6.2 Degré d'un polynôme

6.2.1 Définition

$\mathcal{A}$ est un anneau commutatif unitaire.

1. Soit P un polynôme de $\mathcal{A}[X]$, c'est à dire que nous écrivons
$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$$
avec, pour tout $k = 0, \ldots, n$, $a_k \in \mathcal{A}$.
On appelle **degré de** P le plus grand entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \neq 0$
Nous notons alors $n = \deg P$
2. a_n est le coefficient dominant de P. Si $a_n = 1$, alors le polynôme est dit unitaire.

Remarque 6 :

1. Le polynôme nul n'a pas de degré
2. Les polynômes de degré 0 sont les polynômes constants.
3. Les polynômes $P = a_n X^n$ avec $a_n \neq 0$ sont appelés **monomes** de degré n

6.2.2 Proposition

$\mathcal{A}$ est un anneau commutatif unitaire ; P et Q sont 2 polynômes de $\mathcal{A}[X]$

1. Si $\deg P \neq \deg Q$, alors $P + Q \neq 0$ et $\deg(P+Q) = \sup(\deg P, \deg Q)$
2. Si $\deg P = \deg Q$ et si $P + Q \neq 0$ alors $\deg(P+Q) \leqslant \deg P$
3. De manière plus générale, $\deg(P+Q) \leqslant \sup(\deg P, \deg Q)$
4. Si, de plus, $\mathcal{A}$ est un anneau intègre, $\mathcal{A}[X]$ est aussi intègre, et si $P \neq 0$ et $Q \neq 0$, alors
$$\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$$

Démonstration

1. Supposons $\deg P \neq \deg Q$, et posons, pour fixer les idées, $n = \deg P$ et $p = \deg Q$ avec $n > p$.
Alors, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$ et $Q = \sum_{k=0}^{p} b_k X^k$ avec $b_p \neq 0$. Alors :
$$P + Q = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{p} b_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{p} (a_k + b_k) X^k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k X^k$$
Comme $a_n \neq 0$, nous avons bien $P + Q \neq 0$ et $\deg(P+Q) = n$.
Si nous avions pris $p > n$, nous aurions eu le même résultat. Donc $\deg(P+Q) = \sup(\deg P, \deg Q)$
2. Supposons $\deg P = \deg Q$, et $P + Q \neq 0$.
Posons, toujours pour fixer les idées, $n = \deg P = \deg Q$.
Si $P + Q \neq 0 \Longleftrightarrow P \neq -Q$, alors il existe k_0, avec $0 \leqslant k_0 \leqslant n$, tels que $b_{k_0} \neq -a_{k_0}$
$$P + Q = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} b_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{k_0-1} (a_k + b_k) X^k + (a_{k_0} + b_{k_0}) X^{k_0} + \sum_{k_0+1}^{n} (a_k + b_k) X^k$$
Ainsi, si $a_n + b_n \neq 0$, alors $\deg(P+Q) = \deg P$ et si $a_n + b_n = 0$, alors $\deg(P+Q) < \deg P$.
D'où le résultat
3. Il est clair, qu'en synthèse, nous avons $\deg(P+Q) \leqslant \sup(\deg P, \deg Q)$

4. Soient donc P et Q 2 polynômes de $\mathcal{A}[X]$.

   On pose donc $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$ et $Q = \sum_{k=0}^{p} b_k X^k$ avec $b_p \neq 0$. Alors :

   $$PQ = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) \times \left(\sum_{k=0}^{p} b_k X^k\right) = a_n b_p X^{n+p} + \cdots + \alpha_i X^i + \cdots + a_0 b_0$$

   Où $\alpha_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}$, avec, en particulier $\alpha_{p+n} = a_n b_p$.

   Comme $a_n \neq 0$ et $b_p \neq 0$, que l'anneau $\mathcal{A}$ est un anneau intègre, alors $\alpha_{p+n} = a_n b_p \neq 0$ et donc $\deg(P \times Q) = n + p$, c'est à dire $\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$

6.2.3 Corollaire

$\mathcal{A}$ est un anneau commutatif unitaire et intègre. Les seuls éléments inversibles de $\mathcal{A}[X]$ sont ceux de $\mathcal{A}$

Démonstration

Soient P et Q 2 polynômes de $\mathcal{A}[X]$ inverses l'un de l'autre, c'est à dire tels que $PQ = 1$. Alors :

$$\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q = \deg(1) = 0$$

Comme $\deg P \in \mathbb{N}$ et $\deg Q \in \mathbb{N}$, de l'égalité $\deg P + \deg Q = 0$, nous déduisons $\deg P = \deg Q = 0$, c'est à dire que $P \in \mathcal{A}$ et $Q \in \mathcal{A}$ et sont donc des éléments inversibles de $\mathcal{A}$

Remarque 7 :

1. Il était tentant, à l'image des polynômes constants non nuls, de donner au polynôme 0 un degré nul. Nous aurions alors eu, pour tout $P \in \mathcal{A}[X]$:

   $$\deg 0 = \deg(P \times 0) = \deg P + \deg 0 \iff \deg P = 0$$

   Ainsi, tout polynôme $P \in \mathcal{A}[X]$ aurait eu un degré nul ; ce qui est impossible.

   Le polynôme nul n'a donc pas de degré.
2. $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau possédant de véritables diviseurs de 0, donc non intègre. Intéressons nous à l'anneau de polynômes $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})[X]$

   ▷ Soit $P = 4X^2 - 1$ et $Q = 3X^3 + 1$. Alors :

   $$\begin{aligned} PQ = \left(4X^2 - 1\right)\left(3X^3 + 1\right) &= 12X^5 + 4X^2 - 3X^3 - 1 \\ &= -3X^3 + 4X^2 - 1 = 3X^3 + 4X^2 + 5 \end{aligned}$$

   Nous avons donc $\deg(P \times Q) = 3 < \deg P + \deg Q$

   Nous soulignons, par cet exemple, l'importance de l'intégrité de l'anneau $\mathcal{A}$

   ▷ Les éléments inversibles de $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})[X]$ sont ceux de $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +, \times)$, c'est à dire 1 et 5

Exercice 1 :

Calculer, dans $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$, l'expression $f^3 + g^3 + h^3$ où

⋆ $f = X^2 + 2X$ ⋆ $g = 2X^2 + 1$ ⋆ $h = X + 2$

6.2.4 Fonction polynôme : définition

Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif unitaire.

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathcal{A}[X]$.

À ce polynôme P, nous faisons correspondre une fonction $\widetilde{P} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \widetilde{P} : \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ x & \longmapsto & \widetilde{P}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{array} \right.$$

Cette fonction $\widetilde{P}$ est appelée **fonction polynôme** associée au polynôme P

Remarque 8 :

1. L'ensemble des fonctions polynômes de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ que nous pouvons noter $\mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ est un sous anneau de $\mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = \mathcal{A}^{\mathcal{A}}$ des applications de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$
2. Pour tout polynôme P et Q de $\mathcal{A}[X]$, nous avons :

   ▷ $\widetilde{P+Q} = \widetilde{P} + \widetilde{Q}$ ▷ $\widetilde{P \times Q} = \widetilde{P} \times \widetilde{Q}$ ▷ Pour tout $\lambda \in \mathcal{A}$, $\widetilde{\lambda P} = \lambda \widetilde{P}$

   La transformation :

   $$\left\{ \begin{array}{rcl} \Phi : \mathcal{A}[X] & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \\ P & \longmapsto & \Phi(P) = \widetilde{P} \end{array} \right.$$

   est un homomorphisme d'anneau
3. On appelle valeur du polynôme P en $\alpha \in \mathcal{A}$ l'élément $\widetilde{P}(\alpha) \in \mathcal{A}$ défini par :

   $$\widetilde{P}(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k$$

4. Pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, nous avons donc :

   ▷ $\widetilde{P+Q}(\alpha) = \widetilde{P}(\alpha) + \widetilde{Q}(\alpha)$ ▷ $\widetilde{P \times Q}(\alpha) = \widetilde{P}(\alpha) \times \widetilde{Q}(\alpha)$
   ▷ Pour tout $\lambda \in \mathcal{A}$, $\widetilde{\lambda P}(\alpha) = \lambda \widetilde{P}(\alpha)$

5. **Abus d'écriture :** on fait un abus d'écriture en écrivant P au lieu de $\widetilde{P}$; c'est pourquoi, au lieu d'écrire $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on écrit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

   En jouant sur la forme des variables, on écrira plutôt la fonction polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$
6. **Abus de langage :** aux polynômes que nous identifions aux éléments de $\mathcal{A}$ sont associées les fonctions constantes de $\mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$; d'où le nom de polynôme constant donnés aux polynômes $P = \lambda$ avec $\lambda \in \mathcal{A}$
7. Soit $\mathcal{L}$ un sur-anneau de $\mathcal{A}$ (cf page 179).

   Il est possible de prolonger $\widetilde{P}$ de $\mathcal{A}$ à $\mathcal{B}$, car si $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_k \in \mathcal{A}$, nous pouvons poser, pour tout $l \in \mathcal{L}$: $\widetilde{P}(l) = \sum_{k=0}^{n} a_k l^k$ et nous avons, bien sûr, $\widetilde{P}(l) \in \mathcal{L}$

   Par exemple, nous avons $P = X^2 + X + 1$ élément de $\mathbb{R}[X]$, mais aussi élément de $\mathbb{C}[X]$ et donc, nous pouvons calculer $\widetilde{P}(i) = i$ ou $\widetilde{P}(j) = \widetilde{P}(\overline{j}) = 0$

Exercice 2 :

Soient P et Q 2 polynômes de $\mathcal{A}[X]$. Démontrer qu'en général $P(Q) \neq Q(P)$