6.7 Etude de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

Dans cette section, nous ne considérons que des polynômes à coefficients réels ou complexes.
$\mathbb{R}[X]$ est donc l'ensemble des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes.
Nous avons, évidemment $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$

Exemple 8 :

1. Si $P(X) = X^2 - 3X + 1$ alors P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré 2. C'est également un polynôme qui appartient à $\mathbb{C}[X]$.
2. Par contre, le polynôme Q défini par $Q(X) = X^3 - 2jX + iX^2 - 5j$ est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ uniquement.

6.7.1 Théorème de D'Alembert

Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré supérieur ou égal à 1, admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$

Démonstration

Nous admettons ce théorème ; c'est un théorème très important issu de l'analyse

6.7.2 Théorème

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n
Soient $x_1, \dots, x_k$ les k racines de P, de multiplicité *(ou d'ordre)* respective $\alpha_1, \dots, \alpha_k$.
Alors :

1. $P(X) = \lambda (X - x_1)^{\alpha_1} \cdots (X - x_k)^{\alpha_k} = \lambda \prod_{j=1}^{k} (X - x_j)^{\alpha_j}$
   où $\lambda \in \mathbb{C}^*$ est le coefficient dominant de P
2. $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = n$

Démonstration

D'après la proposition 6.4.7 et surtout son corollaire 6.4.8, si $x_1, \dots, x_k$ sont les k racines de P, de multiplicité respective $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, nous avons

$$P(X) = (X - x_1)^{\alpha_1} \cdots (X - x_k)^{\alpha_k} Q(X)$$

où $Q \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme n'addmettant pas pour racines $x_1, x_2, \dots, x_k$.
Si $\deg Q \geqslant 1$, alors, d'après le théorème de D'Alembert 6.7.1, Q admet au moins une racine qui serait aussi racine de P ; ce qui est impossible puisque P n'admet que $x_1, x_2, \dots, x_k$ comme racines.
Donc $\deg Q = 0$ et Q est une constante $\lambda \in \mathbb{C}$.
Nous avons donc $P(X) = \lambda (X - x_1)^{\alpha_1} \cdots (X - x_k)^{\alpha_k}$ et λ apparaît donc comme le coefficient de plus haut degré de P
En utilisant la multiplication, nous avons bien $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = \deg P = n$

Remarque 25 :

On peut donc énoncer :

Dans $\mathbb{C}[X]$ tout polynôme de degré n a exactement n racines

1. On dit que $\mathbb{C}$ est un **corps algébriquement clos**
2. Tous les corps ne sont pas algébriquement clos
   - $\mathbb{Q}$ n'est pas un corps algébriquement clos, puisque, par exemple $P(X) = X^2 - 2$ n'a pas de racine dans $\mathbb{Q}$ *(mais, P en a dans $\mathbb{R}[X]$: $x_1 = \sqrt{2}$ et $x_2 = -\sqrt{2}$)*

- ▷ $\mathbb{R}$ n'est pas non plus algébriquement clos puisque le polynôme $Q(X) = X^2 + 1$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$
- ▷ $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ est un corps, mais n'est pas algébriquement clos.
  Soit $R \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}[X]$ où $R(X) = X^2 + 1$; alors R n'a pas de racine dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

6.7.3 Définition

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n c'est à dire $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$ où, pour tout k, $\alpha_k \in \mathbb{C}$ et $\alpha_n \neq 0$

On appelle polynôme conjugué de P le polynôme $\overline{P}(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \overline{\alpha_k} X^k$

Remarque 26 :

1. La conjugaison ne s'applique qu'au coefficient et non à l'indéterminée
2. On démontre que, pour $P \in \mathbb{C}[X]$, $Q \in \mathbb{C}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\overline{P+Q} = \overline{P} + \overline{Q} \quad ; \quad \overline{\lambda \times P} = \overline{\lambda} \times \overline{P} \quad ; \quad \overline{P \times Q} = \overline{P} \times \overline{Q} \quad ; \quad \overline{\overline{P}} = P$$

3. Attention, $P \times \overline{P}$ n'est pas le module de P.

   Pour le voir, prenons un contre-exemple :
   - ▷ Soit $P(X) = iX^2 - (1+i)X + i$; alors $\overline{P}(X) = -iX^2 - (1-i)X - i$
   - ▷ Donc, $\left(P + \overline{P}\right)(X) = -2X$
   - ▷ Et aussi :

$$\begin{aligned} \left(P \times \overline{P}\right)(X) = & \left(iX^2 - (1+i)X + i\right)\left(-iX^2 - (1-i)X - i\right) \\ = & X^4 + (1-i)X^3 + X^2 + (i-1)X^3 + 2X^2 + (i-1)X + X^2 - (1+i)X + 1 \\ = & X^4 + 4X^2 - 2X + 1 \end{aligned}$$

Exercice 12 :

1. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, alors $P + \overline{P} \in \mathbb{R}[X]$ et $P \times \overline{P} \in \mathbb{R}[X]$
2. Démontrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ $\widetilde{\overline{P}}(\overline{z}) = \widetilde{\overline{P(z)}}$
3. Montrer que, pour $P \in \mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{Q} \in \mathbb{C}[X]$, les 2 propositions suivantes sont équivalentes :

   $\Rightarrow$ P est divisible par Q $\qquad\qquad$ $\Rightarrow$ $\overline{P}$ est divisible par $\overline{Q}$

6.7.4 Théorème

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$

1. α est racine d'ordre n de P si et seulement si $\overline{\alpha}$ est racine d'ordre n de $\overline{P}$
2. Si les coefficients de P sont réels *(c'est à dire si $P \in \mathbb{R}[X]$)*, alors
   α est racine d'ordre n de P si et seulement si $\overline{\alpha}$ est aussi racine d'ordre n de P

Démonstration

1. Si $\alpha \in \mathbb{C}[X]$ est racine d'ordre n de P, alors, il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X) = (X-\alpha)^n Q(X)$.
   Donc :
$$\overline{P}(X) = \left[\overline{(X-\alpha)^n}\right]\overline{Q}(X) = \left[\overline{(X-\alpha)}\right]^n \overline{Q}(X) = (X-\overline{\alpha})^n \overline{Q}(X)$$
   Et donc $\overline{\alpha}$ est racine d'ordre n de $\overline{P}$
2. Bien entendu, si $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $P = \overline{P}$ et donc, d'après le point ci-dessus, $\overline{\alpha}$ est racine de $\overline{P} = P$

Remarque 27 :

Attention le résultat :
α est racine d'ordre n de P si et seulement si $\overline{\alpha}$ est aussi racine d'ordre n de P
est faux dans $\mathbb{C}[X]$.
Les racines d'un **polynôme à coefficients complexes** ne sont pas nécessairement conjuguées.

6.7.5 Corollaire

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$
- Soient $\{r_i\, i = 1 \dots p\}$ les p **racines réelles** d'ordre respectif n_i de P
- Soient $\{\rho_i\, i = 1 \dots p'\}$ les p' **racines complexes** d'ordre respectif k_i de P

Alors,

$$P(X) = \lambda (X - r_1)^{n_1} (X - r_2)^{n_2} \cdots (X - r_p)^{n_p} (X - \rho_1)^{k_1} (X - \overline{\rho_1})^{k_1} (X - \rho_2)^{k_2} (X - \overline{\rho_2})^{k_2} \times \cdots \times (X - \rho_{p'})^{k_1} (X - \overline{\rho_{p'}})^{k_{p'}}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est le coefficient du terme de plus haut degré

Remarque 28 :

Il se peut que même si $P \in \mathbb{R}[X]$, P n'admette aucune racine réelle

Exemples

⇒ $P(X) = X^2 + X + 1$ n'a aucune racine réelle. Ce polynôme admet, par contre 2 racines complexes conjuguées $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et donc $\overline{j} = e^{\frac{-2i\pi}{3}}$ d'où

$$P(X) = (X - j)\left(X - \overline{j}\right)$$

En remarquant que $j^2 = \overline{j}$, nous avons donc $P(X) = (X - j)\left(X - \overline{j}\right) = (X - j)\left(X - j^2\right)$

⇒ Le polynôme $P(X) = X^2 - 3X + 2$ n'a que des racines réelles ; nous pouvons écrire $P(X) = (X - 1)(X - 2)$

⇒ Le polynôme $P(X) = X^3 - X^2 + X - 1$ a lui, 3 racines : 1 racine réelle et 2 racines complexes conjuguées. Nous avons :

$$P(X) = X^3 - X^2 + X - 1 = (X - 1)(X - i)(X + i)$$

Exercice 13 :

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. $P(X) = X^4 + 1$
2. $P(X) = X^6 - 1$
3. $P(X) = X^8 + X^4 + 1$

6.7.6 Théorème

Les éléments irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont :

1. Les polynômes du premier degré
2. Les polynômes du second degré à discriminant négatif

Démonstration

1. Si P est un polynôme du premier degré, alors il est irréductible *(Cette propriété fait partie de la définition de polynômes irréductibles)*
   De même, si P est un polynôme du second degré à discriminant négatif, P n'admet pas de racines dans $\mathbb{R}$ et est donc irréductible.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, irréductible.
   - Si $\deg P = 1$, on s'arrête.

▷ Supposons que $\deg P \geqslant 2$
P, irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, est aussi un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ et P admet sûrement une racine complexe. Appelons α cette racine complexe.
D'après 6.7.4, $\overline{\alpha}$ est aussi racine de P et donc

$$P(X) = (X - \alpha)(X - \overline{\alpha}) Q(X)$$

Où $Q \in \mathbb{R}[X]$
Comme P est irréductible, $\deg Q = 0$

En effet, si $\deg Q \geqslant 1$, alors P n'est plus irréductible

Et donc Q est un polynôme constant et nous avons donc $P(X) = \lambda (X - \alpha)(X - \overline{\alpha})$ où $\lambda \in \mathbb{R}^*$
Nous avons donc $P(X) = \lambda \left(X^2 - 2\,\mathrm{Re}(\alpha)\, X + |\alpha|^2\right)$

6.7.7 Corollaire

Tout polynôme non nul $P \in \mathbb{R}[X]$ s'écrit de manière unique comme produit de polynômes de la forme $(X - r)$ et $(X - \alpha)^2 + \beta^2$ avec $r \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$

Exercice 14 :

Montrer que $P(X) = X(X + a)(X + 2a)(X + 3a) + a^4$ est un carré dans $\mathbb{K}[X]$. En déduire une décomposition de $Q(X) = X(X + 1)(X + 2)(X + 3) - 8$ en produit.