarrow{A} \{\mathbb{R}_4[X], Can\} \xrightarrow{P^{-1}} \{\mathbb{R}_4[X], \mathcal{B}\}$$

   Et nous avons $A_1 = P^{-1}AP$, et pour trouver, aux calculs!!

   ⇒ Une autre solution, tout aussi laborieuse et moins élégante est de calculer les $D(f_i)$ pour $i = 0, \cdots, 3$ dans la base $\mathcal{B}$

   ⋆ $D(f_0) = D(e_0) = 0$
   ⋆ $D(f_1) = D(e_1) = e_0 = f_0$
   ⋆ $D(f_2) = D(-e_2 + e_1) = -D(e_2) + D(e_1) = -(e_0 + 2e_1) + e_0 = -2e_1 = -2f_1$
   ⋆ Le calcul de $D(f_3)$ semble plus long

$$\begin{aligned} D(f_3) = &\ D(2e_1 - 3e_2 + e_3) = 2D(e_1) - 3D(e_2) + D(e_3) \\ = &\ 2e_0 - 3(e_0 + 2e_1) + (e_0 + 3e_1 + 3e_2) = -3e_1 + 3e_2 = 3f_2 \end{aligned}$$

   ⋆ Et pour terminer, celui de $D(f_4)$:

$$\begin{aligned} D(f_4) = &\ D(-6e_1 + 11e_2 - 6e_3 + e_4) = -6D(e_1) + 11D(e_2) - 6D(e_3) + D(e_4) \\ = &\ -6e_0 + 11(e_0 + 2e_1) - 6(e_0 + 3e_1 + 3e_2) + (e_0 + 4e_1 + 6e_2 + 4e_3) \\ = &\ 8e_1 - 12e_2 + 4e_3 = 4f_3 \end{aligned}$$

D'où la matrice A_1 :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. *Calculez A^n.*

   De $A_1 = P^{-1}AP$ nous tirons $A = PA_1P^{-1}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous déduisons $A^n = PA_1^nP^{-1}$. Et donc :

   ▷

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_1^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_1^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Et donc $A_1^5 = \mathcal{O}$

   ▷ Si $n \geqslant 5$, alors $A_1^n = \mathcal{O}$ et, en particulier $A^n = \mathcal{O}$

Exercice 17 :

Dans cet exercice, nous allons confondre polynôme et fonctions polynôme

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à deux, nous considérons l'application :

$$\begin{cases} g : \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ \qquad P & \longmapsto & g(P) \text{ où } \widetilde{g(P)}(x) = (1+x)P'(x) + 3\displaystyle\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t - xP(x) \end{cases}$$

1. *Montrer que g est une application linéaire.*

   La démonstration de la linéarité est simple ; elle est liée à la linéarité de la dérivation et de l'intégration.

2. *Déterminer la matrice A de g dans la base canonique$\{1, X, X^2\}$.*

   ▷ Appelons $e_0(X) = 1$. Alors :

$$g(e_0)(x) = (1+x)e_0'(x) + 3\int_0^x \mathrm{d}t - xe_0(x) = 3x - x = 2x = 2e_1(x)$$

   ▷ Appelons $e_1(X) = X$. Alors :

$$\begin{aligned} g(e_1)(x) = &\ (1+x)e_1'(x) + 3\int_0^x e_1(t)\,\mathrm{d}t - xe_1(x) \\ = &\ (1+x) + 3\int_0^x t\,\mathrm{d}t - x^2 = (1+x) + 3\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x - x^2 = (1+x) + \frac{3x^2}{2} - x^2 \\ = &\ \frac{x^2}{2} + x + 1 \end{aligned}$$

   ▷ Pour terminer, appelons $e_1(X) = X^2$. Alors :

$$\begin{aligned} g(e_2)(x) = &\ (1+x)e_2'(x) + 3\int_0^x e_2(t)\,\mathrm{d}t - xe_2(x) \\ = &\ (1+x) + 3\int_0^x t^2\,\mathrm{d}t - x^3 = (1+x) + 3\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x - x^3 = (1+x) + x^3 - x^3 \\ = &\ x + 1 \end{aligned}$$

D'où nous obtenons la matrice de g :

$$\mathcal{M}_{\{1,X,X^2\}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

3. *Montrer que g est bijective.*

   Nous calculons le déterminant de la matrice. S'il est non nul, alors g est bijective

$$\det \mathcal{M}_{\{1,X,X^2\}}(g) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -2 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -2 \times \frac{-1}{2} = 1$$

   Comme $\det \mathcal{M}_{\{1,X,X^2\}}(g) \neq 0$, g est bijective.

4. *Résoudre dans $\mathbb{R}_2[X]$ l'équation*

$$(1+x)P'(x) + 3\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t - xP(x) = x^2 - x + 1$$

   L'objet de cette question est de trouver $F \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $g(F)(x) = x^2 - x + 1$.
   Supposons que $F(x) = ax^2 + bx + c$.
   Utilisons le calcul matriciel pour connaître $g(F)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+a \\ 2c+b+a \\ \frac{b}{2} \end{pmatrix}$$

   Nous devons donc trouver $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{cases} b+a = & 1 \\ 2c+b+a = & -1 \\ \dfrac{b}{2} = & 1 \end{cases}$$

   D'où nous tirons $b = 2$, $a = -1$ et $c = -1$ et donc $F(x) = -x^2 + 2x - 1 = -(x-1)^2$

Exercice 19 :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P_n(X) = (X+1)^{2n+1} - X^{2n+1} - 1$

1. *Démontrer que le polynôme $X^2 + X$ divise le polynôme P_n*

   Il est facile de démontrer que $P_n(-1) = P_n(0) = 0$ et que donc P_n est factorisable (ou divisible) par $X(X+1) = X^2 + X$

2. *Former le quotient de la division de P_n par $X^2 + X$*

   Nous avons $(X+1)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \mathrm{C}_{2n+1}^k X^k = 1 + \sum_{k=1}^{2n} \mathrm{C}_{2n+1}^k X^k + X^{2n+1}$, de telle sorte que :

$$P_n(X) = (X+1)^{2n+1} - X^{2n+1} - 1 = \sum_{k=1}^{2n} \mathrm{C}_{2n+1}^k X^k = X\left(\sum_{k=1}^{2n} \mathrm{C}_{2n+1}^k X^{k-1}\right)$$

   Maintenant, il faut trouver $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\sum_{k=1}^{2n} \mathrm{C}_{2n+1}^k X^{k-1} = (X+1)Q(X)$

$\Rightarrow$ En utilisant les symétries classiques des coefficients binômiaux, nous avons :

$$\mathrm{C}_{2n+1}^{k} = \mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1-k}$$

Et nous avons alors :

$$\sum_{k=1}^{2n} \mathrm{C}_{2n+1}^{k} X^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_{2n+1}^{k} \left(X^{k-1} + X^{2n-k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_{2n+1}^{k} X^{k-1} \left(1 + X^{2(n-k)+1}\right)$$

$\Rightarrow$ Regardons de manière plus précise $1 + X^{2(n-k)+1}$.
De manière classique, en utilisant la somme des termes d'une suite géométrique, nous avons :

$$1 + X^{2(n-k)+1} = 1 - (-X)^{2(n-k)+1} = (1 - (-X)) \sum_{j=0}^{2(n-k)} (-X)^j = (1 + X) \sum_{j=0}^{2(n-k)} (-X)^j$$

$\Rightarrow$ En « réinjectant » l'identité trouvée, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n} \mathrm{C}_{2n+1}^{k} X^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_{2n+1}^{k} X^{k-1} \left(1 + X^{2(n-k)+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_{2n+1}^{k} X^{k-1} \left((1+X) \sum_{j=0}^{2(n-k)} (-X)^j\right) \\ &= (1+X) \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_{2n+1}^{k} X^{k-1} \left(\sum_{j=0}^{2(n-k)} (-X)^j\right)\end{aligned}$$

Nous venons donc de trouver Q ; nous avons $Q(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_{2n+1}^{k} X^{k-1} \left(\sum_{j=0}^{2(n-k)} (-X)^j\right)$

3. *-1 est-il racine double de P_n ?*

Si -1 est racine double de P_n alors -1 est racine de P_n' ; or :

$$P_n'(X) = (2n+1)\left((X+1)^{2n} - X^{2n}\right)$$

Et $P_n'(-1) = (2n+1) - 1 = 2n$. -1 n'est donc pas racine de P_n' et -1 n'est sûrement pas racine double de P_n

Exercice 20 :

Trouver $a \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}$ pour que $(X-1)^2$ divise $aX^{n+1} + bX^n + 1$

Ceci signifie que 1 est racine d'ordre 2 de $P_n(X) = aX^{n+1} + bX^n + 1$.
Nous devons donc avoir $P_n(1) = P_n'(1) = 0$ et $P_n''(1) \neq 0$

- ▷ Tout d'abord, $P_n(1) = a + b + 1$ et nous obtenons une première relation : $a + b + 1 = 0$
- ▷ Ensuite $P_n'(X) = (n+1) aX^n + nbX^{n-1}$ et donc $P_n'(1) = 0 \Longleftrightarrow (n+1)a + nb = 0$
- ▷ Nous obtenons alors un système d'équations :

$$\begin{cases} a + b = & -1 \\ (n+1)a + nb = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow a = n \text{ et } b = -(n+1)$$

Nous avons donc $P_n(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$
- ▷ Nous retrouvons :
  - ⋆ $P_n(1) = 0$
  - ⋆ $P_n'(X) = n(n+1)X^n - n(n+1)X^{n-1}$ et $P_n'(1) = n(n+1) - n(n+1) = 0$
  - ⋆ $P_n''(X) = n^2(n+1)X^{n-1} - n\left(n^2-1\right)X^{n-2}$ et

$$P_n''(1) = n^2(n+1) - n\left(n^2-1\right) = n^3 + n^2 - n^3 + n = n^2 + n$$

et donc $P_n''(1) \neq 0$

$(X-1)^2$ divise donc $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$

6.10.2 Correction des exercices complémentaires

Exercice 21 :

Vrai ou faux

1. *$\mathbb{R}[X]$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[X]$*

   C'est faux, puisque si cela était, le polynôme $X+1$, élément de $\mathbb{R}[X]$, serait, multiplié par le nombre complexe $1+i$, un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, ce qui est faux

2. *Deux polynômes unitaires ayant les mêmes racines avec le même ordre de multiplicité sont égaux.*

   C'est faux, Voyons, par exemple les polynômes $P(X) = (X-2)^7 (X+1)^3 \left(X^2+X+1\right)$ et $Q(X) = (X-2)^7 (X+1)^3 \left(2X^2 - X + 1\right)$ ont les mêmes racines dans $\mathbb{R}[X]$ mais ne sont pas égaux.
   C'est, par contre, vrai dans $\mathbb{C}[X]$

3. *Le polynôme $B \in \mathbb{K}[X]$ étant fixé, l'application qui à $A \in \mathbb{K}[X]$ associe le reste dans la division euclidienne de A par B est un projecteur.*

   C'est vrai,
   Considérons l'application P_B définie par :

   $$\left\{\begin{array}{rcl} P_B : \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ A & \longmapsto & P_B(A) = R \text{ où } R \text{ est tel que } A = BQ + R \text{ où } \deg R < \deg B \end{array}\right.$$

   $\Rightarrow$ Nous pouvons écrire, en fait, $A = BQ + P_B(A)$
   $\Rightarrow$ Soient $A \in \mathbb{K}[X]$ et $A_1 \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A = BQ + R$ et $A_1 = BQ_1 + R_1$ avec $\deg R < \deg B$ et $\deg R_1 < \deg B$.
   Alors, $A + A_1 = B(Q+Q_1) + R + R_1$ et $\deg(R+R_1) \leqslant \max(\deg R, \deg R_1) \leqslant \deg B$.
   Ainsi, $P_B(A+A_1) = P_B(A) + P_B(A_1)$
   $\Rightarrow$ On montre facilement que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $P_B(\lambda A) = \lambda P_B(A)$
   P_B est donc une application linéaire.
   C'est aussi un projecteur.
   Il faut démontrer que $P_B \circ P_B = P_B$.
   Ce n'est pas très difficile!!... Soit $A \in \mathbb{K}[X]$. Alors,
   Si $A = BQ + R$, c'est à dire $A = BQ + P_B(A)$ alors $R = B \times \mathcal{O} + R$ et donc $P_B(R) = R \Longleftrightarrow P_B[P_B(A)] = R = P_B(A)$

4. *Le polynôme $1 + X^4$ étant somme de 2 carrés n'est pas décomposable en produit de deux polynômes du second degré.*

   Bien entendu, **C'est faux**
   Les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes du premier degré et les polynômes du second degré à discriminant néagatif.
   Le polynôme $1 + X^4$ est donc réductible ou factorisable dans $\mathbb{R}[X]$. D'ailleurs, Le polynôme $1 + X^4 = \left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right)$

5. *Deux polynômes de degré n qui prennent les mêmes valeurs en n points sont égaux.*

   C'est faux
   Pour les polynômes de degré n, il faut $n+1$ points.

6. *La somme de deux polynômes de degré n est un polynôme de degré n.*

   C'est trivialement faux
   Il suffit de choisir $P(X) = X^n + 4$ et $Q(X) = -X^n + X^2 + 4$; Alors $P(X) + Q(X) = X^2 + 5$.
   De manière générale, $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$

7. *Si la somme des coefficients d'un polynôme est nulle, il est factorisable par $X - 1$.*

   C'est vrai
   Soit $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Alors,$P(1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$.

Ainsi, si $\sum_{k=0}^{n} a_k = 0$, alors, $P(1) = 0$ et P est factorisable par $X - 1$

8. *Le polynôme $1 + X + \ldots + X^n$ n'a pas de racine réelle.*

   C'est faux

   Si n est impair, alors -1 est racine du polynôme.

9. *Si le polynôme P est de degré n, alors, la famille $\left\{(P, P', P", \cdots, P^{(n)}\right\}$ des dérivées successives de P est une base de $\mathbb{K}_n[X]$*

   C'est vrai

   Si $\deg P = n$, alors $\deg P^{(k)} = n - k$ et la famille $\left\{(P, P', P", \cdots, P^{(n)}\right\}$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés. D'après le corollaire 6.8.4, elle forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$

10. *Si a est racine d'ordre k d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, alors a annule P et ses k premières dérivées.*

    C'est faux

    a annule P et ses $k - 1$ premières dérivées

Calculs sur les polynômes

Exercice 22 :

Montrer que $\left(X^3 + X^2 + X + 1\right)\left(\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k X^k\right) = X^{2n+3} + X^{2n+1} + X^2 + 1$

- ▷ Nous avons $X^3 \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k X^k = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k X^{k+3} = \sum_{k=3}^{2n+3} (-1)^{k-3} X^k = -\sum_{k=3}^{2n+3} (-1)^k X^k$
- ▷ De même :$X^2 \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k X^k = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k X^{k+2} = \sum_{k=2}^{2n+2} (-1)^{k-2} X^k = \sum_{k=2}^{2n+2} (-1)^k X^k$
- ▷ Puis $X \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k X^k = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k X^{k+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} X^k = -\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k X^k$

De là,

$$\begin{aligned}
\left(X^3 + X^2 + X + 1\right)\left(\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k X^k\right) &= -\sum_{k=3}^{2n+3} (-1)^k X^k + \sum_{k=2}^{2n+2} (-1)^k X^k - \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k X^k + \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k X^k \\
&= -\left(\sum_{k=3}^{2n} (-1)^k X^k + \left(-X^{2n+1} + X^{2n+2} - X^{2n+3}\right)\right) \\
&\quad + \left(X^2 + \sum_{k=3}^{2n} (-1)^k X^k - X^{2n+1} + X^{2n+2}\right) \\
&\quad - \left(-X + X^2 + \sum_{k=3}^{2n} (-1)^k X^k - X^{2n+1}\right) \\
&\quad + \left(1 - X + X^2 + \sum_{k=3}^{2n} (-1)^k X^k\right) \\
&= \left(X^{2n+1} - X^{2n+2} + X^{2n+3}\right) + \left(X^2 - X^{2n+1} + X^{2n+2}\right) \\
&\quad - \left(-X + X^2 - X^{2n+1}\right) + \left(1 - X + X^2\right) \\
&= X^{2n+3} + X^{2n+1} + X^2 + 1
\end{aligned}$$

Ce que nous voulions

Exercice 24 :

Effectuer $(1 + X)\left(1 + X^2\right)\left(1 + X^4\right)\cdots\left(1 + X^{2^n}\right)$

Nous allons appeler $P_n(X) = (1 + X)\left(1 + X^2\right)\left(1 + X^4\right)\cdots\left(1 + X^{2^n}\right) = \prod_{k=0}^{n}\left(1 + X^{2^k}\right)$

Nous pouvons remarquer que $P_n(X) = \left(1 + X^{2^n}\right) P_{n-1}(X)$
Nous allons faire quelques premiers calculs :

$\Rightarrow$ $P_0(X) = (1 + X)$
$\Rightarrow$ $P_1(X) = (1 + X)\left(1 + X^2\right) = 1 + X + X^2 + X^3$
$\Rightarrow$ $P_2(X) = (1 + X)\left(1 + X^2\right)\left(1 + X^4\right) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 + X^6 + X^7$

Nous pouvons penser que $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{(2^{n+1}-1)} X^k$ et nous allons le démontrer par récurrence.

$\Rightarrow$ **C'est vrai pour** $n = 0$
Il suffit de le vérifier dans les calculs que nous venons de faire. C'est aussi vrai pour $n = 1$ et $n = 2$

$\Rightarrow$ **Supposons que c'est vrai à l'ordre** n c'est à dire que $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{(2^{n+1}-1)} X^k$

$\Rightarrow$ **Démontrons à l'ordre** $n + 1$
Nous savons que $P_n(X) = \left(1 + X^{2^n}\right) P_{n-1}(X)$.
En utilisant l'hypothèse de récurrence, nous pouvons écrire :

$$
\begin{aligned}
P_{n+1}(X) = & \left(1 + X^{2^{n+1}}\right) P_n(X) = \left(1 + X^{2^{n+1}}\right)\left(\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} X^k\right) \\
= & \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} X^k + X^{2^{n+1}}\left(\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} X^k\right) = \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} X^k + \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} X^{k+2^{n+1}} \\
= & \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} X^k + \sum_{k=2^{n+1}}^{2^{n+1}+2^{n+1}-1} X^k = Sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} X^k + \sum_{k=2^{n+1}}^{2^{n+2}-1} X^k = \sum_{k=0}^{2^{n+2}-1} X^k
\end{aligned}
$$

Nous avons donc $P_{n+1}(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2^{n+2}-1} X^k = \sum_{k=0}^{2^{(n+1)+1}-1} X^k$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{(2^{n+1}-1)} X^k$

Exercice 25 :

Factoriser $Q_n(X) = 1 - \frac{1}{1!}X + \frac{1}{2!}X(X-1) + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}X(X-1)\cdots(X-n+l)$

Tout d'abord, remarquons que, pour $n \geqslant 1$, nous avons $Q_n(X) = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X - j)$ et $Q_0(X) = 1$.

En particulier, pour tout $n \geqslant 1$, $Q_n(X) = Q_{n-1}(X) + \dfrac{(-1)^n}{n!} \displaystyle\prod_{j=0}^{n-1} (X - j)$

Comme dans l'exercice précédent, nous allons faire quelques premiers calculs :

$\Rightarrow$ $Q_1(X) = (1 - X)$
$\Rightarrow$ $Q_2(X) = 1 - X + \frac{1}{2}X(X-1) = (1 - X)\left(1 - \frac{X}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - X)(2 - X)$
$\Rightarrow$ $Q_3(X) = \frac{1}{2}(1 - X)(2 - X) - \frac{1}{3!}X(X-1)(X-2) = \frac{1}{3!}(X-1)(X-2)(3-X)$ et donc

$$Q_3(X) = \frac{-1}{3!}(X-1)(X-2)(X-3)$$

Nous pouvons penser que, pour $n \geqslant 1$, $Q_n(X) = \dfrac{(-1)^n}{n!} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X - k)$ et nous allons le démontrer par récurrence.

⇒ **C'est vrai pour** $n = 1$
Il suffit de le vérifier dans les calculs que nous venons de faire. C'est aussi vrai pour $n = 2$ et $n = 3$

⇒ **Supposons que c'est vrai à l'ordre** n c'est à dire que $Q_n(X) = \dfrac{(-1)^n}{n!}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X-k)$

⇒ **Démontrons à l'ordre** $n+1$

Nous savons que $Q_n(X) = Q_{n-1}(X) + \dfrac{(-1)^n}{n!}\displaystyle\prod_{j=0}^{n-1}(X-j)$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
Q_{n+1}(X) = &\; Q_n(X) + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(X-k)\\
= &\; \frac{(-1)^n}{n!}\prod_{k=1}^{n}(X-k) + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(X-k)\\
= &\; \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\prod_{k=1}^{n}(X-k)\left(-(n+1)+X\right)\\
= &\; \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\prod_{k=1}^{n+1}(X-k)
\end{aligned}$$

Nous avons donc $Q_{n+1}(X) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}(X-k)$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $Q_n(X) = \dfrac{(-1)^n}{n!}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X-k)$

Exercice 26 :

Trouver $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $(P')^2 = 4P$ où P' est le polynôme dérivé de P

▷ Intéressons nous tout d'abord au degré du polynôme P. Comme $\deg P' = \deg P - 1$ et que $\deg (P')^2 = 2\deg P'$, nous avons l'égalité

$$2(\deg P - 1) = \deg P \iff \deg P = 2$$

▷ On suppose $P(X) = aX^2 + bX + c$, alors $P'(X) = 2aX + b$ et :

$$(P')^2 = 4P \iff (2aX+b)^2 = 4aX^2 + 4bX + 4c \iff 4a^2X^2 + 4abX + b^2 = 4aX^2 + 4bX + 4c$$

Et en identifiant, nous obtenons $4a^2 = 4a$, $4ab = 4b$ et $b^2 = 4c$

▷ Nous obtenons donc le système :

$$\left\{\begin{aligned} 4a^2 = &\; 4a\\ 4ab = &\; 4b\\ b^2 = &\; 4c\end{aligned}\right. \iff \left\{\begin{aligned} a(a-1) = &\; 0\\ b(a-1) = &\; 0\\ b^2 = &\; 4c\end{aligned}\right.$$

⋆ Si $a = 0$ alors $b = c = 0$ et P est le polynôme nul

⋆ Si $a \neq 0$, alors $a = 1$ et alors $b \in \mathbb{R}$ et $c = \dfrac{b^2}{4}$ et le polynôme P est donc du type :

$$P(X) = X^2 + bX + \frac{b^2}{4} \text{ avec } b \in \mathbb{R}$$

Exercice 27 :

Trouver $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $\left(X^2+1\right)P'' - 6P = 0$ où P'' est le polynôme dérivée seconde de P

→ A l'image de l'exercice que nous venons de résoudre, nous pourrions nous atteler au degré du polynôme P ; nous avons :

$$\deg P'' + 2 = \deg P \Longleftrightarrow \deg -2+2 = \deg P \Longleftrightarrow \deg P = \deg P$$

Ce qui ne nous apporte rien !!

→ Nous allons utiliser la méthode Bull-Dozer en écrivant $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ où n est le degré de P et $a_n \neq 0$

Alors, $P''(X) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) a_k X^{k-2} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k X^{k-2}$ et donc :

$$\begin{aligned}
\left(X^2+1\right) P'' &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k X^k + \sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k X^{k-2} \\
&= \sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k X^k + \sum_{k=0}^{n-2} (k+2)(k+1) a_{k+2} X^k \\
&= 2a_0 + 6a_1 X + \sum_{k=2}^{n-2} \left[k(k-1) a_k + (k+2)(k+1) a_{k+2}\right] X^k + \\
&\qquad (n-1)(n-2) a_{n-1} X^{n-1} + n(n-1) a_n X^n
\end{aligned}$$

Si $\left(X^2+1\right) P'' - 6P = 0 \Longleftrightarrow \left(X^2+1\right) P'' = 6P$, nous avons : $6a_n = n(n-1) a_n$, ce qui est équivalent, puisque $a_n \neq 0$, à $6 = n(n-1) \Longleftrightarrow n^2 - n - 6 = 0$

La résolution de cette équation du second degré nous donne $n = 3$ et $n = -2$. Comme nous devons avoir $n \in \mathbb{N}$, nous retenons donc $n = 3$.

→ Soit donc P un polynôme de degré 3. Nous avons donc :

$$P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d \text{ et } P''(X) = 6aX + 2b$$

D'où, après calculs,

$$\left(X^2+1\right) P'' - 6P = 0 \Longleftrightarrow -4bX^2 + 6(a-c) X + (2b - 6d) = 0$$

D'où nous tirons :

$$b = 0 \quad a - c = 0 \quad b - 3d = 0 \Longleftrightarrow a = c \quad b = d = 0 \text{ avec } a \in \mathbb{C}$$

Donc $P(X) = a\left(X^3 + X\right)$ avec $a \in \mathbb{C}$

Réciproquement, on vérifie que ce polynôme vérifie $\left(X^2+1\right) P'' - 6P = 0$

Ainsi, l'ensemble des solutions polynômiales de l'équation différentielle du second ordre $\left(x^2+1\right) y'' - 6y = 0$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[X]$.

Le vecteur nul de ce sous-espace vectoriel , qui est donc le polynôme nul, est bien solution de cette équation différentielle

6.10.3 Arithmétique des polynômes

Exercice 28 :

1. *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Le reste de la division de P par $(X-1)$ est 3 ; le reste de la division de P par $(X+1)$ est 1 ;le reste de la division de P par $(X-2)$ est 7*
   Quel est le reste de la division de P par $(X-1)(X+1)(X-2)$?

   Nous allons toujours utiliser le fait que $P(X) = A(X) Q(X) + R(X)$ avec $\deg R < \deg A$

   D'après l'énoncé, nous avons donc :

$$\left\{\begin{array}{rl} P(X) = & (X-1) Q_1(X) + 3 \\ P(X) = & (X+1) Q_2(X) + 1 \\ P(X) = & (X-2) Q_3(X) + 7 \end{array}\right. \text{ et donc } \left\{\begin{array}{rl} P(1) = & 3 \\ P(-1) = & 1 \\ P(2) = & 7 \end{array}\right.$$

Dans la division par $(X-1)(X+1)(X-2)$, nous pouvons écrire :

$$P(X)=(X-1)(X+1)(X-2)Q_4(X)+aX^2+bX+c$$

Et donc :

$$\left\{\begin{array}{rl} P(1)= & 3=a+b+c \\ P(-1)= & 1=a-b+c \\ P(2)= & 7=4a+2b+c \end{array}\right. \quad \text{d'où le système} \quad \left\{\begin{array}{rl} a+b+c= & 3 \\ a-b+c= & 1 \\ 4a+2b+c= & 7 \end{array}\right.$$

D'où nous tirons $a=b=c=1$ et le reste est donc $R(X)=X^2+X+1$

2. *Soit $P\in\mathbb{C}[X]$. Le reste de la division de P par $\left(X^2+1\right)$ est $X+1$; le reste de la division de P par $(X-1)$ est 4.*
   Quel est le reste de la division de P par $(X-1)\left(X^2+1\right)$?

   La résolution est totalement identique ; nous avons :

$$\left\{\begin{array}{rl} P(X)= & \left(X^2+1\right)Q_1(X)+X+1 \\ P(X)= & (X-1)Q_2(X)+4 \end{array}\right. \quad \text{et donc} \quad \left\{\begin{array}{rl} P(i)= & 1+i \\ P(-i)= & 1-i \\ P(1)= & 4 \end{array}\right.$$

   Dans la division par $(X-1)\left(X^2+1\right)$, nous pouvons écrire :

$$P(X)=(X-1)\left(X^2+1\right)Q(X)+aX^2+bX+c$$

   Et donc nous obtenons le système :

$$\left\{\begin{array}{rl} -a+ib+c= & 1+i \\ -a-ib+c= & 1-i \\ a+b+c= & 4 \end{array}\right.$$

   D'où nous tirons $a=1$, $b=1$ et $c=2$ et le reste est donc $R(X)=X^2+X+2$

Exercice 29 :

Soient $P(X)=3X^3+X+1$ et $Q(X)=3X^2+2X-1$.
Rechercher $\operatorname{pgcd}(P,Q)$ dans les cas suivants :

1. *$P\in\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$ et $Q\in\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$*

   Dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$, nous avons $P(X)=X+1$ et $Q(X)=2X-1=2X+2=2(X+1)$.
   Ainsi, dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$, $\operatorname{pgcd}(P,Q)=(X+1)$
2. *$P\in\mathbb{Q}[X]$ et $Q\in\mathbb{Q}[X]$*

   On peut remarquer que -1 est racine de Q et donc $Q(X)=(X+1)(3X-1)$
   Or, ni -1, ni $\dfrac{1}{3}$ ne sont racines de P. Donc, P et Q sont premiers entre eux
3. *$P\in\mathbb{Z}[X]$ et $Q\in\mathbb{Z}[X]$*

   Pour $\mathbb{Z}[X]$, le raisonnement est identique ; donc, dans $\mathbb{Z}[X]$, P et Q sont aussi premiers entre eux

Exercice 30 :

Soient $a\in\mathbb{R}$, $m\in\mathbb{N}$ et $n\in\mathbb{N}$. Calculer dans $\mathbb{R}[X]$, le pgcd des polynômes X^n-a et X^m-a

- ▷ Tout d'abord, si $a=0$, c'est terminé : si $n>m$, le pgcd est alors X^m.
- ▷ Si $a\neq 0$ et que $m=n$, ce n'est pas plus difficile !!

Nous allons donc supposer $a\neq 0$ et $n\neq m$; supposons donc $n>m$

1. Soit donc $n>m$. Nous allons effectuer la division euclidienne de (Z^n-1) par (Z^m-1)
   (a) Tout d'abord, si nous effectuons la division euclidienne de n par m, nous obtenons :

$$n=mq_1+r_1 \text{ où } 0\leqslant r_1<m$$

(b) Classiquement, nous avons :

$$\left(A^{q_1}-1\right)=(A-1)\left(A^{q_1-1}+A^{q_1-2}+\cdots+A+1\right)$$

C'est à dire, qu'en remplaçant A par Z^m, nous obtenons :

$$\left(\left(Z^m\right)^{q_1}-1\right)=\left(Z^m-1\right)\left(\left(Z^m\right)^{q_1-1}+\left(Z^m\right)^{q_1-2}+\cdots+Z^m+1\right)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\left(Z^{mq_1}-1\right)=\left(Z^m-1\right)\left(Z^{mq_1-m}+Z^{mq_1-2m}+\cdots+Z^m+1\right)$$

(c) Maintenant, multiplions les deux membres par Z^{r_1} :

$$Z^{r_1}\times\left(Z^{mq_1}-1\right)=\left(Z^m-1\right)\times Z^{r_1}\times\left(Z^{mq_1-m}+Z^{mq_1-2m}+\cdots+Z^m+1\right)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\left(Z^{mq_1+r_1}-Z^{r_1}\right)=\left(Z^m-1\right)\left(Z^{mq_1+r_1-m}+Z^{mq_1+r_1-2m}+\cdots+Z^{m+r_1}+Z^{r_1}\right)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\left(Z^n-Z^{r_1}\right)=\left(Z^m-1\right)\left(Z^{n-m}+Z^{n-2m}+\cdots+Z^{n-m(q_1-1)}+Z^{n-mq_1}\right)$$

Puisque

$$n=mq_1+r_1\Longleftrightarrow r_1=n-mq_1 \text{ et donc } m+r_1=n-m\left(q_1-1\right)$$

(d) Maintenant, nous avons $\left(Z^n-Z^{r_1}\right)=\left(Z^n-1+1-Z^{r_1}\right)=\left(Z^n-1\right)-\left(Z^{r_1}-1\right)$, de telle sorte que :

$$\left(Z^n-1\right)=\left(Z^m-1\right)\left(Z^{n-m}+Z^{n-2m}+\cdots+Z^{n-m(q_1-1)}+Z^{n-mq_1}\right)+\left(Z^{r_1}-1\right)$$

Nous avons, ici la division euclidienne de $\left(Z^n-1\right)$ par $\left(Z^m-1\right)$

2. D'après l'algorithme d'Euclide, nous pouvons écrire :

$$\operatorname{pgcd}\left(\left(Z^n-1\right),\left(Z^m-1\right)\right)=\operatorname{pgcd}\left(\left(Z^m-1\right),\left(Z^{r_1}-1\right)\right)$$

(a) En effectuant les divisions successives de n par m, nous avons :

i. D'après le premier point, nous avons $n=mq_1+r_1$ où $0\leqslant r_1<m$ et $\operatorname{pgcd}(n,m)=\operatorname{pgcd}(m,r_1)$ et donc

$$\operatorname{pgcd}\left(\left(Z^n-1\right),\left(Z^m-1\right)\right)=\operatorname{pgcd}\left(\left(Z^m-1\right),\left(Z^{r_1}-1\right)\right)$$

ii. En continuant les divisions, nous avons $m=q_2r_1+r_2$ où $0\leqslant r_2<r_1$ et $\operatorname{pgcd}(m,r_1)=\operatorname{pgcd}(r_1,r_2)$ et donc

$$\operatorname{pgcd}\left(\left(Z^m-1\right),\left(Z^{r_1}-1\right)\right)=\operatorname{pgcd}\left(\left(Z^{r_1}-1\right),\left(Z^{r_2}-1\right)\right)$$

C'est à dire $\operatorname{pgcd}(n,m)=\operatorname{pgcd}(m,r_1)=\operatorname{pgcd}(r_1,r_2)$ et donc

$$\operatorname{pgcd}\left(\left(Z^n-1\right),\left(Z^m-1\right)\right)=\operatorname{pgcd}\left(\left(Z^m-1\right),\left(Z^{r_1}-1\right)\right)=\operatorname{pgcd}\left(\left(Z^{r_1}-1\right),\left(Z^{r_2}-1\right)\right)$$

(b) En itérant ces divisions successives, nous obtenons :

$$\operatorname{pgcd}\left(\left(Z^n-1\right),\left(Z^m-1\right)\right)=\left(Z^{\operatorname{pgcd}(n,m)}-1\right)$$

(c) En particulier, si m et n sont premiers entre eux, nous avons $\operatorname{pgcd}\left(\left(Z^n-1\right),\left(Z^m-1\right)\right)=(Z-1)$

3. Maintenant, quel est le pgcd de X^n-a^n et X^m-a^m ?

(a) Nous avons$X^n-a^n=a^n\left[\left(\dfrac{X}{a}\right)^n-1\right]$ et donc

$$\operatorname{pgcd}\left(\left(X^n-a^n\right),\left(X^m-a^m\right)\right)=\operatorname{pgcd}\left(\left[\left(\frac{X}{a}\right)^n-1\right],\left[\left(\frac{X}{a}\right)^m-1\right]\right)$$

(b) Si nous posons $Z=\dfrac{X}{a}$, nous pouvons écrire

$$\operatorname{pgcd}\left(\left[\left(\frac{X}{a}\right)^n-1\right],\left[\left(\frac{X}{a}\right)^m-1\right]\right)=\left(\frac{X}{a}\right)^{\operatorname{pgcd}(n,m)}-1$$

(c) Et nous avons donc $\operatorname{pgcd}\left(X^n-a^n,X^m-a^m\right)=X^{\operatorname{pgcd}(n,m)}-a^{\operatorname{pgcd}(n,m)}$

Exercice 31 :

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes suivants :

1. $P_1(X) = X^6 + 1$

   Il s'agit donc de rechercher les racines 6-ièmes de -1. Nous avons :

   $$X^6 = -1 \iff X^6 = e^{i(\pi+2k\pi)}$$

   Nous obtenons facilement 6 racines, indicées par $k = 0, \cdots, 5$ $X_k = e^{i\frac{(\pi+2k\pi)}{6}}$:

   $$\begin{aligned} X_0 &= e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \\ X_1 &= e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i \\ X_2 &= e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{6}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \\ X_3 &= e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{3}\right)} = -e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} = \overline{X_2} \\ X_4 &= e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i \\ X_5 &= e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{11\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} = \overline{X_0} \end{aligned}$$

   D'où les factorisations de P_1
   ▷ Dans $\mathbb{C}[X]$:

   $$P_1(X) = X^6 + 1 = \left(X - e^{i\frac{\pi}{6}}\right)(X - i)\left(X - e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)\left(X + e^{i\frac{\pi}{6}}\right)(X + i)\left(X - e^{i\frac{11\pi}{6}}\right)$$

   ▷ Dans $\mathbb{R}[X]$ *(il faut regrouper les racines complexes et leurs conjugués)* :

   $$P_1(X) = X^6 + 1 = \left(X^2 + 1\right)\left(X^2 - X\sqrt{3} + 1\right)\left(X^2 + X\sqrt{3} + 1\right)$$

2. $P_2(X) = X^6 - 1$

   Tout d'abord, $X^6 - 1 = \left(X^3 - 1\right)\left(X^3 + 1\right)$
   ▷ Et donc $X^3 - 1 = (X - 1)\left(X^2 + X + 1\right) = (X - 1)(X - j)\left(X - \overline{j}\right)$
   ▷ Ensuite $X^3 + 1 = (X + 1)\left(X^2 - X + 1\right) = (X + 1)\left(X - \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)$
   D'où les factorisations de P_2
   ▷ Dans $\mathbb{R}[X]$:

   $$P_2(X) = X^6 - 1 = (X - 1)(X + 1)\left(X^2 + X + 1\right)\left(X^2 - X + 1\right)$$

   ▷ Dans $\mathbb{C}[X]$:

   $$P_2(X) = X^6 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X - j)\left(X - \overline{j}\right)\left(X - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)$$

3. $P_3(X) = X^9 + X^6 + X^3 + 1$

   $\Longrightarrow$ Il y a un changement de variables évident : $U = X^3$ et nous obtenons un nouveau polynôme en U

   $$P_{3,1}(U) = 1 + U + U^2 + U^3$$

   On a vu en L_0 que les racines d'un tel polynôme sont les racine 4-ièmes de 1 sauf 1
   Les racines de $P_{3,1}$ sont donc $U_1 = -1$, $U_2 = i$ et $U_3 = -i$.
   Nous devons, maintenant, rechercher les racines cubiques de U_1, U_2 et U_3.
   ▷ Il est assez facile de voir que les racines cubiques de -1 sont -1, $-j$ et $-j^2$
   ▷ Sachant que $i = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$, les racines cubiques de i sont $e^{i\frac{\pi}{6}}$, $e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et $-i$

- ▷ Et donc, les racines cubiques de $-i$ sont i, $-e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $-e^{i\frac{5\pi}{6}}$

D'où les factorisations de P_3

- ▷ Dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P_3(X) = X^9 + X^6 + X^3 + 1 = (X+1)(X+j)(X+j^2)(X+i)\left(X - e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(X - e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)\cdots (X-i)\left(X + e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(X + e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)$$

- ▷ Dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P_3(X) = X^9+X^6+X^3+1 = (X+1)\left(X^2+1\right)\left(X^2+X+1\right)\left(X^2-\sqrt{3}X+1\right)\left(X^2+\sqrt{3}X+1\right)$$

$\Longrightarrow$ Une autre façon de voir les choses est d'écrire :

$$P_3(X) = X^9 + X^6 + X^3 + 1 = 1 + X^3 + \left(X^3\right)^2 + \left(X^3\right)^3 = \frac{1-\left(X^3\right)^4}{1-X^3}$$

De telles sortes que les racines de P_3 sont toutes les racines 12-ièmes de 1 sauf 1, j et j^2.
Bien entendu, nous retrouvons les mêmes racines.[2]

6.10.4 Dérivée d'un polynôme. Formule de Taylor

Exercice 32 :

Trouver tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P

Dire que P' divise P, c'est dire qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = QP'$

1. Si P est le polynôme nul, alors P vérifie la relation demandée
2. Si P est un polynôme constant non nul, alors $P' = 0$ et P ne vérifie pas la relation demandée
3. Pour commencer, si $\deg P = 1$, alors $P(X) = aX + b$ avec $a \neq 0$ et $P'(X) = a$.
   Alors $P(X) = aX + b = a\left(X + \dfrac{b}{a}\right)$ et donc $Q(X) = X + \dfrac{b}{a}$
4. Supposons $\deg P = n$ où $n > 1$; alors $\deg P' = n-1$ et si $Q \in \mathbb{C}[X]$ est tel que $P = QP'$, alors $\deg Q = 1$ et donc $Q(X) = \alpha X + \beta$ avec $\alpha \neq 0$.
   C'est à dire que nous avons $P(X) = Q(X)P'(X) = (\alpha X + \beta)P'(X)$ et, en particulier $P\left(\dfrac{-\beta}{\alpha}\right) = 0$.
   Soit, maintenant, $\rho \in \mathbb{C}$ une racine d'ordre k de P où $\rho \neq \dfrac{-\beta}{\alpha}$. ρ est aussi une racine d'ordre $k-1$ de P'.
   ρ devant être une racine d'ordre k de P, d'après la relation $P(X) = (\alpha X + \beta)P'(X)$, c'est impossible.
   Donc $\rho = \dfrac{-\beta}{\alpha}$ et $P(X) = \lambda(X-\rho)^k$.
   Réciproquement, tous les polynômes de la forme $P(X) = \lambda(X-\rho)^k$ vérifient $P = QP'$

Exercice 33 :

Soient $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, non nuls et $n \in \mathbb{N}$.
Nous considérons le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par $P(X) = \dfrac{X^n(a-bX)^n}{n!}$
Démontrer que P et toutes ses dérivées prennent des valeurs entières en $X = 0$ et $X = \dfrac{a}{b}$

0 et $\dfrac{a}{b}$ sont des racines d'ordre n de P et donc, toutes les dérivées successives $P^{(k)}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$ s'annulent en $X = 0$ et $X = \dfrac{a}{b}$

2. Le vérifier ! !

1. Nous allons écrire la Formule de Taylor pour les polynômes en $X = 0$
   $\Rightarrow$ D'après la formule de Taylor appliquée aux polynômes, nous avons :
$$P(X) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$$
   Sachant que les $n-1$ premières dérivées de P sont nulles en $X = 0$, nous avons, en fait :
$$P(X) = \sum_{k=n}^{2n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k = X^n \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(n+k)}(0)}{(n+k)!} X^k \right)$$
   Comme $P(X) = \dfrac{X^n (a-bX)^n}{n!}$, nous avons donc :
$$\frac{(a-bX)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(n+k)}(0)}{(n+k)!} X^k \Longleftrightarrow (a-bX)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!P^{(n+k)}(0)}{(n+k)!} X^k$$
   $\Rightarrow$ En développant $(a-bX)^n$, nous avons $(a-bX)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (-1)^k b^k a^{n-k} X^k$.

   Et donc, en identifiant, nous obtenons $\dfrac{n!P^{(n+k)}(0)}{(n+k)!} = \mathrm{C}_n^k (-1)^k b^k a^{n-k}$
   $\Rightarrow$ D'où, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, npous avons $P^{(n+k)}(0) = \frac{(n+k)!}{n!} \mathrm{C}_n^k (-1)^k b^k a^{n-k}$
   Ainsi, toutes les dérivées de P prennent des valeurs entières en 0
2. Nous allons écrire la Formule de Taylor pour les polynômes en $X = \dfrac{a}{b}$
   $\Rightarrow$ Alors, nous avons :
$$P(X) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{P^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right)}{k!} \left(X - \frac{a}{b}\right)^k$$
   Sachant que les $n-1$ premières dérivées de P sont nulles en $X = \dfrac{a}{b}$, nous avons, en fait :
$$P(X) = \sum_{k=n}^{2n} \frac{P^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right)}{k!} \left(X - \frac{a}{b}\right)^k$$
   $\Rightarrow$ En écrivant $Y = X - \dfrac{a}{b} \Longleftrightarrow X = Y + \dfrac{a}{b}$, nous avons :
$$\frac{X^n (a-bX)^n}{n!} = (-1)^n b^n \frac{\left(Y + \frac{a}{b}\right)^n Y^n}{n!}$$
   Et alors :
$$(-1)^n b^n \frac{\left(Y + \frac{a}{b}\right)^n Y^n}{n!} = \sum_{k=n}^{2n} \frac{P^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right)}{k!} Y^k = Y^n \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(n+k)}\left(\frac{a}{b}\right)}{(n+k)!} Y^k \right)$$
   $\Rightarrow$ Comme tout à l'heure, nous pouvons écrire :
$$(-1)^n b^n \frac{\left(Y + \frac{a}{b}\right)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(n+k)}\left(\frac{a}{b}\right)}{(n+k)!} Y^k \Longleftrightarrow \left(Y + \frac{a}{b}\right)^n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{n!P^{(n+k)}\left(\frac{a}{b}\right)}{b^n (n+k)!} Y^k$$
   $\Rightarrow$ Nous avons $\left(Y + \dfrac{a}{b}\right)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \left(\frac{a}{b}\right)^{n-k} Y^k$, et en identifiant, nous obtenons :
$$\mathrm{C}_n^k \left(\frac{a}{b}\right)^{n-k} = (-1)^n \frac{n!P^{(n+k)}\left(\frac{a}{b}\right)}{b^n (n+k)!} \Longleftrightarrow P^{(n+k)}\left(\frac{a}{b}\right) = (-1)^n \mathrm{C}_n^k \frac{(n+k)!}{n!} b^k a^{n-k}$$
   Ainsi, toutes les dérivées de P prennent des valeurs entières en $\dfrac{a}{b}$

Exercice 35 :

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}_5[X]$ tels que $(X+2)^3$ divise $P(X)+10$ et $(X-2)^3$ divise $P(X)-10$

⇒ Si nous appelons $P_1(X) = P(X)+10$, alors $(X+2)^3$ divise $P_1(X)$ et nous avons :

$$P_1(X) = (X+2)^3 Q_1(X)$$

-2 est racine d'ordre 2 de P_1' ; or $P_1'(X) = P'(X)$ et donc -2 est aussi racine d'ordre 2 de P'

⇒ Si nous appelons $P_2(X) = P(X)-10$, alors $(X-2)^3$ divise $P_2(X)$ et nous avons :

$$P_2(X) = (X-2)^3 Q_2(X)$$

2 est racine d'ordre 2 de P_2' ; or $P_2'(X) = P'(X)$ et donc 2 est aussi racine d'ordre 2 de P'

⇒ Comme $P \in \mathbb{R}_5[X]$, alors $P' \in \mathbb{R}_4[X]$ et $P'(X) = \lambda(X-2)^2(X+2)^2 = \lambda\left(X^2-4\right)^2$.

⇒ Ainsi, comme $P'(X) = \lambda X^4 - 8\lambda X^2 + 16\lambda$, nous avons

$$P(X) = \lambda\frac{X^5}{5} - 8\lambda\frac{X^3}{3} + 16\lambda X + \mu \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}$$

⇒ De $P_1(X) = (X+2)^3 Q_1(X)$, nous tirons $P_1(-2) = 0$ et donc $P(-2) = -10$; de même, $P(2) = 10$

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} P(-2) = &\ \lambda\frac{(-2)^5}{5} - 8\lambda\frac{(-2)^3}{3} + 16\lambda\times(-2) + \mu = \frac{-32\lambda}{5} + \frac{64\lambda}{3} - 32\lambda + \mu \\ = &\ \frac{-256\lambda}{15} + \mu = -10 \end{aligned}$$

Par des calculs semblables, nous obtenons $P(2) = \dfrac{256\lambda}{15} + \mu = 10$.

⇒ Nous obtenons le système :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{-256\lambda}{15} + \mu = &\ -10 \\ \frac{256\lambda}{15} + \mu = &\ 10 \end{aligned}\right. \Longrightarrow \mu = 0 \text{ et } \lambda = \frac{75}{128}$$

D'où, nous avons trouvé P et

$$P(X) = \lambda\frac{X^5}{5} - 8\lambda\frac{X^3}{3} + 16\lambda X = \frac{75}{128}\left(\frac{X^5}{5} - 8\frac{X^3}{3} + 16X\right) = \frac{15}{128}\left(X^5 - 8X^3 + 80X\right)$$

Exercice 38 :

Soient $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{K}_n[X]$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à une indéterminée sur $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n.

1. *Soient $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Nous définissons le polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ par :*

$$Q(X) = (X-a)\left[P'(X) + P'(a)\right] - 2\left[P(X) - P(a)\right]$$

Montrer que a est zéro triple de Q

⇒ Première remarque, nous avons $Q(a) = 0$

⇒ Calculons la dérivée première de Q :

$$Q'(X) = (X-a)\left[P''(X)\right] + \left[P'(X) + P'(a)\right] - 2\left[P'(X)\right]$$

Et nous avons $Q'(a) = 0$

$\Rightarrow$ Et maintenant, allons y pour la dérivée seconde :

$$\begin{aligned} Q''(X) = &\ (X-a)\left[P^{(3)}(X)\right] + 2\left[P''(X)\right] - 2\left[P''(X)\right] \\ = &\ (X-a)\left[P^{(3)}(X)\right] \end{aligned}$$

Et nous avons $Q''(a) = 0$

a est bien un zéro triple de Q

2. *Montrer que $Q \in \mathbb{K}_n[X]$*

   Pas très difficile ; il faut raisonner sur le degré de P et le degré de P'
   En effet, si $\deg P \leqslant n$, alors $\deg P' \leqslant n-1$ et $\deg (X-a) \times P'(X) \leqslant n$.
   Donc, $\deg Q \leqslant n$ et donc $Q \in \mathbb{K}_n[X]$

3. *Soit $f : \mathbb{K}_n[X] \longrightarrow \mathbb{K}_n[X]$ une application définie par :*

$$\begin{cases} f : \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow \quad \mathbb{K}_n[X] \\ \qquad\quad P & \longmapsto \quad f(P) = Q \end{cases}$$

   Où $Q(X) = f(P)(X) = (X-a)\left[P'(X) + P'(a)\right] - 2\left[P(X) - P(a)\right]$
   Montrer que f est une application linéaire

   La démonstration est simple et repose sur la linéarité de la dérivation.
   f, linéaire de $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{K}_n[X]$ est un endomorphisme

4. *Trouver image et noyau de f*

   Nous appelons $e_k(X) = (X-a)^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant k \leqslant n$. Nous avons $\deg e_k = k$
   D'après le théorème 6.8.4, la famille $\{e_k ; 0 \leqslant k \leqslant n\}$ forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$
   Nous allons commencer par quelques bricolages.

   - Sachant que $e_0(X) = 1$, la dérivée de e_0 est donnée par $e_0'(X) = 0$ et donc, nous avons, très simplement $f(e_0)(X) = 0$, de telle sorte que nous avons sûrement $\mathbb{K}e_0 \subset \ker f$
   - De même, $e_1(X) = (X-a)$ et $e_1'(X) = 1$ et donc

$$f(e_1)(X) = 2(X-a) - 2\left[(X-a)\right] = 0$$

     De la même manière, le sous-espace vectoriel $\mathbb{K}e_1$ est tel que $\mathbb{K}e_1 \subset \ker f$
   - Toujours en bricolant, $e_2(X) = (X-a)^2$ et $e_2'(X) = 2(X-a)$, d'où

$$f(e_1)(X) = (X-a)\left[2(X-a)\right] - 2\left[(X-a)^2\right] = 0$$

     Et donc le sous-espace vectoriel $\mathbb{K}e_2$ est tel que $\mathbb{K}e_2 \subset \ker f$
   - Plus généralement, pour $k \geqslant 3$, si $e_k(X) = (X-a)^k$, alors $e_k'(X) = k(X-a)^{k-1}$ et

$$f(e_k)(X) = (X-a)\left[k(X-a)^{k-1}\right] - 2\left[(X-a)^k\right] = (k-2)(X-a)^k = (k-2)\,e_k(X)$$

   Etude de $\mathrm{Im} f$, l'image de f

   - L'image de f est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_n[X]$ engendré par les images des vecteurs de bases, c'est à dire que

$$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\left(\{f(e_0), f(e_1), f(e_2), f(e_3), \cdots, f(e_n)\}\right) = \mathrm{Vect}\left(\{e_3, e_4, \cdots, e_n\}\right)$$

     Toujours d'après 6.8.4, la famille $\{e_3, e_4, \cdots, e_n\}$ est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$ et comme elle est aussi génératrice, elle forme une base de $\mathrm{Im} f$.

     Ainsi, si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ s'écrit de manière unique $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e_k$, $f(P)$ s'écrira de manière toute aussi unique $f(P) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (k-2)\, e_k$, c'est à dire

$$\begin{aligned} f(P)(X) = &\ \lambda_3 (X-a)^3 + 2\lambda_4 (X-a)^4 + \cdots + (n-2)\,\lambda_n (X-a)^n \\ = &\ (X-a)^3 \left(\lambda_3 + 2\lambda_4 (X-a) + \cdots + (n-2)\,\lambda_n (X-a)^{n-3}\right) \end{aligned}$$

     Nous montrons ainsi que $f(P)$ est un polynôme divisible par $(X-a)^3$ ou encore qui admet a comme racine d'ordre 3

▷ Réciproquement, si $Q \in \mathbb{K}_n[X]$ est un polynôme qui admet a comme racine d'ordre 3, d'après la formule de Taylor, nous avons :

$$Q(X) = (X-a)^3 \frac{Q^{(3)}(a)}{3!} + (X-a)^4 \frac{Q^{(4)}(a)}{4!} + \cdots + (X-a)^n \frac{Q^{(n)}(a)}{n!}$$

C'est à dire $Q = \dfrac{Q^{(3)}(a)}{3!} e_3 + \dfrac{Q^{(4)}(a)}{4!} e_4 + \cdots + \dfrac{Q^{(n)}(n)}{3!} e_n$ et $Q \in \mathrm{Im} f$

$\mathrm{Im} f$ est donc exactement le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes qui admettent a comme racine d'ordre 3.

C'est un sous-espace vectoriel de dimension $n-2$

Etude de $\ker f$, le noyau de f

D'après le théorème du rang, nous avons

$$\dim \mathrm{Im} f + \dim \ker f = \dim \mathbb{K}_n[X] \Longleftrightarrow (n-2) + \dim \ker f = n+1$$

Et donc $\dim \ker f = 3$.

Les polynômes e_0, e_1 et e_2 sont des éléments de $\ker f$. La famille $\{e_0; e_1; e_2\}$ est une famille libre et donc forme une base de $\ker f$.

Ainsi, les é léments de $\ker f$ sont du type $P = \mu_0 e_0 + \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2$ avec $\mu_0 \in \mathbb{K}$, $\mu_1 \in \mathbb{K}$ et $\mu_2 \in \mathbb{K}$, c'est à dire :

$$P(X) = \mu_0 + \mu_1 (X-a) + \mu_2 (X-a)^2 \text{ où } \mu_0 \in \mathbb{K} \quad \mu_1 \in \mathbb{K} \quad \mu_2 \in \mathbb{K}$$

Exercice 39 :

1. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, factoriser dans $\mathbb{C}[X]$, le polynôme $P_n(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$*

   ⇒ Vouloir factoriser P_n, c'est aussi vouloir rechercher les racines de P_n. Or :

   $$P_n(X) = 0 \Longleftrightarrow (X+1)^n = (X-1)^n \Longleftrightarrow \left(\frac{X+1}{X-1}\right)^n = 1$$

   En remarquant que ni 1 ni -1 ne sont racines de P_n.

   En faisant le changement de variables $Z = \dfrac{X+1}{X-1}$, nous avons donc à résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $Z^n = 1$ pour laquelle il existe n solutions $Z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k = 0, \cdots, n-1$.

   De $Z_k = \dfrac{X_k+1}{X_k-1}$, nous obtenons $X_k = \dfrac{Z_k+1}{Z_k-1}$ où nous devons avoir $Z_k \neq 1$, c'est à dire $k \neq 0$.

   P_n admet donc $n-1$ racines $X_k = \dfrac{Z_k+1}{Z_k-1}$ avec $k = 1, \cdots, n-1$.

   ⇒ Calculons explicitement ces racines X_k. Nous avons :

   $$X_k = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}+1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1} = \frac{e^{\frac{ik\pi}{n}}+e^{\frac{-ik\pi}{n}}}{e^{\frac{ik\pi}{n}}-e^{\frac{-ik\pi}{n}}} = \frac{2\cos\frac{k\pi}{n}}{2\sin\frac{ik\pi}{n}} = -i\cot\frac{k\pi}{n}$$

   Donc $P_n(X) = \lambda \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(X + i\cot\frac{k\pi}{n}\right)$ où $\lambda \in \mathbb{C}$ est le terme de plus haut degré de P_n

   ⇒ Alors, quel est ce terme de plus haut degré ?

   Nous avons :

   $$P_n(X) = (X+1)^n - (X-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_k^n X^k - \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_k^n (-1)^{n-k} X^k = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_k^n \left(1 + (-1)^{n+1-k}\right) X^k$$

   Pour $k = n$ nous avons $\mathrm{C}_n^n \left(1 + (-1)^{n+1-n}\right) X^n = 0$, ce qui veut dire que P_n est un polynôme de degré $n-1$; nous nous en doutions avec le nombre de racines trouvées.

Ainsi :

$$P_n(X) = \mathrm{C}_{n-1}^{n}\left(1+(-1)^{n+1-n+1}\right)X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2}\mathrm{C}_k^n\left(1+(-1)^{n+1-k}\right)X^k$$

Comme $\mathrm{C}_{n-1}^{n}\left(1+(-1)^{n+1-n+1}\right)X^{n-1} = 2nX^{n-1}$, nous en déduisons que le coefficient dominant de P_n est $2n$, c'est à dire $\lambda = 2n$

Et donc :

$$P_n(X) = 2n\prod_{k=1}^{n-1}\left(X + i\cot\frac{k\pi}{n}\right)$$

Nous obtenons là, la factorisation de P_n

2. *En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cot\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$*

$\Rightarrow$ Nous avons $P_{2n+1}(X) = (X+1)^{2n+1} - (X-1)^{2n+1} = (4n+2)\displaystyle\prod_{k=1}^{2n}\left(X + i\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.

En particulier, $P_{2n+1}(0) = 2 = (4n+2)\displaystyle\prod_{k=1}^{2n}\left(i\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right)$

$\Rightarrow$ Remarquons que :

$$\prod_{k=1}^{2n}\left(i\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \prod_{k=1}^{2n}(i)\times\prod_{k=1}^{2n}\left(\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right) = (i)^{2n}\prod_{k=1}^{2n}\left(\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right) = (-1)^n\prod_{k=1}^{2n}\left(\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

Donc

$$P_{2n+1}(0) = 2 = (-1)^n(4n+2)\prod_{k=1}^{2n}\left(\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right) = (-1)^n(4n+2)\prod_{k=1}^{n}\left(\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right)\times\prod_{k=n+1}^{2n}\left(\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

$\Rightarrow$ Nous allons démontrer que $\cot\dfrac{(2n-k)\pi}{2n+1} = -\cot\dfrac{(k+1)\pi}{2n+1}$

Nous avons :

$$\frac{(2n-k)\pi}{2n+1} = \frac{(2n+1)\pi}{2n+1} - \frac{(k+1)\pi}{2n+1} = \pi - \frac{(k+1)\pi}{2n+1}$$

Comme $\cot(\pi - x) = -\cot x$, nous avons :

$$\cot\frac{(2n-k)\pi}{2n+1} = \cot\left(\frac{\pi-(k+1)\pi}{2n+1}\right) = -\cot\frac{(k+1)\pi}{2n+1}$$

$\Rightarrow$ Nous avons

$$\begin{aligned}\prod_{k=n+1}^{2n}\left(\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right) &= \prod_{k=0}^{n-1}\left(\cot\frac{(2n-k)\pi}{2n+1}\right)\\ &= \prod_{k=0}^{n-1}\left(-\cot\frac{(k+1)\pi}{2n+1}\right) = (-1)^n\prod_{k=1}^{n}\left(\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right)\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Donc :

$$\begin{aligned}2 &= (-1)^n(4n+2)\prod_{k=1}^{n}\left(\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right)\times\prod_{k=n+1}^{2n}\left(\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right)\\ &= (-1)^n(4n+2)\prod_{k=1}^{n}\left(\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right)\times(-1)^n\prod_{k=1}^{n}\left(\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right)\\ &= (4n+2)\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^2\end{aligned}$$

C'est à dire $2 = (4n+2)\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^2 \Longleftrightarrow \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(\cot\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^2 = \dfrac{1}{2n+1}$

$\Rightarrow$ Pour $k = 1, \cdots, n$, nous avons $0 < \dfrac{k\pi}{2n+1} < \dfrac{\pi}{2}$ et donc $\cot \dfrac{k\pi}{2n+1} > 0$
Nous pouvons donc en déduire que :

$$\prod_{k=1}^{n} \left(\cot \frac{k\pi}{2n+1} \right) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

Ce que nous voulions

6.10.5 Miscelleanous

Exercice 40 :

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ où $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

1. *Pour $r > 0$ et $p \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} P\left(re^{it}\right) e^{-ipt} \, \mathrm{d}t$*

   ▷ Remarquons tout d'abord que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$:

$$\int_0^{2\pi} e^{-ipt} \, \mathrm{d}t = \begin{cases} 2\pi \text{ si } p = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

   ▷ Ensuite, $P\left(re^{it}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k r^k e^{ikt}$ et donc, en utilisant la linéarité :

$$\int_0^{2\pi} P\left(re^{it}\right) e^{-ipt} \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{n} a_k r^k e^{ikt} e^{-ipt} \, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} a_k r^k \int_0^{2\pi} e^{i(k-p)t} \, \mathrm{d}t$$

   Comme $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i(k-p)t} \, \mathrm{d}t = 0$ si $k \neq p$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i(k-p)t} \, \mathrm{d}t = 2\pi$ si $k = p$, nous déduisons que

$$\int_0^{2\pi} P\left(re^{it}\right) e^{-ipt} \, \mathrm{d}t = 2\pi a_p r^p$$

2. *En déduire que, s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $|P(z)| \leqslant M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, alors P est un polynôme constant.*

   Supposons que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $|P(z)| \leqslant M$.
   Alors, pour $1 \leqslant p \leqslant n$:

$$|2\pi a_p r^p| = \left| \int_0^{2\pi} P\left(re^{it}\right) e^{-ipt} \, \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^{2\pi} \left| P\left(re^{it}\right) e^{-ipt} \right| \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{2\pi} M \, \mathrm{d}t = 2\pi M$$

   C'est à dire que, pour tout p tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, nous avons $|a_p| \leqslant \dfrac{M}{r^p}$

   Or, $\displaystyle\lim_{r \to +\infty} \frac{M}{r^p} = 0$ et donc, pour tout p tel que $1 \leqslant p \leqslant n$, $a_p = 0$ et donc $P(X) = a_0$.
   P est bien un polynôme constant.

Exercice 41 :

Trouver la valeur minimum de $a^2 + b^2$, où a et b sont des nombres réels pour lesquels l'équation

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

admet au moins une solution réelle.

Exercice un peu tarabiscoté...
Si nous considérons le polynôme $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1$, nous pouvons observer que $P(0) = 1$ et que donc, 0 n'est pas racine de P.
En factorisant par x^2, nous obtenons :

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = x^2 \left(x^2 + ax + b + \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2} \right)$$

Et donc

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0 \Longleftrightarrow x^2 + ax + b + \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Longleftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + a\left(x + \frac{1}{x} \right) + b = 0$$

Si nous posons $t = x + \dfrac{1}{x}$, nous obtenons $t^2 = x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2 \Longleftrightarrow x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 2$
La relation $\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2} \right) + a\left(x + \dfrac{1}{x} \right) + b = 0$ devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} t = x + \dfrac{1}{x} \\ (t^2 - 2) + at + b = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t = x + \dfrac{1}{x} \\ t^2 + at + (b - 2) = 0 \end{array} \right.$$

- $\Rightarrow$ Pour $x \in \mathbb{R}^*$, en posant $\varphi(x) = x + \dfrac{1}{x}$, nous avons $\varphi'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ et le tableau de variations donne :

x		-1		0		$+1$	
$\varphi'(x)$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$
$\varphi(x)$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	2	$\nearrow$

  De là, nous concluons que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $|\varphi(x)| \geqslant 2$.
  Ainsi, si l'équation $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ admet une solution réelle, alors, t, solution de $t^2 + at + (b - 2) = 0$ est tel que $|t| \geqslant 2$
- $\Rightarrow$ Supposons donc que l'équation $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ admette une solution réelle ; donc $|t| \geqslant 2$ et nous devons donc minimiser la quantité $a^2 + b^2$
  - $\star$ De $t^2 + at + (b - 2) = 0$, nous tirons $b = 2 - t^2 - at$ et donc $b^2 = \left[(2 - t^2) - at \right]^2 = a^2 - 2at(2 - t^2) + (2 - t^2)^2$ d'où

$$a^2 + b^2 = (1 + t^2)a^2 - 2t(2 - t^2)a + (2 - t^2)^2$$

  - $\star$ Soit $f_t(a) = (1 + t^2)a^2 - 2t(2 - t^2)a + (2 - t^2)^2$ et nous étudions les variations de f_t en fonction a et la valeur minimale de f_t sera la valeur minimale de $a^2 + b^2$.
  - $\star$ Le minimum de f_t est atteint en $a_0 = \dfrac{t(2 - t^2)}{1 + t^2}$ et ce minimum est, après calculs

$$f_t(a_0) = \frac{(2 - t^2)^2}{1 + t^2}$$

- $\Rightarrow$ Pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons $f_t(a) \geqslant 0$. Comme $t \in \mathbb{R}$ est tel que $|t| \geqslant 2$ le minimum est atteint lorsque $|t| = 2$ et, à ce moment là,

$$f_t(a_0) = \frac{(2 - 2^2)^2}{1 + 2^2} = \frac{4}{5}$$

  Le minimum est donc $a^2 + b^2 = \dfrac{4}{5}$

Exercice 42 :

1. *On donne les trois polynômes de $\mathbb{C}[X]$*

$$A(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0 \quad B(X) = b_2X^2 + b_1X + b_0 \quad C(X) = c_2X^2 + c_1X + c_0$$

Les constantes $a_2, a_1, a_0, b_2, b_1, b_0, c_2, c_1, c_0$ sont réelles et choisies de telle façon que, pour tout X, on ait : $A^2(X) + B^2(X) = C^2(X)$.
D'autre part, aucun des nombres a_2, b_2 et c_2 n'est nul.

(a) *Démontrer que, si deux de ces trois polynômes admettent un zéro commun, réel ou complexe, ce zéro est aussi zéro du troisième.*

Question qui ne pose pas de difficulté.
Il faut partir de la relation vraie pour tout X : $A^2(X) + B^2(X) = C^2(X)$
- ▷ Si nous avons $A(x_0) = B(x_0) = 0$, alors $A^2(x_0) + B^2(x_0) = C^2(x_0) = 0$
- ▷ Si nous avons $C(x_0) = B(x_0) = 0$, alors $A^2(x_0) = C^2(x_0) - B^2(x_0) = 0$
- ▷ Si nous avons $C(x_0) = A(x_0) = 0$, alors $B^2(x_0) = C^2(x_0) - A^2(x_0) = 0$

(b) *Démontrer que, si les deux polyndmes $B(x) - C(x)$ et $B(x) + C(x)$ admettent un zéro commun, ce zéro est aussi zéro de $B(x)$ et de $C(x)$.*

Soit $x_0 \in \mathbb{C}$ tel que $B(x_0) - C(x_0) = B(x_0) + C(x_0) = 0$, alors, en additionnant ou en soustrayant, nous obtenons $2B(x_0) = 0 \iff B(x_0) = 0$ et $2C(x_0) = 0 \iff C(x_0) = 0$

2. *Dans toute la suite du problème, on suppose que les polynômes $A(x)$, $B(x)$ et $C(x)$ n'ont pas de zéro commun.*

(a) *Démontrer que $C(x)$ possède deux zéros complexes conjugués.*

A, B et C étant des polynômes à coefficients réels, ils admettent, dans $\mathbb{C}$, 2 racines *(réelles ou complexes ; si elles sont complexes, elles sont conjuguées)*
Supposons que C admette une racine réelle $x_0 \in \mathbb{R}$; alors, d'après la relation de départ, vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A^2(X) + B^2(X) = C^2(X)$, nous avons aussi

$$A^2(x_0) + B^2(x_0) = C^2(x_0) = 0$$

Et donc $A^2(x_0) = B^2(x_0) = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse où on suppose que les polynômes $A(x)$, $B(x)$ et $C(x)$ n'ont pas de zéro commun.
Ainsi, les seules racines possibles de C sont complexes et donc conjuguées.

(b) *A partir de l'égalité $A^2(X) = (B(x) - C(x))(B(x) + C(x))$, démontrer que les polynômes $B(x) - C(x)$ et $B(x) + C(x)$ ont chacun un zéro double réel.*

La relation $A^2(X) + B^2(X) = C^2(X)$ implique forcément que nous avons $a_2^2 + b_2^2 = c_2^2$.
- ▷ On ne peut avoir $b_2 = c_2$ ou $b_2 = -c_2$ puisqu'alors $a_2 = 0$ et A ne serait pas du second degré ; contradiction. De même, et pour les mêmes raisons, pour B, cette fois ci, nous ne pouvons pas avoir $a_2 = c_2$ ou $a_2 = -c_2$.
  Nous pouvons, par contre, avoir $a_2 = b_2$ ou $a_2 = -b_2$
- ▷ Donc, $A^2(X) = C^2(X) - B^2(X) = [C(X) + B(X)][C(X) - B(X)]$.
  Comme $b_2 \neq c_2$, $b_2 \neq -c_2$ et $a_2 \neq 0$, les polynômes $[C(X) + B(X)]$ et $[C(X) - B(X)]$ sont bien des polynômes du second degré.
- ▷ Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned} C(X) - B(X) &= (c_2 - b_2)(x - z_1)(x - \overline{z_1}) \\ C(X) + B(X) &= (c_2 + b_2)(x - z_2)(x - \overline{z_2}) \\ A(X) &= a_2(x - z_3)(x - \overline{z_3}) \end{aligned}$$

- ▷ On sait, d'après la question 1-b que si les deux polynômes $B(x) - C(x)$ et $B(x) + C(x)$ admettent un zéro commun, ce zéro est aussi zéro de $B(x)$ et de $C(x)$; comme on suppose que les polynômes $A(x)$, $B(x)$ et $C(x)$ n'ont pas de zéro commun, nous avons forcément $z_1 \neq z_2$.

▷ Supposons qu'il y a un des deux polynômes $B(x) - C(x)$ ou $B(x) + C(x)$ qui n'a pas de zéro double réel.
Supposons, par exemple, que $C(X) - B(X) = (c_2 - b_2)(x - z_1)(x - \overline{z_1})$
et que $C(X) + B(X) = (c_2 + b_2)(x - z_2)^2$, avec $z_2 \in \mathbb{R}$.
Alors,

$$A^2(x) = [C(x) + B(x)][C(x) - B(x)] = (c_2 - b_2)(c_2 + b_2)(x - z_1)(x - \overline{z_1})(x - z_2)^2$$

▷ Et donc

$$\begin{array}{l} A^2(z_1) = 0 \Longleftrightarrow A(z_1) = 0 \\ A^2(\overline{z_1}) = 0 \Longleftrightarrow A(\overline{z_1}) = 0 \\ A^2(z_2) = 0 \Longleftrightarrow A(z_2) = 0 \end{array}$$

A, polynôme du second degré admettrait donc 3 racines, ce qui est contradictoire.
Ainsi, les polynômes $B(x) - C(x)$ et $B(x) + C(x)$ ont chacun un zéro double réel.

(c) *En déduire que $A(x)$ et $B(x)$ admettent chacun 2 zéros réels distincts*

Comme nous venons de montrer que les polynômes $B(x) - C(x)$ et $B(x) + C(x)$ ont chacun un zéro double réel, nous pouvons écrire :

$$C(X) - B(X) = (c_2 - b_2)(x - z_1)^2 \text{ et } C(X) + B(X) = (c_2 + b_2)(x - z_2)^2$$

avec $z_1 \in \mathbb{R}$, $z_2 \in \mathbb{R}$ et $z_1 \neq z_2$
Alors $A^2(x) = [C(x) + B(x)][C(x) - B(x)] = a_2^2(x - z_1)^2(x - z_2)^2$, c'est à dire :

$$A(x) = a_2(x - z_1)(x - z_2)$$

A a donc 2 racines réelles distinctes.

(d) *On prend $a_2 = 1$ et l'on suppose connus, les zéros, p et q, de $A(x)$*
Démontrer qu'il existe une infinité de polynômes $B(x)$ et $C(x)$ dépendant d'un paramètre et vérifiant la relation $A^2(X) + B^2(X) = C^2(X)$

Tout d'abord, nous pouvons écrire

$$A(x) = a_2(x - p)(x - q) = (x - p)(x - q) = x^2 - (p + q)x + pq$$

De ce que nous avons déjà vu : $A^2(x) = [C(x) + B(x)][C(x) - B(x)]$, nous pouvons écrire, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$:

$$(x - p)^2(x - q)^2 = [\lambda(C(x) + B(x))]\left[\frac{1}{\lambda}(C(x) - B(x))\right]$$

Donc, de deux choses l'une :

$$\text{Ou bien} \left\{ \begin{array}{rl} \lambda(C(x) + B(x)) = & (x - p)^2 \\ \dfrac{1}{\lambda}(C(x) - B(x)) = & (x - q)^2 \end{array} \right. \quad \text{Ou bien} \left\{ \begin{array}{rl} \lambda(C(x) + B(x)) = & (x - q)^2 \\ \dfrac{1}{\lambda}(C(x) - B(x)) = & (x - p)^2 \end{array} \right.$$

Les deux cas étant symétriques, on résoud le premier cas. Les calculs donnent :

$$\left\{ \begin{array}{rl} \lambda(c_2 + b_2) = & 1 \\ \lambda(c_1 + b_1) = & -2p \\ \lambda(c_0 + b_0) = & p^2 \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{rl} \dfrac{1}{\lambda}(c_2 - b_2) = & 1 \\ \dfrac{1}{\lambda}(c_1 - b_1) = & -2q \\ \dfrac{1}{\lambda}(c_0 - b_0) = & q^2 \end{array} \right.$$

Nous obtenons alors les systèmes de 2 équations à 2 inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{rl} \lambda(c_2 + b_2) = & 1 \\ \dfrac{1}{\lambda}(c_2 - b_2) = & 1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} c_2 + b_2 = & \dfrac{1}{\lambda} \\ c_2 - b_2 = & \lambda \end{array} \right.$$

D'où nous tirons $c_2 = \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)$ et $b_2 = \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)$.

C'est par une même méthode que nous trouverons les autres coefficients. Donc :

$$c_1 = -\left(q\lambda + \frac{p}{\lambda}\right) \quad b_1 = q\lambda - \frac{p}{\lambda} \quad c_0 = \frac{1}{2}\left(q^2\lambda + \frac{p^2}{\lambda}\right) \quad b_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{\lambda} - q^2\lambda\right)$$

Avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$

(e) *Démontrer qu'entre les zéros p et q de $A(x)$ et les zéros r et s de $B(x)$, il existe une relation indépendante du paramètre précédent, et que l'on explicitera.*

Si $B(x)$ a pour racines r et s, alors $B(x) = b_2(x-r)(x-s) = b_2x^2 - b_2(r+s)x + b_2rs$ et donc, en identifiant, nous obtenons des relations classiques :

$$\left\{\begin{array}{rl} -b_2(r+s) = & b_1 \\ b_2rs = & b_0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} r+s = & \dfrac{-b_1}{b_2} \\ rs = & \dfrac{b_0}{b_2} \end{array}\right.$$

En utilisant les relations trouvées dans les questions précédentes, nous trouvons :

$$\begin{aligned} r+s &= -\frac{q\lambda - \frac{p}{\lambda}}{\frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{2\left(p - q\lambda^2\right)}{\lambda^2 - 1} \\ rs &= \frac{p - q^2\lambda}{\lambda^2 - 1} \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(r+s)(p+q) &= \frac{\left(p - q\lambda^2\right)(p+q)}{\lambda^2 - 1} = \frac{p^2 + pq\lambda^2 - pq - q^2\lambda}{\lambda^2 - 1} \\ &= \frac{p - q^2\lambda}{\lambda^2 - 1} + pq = rs + pq \end{aligned}$$

D'où, donc $\boxed{\frac{1}{2}(r+s)(p+q) = rs + pq}$

3. *Les nombres réels p et q, zéros de $A(x)$ étant fixés, il existe une infinité de polynômes $C(x)$. On appellera $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ les zéros de $C(x)$. Démontrer qu'entre α, β, p et q, il existe une relation que l'on explicitera.*

De la même manière, sachant que C a des racines complexes θ et $\overline{\theta}$, nous pouvons écrire :

$$C(x) = c_2(x - \theta)\left(x - \overline{\theta}\right) = c_2x^2 - 2\operatorname{Re}(\theta)x + c_2|\theta|^2$$

En écrivant, pour simplifier, $\theta = X + iY$, nous obtenons :

$$c_1 = -2c_2X \quad c_0 = c_2\left(X^2 + Y^2\right)$$

D'où nous tirons :

$$X = \frac{c_1}{-2c_2} = \frac{p + q\lambda^2}{\lambda^2 + 1} \quad X^2 + Y^2 = \frac{c_0}{c_2} = \frac{p^2 + q^2\lambda^2}{\lambda^2 + 1}$$

Or $X(p+q) = \dfrac{\left(p + q\lambda^2\right)(p+q)}{\lambda^2 + 1} = X^2 + Y^2 + pq$.

La relation est donc :

$$\boxed{X(p+q) = X^2 + Y^2 + pq \Longleftrightarrow \operatorname{Re}(\theta)(p+q) = |\theta|^2 + pq}$$

Exercice 43 :

On considère p réels distincts fixés une fois pour toutes $x_1, x_2, \ldots, x_p$
Dans tout le problème n est un entier positif donné et p un entier strictement supérieur à $n+1$ $(p > n+1)$.
$\mathbb{R}_n[X]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n

1. *On considère l'application de $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout couple (P, Q) de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ fait correspondre le réel $\langle P/Q\rangle = \sum_{k=1}^{p} P(x_k)\, Q(x_k)$*

   (a) *Montrer que pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$, nous avons : $\langle P/Q\rangle = \langle Q/P\rangle$*

   Cette question ne pose pas grand problème.
   En utilisant la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$ nous avons de façon évidente

   $$\sum_{k=1}^{p} P(x_k)\, Q(x_k) = \sum_{k=1}^{p} Q(x_k)\, P(x_k)$$

   Et donc $\langle P/Q\rangle = \langle Q/P\rangle$.
   On dit alors que l'application qui au couple (P, Q) de polynômes fait correspondre le réel $\langle P/Q\rangle$ est **symétrique**.

   (b) *Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\langle P/P\rangle \geqslant 0$, et que $\langle P/P\rangle = 0$ si et seulement si P est le polynôme nul*

   Nous avons $\langle P/P\rangle = \sum_{k=1}^{p} P(x_k)\, P(x_k) = \sum_{k=1}^{p} P^2(x_k)$ Cette somme étant une somme de carrés est forcément positive ou nulle et donc $\langle P/P\rangle \geqslant 0$
   Elle ne peut s'annuler que si et seulement si chacun de ses termes est lui même nul.
   Le polynôme P aurait alors p racines. Or, il est de degré n et $p > n + l$.
   Ceci n'est possible que pour le polynôme identiquement nul et donc $P = \mathcal{O}$, le polynôme nul.

   (c) *Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme fixé. Montrer que l'application Φ_Q, ainsi définie*

   $$\left\{\begin{array}{rcl} \Phi_Q : \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \Phi_Q(P) = \langle P/Q\rangle \end{array}\right.$$

   est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

   C'est une question, elle aussi, très classique ! !
   Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$
   D'après la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans $\mathbb{R}$, pour tout couple (P_1, P_2) de $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ nous avons :

   $$\begin{aligned} \Phi_Q(P_1 + P_2) = \langle P_1 + P_2/Q\rangle &= \sum_{k=1}^{p} (P_1 + P_2)(x_k)\, Q(x_k) = \sum_{k=1}^{p} [P_1(x_k) + P_2(x_k)]\, Q(x_k) \\ &= \sum_{k=1}^{p} P_1(x_k)\, Q(x_k) + \sum_{k=1}^{p} P_2(x_k)\, Q(x_k) \\ &= \langle P_1/Q\rangle + \langle P_2/Q\rangle = \Phi_Q(P_1) + \Phi_Q(P_2) \end{aligned}$$

   Et, maintenant, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$

   $$\begin{aligned} \Phi_Q(\lambda P) = \langle \lambda P/Q\rangle &= \sum_{k=1}^{p} (\lambda P)(x_k)\, Q(x_k) = \sum_{k=1}^{p} \lambda P(x_k)\, Q(x_k) \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{p} P(x_k)\, Q(x_k) = \lambda \langle P/Q\rangle \\ &= \lambda \Phi_Q(P) \end{aligned}$$

   L'application $\Phi_Q : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ ainsi définie est linéaire.
   En échangeant les rôles de P et Q, on obtient de nouveau une application linéaire. On dit alors que l' application

   $$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto & \langle P/Q\rangle \end{array}\right.$$

   est **bilinéaire.**

Nous venons de construire un produit scalaire

L'application $(P, Q) \longmapsto \langle P/Q \rangle$ est une forme bilinéaire, symétrique définie positive.
C'est donc bien un produit scalaire.
Il n'est donc pas incongru de parler, dans la suite de polynômes orthogonaux.

2. *On dit que deux polynômes $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ sont orthogonaux sur la famille $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ si et seulement si $\langle P/Q \rangle = 0$*

   (a) *Soit $P_0 = 1$, c'est à dire que P_0 est le polynôme constant et égal à 1. Montrer qu'il existe un et un seul polynôme normalisé P_1 du premier degré orthogonal à P_0 sur la famille $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$*

   Que P_1 soit un polynôme normalisé de degré 1 signifie que $P_1(X) = X + b$ où $b \in \mathbb{R}$.
   D'autre part, si $P_0 = 1$ est le polynôme constant, alors, pour tout k tel que $1 \leqslant k \leqslant p$, nous avons $P_0(x_k) = 1$. Donc :

$$\langle P_0/P_1 \rangle = \sum_{k=1}^{p} P_0(x_k) P_1(x_k) = \sum_{k=1}^{p} (x_k + b) = \left(\sum_{k=1}^{p} x_k\right) + p \times b$$

   Donc $\langle P_0/P_1 \rangle = 0 \Longleftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{p} x_k\right) + p \times b = 0 \Longleftrightarrow b = -\dfrac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} x_k$.

   Ainsi, $P_1(X) = X - \dfrac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} x_k$

   Il existe donc un et un seul polynôme normalisé P_1 du premier degré orthogonal à P_0 sur la famille $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$

   (b) *Montrer que l'on peut déterminer de manière unique les coefficients a_2 et b_2 de façon à ce que le polynôme $P_2 = XP_1 + a_2P_1 + b_2P_0$ soit orthogonal sur la famille $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ à P_1 et P_0. Quel est le degré de P_2 ?*

   Nous devons donc avoir $\langle P_2/P_1 \rangle = \langle P_2/P_0 \rangle = 0$
   $\Rightarrow$ Nous allons étudier ce que pourrait donner $\langle P_2/P_1 \rangle$

$$\langle P_2/P_1 \rangle = \langle XP_1 + a_2P_1 + b_2P_0/P_1 \rangle = \langle XP_1/P_1 \rangle + a_2 \langle P_1/P_1 \rangle + b_2 \langle P_0/P_1 \rangle$$

   ■ $\rightarrow$ Comme $\langle P_0/P_1 \rangle = 0$, nous avons :

$$\langle P_2/P_1 \rangle = \langle XP_1 + a_2P_1 + b_2P_0/P_1 \rangle = \langle XP_1/P_1 \rangle + a_2 \langle P_1/P_1 \rangle$$

   ■ $\rightarrow$ Ensuite, nous pouvons écrire :

$$\langle XP_1/P_1 \rangle = \sum_{k=1}^{p} x_k P_1(x_k) \times P_1(x_k) = \sum_{k=1}^{p} x_k (P_1(x_k))^2$$

   Et $\langle P_1/P_1 \rangle = \sum_{k=1}^{p} (P_1(x_k))^2$ et donc : $a_2 = -\dfrac{\sum_{k=1}^{p} x_k (P_1(x_k))^2}{\sum_{k=1}^{p} (P_1(x_k))^2}$

   $\Rightarrow$ Et maintenant, passons à $\langle P_2/P_0 \rangle$

$$\langle P_2/P_0 \rangle = \langle XP_1 + a_2P_1 + b_2P_0/P_0 \rangle = \langle XP_1/P_0 \rangle + a_2 \langle P_1/P_0 \rangle + b_2 \langle P_0/P_0 \rangle$$

   ■ $\rightarrow$ Comme $\langle P_0/P_1 \rangle = 0$, nous avons :

$$\langle P_2/P_0 \rangle = \langle XP_1 + a_2P_1 + b_2P_0/P_0 \rangle = \langle XP_1/P_0 \rangle + b_2 \langle P_0/P_0 \rangle$$

   ■ $\rightarrow$ Nous avons

$$\langle XP_1/P_0 \rangle = \sum_{k=1}^{p} x_k P_1(x_k) P_0(x_k) = \sum_{k=1}^{p} x_k P_1(x_k)$$

- ■ → Et $b_2 \langle P_0/P_0\rangle = b_2 \sum_{k=1}^{p} P_0(x_k) P_0(x_k) = b_2 p$
- ■ → De $\langle P_2/P_0\rangle = 0$, nous obtenons :

$$\sum_{k=1}^{p} x_k P_1(x_k) + b_2 p = 0 \iff b_2 = -\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} x_k P_1(x_k)$$

Nous avons ainsi défini $P_2(X) = P_1(X)(X + a_2) + b_2$ et comme $\deg P_1 = 1$, nous avons $\deg P_2 = 2$

3. *Le but de cette question est de définir deux suites $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telles que la suite des $n+1$ polynômes définie par P_0 , P_1 et la relation de récurrence*

$$P_i = XP_{i-1} + a_i P_{i-1} + b_i P_{i-2} \qquad 2 \leqslant i \leqslant n$$

soit formée de polynômes non nuls, deux à deux orthogonaux sur la famille $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$
Pour $j \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant j \leqslant n$, nous posons $N_j = \langle P_j/P_j\rangle$

Nous avons démontré que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, et $P \neq \mathcal{O}$, $\langle P/P\rangle > 0$, nous avons donc, pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant j \leqslant n$, nous avons $\langle P_j/P_j\rangle = N_j > 0$

(a) *Soit $i \in \{2, \ldots, n\}$*
On suppose construits par récurrence les polynômes $P_0, P_1, \cdots, P_{i-1}$ orthogonaux sur sur la famille $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ tels que les nombres N_j associés soient non nuls.
Déterminer a_i et b_i de façon que le polynôme P_i soit orthogonal sur la famille $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ à P_{i-1} et P_{i-2}

Supposons définis par récurrence les polynômes $P_0, P_1, \cdots, P_{i-1}$, deux à deux orthogonaux sur la famille $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ et tels que $N_j \neq 0$ pour $0 \leqslant j \leqslant i-1$
Nous devons avoir $\langle P_i/P_{i-1}\rangle = \langle P_i/P_{i-2}\rangle = 0$
⇒ Etudions, pour commencer, $\langle P_i/P_{i-1}\rangle$

$$\langle P_i/P_{i-1}\rangle = \langle XP_{i-1} + a_i P_{i-1} + b_i P_{i-2}/P_{i-1}\rangle = \langle XP_{i-1}/P_{i-1}\rangle + a_i \langle P_{i-1}/P_{i-1}\rangle + b_i \langle P_{i-2}/P_{i-1}\rangle$$

- ■ → Par construction $\langle P_{i-2}/P_{i-1}\rangle = 0$ et donc

$$\langle P_i/P_{i-1}\rangle = \langle XP_{i-1}/P_{i-1}\rangle + a_i \langle P_{i-1}/P_{i-1}\rangle = \langle XP_{i-1}/P_{i-1}\rangle + a_i N_{i-1}$$

- ■ → Regardons maintenant $\langle XP_{i-1}/P_{i-1}\rangle$

$$\langle XP_{i-1}/P_{i-1}\rangle = \sum_{k=1}^{p} x_k P_{i-1}(x_k) P_{i-1}(x_k) = \sum_{k=1}^{p} x_k (P_{i-1}(x_k))^2$$

- ■ → De telle sorte que nous ayions

$$\sum_{k=1}^{p} x_k (P_{i-1}(x_k))^2 + a_i N_{i-1} = 0 \iff a_i = \frac{-1}{N_{i-1}} \sum_{k=1}^{p} x_k (P_{i-1}(x_k))^2$$

⇒ Recommençons avec P_{i-2} et étudions $\langle P_i/P_{i-2}\rangle$

$$\begin{aligned} \langle P_i/P_{i-2}\rangle &= \langle XP_{i-1} + a_i P_{i-1} + b_i P_{i-2}/P_{i-2}\rangle \\ &= \langle XP_{i-1}/P_{i-2}\rangle + a_i \langle P_{i-1}/P_{i-2}\rangle + b_i \langle P_{i-2}/P_{i-2}\rangle \end{aligned}$$

- ■ → Par construction $\langle P_{i-2}/P_{i-1}\rangle = 0$ et donc $\langle P_i/P_{i-2}\rangle = \langle XP_{i-1}/P_{i-2}\rangle + b_i \langle P_{i-2}/P_{i-2}\rangle = \langle XP_{i-1}/P_{i-2}\rangle + b_i N_{i-2}$
- ■ → Regardons maintenant $\langle XP_{i-1}/P_{i-2}\rangle$. Nous avons :

$$\langle XP_{i-1}/P_{i-2}\rangle = \sum_{k=1}^{p} x_k P_{i-1}(x_k) P_{i-2}(x_k)$$

■ → De telle sorte que nous ayions

$$\sum_{k=1}^{p} x_k P_{i-1}(x_k) P_{i-2}(x_k) + b_i N_{i-2} = 0 \Longleftrightarrow b_i = \frac{-1}{N_{i-2}} \sum_{k=1}^{p} x_k P_{i-1}(x_k) P_{i-2}(x_k)$$

Nous avons ainsi construit P_i.

(b) *Montrer que pour tout $j \in \{0, 1, \ldots, i-3\}$, nous avons $\langle XP_{i-1}/P_j \rangle = \langle P_{i-1}/XP_j \rangle = 0$*

Soit $j \in \{0, 1, \ldots, i-3\}$
⇒ Nous avons :

$$\langle XP_{i-1}/P_j \rangle = \sum_{k=1}^{p} (x_k P_{i-1}(x_k)) P_j(x_k) = \sum_{k=1}^{p} P_{i-1}(x_k)(x_k P_j(x_k)) = \langle P_{i-1}/XP_j \rangle$$

⇒ Par définition de P_{j+1}, nous avons :

$$P_{j+1} = XP_j + a_{j+1}P_j + b_{j+1}P_{j-1} \Longleftrightarrow XP_j = P_{j+1} - a_{j+1}P_j - b_{j+1}P_{j-1}$$

D'où

$$\begin{aligned} \langle P_{i-1}/XP_j \rangle &= \langle P_{i-1}/P_{j+1} - a_{j+1}P_j - b_{j+1}P_{j-1} \rangle \\ &= \langle P_{i-1}/P_{j+1} \rangle - a_{j+1} \langle P_{i-1}/P_j \rangle - b_{j+1} \langle P_{i-1}/P_{j-1} \rangle \end{aligned}$$

⇒ Comme, par hypothèse, $j \in \{0, 1, \ldots, i-3\}$, nous avons $j \leqslant i-3 \Longleftrightarrow j+1 \leqslant i-2$ et donc

$$\langle P_{i-1}/P_{j+1} \rangle = \langle P_{i-1}/P_j \rangle = \langle P_{i-1}/P_{j-1} \rangle = 0$$

Et donc nous avons $\langle XP_{i-1}/P_j \rangle = \langle P_{i-1}/XP_j \rangle = 0$
Ce que nous voulions.

(c) *En déduire que le polynôme P_i défini en a) est orthogonal à $P_0, P_1, \cdots, P_{i-1}$*

⇒ Pour commencer, pour $j \in \{0, 1, \ldots, i-3\}$:

$$\langle P_i/P_j \rangle = \langle XP_{i-1} + a_i P_{i-1} + b_i P_{i-2}/P_j \rangle = \langle XP_{i-1}/P_j \rangle + a_i \langle P_{i-1}/P_j \rangle + b_i \langle P_{i-2}/P_j \rangle$$

Nous avons démontré que $\langle XP_{i-1}/P_j \rangle = 0$, et, par construction

$$\langle P_{i-1}/P_j \rangle = \langle P_{i-2}/P_j \rangle = 0$$

Donc, $\langle P_i/P_j \rangle = 0$
P_i est donc orthogonal à tout P_j
⇒ Nous avons, tout à l'heure, nous avons choisi a_i et b_i de telle sorte que P_i soit orthogonal à P_{i-1} et à P_{i-2}.
Ainsi, P_i est orthogonal à tout P_j, pour $0 \leqslant j \leqslant i-1$
Le polynôme P_i défini en a) est orthogonal à $P_0, P_1, \cdots, P_{i-1}$

(d) *Montrer que P_i est non nul et déterminer son degré.*

Nous allons démontrer par récurrence que le polynôme P_i est non nul et que $\deg P_i = i$
C'est vrai pour $i = 0$ et $i = 1$ En effet $P_0 = 1$ et nous avons calculé que

$$P_1(X) = X - \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} x_k$$

Supposons que c'est vrai à l'ordre i C'est à dire que P_i est non nul et de degré i
Démontrons le à l'ordre $i+1$ Nous avons

$$P_{i+1} = XP_i + a_{i+1}P_i + b_i P_{i-1} = P_i \times (X + a_{i+1}) + b_i P_{i-1}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, P_i est un polynôme non nul et de degré i.
Donc $\deg P_i \times (X + a_{i+1}) = i+1$.
Comme $\deg P_{i-1} = i-1$, nous avons P_{i+1} non nul et de degré $i+1$
Ainsi, le polynôme P_i est non nul et $\deg P_i = i$

(e) *Montrer que la famille de polynômes $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$*

Pour tout $i \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant i \leqslant n$, nous avons $\deg P_i = i$. Il suffit d'appliquer le corollaire 6.8.4 pour démontrer que la famille de polynômes $\{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

Exercice 44 :

On se donne $n+1$ points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de $\mathbb{R}$ tous distincts.

1. *Soit L_i le polynôme défini par : $L_i(x) = \prod\limits_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n} \dfrac{x-x_j}{x_i-x_j}$*

   (a) *Montrer que L_i est un polynôme de degré n.*

   Par construction de L_i commune produit de n polynômes de degré 1, L_i est donc un polynôme de degré n. Le numérateur est un produit de n termes $(x-x_j)$ alors que le dénominateur est une constante.

   (b) *Calculer la valeur $L_i(x_k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$*

   ▷ Pour commencer, si $i=k$, $L_i(x_i) = \prod\limits_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n} \dfrac{x_i-x_j}{x_i-x_j} = 1$

   ▷ Si $k \neq i$, il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que $j_0 \neq i$ et $j_0 = k$ et alors, $\dfrac{x_k-x_k}{x_i-x_k} = 0$ et donc $L_i(x_k) = 0$.

   Nous pouvons donc écrire que $L_i(x_k) = \delta_{i,k}$ où $\delta_{i,k}$ est le symbole de Kronecker

   (c) *Pour i fixé, démontrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à n, vérifiant*

   $$P(x_k) = L_i(x_k) \text{ pour } 0 \leqslant k \leqslant n$$

   Supposons qu'il existe un polynôme Q de degré n tel que pour tout k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$ nous avons $P(x_k) = Q(x_k)$

   Alors, pour tout k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$ nous avons $P(x_k) - Q(x_k) = 0$. Ce qui signifie que le polynôme $P-Q$ admet $n+1$ racines alors que $\deg(P-Q) \leqslant n$.

   Ce qui est impossible, sauf si $P-Q = \mathcal{O}$, c'est à dire $P=Q$.

   Il y a donc unicité.

2. (a) *Démontrer que la famille de polynômes $\{L_0, L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$*

   Tout d'abord $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$ et dans la famille $\{L_0, L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ a aussi $n+1$ éléments.

   Il suffit donc de montrer que la famille $\{L_0, L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ est libre.

   Soient donc $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $n+1$ réels tels que $\lambda_0 L_0 + \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \cdots + \lambda_n L_n = \mathcal{O}$.

   Ceci veut donc dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons

   $$\lambda_0 L_0(x) + \lambda_1 L_1(x) + \lambda_2 L_2(x) + \cdots + \lambda_n L_n(x) = 0$$

   En particulier pour x_i où $0 \leqslant i \leqslant n$ où nous avons :

   $$\lambda_0 L_0(x_i) + \lambda_1 L_1(x_i) + \lambda_2 L_2(x_i) + \cdots + \lambda_n L_n(x_i) = \lambda_i = 0$$

   Ainsi, pour tout i tel que $0 \leqslant i \leqslant n$, nous avons $\lambda_i = 0$

   La famille $\{L_0, L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ est donc libre et forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$

   (b) *Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Quelles sont les coordonnées de P dans la base $\{L_0, L_1, L_2, \ldots, L_n\}$*

   Soient $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $n+1$ réels tels que $P = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i L_i$, c'est à dire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(x)$

   Nous avons, en particulier pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant k \leqslant n$, $P(x_k) = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(x_k) = \lambda_k$.

   Ainsi, pour tout polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, nous avons $P = \sum\limits_{i=0}^{n} P(x_i) L_i$

(c) *Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$*

Si nous considérons le polynôme constant et égal à 1, nous avons :

$$P(x_0) = P(x_1) = \cdots = P(x_i) = \cdots = P(x_n) = 1$$

Et donc $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$

3. *Soit f une fonction donnée, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Nous considérons toujours $n+1$ points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de $\mathbb{R}$ tous distincts.*
Interpoler la fonction f, par un polynôme P de degré n aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$, c'est résoudre le problème suivant :
Trouver un polynôme P_f de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout $i_i n\mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant i \leqslant n$, $P_f(x_i) = f(x_i)$
Démontrer que l'unique solution du problème est le polynôme $P_f(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$

Si un tel polynôme Pf existe, il s'écrit de manière unique $P_f(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(x)$.

En faisant $x = x_k$, nous avons

$$P_f(x_k) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(x_k) \Longrightarrow P_f(x_k) = f(x_k) = \lambda_k$$

L'unique solution du problème est le polynôme $P_f(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$

4. *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $[a;b]$ et on suppose que f s'annule en $n+2$ points de $[a;b]$*
Démontrer que

(a) *La dérivée f' s'annule au moins en $n+1$ points de $[a;b]$*

Nous appelons $c_0, c_1, \ldots, c_n, c_{n+1}$ les $n+2$ points de $[a;b]$ tels que

$$f(c_0) = f(c_1) = \cdots = f(c_n) = f(c_{n+1}) = 0$$

Ainsi, d'après le théorème de Rolle, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant k \leqslant n$ il existe $c_k^1 \in \left]c_k; c_{k+1}\right[$ tel que $f'\left(c_k^1\right) = 0$
Ainsi, la dérivée f' s'annule au moins en $c_0^1, c_1^1, c_2^1, \ldots, c_n^1$, c'est à dire en $n+1$ points de $[a;b]$

(b) *La dérivée $n+1$-ième $f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois en un point $c \in [a;b]$*

- ▷ La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, il nous est possible de recommencer le même raisonnement pour la fonction dérivée f' aux points $c_0^1, c_1^1, \ldots, c_n^1$.
- ▷ Ainsi la dérivée seconde f'' s'annulera-t-elle en n points distincts de $[a;b]$ $c_0^2, c_1^2, \ldots, c_{n-1}^2$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant k \leqslant n-1$, nous ayions $c_k^2 \in \left]c_k^1; c_{k+1}^1\right[$
- ▷ En continuant ainsi, nous voyons que la dérivée k-ième $f^{(k)}$ s'annulera en $n+2-k$ points distincts de $[a;b]$
- ▷ Et donc, la dérivée $n+1$-ième $f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois en un point $c \in [a;b]$

C'est une question classique d'analyse à laquelle nous venons de répondre

5. *Nous appelons $q(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) = \displaystyle\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$ Calculer $q^{(n+1)}$ la dérivée $n+1$-ième de q*

q est un polynôme unitaire de degré $n+1$. Si $q^{(k)}$ est la dérivée k-ième de q, le terme de plus haut degré de $q^{(k)}(x)$ est donné par $\mathrm{A}_{n+1}^{k} x^{n+1-k}$.

$q^{(n+1)}$ la dérivée $n+1$-ième de q est une constante donnée par $\mathrm{A}_{n+1}^{n+1} x^{n+1-n-1} = (n+1)!$
En conclusion, la dérivée $n+1$-ième de q est $q^{(n+1)}(x) = (n+1)!$

6. *Soit $x \in [a;b]$ tel que, pour $i = 0, \ldots, n$, nous ayions $x \neq x_i$. On appelle toujours P_f le polynôme d'interpolation de f. Nous construisons pour, tout $t \in [a;b]$ la fonction W_x définie par :*

$$W_x(t) = f(t) - P_f(t) - \frac{q(t)}{q(x)}(f(x) - P_f(x))$$

   (a) *Démontrer que W_x est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $[a;b]$ et calculer $W_x^{(n+1)}(t)$*

   - ▷ Clairement, W_x est l'addition de polynômes ou de fonctions de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et est donc de classe $\mathcal{C}^{n+1}$
   - ▷ En utilisant la linéarité de la dérivation, nous avons :

$$W_x^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - P_f^{(n+1)}(t) - \frac{q^{(n+1)}(t)}{q(x)}(f(x) - P_f(x))$$

   Comme $\deg P_f = n$, nous avons $P_f^{(n+1)}(t) = 0$, et de la question précédente où nous avons prouvé que $q^{(n+1)}(t) = (n+1)!$, nous avons :

$$W_x^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \frac{(n+1)!}{q(x)}(f(x) - P_f(x))$$

   (b) *Démontrer que $W_x(x) = W_x(x_0) = W_x(x_1) = \ldots = W_x(x_n) = 0$*

   - ▷ $W_x(x) = f(x) - P_f(x) - \dfrac{q(x)}{q(x)}(f(x) - P_f(x)) = 0$
   - ▷ Pour $0 \leqslant i \leqslant n$, nous devons faire remarquer que $q(x_i) = 0$ et nous avons :

$$\begin{aligned} W_x(x_i) &= f(x_i) - P_f(x_i) - \frac{q(x_i)}{q(x)}(f(x) - P_f(x)) \\ &= f(x_i) - f(x_i) = 0 \end{aligned}$$

   D'où la conclusion : $W_x(x) = W_x(x_0) = W_x(x_1) = \ldots = W_x(x_n) = 0$

   (c) *En déduire qu'il existe $\xi \in [a;b]$ tel que $W_x^{(n+1)}(\xi) = 0$*

   W_x, de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ s'annule en $n+2$ points. Il existe donc $\xi \in [a;b]$ tel que $W_x^{(n+1)}(\xi) = 0$

   (d) *Conclure que pour tout $x \in [a;b]$, il existe $\xi \in [a;b]$ tel que*

$$f(x) - P_f(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

   Comme

$$\begin{gathered} W_x^{(n+1)}(\xi) = 0 \\ \Longleftrightarrow \\ f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)!}{q(x)}(f(x) - P_f(x)) = 0 \\ \Longleftrightarrow \\ f^{(n+1)}(\xi) = \frac{(n+1)!}{q(x)}(f(x) - P_f(x)) \\ \Longleftrightarrow \\ f(x) - P_f(x) = \frac{q(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \end{gathered}$$

   C'est à dire que, pour tout $x \in [a;b]$, il existe $\xi \in [a;b]$ tel que

$$f(x) - P_f(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

7. *Démontrer que si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $[a;b]$ alors, pour tout $x \in [a;b]$*

$$|f(x) - P_f(x)| \leqslant \frac{|a-b|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{x\in[a;b]} \left|f^{(n+1)}(x)\right|$$

Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $[a;b]$ alors, $f^{(n+1)}$ est continue sur $[a;b]$ et est bornée sur $[a;b]$ et nous avons, pour tout $x \in [a;b]$, $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leqslant \sup\limits_{x\in[a;b]} \left|f^{(n+1)}(x)\right|$.

D'autre part, comme pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$, $x_i \in [a;b]$, nous avons $|x - x_i| \leqslant |a-b|$ et donc $|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)| \leqslant |a-b|^{n+1}$

La conclusion est donc, ensuite, évidente.

Partie 2 : applications numériques

8. *Considérons les fonctions définies l'intervalle $[1;2]$ par $f(x) = \sqrt{x-1}$ et $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)$, et trois points $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{3}{2}$ et $x_2 = 2$.*

   (a) *Montrer, sans le calculer, que f et g ont le même polynôme d'interpolation sur le support $\{x_0, x_1, x_2\}$*

   Avant de commencer, nous pouvons calculer L_0, L_1, L_2.

   $\to L_0(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \dfrac{\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-2)}{\left(1-\frac{3}{2}\right)(1-2)}$ Et donc $L_0(x) = 2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)(x-2)$

   $\to L_1(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \dfrac{(x-1)(x-2)}{\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-2\right)}$ Et donc $L_1(x) = -4(x-1)(x-2)$

   $\to L_2(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \dfrac{(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)}{(2-1)\left(2-\frac{3}{2}\right)}$ Et donc $L_2(x) = 2(x-1)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$

   Le polynôme de Lagrange d'approximation pour f et g sont, pour f, $P_f(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$ et , pour g, $P_g(x) = g(x_0)L_0(x) + g(x_1)L_1(x) + g(x_2)L_2(x)$.

   Or, un calcul simple montre que $f(x_0) = g(x_0) = 0$, $f(x_1) = g(x_1) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $f(x_2) = g(x_2) = 1$.

   Nous avons bien $P_f = P_g$

   (b) *Donner l'expression des polynômes de Lagrange relatifs à ce support.*

   Nous avons donc :

$$\begin{aligned} P_f(x) = P_g(x) &= \frac{\sqrt{2}}{2}(-4(x-1)(x-2)) + 2(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right) \\ &= 2(x-1)\left(\left(1-\sqrt{2}\right)x + \left(2\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

   (c) *Comparer sur un graphe*

   Voir la figure 6.1

9. *Pour $n = 4$, $[a;b] = [0;1]$ et $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)$, trouver une majoration de $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x) - P(x)|$.*

Il suffit d'utiliser le résultat de la question 7, en voyant que $|a-b| = 1$.

Nous avons donc :

$$|f(x) - P_f(x)| \leqslant \frac{1}{120} \sup_{x\in[0;1]} \left|f^{(5)}(x)\right|$$

En cherchant les dérivées successives de $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)$, nous obtenons $f^{(5)}(x) = \dfrac{\pi^5}{1024}\cos\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)$, de telle sorte que $\sup\limits_{x\in[0;1]} \left|f^{(5)}(x)\right| = \dfrac{\pi^5}{1024}$.

Ainsi, $|f(x) - P_f(x)| \leqslant \dfrac{1}{120} \times \dfrac{\pi^5}{1024} \approx 0,002490 = 2,49 \times 10^{-3}$

Nous pouvons en conclure qu'en choisissant P_f plutôt que f dans les calculs, l'erreur commise est au maximum de $2,5 \times 10^{-3}$

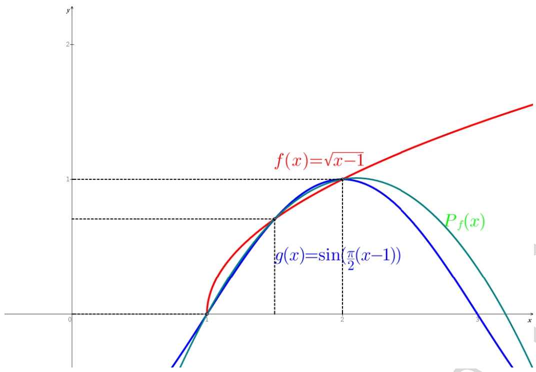

FIGURE 6.1 – Les graphes de f et g et le polynôme d'interpolation. Remarquer qu'en dehors de l'intervalle $[1;2]$ l'interpolation est de mauvaise qualité

10. (a) *Calculer la dérivée k-ième de $f(x) = \ln(1+\lambda x)$ avec $\lambda > 0$*

Comme souvent, nous allons commencer par « bricoler »

→ La dérivée première est $f'(x) = \dfrac{\lambda}{1+\lambda x} = \lambda(1+\lambda x)^{-1}$

→ La dérivée seconde est $f''(x) = -\lambda^2(1+\lambda x)^{-2}$

→ La dérivée troisième est $f^{(3)}(x) = 2\lambda^3(1+\lambda x)^{-3}$

→ On continue ? ?
La dérivée quatrième est $f^{(4)}(x) = -2\times 3\lambda^4(1+\lambda x)^{-4}$

→ Un petit dernier, pour la route :
La dérivée cinquième est $f^{(5)}(x) = 2\times 3\times 4\lambda^5(1+\lambda x)^{-5}$

Pas d'idée ? ? Je dirais volontiers que

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\lambda^k(1+\lambda x)^{-k} = (-1)^{k-1}(k-1)!\left(\frac{\lambda}{1+\lambda x}\right)^k$$

Résultat qui se démontre très facilement par récurrence.

(b) *Pour $n = 4$, $[a;b] = [0;1]$ et $f(x) = \ln(1+\lambda x)$, pour quelles valeurs de λ, sommes nous assurés que $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x) - P_f(x)| \leqslant 10^{-4}$*

→ Nous sommes dans la même situation que tout à l'heure et donc :

$$|f(x) - P_f(x)| \leqslant \frac{1}{120}\sup_{x\in[0;1]}\left|f^{(5)}(x)\right|$$

C'est à dire, ici, que

$$|f(x) - P_f(x)| \leqslant \frac{\lambda^5}{5}\sup_{x\in[0;1]}\left|\left(\frac{1}{1+\lambda x}\right)^5\right|$$

→ Pour tout $x \in [0;1]$, nous avons $1 \leqslant 1+\lambda x \leqslant 1+\lambda$ et donc $\dfrac{1}{1+\lambda} \leqslant \dfrac{1}{1+\lambda x} \leqslant 1$, et à la puissannce 5, nous avons $\sup\limits_{x\in[0;1]}\left|\left(\dfrac{1}{1+\lambda x}\right)^5\right| \leqslant 1$

→ Et donc $|f(x) - P_f(x)| \leqslant \dfrac{\lambda^5}{5}$

→ Nous devons donc avoir $\dfrac{\lambda^5}{5} \leqslant 10^{-4}$ et

$$\frac{\lambda^5}{5} \leqslant 10^{-4} \iff \lambda^5 \leqslant 5\times 10^{-4} \iff 5\ln\lambda \leqslant \ln 5 - 4\ln 10 \iff \ln\lambda \leqslant \frac{\ln 5 - 4\ln 10}{5}$$

D'où nous trouvons $\lambda \leqslant \exp\left(\dfrac{\ln 5 - 4\ln 10}{5}\right) \approx 0,21867$

(c) *Soit $\lambda = \dfrac{1}{2}$; en utilisant l'inégalité de Taylor à l'ordre n en 0, montrer que si*

$$P_n(x) = \frac{x}{2 \times 1} - \frac{x^2}{2^2 \times 2} + \frac{x^3}{2^3 \times 3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{2^n \times n}$$

Alors $\sup\limits_{x \in [0,1]} \left| \ln\left(1 + \dfrac{x}{2}\right) - P_n(x) \right| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}(n+1)}$

Rappelons la formule de Taylor-Lagrange vue en 11.4.1 et adaptée à notre problème :

> Soit $f : [0\ 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle $[0\ 1]$ admettant sur l'intervalle ouvert $]0\ 1[$ une dérivée $n+1$-ième.
> Nous appelons $P_{n,f}$ le polynôme de Taylor associé à f. Ce polynôme a pour expression, pour tout $x \in [0\ 1]$:
>
> $$P_{n,f}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k\,!} x^k$$
>
> Alors, il existe ξ compris entre 0 et x tel que
>
> $$f(x) = P_{n,f}(x) + x^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Alors, nous pouvons écrire, pour $f(x) = \ln(1 + \lambda x)$:

$$P_{n,f}(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} (k-1)! \lambda^k \frac{x^k}{k\,!} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \lambda^k \frac{x^k}{k}$$

$$\ln(1 + \lambda x) = P_{n,f}(x) + x^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Où $\xi \in [0; x]$.

Or, $x^{n+1} \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \times (-1)^n n! \left(\dfrac{\lambda}{1 + \lambda\xi}\right)^{n+1} = (-1)^n \dfrac{x^{n+1} \lambda^{n+1}}{(n+1)(1 + \lambda\xi)^{n+1}}$

Pour $\lambda = \dfrac{1}{2}$, nous obtenons $P_{n,f}(x) = P_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \dfrac{x^k}{k 2^k}$ et

$$\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) - P_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)\left(1 + \frac{\xi}{2}\right)^{n+1}}$$

Et donc :

$$\left| \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) - P_n(x) \right| = \frac{x^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)\left(1 + \frac{\xi}{2}\right)^{n+1}}$$

Pour tout $x \in [0\ 1]$ et tout $\xi \in [0\ 1]$, nous avons $\dfrac{x^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)\left(1 + \frac{\xi}{2}\right)^{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}(n+1)}$, la conclusion $\sup\limits_{x \in [0,1]} \left| \ln\left(1 + \dfrac{x}{2}\right) - P_n(x) \right| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}(n+1)}$ en découle.

(d) *Pour quelles valeurs de n est-on assuré que* $\sup\limits_{x \in [0,1]} \left| \ln\left(1 + \dfrac{x}{2}\right) - P_n(x) \right| \leqslant 10^{-4}$

La suite numérique de terme général $u_n = \dfrac{1}{2^{n+1}(n+1)}$ est une suite qui décroit très rapidement vers zéro.

Il faut donc trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant n_0$, alors $\dfrac{1}{2^{n+1}(n+1)} \leqslant 10^{-4}$.

Avec la calculatrice, nous trouvons $u_8 = 2,1701388 \times 10^{-4}$ et $u_9 = 0,00009 = 9 \times 10^{-5}$

Ainsi, si $n \geqslant 9$ alors $\sup\limits_{x\in[0,1]} \left|\ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right) - P_n(x)\right| \leqslant 10^{-4}$

Cette démarche donne une autre forme d'approximation polynômiale, l'approche par les polynômes de Taylor