6.8 Dérivée d'un polynôme. Formule de Taylor

6.8.1 Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{K}[X]$ son anneau de polynômes. Alors :

1. $\mathbb{K}[X]$ muni de l'addition des polynômes et de la multiplication par un scalaire est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
2. $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie dénombrable
3. La famille de polynômes $\{e_k; k \in \mathbb{N}\}$ où $e_k(X) = X^k$ est la base canonique de $\mathbb{K}[X]$

Démonstration

1. Nous savons, déjà que $(\mathbb{K}[X], +)$ est un groupe abélien et que l'opération :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ (\lambda, P) & \longmapsto & \lambda P \end{array}\right.$$

vérifie toutes les conditions de $\mathbb{K}$-espace vectoriel

2. En définissant, comme dans l'énoncé, la famille de polynômes $\{e_k; k \in \mathbb{N}\}$ où $e_k(X) = X^k$, on voit que tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e_k$ avec $\lambda_n \neq 0$ et toute famille finie, extraite de de la famille $\{e_k; k \in \mathbb{N}\}$ forme une famille libre.
La famille $\{e_k; k \in \mathbb{N}\}$ est donc une base de $\mathbb{K}[X]$. C'est la base canonique

Remarque 29 :

En fait, la multiplication des polynômes dans $\mathbb{K}[X]$ confère à $\mathbb{K}[X]$, en plus de la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel , la **structure d'algèbre**

6.8.2 Corollaire

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{K}[X]$ son anneau de polynômes.
Nous appellons $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n
Alors $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ de dimension $n+1$ et de base canonique $\{e_0, e_1, \cdots e_k, \cdots, e_n\}$

Démonstration

La démonstration est simple et laissée au lecteur

Exercice 15 :

On note $D : \mathbb{R}_4[X] \longrightarrow \mathbb{R}_4[X]$ l'application définie par

$$D(P)(X) = P(X+1) - P(X)$$

1. Montrez que D est bien une application linéaire .
2. Déterminer la matrice A de D dans la base canonique $\{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4\}$
3. Soit la famille de vecteurs $\mathcal{B} = \{1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2), X(X-1)(X-2)(X-3)\}$.
Montrez que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$
4. Déterminer les matrices de passage entre la base canonique et $\mathcal{B}$
5. Déterminer la matrice A_1 de D dans la base $\mathcal{B}$.
6. Calculez A^n.

6.8.3 Théorème

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{K}[X]$ son anneau de polynômes. $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .
Soit $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ une suite finie de n entiers strictement croissante, c'est à dire telle que $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$.
Nous considérons n polynômes $\{f_{i_1}, f_{i_2}, \ldots, f_{i_n}\}$ tels que si $k = 1, \cdots, n$, alors $\deg f_{i_k} = i_k$.
Alors, la famille $\{f_{i_1}, f_{i_2}, \ldots, f_{i_n}\}$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$

Démonstration

La démonstration n'est pas difficile, mais demande beaucoup de soins.
Soit donc $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Alors $f_{i_k} = \sum_{j=0}^{i_k} a_j^{i_k} X^j$ avec $a_{i_k}^{i_k} \neq 0$ puisque $\deg f_{i_k} = i_k$

Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ n scalaires de $\mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 f_{i_1} + \cdots + \lambda_n f_{i_n} = \mathcal{O}$.

1. L'expression $\lambda_1 f_{i_1} + \cdots + \lambda_n f_{i_n}$ est un polynôme dont le terme de plus haut degré est $\lambda_n a_{i_n}^{i_n}$.
   De l'égalité $\lambda_1 f_{i_1} + \cdots + \lambda_n f_{i_n} = \mathcal{O}$, nous en déduisons que $\lambda_n a_{i_n}^{i_n} = 0$ et donc, comme $a_{i_n}^{i_n} \neq 0$, nous avons $\lambda_n = 0$
2. Ce qui fait que $\lambda_1 f_{i_1} + \cdots + \lambda_n f_{i_n} = \mathcal{O}$ devient $\lambda_1 f_{i_1} + \cdots + \lambda_{n-1} f_{i_{n-1}} = \mathcal{O}$ et le même raisonnement que ci-dessus montre que $\lambda_{n-1} = 0$
3. En itérant donc le raisonnement, nous obtenons $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$

La famille $\{f_{i_1}, f_{i_2}, \ldots, f_{i_n}\}$ est donc une famille libre de $\mathbb{K}[X]$

6.8.4 Corollaire

Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n admet pour base toute famille de polynômes $\{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$ telle que, pour tout $k = 1, \cdots, n$, $\deg f_k = k$

Exemple 9 :

Dans l'exercice précédent, nous avons démontré que la famille de vecteurs

$$\mathcal{B} = \{1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2), X(X-1)(X-2)(X-3)\}$$

est une base de $\mathbb{R}_4[X]$
Le corollaire 6.8.4 permet de généraliser cet exercice en prenant des polynômes de structure semblable :

> Considérons pour $k = 1, \cdots, n$ le polynôme $f_k(X) = \prod_{j=0}^{k-1} (X - j)$ et $f_0(X) = 1$.
>
> Nous avons donc, pour $k = 0, \cdots, n$, $\deg f_k = k$ et la famille $\{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$ est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}_{n+1}[X]$

6.8.5 Définition de la dérivation des polynômes

Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif unitaire et intègre et $\mathcal{A}[X]$ son anneau de polynômes.

Soit $P \in \mathcal{A}[X]$ tel que $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$.

On appelle polynôme dérivé de P le polynôme P' défini par :

$$P'(X) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = a_1 + 2a_2 X + 3a_3 X^2 + \cdots + n a_n X^{n-1}$$

Remarque 30 :

1. Nous avons $\deg P' = \deg P - 1$
2. Supposons que $\mathcal{A} = \mathbb{R}$ et que nous nous intéressions donc au $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.
   Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, nous appelons $\widetilde{P}$ la fonction polynôme associée à P.
   Nous avons $\widetilde{P}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.
   $\widetilde{P}$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $\left(\widetilde{P}\right)'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$, c'est à dire que la fonction associée à P' est la dérivée de la fonction associée à P.
   Autrement dit : $\left(\widetilde{P}\right)' = \widetilde{P'}$

6.8.6 Propriétés de la dérivation des polynômes

Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif unitaire et intègre et $\mathcal{A}[X]$ son anneau de polynômes.
Soient $P \in \mathcal{A}[X]$ et $Q \in \mathcal{A}[X]$. Alors :

1. $(P+Q)' = P' + Q'$
2. $(P \times Q)' = P' \times Q + P \times Q'$
3. Pour tout $\lambda \in \mathcal{A}$, $(\lambda P)' = \lambda P'$
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,$(P^n)' = nP'P^{n-1}$

Démonstration

La démonstration est simple et laissée au lecteur. En fait, elle s'appuie sur l'identité $\left(\widetilde{P}\right)' = \widetilde{P'}$

Remarque 31 :

Si $\mathbb{K}$ est un corps et $\mathbb{K}[X]$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficents dans $\mathbb{K}$.
On peut alors considérer l'application $D : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} D : \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & D(P) = P' \end{array}\right.$$

D'après 6.8.6, D est linéaire. Le noyau de D est formé des polynômes constants.

6.8.7 Définition de dérivées successives

Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif unitaire et intègre et $\mathcal{A}[X]$ son anneau de polynômes.
Soient $P \in \mathcal{A}[X]$
Nous définissons les dérivées successives de P par :

1. $P'' = P^{(2)}\,(P')'$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,$P^{(n)} = \left(P^{(n-1)}\right)'$

Remarque 32 :

Si nous revenons sur $D : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ l'opérateur de dérivation, et en posant :

$$\left\{\begin{array}{l} D^1 = D \\ D^n = D^{n-1} \circ D \end{array}\right.$$

Et nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $P \in \mathcal{A}[X]$ $D^n(P) = P^{(n)}$.
Par composition des application, D^n est aussi une application linéaire

Exemple 10 :

1. En considérant $e_k(X) = X^k$, nous avons $e_k^{(p)}(X) = \mathrm{A}_k^p X^{k-p}$. Si $p > k$, la dérivée p-ième de e_k est nulle.
2. Dans le même ordre d'idée, la dérivée p-ième de $f_k(X) = (X-\rho)^k$ est $f_k^{(p)}(X) = \mathrm{A}_k^p (X-\rho)^{k-p}$. De même, si $p > k$, la dérivée p-ième de f_k est nulle.

Exercice 16 :

Démontrer les affirmations ci-dessus, c'est à dire démontrer que $e_k^{(p)}(X) = \mathrm{A}_k^p X^{k-p}$ et $f_k^{(p)}(X) = \mathrm{A}_k^p (X-\rho)^{k-p}$

Exercice 17 :

Dans cet exercice on travaille dans $\mathbb{R}_2[X]$, $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à deux.
Soit l'application

$$\begin{cases} g : \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ \quad P & \longmapsto & g(P) \text{ où } \widetilde{g(P)}(x) = (1+x)P'(x) + 3\displaystyle\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t - xP(x) \end{cases}$$

1. Montrer que g est une application linéaire.
2. Déterminer la matrice A de g dans la base canonique$\{1, X, X^2\}$.
3. Montrer que g est bijective.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}_2[X]$ l'équation

$$(1+x)P'(x) + 3\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t - xP(x) = x^2 - x + 1$$

(Dans cette dernière question, nous avons confondu $\widetilde{P}$ et P)

6.8.8 Formule de Taylor pour les polynômes

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{K}[X]$ son anneau de polynômes.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n. Alors

1. $P(X) = P(0) + P'(0)X + \dfrac{P''(0)}{2}X^2 + \cdots + \dfrac{P^{(n)}(0)}{n!}X^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}X^k$
2. Plus généralement, pour tout $\rho \in \mathbb{K}$, nous avons :

$$P(X) = P(\rho) + P'(\rho)(X-\rho) + \frac{P''(\rho)}{2}(X-\rho)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(\rho)}{n!}(X-\rho)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\rho)}{k!}(X-\rho)^k$$

Démonstration

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n. Alors $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$.

1. Remarquons que $P(0) = a_0$
   (a) Tout d'abord $P'(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = a_1 + \sum_{k=2}^{n} k a_k X^{k-1}$ et donc $P'(0) = a_1$
   (b) Ensuite, $P''(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1) a_k X^{k-2} = 2a_2 + \sum_{k=3}^{n} k(k-1) a_k X^{k-2}$ et donc $P''(0) = 2a_2$.
   D'où nous tirons $a_2 = \dfrac{P''(0)}{2}$

(c) Et, plus généralement, pour $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant p \leqslant n$

$$P^{(p)}(X) = p!a_p + \sum_{k=p+1}^{n} k a_k \mathrm{A}_k^p X^{k-p}$$

De telle sorte que $P^{(p)}(0) = p!a_p$ et donc $a_p = \dfrac{P^{(p)}(0)}{p!}$

D'où le résultat $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$

2. Soit $\rho \in \mathbb{K}$. Nous allons montrer que $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\rho)}{k!} (X-\rho)^k$

(a) Nous avons $X^k = [(X-\rho)+\rho]^k = \displaystyle\sum_{p=0}^{k} \mathrm{C}_k^p \rho^{k-p} (X-\rho)^p$ et donc

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{p=0}^{k} \mathrm{C}_k^p \rho^{k-p} (X-\rho)^p \right)$$

(b) Ecrivons, maintenant $P(X)$ différemment :

$$\begin{array}{cccccc}
a_0 & & & & & \\
a_1\mathrm{C}_1^0\rho + & a_1\mathrm{C}_1^1(X-\rho) & & & & \\
a_2\mathrm{C}_2^0\rho^2 + & a_2\mathrm{C}_2^1\rho(X-\rho) + & a_2\mathrm{C}_2^2(X-\rho)^2 & & & \\
a_3\mathrm{C}_3^0\rho^3 + & a_3\mathrm{C}_3^1\rho^2(X-\rho) + & a_3\mathrm{C}_3^2\rho(X-\rho)^2 + & a_3\mathrm{C}_3^3(X-\rho)^3 & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
a_n\mathrm{C}_n^0\rho^n + & a_n\mathrm{C}_n^1\rho^{n-1}(X-\rho) + & a_n\mathrm{C}_n^2\rho^{n-2}(X-\rho)^2 + & a_n\mathrm{C}_n^3\rho^{n-3}(X-\rho)^3 + & \cdots & +a_n\mathrm{C}_n^n(X-\rho)^n
\end{array}$$

En réordonnant, nous avons $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{p=k}^{n} a_p \mathrm{C}_p^k \rho^{p-k} \right) (X-\rho)^k$

(c) Nous allons, maintenant, nous intéresser à $\displaystyle\sum_{p=k}^{n} a_p \mathrm{C}_p^k \rho^{p-k}$.

De $\mathrm{C}_p^k = \dfrac{1}{k!}\mathrm{A}_p^k$, nous tirons :

$$\sum_{p=k}^{n} a_p \mathrm{C}_p^k \rho^{p-k} = \frac{1}{k!} \sum_{p=k}^{n} a_p \mathrm{A}_p^k \rho^{p-k} = \frac{1}{k!} P^{(k)}(\rho)$$

D'où nous avons bien la formule de Taylor $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\rho)}{k!} (X-\rho)^k$

Remarque 33 :

$\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et il est possible d'utiliser cette structure pour démontrer la formule de Taylor dans $\mathbb{K}[X]$.

Une seconde démonstration de la formule de Taylor dans $\mathbb{K}[X]$ où $\mathbb{K}$ est un corps

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n et donc $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Soit $\rho \in \mathbb{K}$

Considérons les polynômes $E_k(X) = (X-\rho)^k$ pour $k = 0, \cdots, n$; nous avons donc $\deg E_k = k$.

D'après le corollaire 6.8.4, la famille $\{E_k ; k = 0, \cdots, n\}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Il existe donc des scalaires $\lambda_0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ uniques tels que

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k E_k(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k E_k (X-\rho)^k$$

La dérivée p-ième de $(X-\rho)^k$ est donnée par $E_k^{(p)}(X) = \mathrm{A}_k^p (X-\rho)^{k-p}$ et si $p > k$, la dérivée p-ième de f_k est nulle. Ainsi :

$$\begin{aligned} P^{(p)}(X) = & \sum_{k=p}^{n} \lambda_k E_k^{(p)}(X) = \sum_{k=p}^{n} \lambda_k \mathrm{A}_k^p (X-\rho)^{k-p} \\ = & \lambda_p \mathrm{A}_p^p + \sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k \mathrm{A}_k^p (X-\rho)^{k-p} = \lambda_p p! + (X-\rho) \sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k \mathrm{A}_k^p (X-\rho)^{k-p-1} \end{aligned}$$

D'où nous tirons, bien entendu $P^{(p)}(\rho) = \lambda_p p!$, c'est à dire $\lambda_p = \dfrac{P^{(p)}(\rho)}{p!}$

Ce que nous voulions

Remarque 34 :

Du fait de l'apparition des quotients $\dfrac{P^{(p)}(\rho)}{p!}$, on ne peut parler de formule de Taylor que dans les corps $\mathbb{K}$

6.8.9 Proposition

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{K}[X]$ son anneau de polynômes.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors

1. Si $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine d'ordre n de P alors α est racine d'ordre $n-1$ de P'
2. Si $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(n-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(n)}(\alpha) \neq 0$ alors α est racine d'ordre n de P

Démonstration

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré N et $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine d'ordre $n \leqslant N$ de P.
   Alors, nous avons $P(X) = (X-\alpha)^n R(X)$ où $R(\alpha) \neq 0$
   Et, en calculant la dérivée de P, nous avons :
   $$P'(X) = n(X-\alpha)^{n-1} R(X) + (X-\alpha)^n R'(X) = (X-\alpha)^{n-1} (nR(X) + (X-\alpha) R'(X))$$
   En posant $Q(X) = (nR(X) + (X-\alpha) R'(X))$, nous avons $Q(\alpha) = nR(\alpha) \neq 0$ et donc α est bien racine d'ordre $n-1$ de P'
2. Supposons $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(n-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(n)}(\alpha) \neq 0$.
   Ecrivons la formule de Taylor :
   $$P(X) = \sum_{k=0}^{N} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X-\alpha)^k = \sum_{k=n}^{N} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X-\alpha)^k = (X-\alpha)^n \sum_{k=n}^{N} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X-\alpha)^{k-n}$$
   Ce qui montre que α est une racine d'ordre n de P

Remarque 35 :

En fait, les 2 propositions de 6.8.9 **sont équivalentes.**

Il ne reste donc plus qu'à démontrer que si $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine d'ordre n de P alors $P(\alpha) = P^{'}(\alpha) = \cdots = P^{(n-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(n)}(\alpha) \neq 0$.

Si $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine d'ordre n de P alors α est racine d'ordre $n-1$ de P' et est racine d'ordre $n-2$ de P''.

En continuant, α est racine d'ordre $n-k$ de $P^{(k)}$ et donc d'ordre 1 de $P^{(n-1)}$, c'est à dire que $P^{(n)}(\alpha) \neq 0$.

Nous avons donc :

$$P(\alpha) = P^{'}(\alpha) = \cdots = P^{(n-1)}(\alpha) = 0 \text{ et } P^{(n)}(\alpha) \neq 0$$

Exercice 18 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n(X) = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$. Montrer que P_n est divisible par $(X-1)^3$ *Cet exercice ne fait pas l'objet d'une correction*

Exercice 19 :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P_n(X) = (X+1)^{2n+1} - X^{2n+1} - 1$

1. Démontrer que le polynôme $X^2 + X$ divise le polynôme P_n
2. Former le quotient de la division de P_n par $X^2 + X$
3. -1 est-il racine double de P_n ?

Exercice 20 :

Trouver $a \in \mathbb{K}$ et $b \in \mathbb{K}$ pour que $(X-1)^2$ divise $aX^{n+1} + bX^n + 1$